專題名稱: Banach 不動點定理的應用

作者:林廷穎、張彥崴、章宏瑞

指導教授:黃明傑

MATHEMATICS

# 目錄

# 摘要

我們證明 Banach 不動點定理(contraction mapping theorem)，並比較有無壓縮映射、完備空間或緊緻空間等不同條件，接著運用此定理，在歐氏空間、連續函數空間及矩陣空間之中，探討方程式需要滿足怎麼樣的條件，使得該方程式一定存在唯一的解。


# 壹、前言

我們專題課在教授的帶領下，學習到新的知識包含連續函數空間，實矩陣空間，歐式空間，而我們在以前做競賽題時，經常會要求我們計算一個函數經過不斷迭代後的值，會落在哪裡，而通常這些函數都僅限一維歐式空間中。在教授介紹下我們得知了巴拿赫不動點定理，我們想要研究此定理可不可以幫我們解決以往的遇到的問題，在繼續研究後，我們想繼續探討這個定理在其他空間中的應用。

# 貳、研究目的

延伸 Banach 不動點定理的相關結果並探討在不同空間中不動點定理的應用，找出一些例子來操縱 Banach 不動點定理。

# 參、文獻探討

Principles of Mathematical Analysis (W. Rudin., 1986.) 書中提及 the contraction principle (p.220~p.221)，事實上，關於不動點定理的結果已經頗為豐富，我們先了解相關定理，梳理其中脈絡。

一、定義

**定義 1.** 度量空間(Metric space)

一個集合 $X$ 被稱為度量空間，如果對於任何兩點(元素) $p,q\in X$，有一個對應的實數 $d(p,q)$，也就是 $p$ 和 $q$ 的距離函數(度量)，符合以下三項條件：

1. 若 $p\neq q$，則 $d(p,q)>0$; $d(p,p)=0$;
2. $d(p,q)=d(q,p)$;
3. $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)\quad \forall\ r\in X$。

**定義 2.** 緊緻空間（Compact space）

如果對於一個度量空間的所有開覆蓋，都可以找到有限的子覆蓋，則稱此空間為緊緻。

**定義 3.** 函數的極限

$(X,d_X),(Y,d_Y)$是兩個度量空間， $f\colon\ E \subset X \to Y$ 是兩空間的一個函數。設 $p$ 是$E$ 的一個極限點，而 $q \in Y$，如果對所有的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，滿足以下敘述：

當 $0 < d_X(x,p) < \delta, x \in E$ 時，有 $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$ 。則稱當 $m \to p$ 時，

$f(m) \to q$，並記為$\lim_{m\to p} f(m) = q$。

**定義 4.** 柯西數列（Cauchy sequence）

$(M,d)$ 是一個度量空間，稱 $\langle P_n \rangle$ 是一個柯西數列，如果對所有 $\varepsilon > 0$ 存在一個正整數 $N$ 使得 $\forall m,n \geq N$ ，都有 $d(P_m,P_n) < \varepsilon$ 。

一個數列中的元素越來越靠近似乎說明這個數列在這個度量空間存在一個極限，然而事實上在某些空間下(例如有理數 $\mathbb{Q}$ )，這個結論是不對的。

**定義 5.** 完備度量空間（Complete metric space）

一個度量空間中的所有柯西數列都收斂於此空間內。

**定理 6.** 比值審斂法（Ratio test）

在級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之中，如果 $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ，則級數收斂；如果 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ，對所有 $n \geq N_0$ ，則級數發散。

二、不動點定理

**定理 7.** Banach 不動點定理(Contraction mapping theorem)

$(M,d)$ 是一個完備度量空間，若 $\Phi\colon M \longrightarrow M$是一個壓縮映射，即存在常數 $k$， $0 \leq k < 1$，使得對所有 $x,y \in M$，皆有 $d\big(\Phi(x),\Phi(y)\big) \leq kd(x,y)$ ，

則存在恰好一個$\Phi$的不動點 $x^*$ ，意即 $\Phi(x^*) = x^*,\ x^* \in M$ 。

事實上，取任意 $x_0 \in M$ ，令 $x_{n+1} = \Phi(x_n)\ \forall n \in N$ ，則$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 。

**證明.**

1. 先證唯一性。設 $y^*$為異於 $x^*$的不動點，意即 $\Phi(y^*) = y^* \neq x^*$，

則$d(x^*, y^*) = d\big(\Phi(x^*), \Phi(y^*)\big) \leq kd(x^*, y^*)$，

但 $0 \leq k < 1 \Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$，矛盾。

2. 再證存在性。考慮一數列 $\langle x_n \rangle$，令 $x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$，由數學歸納法可知

$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(\Phi(x_n), \Phi(x_{n-1})\big) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^{n-1} d(x_2, x_1)$；

考慮 $p \in \mathbb{N}$ ，根據三角不等式(定義 1.)可知

$$d\big(x_{n+p}, x_n\big) \leq d\big(x_{n+p}, x_{n+p-1}\big) + d\big(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}\big) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq (k^{n+p-2} + k^{n+p-3} + \ldots + k^{n-1})\ d(x_2, x_1)$$

當上式的 $n \to \infty$ 時，$k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \ldots + k^n \to 0$，

因此 $\langle x_n \rangle$ 在空間 $M$ 中為柯西數列，又由於 $M$ 為完備空間，故此柯西數列會收斂，即存在一數 $x^* \in M$ ，使得 $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$。

因為 $\Phi$ 是壓縮映射，所以明顯地 $\Phi$ 為一連續函數。當 $x_n \to x^*$，$x_{n+1} = \Phi(x_n) \to \Phi(x^*)$，得 $\Phi(x^*) = x^*$，故 $\Phi$ 存在不動點 $x^*$。

有另外的不動點結果，如定理 8：

**定理 8.** 布勞威爾不動點定理（Brouwer fixed point theorem）

對於任意連續函數 $f: D \to D = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$， $f$ 存在不動點。

特別地當連續函數 $f: [a,b] \to [a,b]$，則存在 $p \in [a,b]$，滿足 $f(p) = p$ ，這裡可以考慮令 $g(x) = f(x) - x$，則 $g$ 為連續函數，易知 $g(a) \geq 0$ 且 $g(b) \leq 0$ ，根據中間值定理必可找到 $a \leq p \leq b$ ，使得 $g(p) = 0$ ， $p$ 即為所求。

**引理 9.** $(M,d)$是一個完備度量空間，有連續函數 $\Phi: M \to M$。假設存在正整數 $N$ 使得 $\Phi^N$ 是一個壓縮映射，則 $\Phi$ 恰有一個不動點。

**證明.**

由定理 7，令 $x^*$為在 $\Phi^N$函數下唯一的不動點，即 $\Phi^N(x^*) = x^*$，則

$\Phi^N\big(\Phi(x^*)\big) = \Phi\big(\Phi^N(x^*)\big) = \Phi(x^*) \Rightarrow \Phi(x^*)$ 也是 $\Phi^N$函數的不動點。

於是 $\Phi(x^*) = x^* \Longrightarrow$ $x^*$為 $\Phi$ 函數中的不動點，然而對於所有在 $\Phi$ 上的不動點也是在 $\Phi^N$ 上的不動點，所以由 $\Phi^N$ 有唯一的不動點 $x^*$ ，得證 $\Phi$ 也只恰有一個不動點。

定理 7 中若未完全滿足壓縮映射，則命題錯誤，以下為此命題**反例**.

**錯誤命題 10.**

$(M,d)$ 是一個完備度量空間， $\Phi$: $M \longrightarrow M$ 是一個映射滿足對於所有 $x,y \in M$ ,$x \neq y$，皆有 $d\big(\Phi(x),\Phi(y)\big) < d(x,y)$，則存在恰好一個 $\Phi$ 的不動點 $x^*$。

我們取 $\Phi$: $R \to R$，$\Phi(x) = \ln(1+e^x)$，並給定兩實數 $x,y$，$x > y$，

$|\Phi(x)-\Phi(y)| = \ln(1+e^x)-\ln(1+e^y) = \ln\frac{1+e^x}{1+e^y} < |x-y|$，但 $\Phi(x)$ 不存在不動點（若$\Phi(x)$存在不動點 $y$，則$e^y = 1 + e^y$，矛盾）。

不過事實上，有：

**定理 11.**

$(M,d)$ 是一個緊緻度量空間，$\Phi$: $M \longrightarrow M$是一個映射滿足對於所有$x,y \in M$，$x \neq y$，皆有 $d\big(\Phi(x),\Phi(y)\big) < d(x,y)$，則存在恰好一個不動點 $x^* \in M$。

**證明.**

1. 先證唯一性。設 $y^*$為另一個不動點（$x^* \neq y^*$），則$d(x^*,y^*) = d(\Phi(x^*),\Phi(y^*)) < d(x^*,y^*)$，如果存在不動點 $x^*$ ，則必為唯一的不動點。
2. 再證存在性。函數 $f$： $M \to \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = d(\Phi(x),x)$，

考慮兩值域內的數之距離

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |d(\Phi(x),x) - d(\Phi(y),y)| \\ &= |d(\Phi(x),x) - d(\Phi(x),y) + d(\Phi(x),y) - d(\Phi(y),y)| \\ &\leq |d(x,y)| + \big|d\big(\Phi(y),\Phi(x)\big)\big| \leq 2\ d(x,y)\end{aligned}$$

所以 $|f(x) - f(y)| \leq 2\ d(x,y) \Longrightarrow f$ 為連續函數，

又因為 $M$ 為一緊緻空間，所以 $f$ 具有最小值，設其發生在 $x^*$，

如果 $\Phi(x^*) \neq x^*$，有 $d\big(x^*,\Phi(x^*)\big) \leq d\Big(\Phi(x^*),\Phi\big(\Phi(x^*)\big)\Big) < d\big(x^*,\Phi(x^*)\big)$ ，得到矛盾，因此 $\Phi(x^*) = x^*$，即此函數恰存在一個不動點。

# 肆、研究方法

接下來我們應用 Banach 不動點定理在不同空間處理一些問題，有歐式空間、連續函數空間以及矩陣空間，值得一提的是，我們在連續函數空間證明了兩個積分方程，Fredholm 和 Volterra 二者皆為已被認知的數學事實，其後的根據正來自於 contracion mapping theorem。

## 一、歐氏空間

在 $\mathbb{R}^n$上，度量$d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$，熟知歐式空間是完備的。

**範例 12.**

設 $g$: $B=\{x\in\mathbb{R}^3\ /\ |x|\le r\}\to\mathbb{R}^3$是一個壓縮映射，即存在實數 $k$ 滿足

$|g(x)-g(y)|\le k\ |x-y|, 0\le k<1\ \forall x,y\in B$，

假設 $g(-x)=-g(x)\quad\forall x\in\partial B$ ($B$的邊界)，證明 $g$ 有唯一的不動點。

**證明.**

$g$： $B\to\mathbb{R}^3$是一個壓縮映射，再結合 $g(-x)=-g(x)\ \forall x\in\partial B$，

可推知$g(B)\subseteq B$，所以根據 Banach 不動點定理可知存在唯一不動點。

**範例 13.**

證明以下方程組有唯一的解 $\begin{cases} x_1=\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{4}x_2+\frac{2}{15}x_3+3 \\ x_2=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{2}x_3-1 \\ x_3=-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3+2 \end{cases}$

**證明.**

(1) 線性代數解法

我們可以將方程組寫成以下矩陣型態$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$

並令$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$

我們可以將所求方程組改寫為 $x=Ax+C$ ，或是$(I-\mathrm{A})x=C$，

其中$I-A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{4} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$，經過計算可以知道 $det(I-A) \neq 0$，

即$(I-A)^{-1}$ 存在，所以此方程組的唯一解為$x = (I-A)^{-1}C$。

(2) contraction mapping theorem 解法

定義函數 $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$\Phi(x) = Ax + C$，對於任意 $x, y \in \mathbb{R}^3$，我們可以推出

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |A(x-y)| \leq \left( \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x-y|$$

其中 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2 = \frac{39}{50} < 1$，所以 $\Phi$ 為壓縮映射，又 $\mathbb{R}^3$ 為完備度量空間，根據 Contraction mapping theorem， $\Phi$ 存在唯一的不動點，其為方程組的解。

**範例 14.** 設 $0 < c < 1$ ，則 $\tan^{-1}(cx) = x$ 恰有一解。

**證明.**

函數 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = \tan^{-1}(cx)$ ，利用均值定理存在 $z$ 介於 $x, y$ 之間

滿足 $|f(x) - f(y)| = |\tan^{-1}(cx) - \tan^{-1}(cy)| = \frac{c}{1+(cz)^2}|x-y| \leq c|x-y|$ ，

根據 Banach 不動點定理即得證。

**二、連續函數空間**

**定義 15.** 連續函數的範數(the norm of continuous function)

如果 $f(x) \in C[a,b]$，則 $f(x)$ 的範數 $\| f \|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$。

度量空間是 $C[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ 為連續函數} \}$ ，若兩函數 $f, g \in C[a,b]$，則 $d(f,g) = \| f - g \|_\infty$ 是一個在 $C[a,b]$ 空間的度量，並且 $(C[a,b], d)$ 為一完備空間。

**定理 16.** 弗勒亨積分方程 (Fredholm integral equation)

考慮積分式

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \qquad \forall x,y \in [a,b]$$

其中 $k$ 和 $\varphi$ 為給定的連續函數，$\lambda$ 為給定的實數，假設$|k(x,y)| \le M$ $\forall x,y \in [a,b]$，若$|\lambda|\ M\ |b-a| < 1$，則此積分式有唯一解$f$。

**證明.**

令 $\Phi : C[a,b] \to C[a,b]$定義為$[\Phi(f)](x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$，

$$\begin{aligned} d\big(\Phi(f_1),\Phi(f_2)\big) &= \sup_{x\in[a,b]} \left|\lambda \int_a^b k(x,y)[f_1(y)-f_2(y)]dy\right| \\ &\le |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} \left[\int_a^b |k(x,y)||f_1(y) - f_2(y)|dy\right] \\ &\le |\lambda| M \sup_{x\in[a,b]} \left[\int_a^b |f_1(y) - f_2(y)|dy\right] \\ &\le |\lambda| M\ d(f_1,f_2)|b-a| \end{aligned}$$

又$|\lambda| M\ |b-a| < 1$，因此 Fredholm 積分方程恰存在唯一解 $f$。

**定理 17.** 沃氏積分方程（Volterra integral equation)

考慮一積分式

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \qquad \forall x,y \in [a,b]$$

其中 $k$ 和 $\varphi$ 為給定的連續函數， $\lambda$ 為給定的常數，對於任一個 $\lambda \in \mathbb{R}$，則此積分式有唯一解 $f$。

**證明.**

定義 $\Phi$： $C[a,b] \to C[a,b]$ 為 $[\Phi(f)](x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$，在緊緻空間上連續函數有最大值，假設$|k(x,y)| \le M$ $\forall x,y \in [a,b]$ ，則

$$d\big(\Phi(f1),\Phi(f2)\big) = \sup_{x\in[a,b]} \left|\lambda \int_a^x k(x,y)[f_1(y) - f_2(y)]dy\right|$$

$$\leq |\lambda| \sup_{x \in [a,b]} \left[ \int_a^x |k(x,y)||f_1(y) - f_2(y)| dy \right]$$

$$\leq |\lambda| M \sup_{x \in [a,b]} \left[ \int_a^x |f_1(y) - f_2(y)| dy \right]$$

$$\leq |\lambda| M \sup_{x \in [a,b]} [d(f_1, f_2)|x - a|] = |\lambda| M d(f_1, f_2) |b - a|$$

由數學歸納法有

$$d\big(\Phi^n(f1), \Phi^n(f2)\big) \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(f1, f2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

現在觀察右式的係數 $\langle a_n \rangle = \langle |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \rangle$，因為

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |\lambda| M \left(\frac{b-a}{n+1}\right) < 1$$

由 Ratio test 可知此數列收斂到 0，故存在足夠大的 $N$ 使得$|\lambda|^N M^N \frac{(b-a)^N}{N!} < 1$，因此

$\Phi^N$ 是壓縮映射，則 $\Phi$ 恰有一個不動點，即 Volterra 有唯一解 $f$。

**範例 18.**

我們可以利用定理 7 與定理 17 計算不動點。欲尋找 $f'(x) = f(x)$，且$f(0) = 1$ 的函數，

等價於解出 $f(x) = 1 + \int_0^x f(y) dy$，

定義 $\Phi$: $C \to C$ 為 $[\Phi(g)](x) = 1 + \int_0^x g(y) dy$，從函數$g(y) = 0$遞推。$\big(\Phi(0)\big)(x) = 1$；

$\big(\Phi^2(0)\big)(x) = \big(\Phi(1)\big)(x) = 1 + x$；

$\big(\Phi^3(0)\big)(x) = \big(\Phi(1+y)\big)(x) = 1 + \int_0^x (1+y) dy = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$；

$$\big(\Phi^4(0)\big)(x) = \left(\Phi\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2\right)\right)(x)$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2\right) dy = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\ ;$$

遞推 $n$ 次後 $\big(\Phi^n(0)\big)(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$ 趨近至 $e^x$。

**定理 19.**

令實數 $\lambda$ 使得 $|\lambda| \leq 1$，給定一個連續函數 $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$，則存在唯一的連續函數

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$，滿足 $f(x) = \lambda \sin f(x) + \varphi(x)$。

**證明.**

(1) $|\lambda| < 1$

定義 $\Phi$: $C[a,b] \to C[a,b]$ 為 $[\Phi(f)](x) = \lambda \sin f(x) + \varphi(x)$，

利用均值定理可得 $|\lambda||\sin f(x) - \sin g(x)| \leq |\lambda||f(x) - g(x))|$，

所以 $d\big(\Phi(f), \Phi(g)\big) = \|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \sup|(\Phi f)(x) - (\Phi g)(x)|$

$$\leq |\lambda| \sup|f(x) - g(x)| = |\lambda| \; d(f,g)$$

所以 $\Phi$ 存在唯一的不動點，也就是存在 $f \in C[a,b]$，滿足 $\Phi(f) = f$，

特別當 $\varphi(x) = 0$ 時，$f(x) = \lambda \sin f(x)$，易看出解為 $f(x) = 0$。

(2) $|\lambda| = 1$

設 $T$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = x - \sin x$，容易證明連續函數 $T(x)$ 單射且滿射，因此原問題有唯一的解 $f(x) = T^{-1}(\varphi(x))$，其中 $T^{-1}(x)$ 是 $T(x)$ 的反函數。

類似地對於 $f(x) = \lambda \cos f(x) + \varphi(x)$， $f(x) = \lambda \arctan f(x) + \varphi(x)$，都有類似定理 19 的結論。

## 三、實矩陣空間

**定義 20.** 範數(norm)

設 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中$a_{ij} \in \mathbb{R}$，則矩陣 A 的範數 $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n, \ |x| = 1} |Ax|$

度量空間 $M_n = \{所有n \times n的矩陣\}$，對所有 $A, B \in M_n$ 度量定義為$d(A,B) = \|A - B\|$，事實上 $M_n \approx \mathbb{R}^{n^2}$，所以有$(M_n, d)$是完備度量空間。

**性質 21.**

設$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$，$A^t = (a_{ji})_{n\times n}$，則

(1) $|Ax| \leq \|A\||x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(3) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

(4) $\|A\| \leq \left(\sum_{i=1,j=1}^{n} {a_{ij}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(5) $\|A\| = \|A^t\|$ ，即一個矩陣轉置後，其範數不變。

**定理 22.**

已知給定的 $A,B,C \in M_n$，若存在正整數 $k$ 使得 $\|A^k\|\|B^k\| < 1$，則存在唯一的 $X \in M_n$，使得 $X = AXB + C$。

**證明.**

定義 $T: M_n \to M_n$ 為 $T(X) = AXB + C$，則

$d\left(T^k(X), T^k(Y)\right) \leq \|A^k\|\|B^k\| \ d(X,Y)$，因此由 Banach 不動點定理得證。

注意到存在 $\|A^k\| < 1$，但 $\|A\| > 1$。

例如取實數 $c \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$，令 $A = c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\|A\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} c > 1$，但是

$A^2 = c^2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\|A^2\| = \left(1+\sqrt{2}\right)c^2 < 1$。

由性質 21.(5)，仿定理 22 的證明可以得出定理 23。

**定理 23.**

已知給定的$A,B,C \in M_n$，若存在正整數$k$使得$\|A^k\|\|B^k\| < 1$，則存在唯一的$X \in M_n$，使得 $X = AX^tB + C$。

## 伍、結果與結論

1. 證明 Banach 不動點定理與相關結果。
2. 在不同空間中，運用 Banach 不動點定理證明方程式有唯一解。

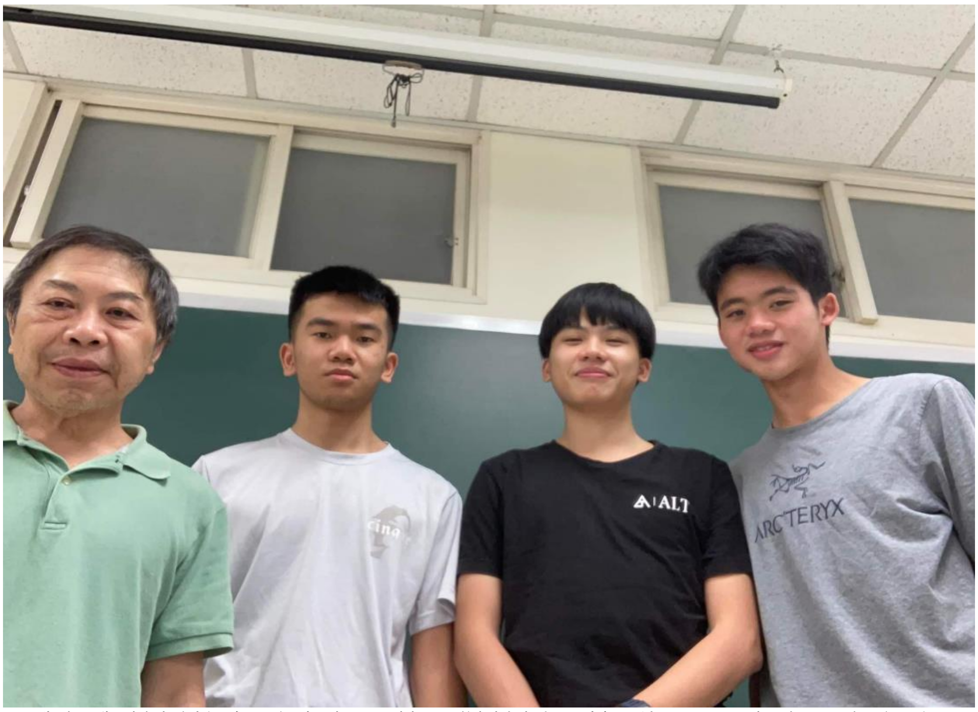
## 陸、參考文獻

[1] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw - Hill Book C., 1986.

# 柒、 研究心得

**林廷穎：**

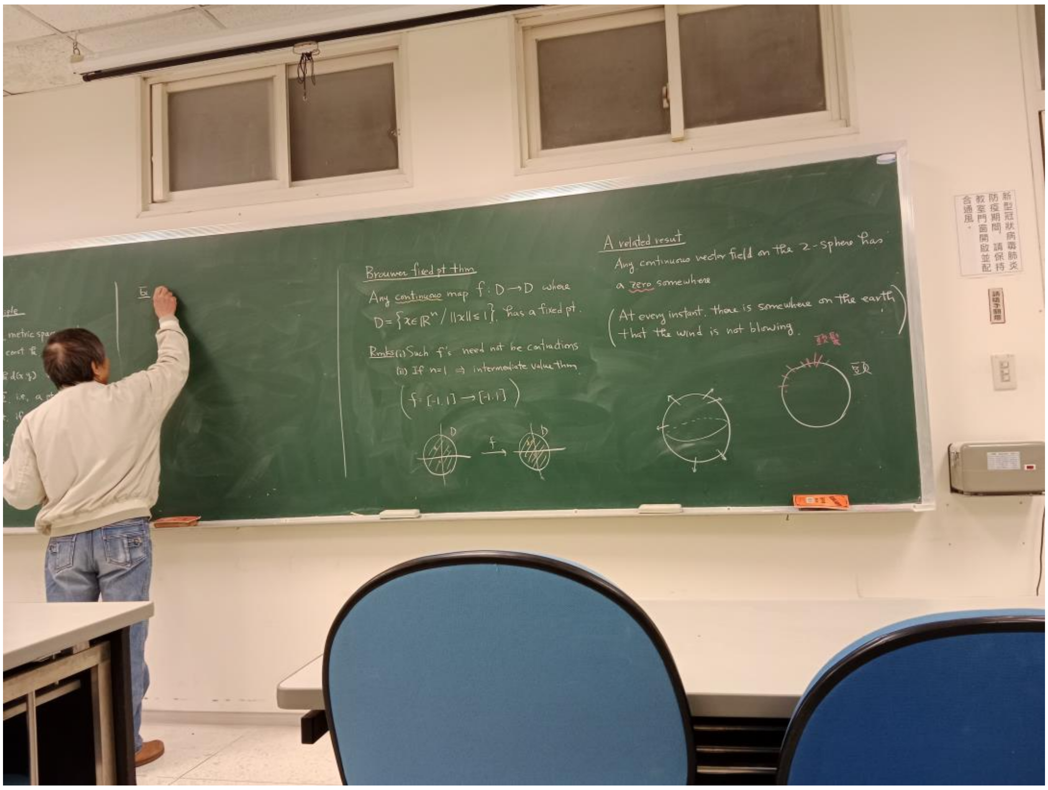
在理解高二數學專題的方向時，有許多的不確定，思索比較下，比起高中階段的專題，大學數學的豐厚知識更值得我們去學習並深化自己的內涵，又高等微積分、代數等領域五花八門，實在不知從何了解，待第一次和教授見面後，我就確立了學高微的決定，現在看來更是珍惜這一段經歷。



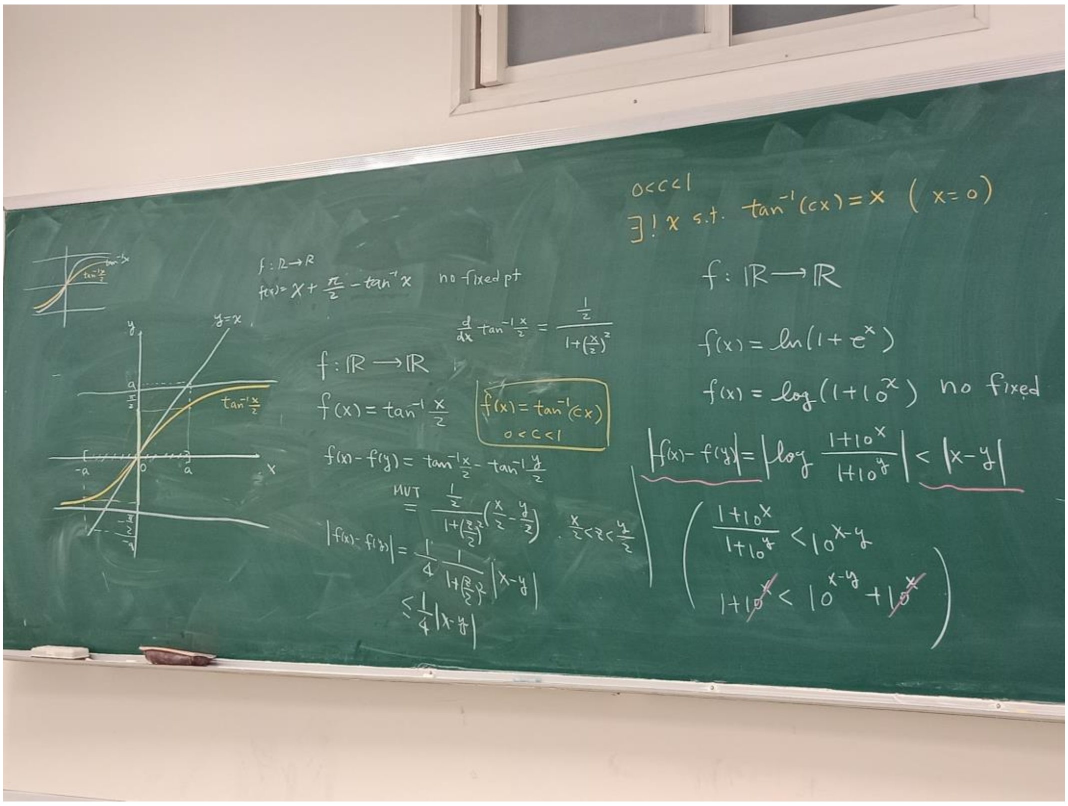

我們與教授的合影(左起：黃明傑教授、林廷穎、張彥崴、章宏瑞)

每周的上課，教授條理有序地呈現一步步嚴謹的建構過程，在我們沒消化成功的地方耐心的解釋，我沒有一處細節是含糊看待的。我自國中以來便秉著對於數學正確性的堅持，不過在 Rudin 數學分析原理這本書中，我很驚訝有許多細緻的邏輯竟是我從未見過的，其中又包含著精湛的估計與出奇不意的構造，圖像化的直覺，連續中的離散記數、離散數列中的連續函數。從一開始的拓樸方法、數列、連續函數、微分到之後的不動點定理，一連貫的推演向我展示真實偉大的樸實無華，真實智慧的虛懷若谷，和真實力量的溫和蘊藉。

較可惜的是我沒有確實做完所有習題，現在要回頭補題目也是抽不出心力，在預習、上課、複習，一來一往之間讓我體會面對更困難課業所需要的態度，習題卻也是不可或缺的一環，高三的個別研究或是往後的學習，我會更看重完整的付出，讓自己的實力得以進一步提升。




教授認真教課的背影




上完課後的板書

**同伴們的心得：**

**張彥崴**：

在一開始驅使自己做數學專題的原因其實是想說可以學習到數學領域不同的知識，而且不同物理、化學組，數學組不需要做實驗，以研究為主。起初教授說要讀 Rudin、學習高等微積分的時候是讓人非常擔心又期待，擔心說吸收不佳導致後續研究也無法順利完成，而且數學組要想出原創性高且有用的內容相對困難，這也是讓我很擔心的點。但這些擔憂在後來也慢慢消失，首先是教授每次上課講解的方式都非常得淺顯易懂，再者就是雖然 Rudin 這本書雖然有很多抽象的數學概念，像是 Metric Space，但其實大多數內容都是從基礎開始衍生，所以讀起來並沒有想像中那麼困難，而且教授都有事前為我們特別準備要講課的內容，讓我們獲益良多。

再者，每次課前組員間都有互相幫忙與彼此學習，有非常優良的學習環境，不會對數學感到疲倦。在之後決定專題的主題後，我們一開始都無從下手，因為相較大學生，我們對於大學數學的知識基礎稍嫌薄弱，還好有教授一直不斷給予我們建議，也提供我們一些問題回去想，內容才終於漸趨完整，我們最終才可以有這樣一個完整的報告。

**章宏瑞**：

數學是我的最愛，也是我花最多時間鑽研的科目，當同學們為該選甚麼科目當作專題，我二話不說直接選擇數學，一年下來也累積了許多數學的知識，不再只侷限在高中數學的解題上。感謝專題指導老師黃明傑教授淺顯易懂的教學，不厭其煩的指導我們如何寫出好的成果報告，同時也很感謝另外兩位組員，彼此幫忙，相互砥礪，讓大學數學系的課程變得比較和藹可親。經過一年高等微積分的訓練，讓我體會數學的博大精深，更為數學家的思維感到驚嘆。藉由這次專題研究，除了對數學的視野變得更開闊，也希望高三、甚至大學可以繼續鑽研，把這些精采的理論讀得更透徹。