1.1 主题简介

高等数学—微积分(2)

山东大学《高等数学微积分》曾为国家精品课程，由国家级教学团队精心打造的 MOOC，通过主讲教师凝练课程内容精华，用生动的语言，典型的例题及 MATLAB 的实例演示，让你在愉悦的环境中强化记忆，让我们一起走进微积分的殿堂，相信如果你认真地走过这一殿堂，你一定会有无穷无尽的收获！

课程概述

在当今科技飞速发展，特别是计算机科学及其应用日新月异的时代，数学科学已渗透到各个科技领域，学习任何一门科学都要用到许多数学知识，而其中最基本的则是微积分。高等数学微积分是非数学各专业的一门必修课，学习任何一门近代数学或工程技术都必须先学微积分。

《高等数学微积分》MOOC 课程分为《高等数学微积分（1）》和《高等数学微积分（2）》共 11 章。

《高等数学微积分（1）》由 6 章构成，主要内容包括：绪论——微积分的产生及基本思想、函数、极限与连续、导数、中值定理与导数应用、一元函数积分学（不定积分、定积分、定积分应用）及常微分方程。

#**函极连导中**一常。。。。函数里面有一个极限在连续导数中**一常**

《高等数学微积分（2）》由 5 章构成，主要内容包括：无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分

#**无向空多重** 曲 线，面。

本课程每一章均配有一次习题课，讲解典型例题及综合性习题，为更好地适应当前应用型创新人才培养的要求，在每一章的最后一讲均为解决本章内容的数学软件 MATLAB 演示 ，培养学生在实际问题中“用”数学的能力。

通过本课程的学习不但可以使学生了解微积分的起源、领会基本概念、基本思想和基本运算方法，更重要的是培养学生抽象思维、逻辑推理能力，尤其是用数学的意识和能力。通过本课程的学习也可以为后续课程打下坚实的基础。

证书要求

本课程的学习环节包含：观看讲课视频及其它课程资源、完成单元测验题、参加期末考试，课程学习成绩由两部分构成：

（1）单元测验：在每一章学习结束后，将有一次单元测验，题型为选择题，所有单元测验分数占课程成绩的 25%。

（2）课程考试：课程结束后，学生可以参加课程的最后考试，成绩占 75%。

完成课程学习并考核合格(>=60 分)的可获得合格证书，成绩优秀(>80 分)的可获得优秀证书。

预备知识

高等数学—微积分（1）

授课大纲

第 6 章：无穷级数

第 6 章 无 穷级数

第一讲 常 数项级数的概念

1. 级数的起源
2. 问题的引入
3. 常数项级数的概念

第二讲 级数的基本性质

1. 收敛级数的性质
2. 级数收敛必要条件

第三讲 正项级数的审敛法 I

1. 正项级数的定义
2. 比较审敛法

第四讲 正项级数及其审敛法 II

1. 根植判定法
2. 比值判定法

第五讲 交错级数和任意项级数审敛法

1.交错级数

正负相间的

正、负相间的级数,称为交错级数,

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ **或** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ **(其中**$u_n>0, n=1,2\cdots$**)**

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

或 $$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots+(-1)^{n}u_n+\cdots$$

定理(交错级数审敛法,莱布尼茨准则)

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0, n=1,2,\cdots)$ **满足条件:**

(1) $u_{n+1}\le u_n$; (2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

则交错级数收敛.且其和 $S\le u_1$ **,其余项** r_n **的绝对值**$|r_n|\le u_{n+1}$

注意:利用交错级数审敛法判定 $u_n\ge u_{n+1}$ **的方法:**

(1) **考察** $\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge 1$

(2)**考察** $u_n-u_{n+1}\ge 0$ **是否成立.**

(3)**令**$f(n)=u_n$ $(f(x)=u(x))$ **对** $f(x)$ **求导,由**$f'(x)$**在指定区间上的正负判断** $f(x)$ **的增减性.**

例 判定级数敛散性 $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$ **黑板**

一看：一项正，一项负

商的求导公式，分母是xx的平方。

单减

xn大于xn+1

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收 敛 .

证明：级数$\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是交错级数，对任意自然数 n有

$$(1)\ u_n=\frac{1}{n}\ge\frac{1}{n+1}=u_{n+1}>0$$

语言的描述的方式。

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

根据莱布尼茨审敛法知 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛

定义 **对于任意项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ **，如果级数** $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ **收敛，则称级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛;** **如果级数** $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$**发散,但**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛，则称级数**$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛.**

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ **是条件收敛**

$\frac{1}{(n+1)}<\frac{1}{n}$ **且** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ $\therefore$ **收敛**

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **发散**

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **绝对收敛**

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

绝对收敛的级数一定收敛

因为有条件收敛所以逆命题.

(其逆定理不成立)

说明:对于一般的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果用正项级数的审敛法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则此级数收敛. 这就使得一大类任意项级数收敛性判断问题 转化为正项级数的收敛性判别问题.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不能判定是否发散.

如 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛

但是如果用比值审敛法或根值法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散。

大于发散的调和级数.

例 判断级数(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(1+n)}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解(1) $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin na}{n^2}\right|$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

(2) $\frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{1+n} \quad (\ln(1+n) < 1+n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散. 但不能确定原交错级数发散. 实际上

$$u_n = \frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{\ln(1+1+n)} = u_{n+1} \quad 且 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0$$

$\therefore$ 原级数收敛 是条件收敛

加了绝对时候发散这个条件.

(3) $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1$

通项不趋于零，所以级数发散.

3.绝对收敛级数的性质

定理 绝对收敛级数的各项任意交换顺序后所得的级数也绝对收敛,且其和不变.

定理 (绝对收敛级数的乘法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛,它们的和分别为 S 和 σ，则

它们的柯西乘积 $u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$

也绝对收敛,且其和为 $S\cdot\sigma$

思考题：

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n^3+3n}}$

是否收敛, 如果收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

加绝对值看收不收敛

第六讲 幂级数及其收敛域

1 函数项级数

1.函数项级数

设$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots,u_n(x),\cdots$ 是定义在某个区间 $[a,b]$上的

一列函数,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

称为区间$[a,b]$上的**函数项无穷级数**,简称为函数项级数.

如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x+x^2+\cdots,$

n=2带进去

2. 函数项级数收敛域

2.函数项级数收敛域

对于每一个确定的值 $x_0\in[a,b]$，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

对应一个常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$

如 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 取 $x=\frac{1}{2}$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛,则 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的 **收敛点**.

若上述级数发散,则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**

函数项级数的全体收敛点的集合称为**收敛域**. 所有发散点的集合称为**发散域**.

和函数: 在收敛域上级数和 是x 的函数$S(x)$.

称为函数项级数的**和函数**. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

也称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ **收敛于** $S(x)$.

若$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$ （x 为收敛点)

余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

在收敛域上讨论

且$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[S(x)-S_n(x)]=0$(若在发散域上$r_n(x)$无意义.)

3. 幂级数及其收敛性

3.幂级数及其收敛性

幂级数的一般形式为

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (1)$$

当$x_0=0$ 时,得 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (2)$

($a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是常数,称为级数的系数)

学生的院系
级数的院系
班级的系

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots,$

若令 $t=x-x_0$ 则级数（1）化为级数（2）。

因此我们主要讨论（2）型的级数，首先讨论其收敛域

定理 （阿贝尔定理）

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x_0(x_0\neq 0)$ 处

收敛,则它在所有满足不等式$|x|<|x_0|$ 的点 x 处都**绝对收敛**.

若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点$x=x_0$ 处发散,则它在所有满足不等式$|x|>|x_0|$

的点 x 处都发散

证:设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$ 存在常数M，使

$|a_nx_0^n|\le M \quad (n=0,1,2,\cdots)$ (收敛的数列必有界)

$$\therefore |a_nx^n|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\therefore$ 当 $|x|<|x_0|$时,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 各项的绝对值不大于收敛

的等比数列 $\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 的对应项. 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对

收敛. 反之,若幂级数在$x=x_0$ 处发散,

设若 $\exists x_0'$,$|x_0'|>|x_0|$ 的一点 x_0' 处收敛. 由刚才的证明,

则级数 $\sum a_nx_0^n$ 收敛. 与$\sum a_nx^n$在x_0 发散矛盾.

定理：对于任意的具有非零的收敛点与发散点的幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$， 必存在一个确定的非负数$R$,使得

1）当 $|x|<R$ 时,级 数 **绝对收敛**;

2） 当$|x|>R$ 时,级数**发散**.

3） 当$|x|=\pm R$ 时,级数可能 收敛也可能发散.

R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**.

路径
自径
半径
直径

$(-R,R)$ **称为收敛区间**.

$(-R,R)$ 加上收敛区间的收敛端点称为**收敛域**

收敛域为: $(-R,R),[-R,R],(-R,R],[R,-R)$

注：幂级数的收敛域要讨论端点的收敛性.

第七讲 幂级数的收敛半径

◎ 径

径 jīng

〈名〉

(1) 南北为径 [northsouthern]。如:径轮(南北之间的长度)

结论: 1) $R=0$ 幂级数仅在 $x=0$ 收敛

2) $R=+\infty$ 幂级数在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛

3) $0<R<+\infty$ 幂级数在 $(-R,R)$ 收敛

问题:幂级数收敛半径R如何求?

1. 收敛半径的求法

公式法

定理 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$,其中 a_n,a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 相邻两项的系数,则此幂级数的收敛半径

极限值的倒数

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{l} & l\neq 0\\ +\infty & l=0\\ 0 & l=+\infty\end{cases}$$

证: 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 应用达朗贝尔判别法

达朗贝尔判别法是什么

由比值法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l|x|$$

(1)如果 $l\neq 0$, 当 $l|x|<1$ 时,即 $|x|<\dfrac{1}{l}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛.

当 $l|x|>1$ 时, 即 $|x|>\dfrac{1}{l}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 发散.

收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}$

收敛与极限小于1

(2)如果 $l=0$, 则对于任何 $x\neq 0$ $l|x|=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=0$

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 是收敛的. $R=+\infty$

(3)如果 $l=+\infty$, 则对于除 $x=0$ 外的其它一切 x 值,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 必发散. 否则由阿贝尔定理知将有点 $x\neq 0$,使级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛,于是 $R=0$

说明 (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在,

不可说幂级数没有收敛半径(一定有)

而是要用别的方法求 R 。

幂级数的收敛半径是什么

(2) 用公式法 a_n 不能等于零。

例 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛半径与收敛域.

解

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\cdot 3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3(n+1)}\right|=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=3$

幂级数的收敛域要讨论端点的收敛性.

对于端点 $x=3$,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 是调和级数. $\therefore$ 发散

端点与常数项级数。

对于端点 $x=-3$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$

由交错级数审敛法知 $\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

审判方法。。。
交错级数,一项正,一项负数。

$\therefore$ 收敛的 $\therefore$ 级数收敛域为 $[-3,3)$

说明:求得收敛半径R后,再将 $x=\pm R$ 时的常数项级数的敛散性做以讨论,便可得幂级数的收敛域。

收敛半径

例 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径

解: $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$\therefore R=+\infty$ 即级数处处收敛. **解:** $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$

缺少奇次幂项收敛半径

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

分析：级数缺少奇次幂项，不能直接用公式法

方法：直接利用比值，根值判别法（有缺项）

解:

(用比值审敛法求收敛半径)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2n+2}\Big/\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2x}\right|=4|x|^2,$$

故当 $4|x|^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,级数收敛；当 $4|x|^2>1$，$x>\frac{1}{2}$ 时,

级数发散. 所以收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$

注:缺少偶次项, 也可以用此方法.

公式法

定理 如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 相邻两项的系数,则此幂级数的收敛半径

极限值的倒数

$$R=\begin{cases}\frac{1}{l} & l\neq 0\\ +\infty & l=0\\ 0 & l=+\infty\end{cases}$$

比值判别法的顺序

思考题

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 收敛域

级数缺少偶次幂项

希望给出思考题答案 老师参与

wuxiangfdx16... 3月19日 来自课件"课件"

+关注 回复 0 | 举报

当前版块已被讨论区管理员关闭，无法发表任何主题、回复、评论、关注或对帖子进行投票。

共1回复 排序方式：回复时间 投票数

在每套习题课中有本章思考课的答案，可参考。思考题答案发布时间与发布下一章单元检测时间一致

王玮 老师 3月20日 0 | 评论(0) | 举报

收敛域

例 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域.

解:令 $t=x-1$, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$ 因为

$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2}$ 所以收敛半径 $R=2$

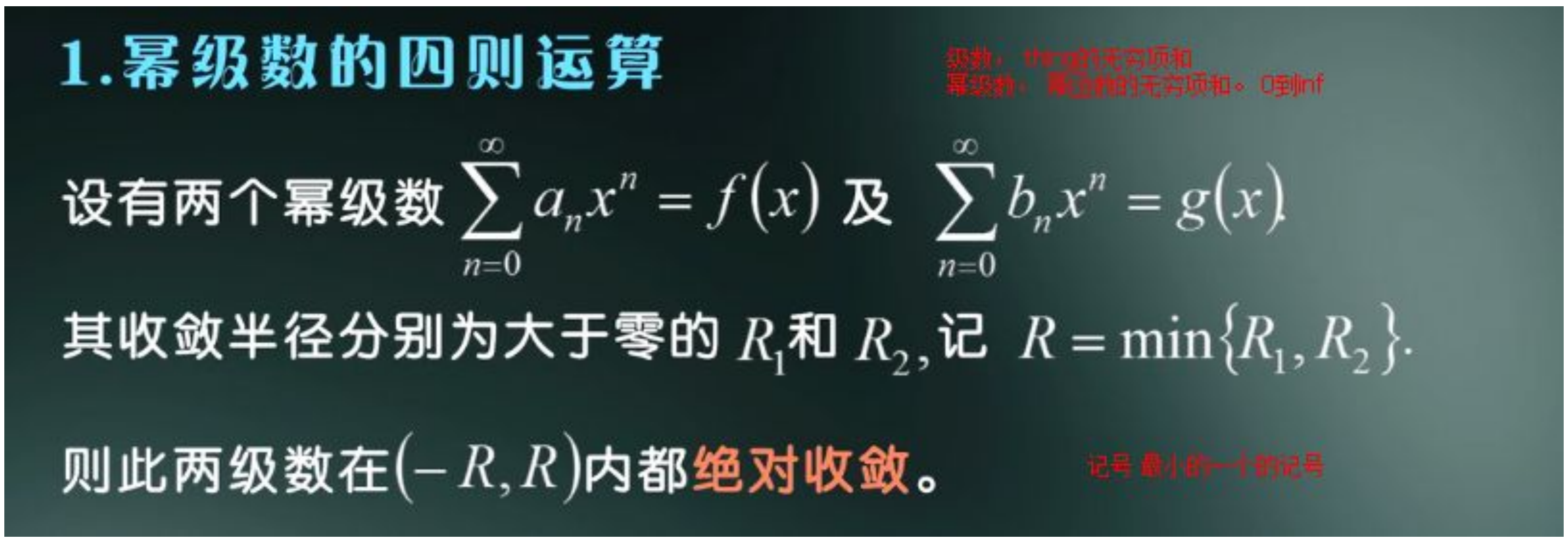
当 $t=2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; 当 $t=-2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.

所以收敛域为 $-2\le t<2$ 即 $-2\le x-1<2$, $-1\le x<3$

所以级数的收敛域 $[-1,3)$,

第八讲 幂级数的运算

1. 幂级数的四则运算



（1）加法、减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$

（2）乘法 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots = f(x) \cdot g(x)$$

这是两个幂级数的柯西乘积。

（3）除法（收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$）

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$$

即有 $\begin{cases} a_0 = b_0 c_0 , \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 , \\ a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 , \\ \cdots \end{cases}$ 从中可顺序求出 $c_0 , c_1 , c_2 , \cdots$

性质2： 和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内的任何闭区间上可积，特别对于 $\forall x \in (-R, R)$ 幂级数可逐项积分。即：

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

积分后所得的幂级数的收敛半径仍为 R。

性质3： 和函数$S(x)$在$(-R,R)$内可导，并可逐项求导。即：

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求导后所得的幂级数的收敛半径仍为R。

求导后所得的幂级数的收敛半径仍为R。

注意：逐项积分逐项求导后得的幂级数在 $x=\pm R$ 处的敛散性可能改变。

级数求和的步骤：

（1） 求出级数的收敛域，以下在收敛域内讨论。

（2）通过逐项积分或微分将给定的幂级数的系数化简，化为已知常用展开式中的一种形式，从而得出新的幂级数的和函数。

（3）对于得到的和函数作相反的分析运算，便可得幂级数的和函数。

例： 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$的和函数。

解： 收敛域为：$(-1,1]$

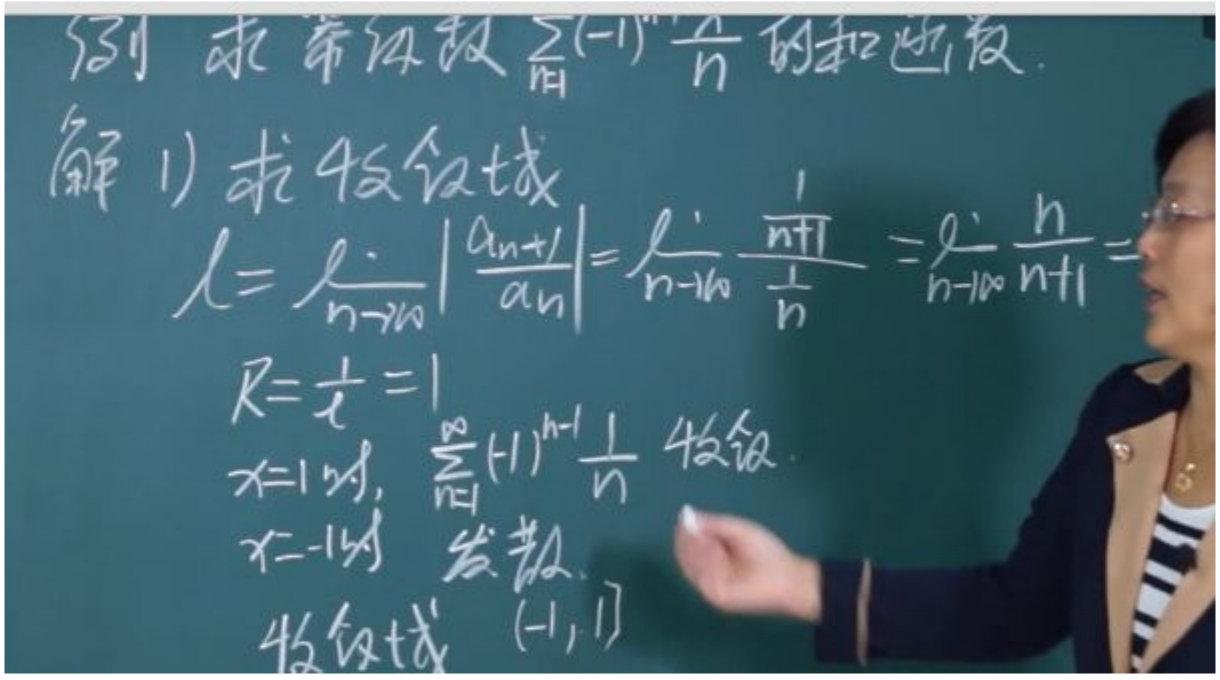
$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

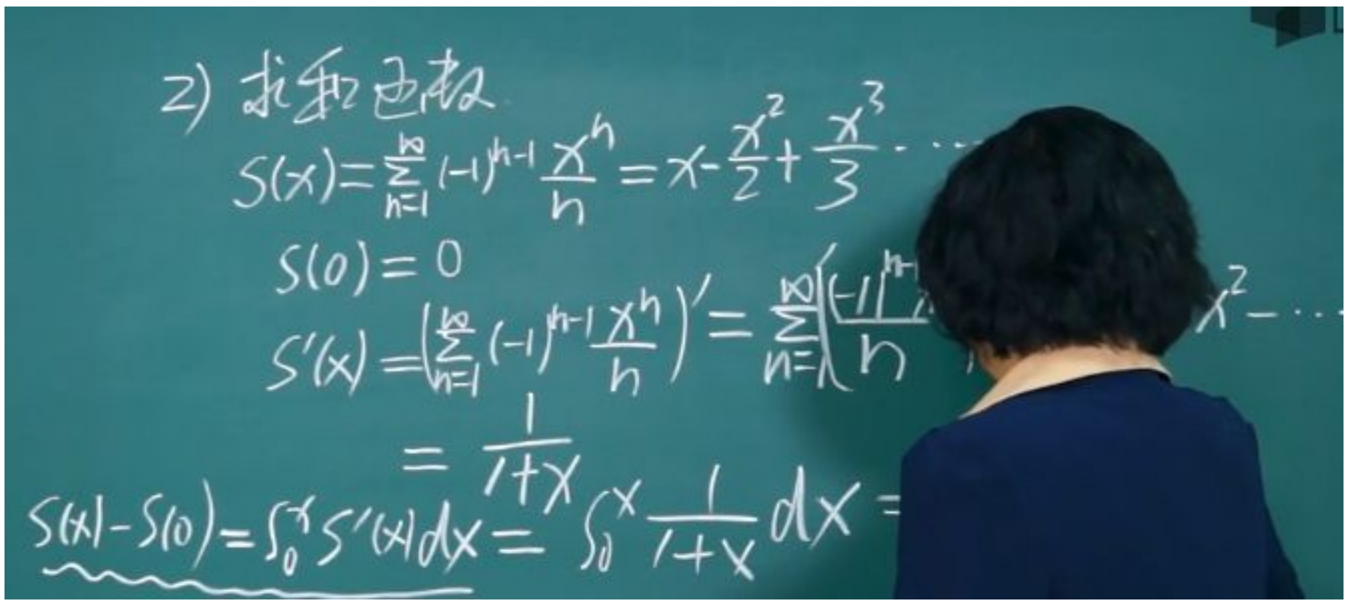
显然 $s(0)=0,\quad s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\dfrac{1}{1+x},$

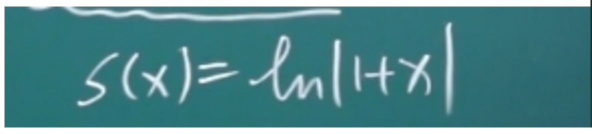
两边积分得 $\int_0^x s'(t)dt=\ln(1+x)$

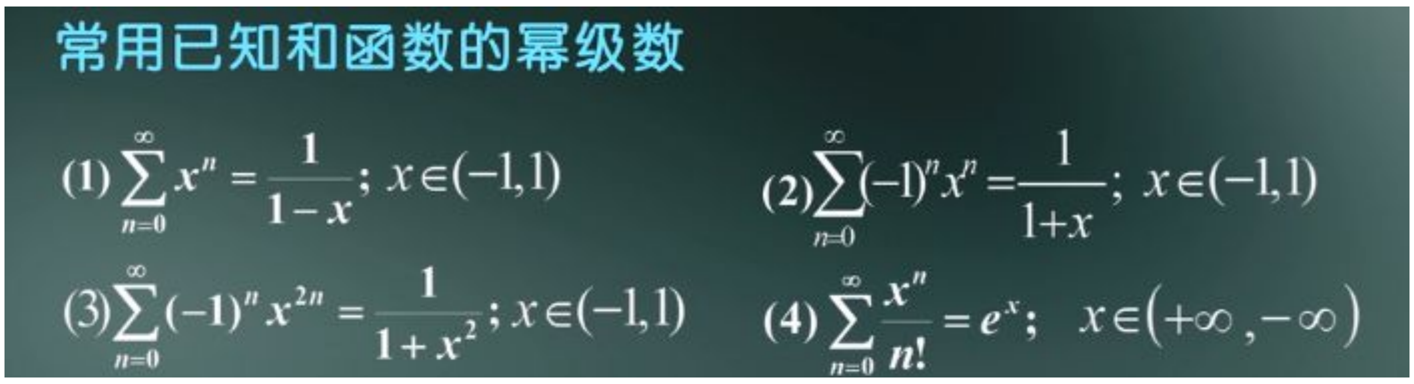
即 $s(x)-s(0)=\ln(1+x)\quad\therefore s(x)=\ln(1+x),$

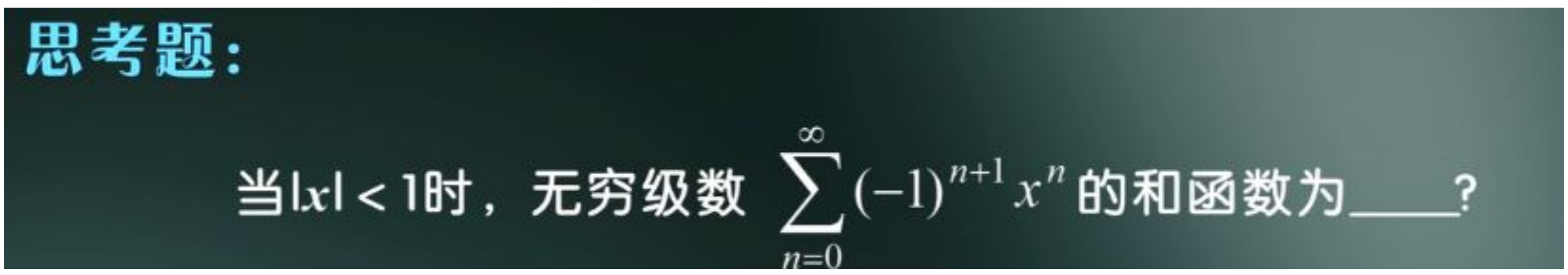
$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).\ (-1<x\le 1)$$











2. 幂级数和函数的性质

第九讲 函数展开成幂级数 I

1. 问题的引入

2. 泰勒级数

3. 函数展开成幂级数的直接法

第十讲 函数展开成幂级数 II

1. 逐项积分、逐项求导法

2. 变量代换法

3.函数变形及四则运算

第十一讲 反常积分的审敛法

1.无限区间上的积分

2.无界函数的反常积分

第十二讲 函数展开成傅里叶级数

1.傅里叶级数的引入及起源

2.三角函数系的正交性

3.函数展开成傅立叶级数

第十三讲 正弦级数和余弦级数

1.奇函数和偶函数的傅里叶级数

2.函数展开成正弦级数和余弦级数

3.以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

第十四讲 习题课

第十五讲 用Matlab计算级数问题

#常正交任幂正余弦（傅立叶级数）

第7章：向量代数与空间解析几何

第一讲 向量及其运算

1.解析几何的起源

2.空间直角坐标系

3.向量的概念

4.向量的线性运算

第二讲 向量的数量积及方向余弦

1.向量的模与方向余弦的坐标表示式

2.向量在轴上的投影

3.两向量的数量积

第三讲 向量的向量积

1.二阶三阶行列式简介

2.向量的向量积

3.向量积的坐标表示式

4.向量的混合积

#数向量积方向余弦

第四讲 空间的平面及其方程

1.空间的平面方程

2.两平面的夹角

3.点到平面的距离

#平面二面角点面距

[èr miàn jiǎo]

二面角

编辑

棱与轴
棱与母线

平面内的一条直线把平面分为两部分，其中的每一部分都叫做半平面。从一条直线出发的两个半平面所组成的图形，叫做二面角（这条直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面）。二面角的大小可以用它的平面角度来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度。平面角是直角的二面角叫做直二面角。

中文学名	二面角	记　法	平面α-棱AB(l)-平面β
拉丁学名	dihedral angle	适用范围	空间
定　义	从一直线出发二半平面组成的图形	科　目	数学

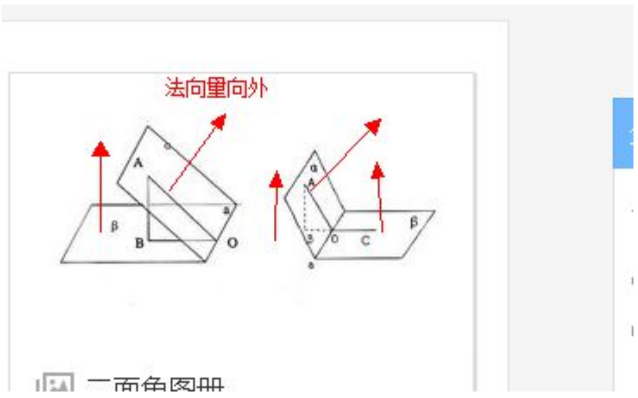
向量法

1）先建立直角坐标系，求出各点坐标；

2）设面S1的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，面S2法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$；

3）然后求 $\vec{n}$ 和 $\vec{m}$ 的夹角θ的余弦 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\bullet\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

4）根据图像观察 $\vec{n}$ 和 $\vec{m}$ 的方向。如果两个法向量一个指向二面角内部另一个指向二面角外部，则二面角的大小就是θ。如果两个法向量同时指向二面角内部或外部，则二面角的大小为π-θ。



第五讲 空间直线及其方程

1. 空间的直线方程

2. 两直线的夹角

3. 直线与平面夹角

#直线夹角线面角

第六讲 空间曲面和曲线

1. 曲面方程的概念

2. 旋转曲面

3. 柱面:

4. 二次曲面

5. 空间曲线的一般方程

6. 空间曲线的参数方程

第七讲 习题课

第八讲 用 Matlab 画空间曲线

第 8 章　　多元函数微分学及其应用

第一讲 多元函数的起源和多元函数的概念

多元函数的起源

多元函数的概念

1. 平面点集

2. 邻域、内点、边界点

3. 区域和闭区域

4. n 维空间

5. 二元函数的定义

6. 二元函数的几何意义

第二讲 二元函数的极限和连续

1. 二元函数的极限

2. 二元函数的连续性

第三讲 偏导数

1. 偏导数的定义及其计算法


讨论区 > 老师答疑区 > 主题详情

偏导数连续 老师参与

二元函数f（x，y）在(x0,y0)处两个偏导数（x的偏导，y的偏导）存在是f（x，y）在该点连续的什么条件？
答案是既不充分也不必要，但是如果f（x，y）在该点连续不就说明两个偏导数在该点存在吗？那答案不应该是必要不充分条件吗？谢谢老师

sd2015环科胡... 6月21日 来自课件"随堂测验"

关注 回复 0 举报

当前版块已被讨论区管理员关闭，无法发表任何主题、回复、评论、关注或者对帖子进行投票。

共1回复 排序方式：回复时间 投票数

f（x，y）在该点连续不能保证两个偏导数在该点存在

王玮 老师 6月22日 0 评论(0) 举报

2. 高阶偏导数

第四讲 全微分

1. 全微分的定义

2. 全微分在近似计算中的应用

第五讲 多元复合函数的微分法

1. 多元复合函数求导的链式法则

2. 全微分形式的不变性

第六讲 隐函数的微分法

第七讲 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线和法平面

2. 空间曲面的切平面和法线

第八讲 多元函数的极值与最值

1. 多元函数的极值

2.最大值与最小值

第九讲 条件极值　拉格朗日乘数法

第十讲 习题课

第十一讲 用 Matlab 求偏导数

第 9 章 重积分

第一讲 重积分的起源及二重积分的概念和性质

重积分的起源
二重积分的概念和性质
1.引入二重积分的两个实际问题
2.二重积分的定义
4.二重积分的性质

第二讲 直角坐标系下二重积分的计算

第三讲 极坐标系下二重积分的计算

第四讲 三重积分

1.三重积分的定义

2.直角坐标系下三重积分的计算

第五讲 柱面坐标系下三重积分的计算

第六讲 球面坐标系下三重积分的计算

第七讲 重积分的一般变量代换

第八讲 重积分的应用

1.质心

2.转动惯量

3.引力

第九讲　习题课

第十讲　用 Matlab 计算重积分

第 10 章 曲面积分与曲线积分

第一讲 对弧长曲线积分的概念与性质

1.问题的提出
2.对弧长的曲线积分的概念
3.对弧长曲线积分的性质

第二讲 对弧长曲线积分的计算

1.计算公式
2.例题

第三讲 对坐标曲线积分的概念与性质

1.问题的提出
2.对坐标曲线积分的概念
3.对坐标曲线积分的性质

第四讲 对坐标曲线积分的计算

1.计算公式

2.例题

第五讲 格林公式

1.格林公式
2.例题

第六讲 曲线积分和路径无关的条件

第七讲 全微分求积

1.二元函数的全微分求积

2.全微分方程

第八讲 对面积的曲面积分

1.对面积曲面积分的概念与性质

2.对面积曲面积分的计算法

第九讲 对坐标曲面积分的概念和性质

1. 有向曲面及曲面元素的投影

2. 对坐标曲面积分的概念与性质

第十讲 对坐标曲面积分的计算

1. 对坐标曲面积分的计算

2. 两类曲面积分的联系

第十一讲 高斯公式

1. 高斯公式

2. 例题

第十二讲 斯托克斯公式

1. 斯托克斯公式

2. 例题

第十三讲 场论

1. 方向导数

可以微分

在极限有定义的时候，极限值存在

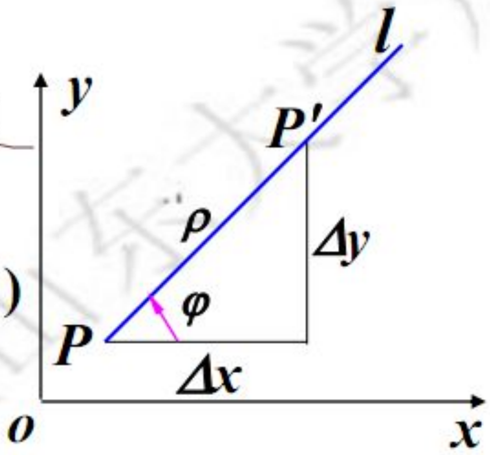
就是一个极限值 ，沿着某个方向的极限值， 是 **变化值 与 坐标变化长度 的比值**

1. 可以使用坐标长的极限值的定义求方向 导数。 是变化量与坐标长度变化比。
2. 也可以使用 可以微分的定义 求方向导数。 是一个夹角。也就是**余弦**。

余弦本身包含了这个含义的单位化的形式。也就是标准化的形式。
单位一的状态

一、方向导数

1. 定义 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 某邻域内有定义，自点 P 引射线 l，设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ（逆时针方向为正，顺时针方向为负）在 l 上另取一点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，若极限



$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho} \text{ 存在 } \quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

坐标数值表示的曲线长？
弧长数值表示的曲线长

称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的**方向导数**.

记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$， 即

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}}$$

方导数

数量积向量积方向余弦
数向积方余弦
方导数

例　P 点沿 x 轴正方向的方向导数为

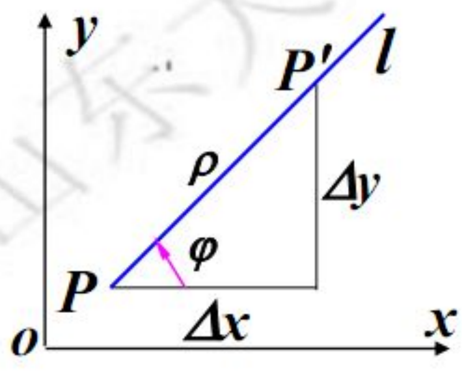
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}=f_x'$$

在某点有定义并且极限存在时候，方导数就是极限值

2

在某点可微，方导数存在

2、定理 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微，则函数在点 P 沿任一方向 l 的方向导数都存在，且



方向导数的值

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi}$$

其中 φ 为 x 轴正向到方向 l 的转角.

可以微分就是有横坐标和竖坐标值？
或正交坐标值？

推广 设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 可微，则函数在点 P 沿任一方向 l 的方向导数存在，且

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma}$$

方向导数的运算实例

例1 求函数 $u = xyz$ 在点 $P(5,1,2)$ 处沿从点 $P(5,1,2)$ 到点 $Q(9,4,14)$ 的方向导数.

解 方向 l 即向量 $\overrightarrow{PQ} = \{4,3,12\}$ $\quad |\overrightarrow{PQ}| = 13$

设 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{a_x, a_y, a_z\}$

则 $\begin{cases} a_x = |\vec{a}|\cos\alpha \\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta \\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma \end{cases}$

相应的单位向量为: $\overrightarrow{PQ^0} = \left\{\dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}, \dfrac{12}{13}\right\}$

单位向量与夹角的余弦值

即 $\cos\alpha = \dfrac{4}{13} \quad \cos\beta = \dfrac{3}{13} \quad \cos\gamma = \dfrac{12}{13}$

偏导数的运算方式

固定变量？

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

坐标长
坐标弧长

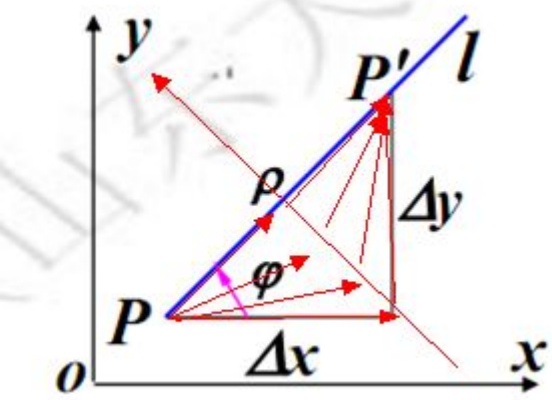
坐标积（长乘以宽）
坐标面积

在点 $P(5,1,2)$ 处 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 10, \dfrac{\partial u}{\partial z} = 5$

故 $$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{8}{13} + \frac{30}{13} + \frac{60}{13} = \frac{98}{13}$$

2. 梯度

梯度与方导数的区别是什么



方导数是一个极限值。。。。P 到 P’ 的长度值
梯度是一个向量。。。。 P 到 P’的向量，也叫做复数，古人曰：矢量。

连续偏导及连续与可以微分的区别是什么

二、梯度

定义 设二元函数$z=f(x,y)$在区域D内有一阶连续偏导数，对任意点$P(x,y)\in D$，称向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \longrightarrow \text{矢量}$$

为函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$的**梯度**. 记作 $gradf(x,y)$

梯度是一个向量.
vector就是向量
是向量
矢量是古代术语

shi与shu容易混淆.

即 $$\boxed{\operatorname{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}}$$

梯度是一个坐标形式，也就是复数形式，也就是向量.

分类的分类

或 $$\boxed{\operatorname{grad}f(x,y)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}}$$

梯度与可以微分的区别在于一个是数量值.
也就是偏导数的数量值沿坐标变化方向的加和

推广 对于三元函数 $u=f(x,y,z)$

$$\boxed{\operatorname{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

5

连续偏导及连续与可以微分的区别是什么 都是可以加和？ 数量加和与向量加和

二、梯度

定义 设二元函数$z=f(x,y)$在区域D内有一阶连续偏导数，对任意点$P(x,y)\in D$，称向量

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}} \longrightarrow \text{矢量}$$

梯度是一个向量.
vector就是向量
是向量
矢量是古代术语

shi与shu容易混淆.

例2 求 $\operatorname{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$

偏导数
与
与坐标轴夹角为零的时候的

解 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \operatorname{grad}\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$$

梯度与方向导数的关系

最大方向导数的同义词就是余弦值为0.999999999

函数在某点的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模就是方向导数的最大值。

即沿梯度方向的方向导数达到最大值.

3. 通量与散度

$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

中P,Q,R具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有

面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$ 通

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P,Q,R具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的通量(流量) .

场与面的关系好比：
雨水灌溉大地的形象。
见过这个场面？
divergence
导弹轰炸大地
大雪洒满大地
导弹dive into。。
云层

在场中点 $M(x,y,z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \overset{\text{记作}}{=\!=}\ \operatorname{div}\vec{A}$$

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

方向导数取最大值的时候，也就是余弦为0.999999的时候的数量，也就是就是散度，是一个数量值

散度，也就是方向导数的最大值，的在曲面的累积就是通量，也叫流量。

散度与梯度没有什么关系

例3. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}\{x,y,z\}\qquad(\vec{r}\neq\vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E}=q\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)\right]$

$$=q\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]$$

$$=0\qquad(r\neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.

4. 环流量与旋度

设有向量场 $\vec{A}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则称

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{A}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}}$$

为向量场 $\vec{A}$ 的**旋度**

旋度是什么
六面体的体积？

沿着单位一的情形
下的体积。

$\boxed{\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z}$ 为向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的**环流量**。

例4 设向量场 $\vec{A}=(2z-3y)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$，求 $\mathrm{rot}\vec{A}$

解 $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 2z-3y&3x-z&y-2x\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$

例4 设向量场 $\vec{A}=(2z-3y)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$，求 $\mathrm{rot}\vec{A}$

解 $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 2z-3y&3x-z&y-2x\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$

思考题

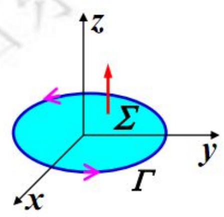
求向量场 $\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+2\vec{k}$ 沿闭曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 逆时针方向的环流量.

rot A 是可以知道的，单位一方向的六面体体积

沿着闭合曲线的环流量？

逆时针是？

解 $\oint_\Gamma -ydx+xdy+2dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0&0&1\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y&x&2\end{vmatrix}dS$



$$=\iint_\Sigma 2dS=2\iint_{D_{xy}}dxdy=2\pi$$

闭合曲线的同义词的分类与曲面是一样的

散度练习题

2 求向量场$\mathbf{A}=\frac{1}{r}\mathbf{r}$的散度，其中$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, r=|\mathbf{r}|$.

A. $\frac{5}{r}$

B. $\frac{4}{r}$

C. $\frac{3}{r}$

D. $\frac{2}{r}$

这道题好在，故意没有选项1/r，从而认识到求导的时候1/2*2刚好是1

正确答案：D 你选对了

3 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\mathrm{grad}\, r=$

A. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$

第十四讲 习题课

第十五讲　　用 Matlab 计算曲线积分与曲面积分

参考资料

[1] 刘建亚，吴臻，蒋晓芸，张天德.大学数学教程-微积分（1）.2 版.北京：高等教育出版社出版，2011.

点击购买

[2] 刘建亚，吴臻，张天德，蒋晓芸.大学数学教程-微积分（2）.2 版.北京：高等教育出版社出版，2011.

点击购买

[3] 同济大学数学系.高等数学（上、下）.6 版.北京：高等教育出版社，2007.

点击购买上册

点击购买下册

[4] 蒋晓芸，张天德，崔玉泉.大学数学学习指南微积分.2 版.济南：山东大学出版社，2011.
[5] 刘建亚，吴臻，张天德，等.高等数学习题精选精解.济南：山东科技出版社，2013.

1.2 二面角

特征

编辑

1、过棱上任意一点，其平面角是唯一的；

2 、其平面角所在平面与其两个半平面均垂直；
另外，若在 OC 上任取上一点 A，作 AB⊥OD 于 B,则由特征（2）知 AB⊥β.通过 l、OA、OB、AB，之间的关系，便得到另一特征；
3、体现出三垂线定理（或逆定理）的环境背景。

求法

编辑

作二面角的平面角的常用方法有九种：

1、定义法 ：在棱上取一点 A，然后在两个平面内分别作过棱上 A 点的垂线。有时也可以在两个平面内分别作棱的垂线，再过其中的一个垂足作另一条垂线的平行线。

2、垂面法 ：作与棱垂直的平面，则垂面与二面角两个面的交线所成的角就是二面角的平面角

3、面积射影定理：二面角的余弦值等于某一个半平面在另一个半平面的射影的面积和该平面自己本身的面积的比值。即公式 cosθ=S'/S（S'为射影面积，S 为斜面面积）。**运用这一方法的关键是从图中找出斜面多边形和它在有关平面上的射影，而且它们的面积容易求得。**

4、三垂线定理及其逆定理法：先找到一个平面的垂线，再过垂足作棱的垂线，连接两个垂足即得二面角的平面角。

5、向量法：分别作出两个半平面的法向量，由向量夹角公式求得。二面角就是该夹角或其补角。

6、转化法：在二面角α-l-β其中一个半平面α上找一点 P，求出 P 到β的距离 h 和 P 到 l 的距离 d，那么 arcsin(h/d)（二面角为锐角）或π-arcsin(h/d)（二面角为钝角）就是二面角的大小。

7,、三面角余弦定理法：详细见相关词条。

8、三正弦定理法：详细见相关词条。

9、异面直线的距离法：设二面角为 C-AB-D，其中 AC 和 BD 互为异面直线且 AC⊥AB，BD⊥AB（即 AB 是异面直线 AC 和 BD 的公垂线）。设 AB=d，CD=l，AC=m，BD=n，根据

$$d=\sqrt{l^2-m^2-n^2\mp 2mn\cos\theta}$$

来求异面直线所成角θ。利用该方法求θ必须先由图像判断二面角是锐角还是钝角。如果是锐角，那么取正号；钝角，那么取负号。待求出θ以后，如果二面角是锐角，那么二面角的大小就是θ；钝角，那么二面角的大小就是π-θ。

其中，（1）、（2）点主要是根据定义来找二面角的平面角，再利用三角形的正、余弦定理解三角形。

二面角一般都是在两个平面的相交线上，取恰当的点，经常是端点和中点。过这个点分别在两平面做相交线的垂线，然后把两条垂线放到一个三角形中考虑。有时也经常做两条垂线的平行线，使他们在一个更理想的三角形中。

1.3

有关成绩公布和证书申请通知

各位学友：

感谢大家参与“大学数学—微积分(2)”MOOC 的全部学习内容和考核。 本课程的最终成绩已经确认，大家可以在“我的课程”中查看到本课程的总分。考核通过的同学，可以等待免费证书或者直接申请认证证书啦！

免费证书和收费认证证书是二选一的：只有收费的认证证书是需要申请的，免费证书是在收费认证证书截止申请后自动获得的噢。它们俩有什么区别呢：

1. 免费证书

免费证书为电子版，不用单独申请，如果达到合格以上的要求，会在发完认证证书后发到各位的电子邮箱。

请注意确保自己个人设置中的“真实姓名”一栏准确。系统发证书会调用这一项，如果有错误，发完证书后就没有修正机会了。

2. 收费认证证书

收费认证证书除电子版外，会增加一个纸质版，证书上含有二维码和证书编号，可以在线验证真伪，最终通过快递寄送。本课程收费认证证书申请开放时间：2016 年 7 月 6 日至 2016 年 7 月 20 日。

申请认证证书的同学请打开课程首页：

点击页面右侧中部的“申请认证证书”，按照提示步骤进行实名认证和付款操作就可以了。注意，逾期未付款的申请视为无效！请申请的同学务必填清楚详细地址、邮编、发票抬头（不填视为放弃）、手机等联系方式。如有问题请在本课程讨论区的“综合讨论区”留言。

暑假期间如有同学要学习高等数学微积分(1)可点击下列网址：

http://www.icourse163.org/course/sdu-1001617002?tid=1001689002#/info

山东大学高等数学微积分团队

2016 年 7 月 7 日 14:39

《高等数学-微积分（2）期末考试答案已发布

各位学友：

高等数学-微积分(2)mooc 期末考试已结束，mooc 期末考试详细答案在考试说明及单元测验详细答案栏目中已发布，供大家参考。

暑假期间山东大学《高等数学-微积分》慕课继续在爱课程网开课，如需要学习可点击下列网址

http://www.icourse163.org/course/sdu-1001617002?tid=1001689002#/info

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 7 月 2 日 8:55

《高等数学-微积分（2）期末考试即将结束

各位学友：

高等数学-微积分(2)期末考试结束时间为 2016 年 7 月 1 日 23:30，还没有参加考试的同学请合理安排时间，不要忘记考试，请一定在截止日期之前完成期末考试并提交，截止日期之后系统将不再记录考试成绩。

另外，期末考试详细答案 7 月 2 日会在考试说明及单元测验详细答案栏目中发布，供大家复习。

祝大家取得好的成绩！

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 6 月 30 日 8:59

第 7、8、9 章单元检测即将截止

各位学友大家好！

第 7 章立体几何、第 8 章多元函数微分学、第 9 章重积分单元检测即将截止，截止日期是 2016 年 6 月 13 日 23：30，还没有参加测试的同学请抓紧进行单元检测。第十章曲线积分与曲面积分单元检测截止日期为 6 月 20 日 23:30 截止。单元检测计入 mooc 期末成绩。

高等数学-微积分课程团队

2016 年 6 月 12 日 10:11

期末考试题发布

各位同学大家好：

高等数学-微积分（2）mooc 期末考试题发布，，**结束时间 2016 年 6 月 27 日 23:30 点，**请大家在截止日之前提交成绩。提醒大家注意每个账号只有一次考试机会，请大家复习好再进入考试。

注意：点击左端“考试”后请大家选择标题为“高等数学-微积分(2) mooc 期末考试”的试题做，本界面的其它考试已结束。

另外，如有同学想复习积分及常微分方程、了解考试题型详细情况可进入**高等数学-微积分（1）网址**

http://www.icourse163.org/learn/sdu-190001?tid=421001#/learn/announce

点击查看课程内容。高等数学-微积分（2）与高等数学-微积分（1）题型及难度基本一样 。

高等数学-微积分课程团队

2016 年 6 月 6 日 23:01

温馨提示：第 6 章单元检测即将截止

各位学友大家好！

第 6 章无穷级数单元检测即将截止，截止日期是 2016 年 5 月 24 日 23 点 30，还没有参加考试的同学请合理安排时间，不要忘记考试。本章单元检测计入 mooc 期末成绩。应学友的要求 mooc 期末考试发布时间延至 6 月份。

大学数学微积分课程团队

2016 年 5 月 22 日 9:43

关于期末 MOOC 考试

各位学友大家好！

本课程网站发布的高等数学微积分

（1）循环课 MOOC 试题及高等数学微积分

（2）循环课 MOOC 试题是针对山东大学重修生开放的，考试 5 月 14 日 23:30 结束，不计入非重修生的 MOOC 成绩，高等数学-微积分（2）期末 MOOC 考试题将于 2016 年 5 月 17 日发布。特此公告。

2016 年 5 月 11 日 13:29

《高等数学-微积分(2)》第 10 章 曲线积分与曲面积分(四)发布

亲爱的同学们：

第 10 章曲线积分与曲面积分(四)今天十点发布，主要内容包括：高斯公式、斯托克斯公式、场论、用 MATLAB 计算线面积分。

#高斯斯托场

第 10 章单元测验于今天十一点发布，本测验的测试时间为 60 分钟，截止日期为 6 月 5 日，请在截止日期前提交，本测验分数计入课程的最终成绩，截止时间之后提交不再计入期末成绩

第 9 章随堂测验及思考题的答案，以 PDF 文档形式放在第九章第九讲习题课栏目中，请大家参考学习。

祝大家学习愉快！

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 5 月 10 日 5:15

《高等数学-微积分(2)》第 10 章 曲线积分与曲面积分(三)发布

亲爱的同学们：

第 10 章曲线积分与曲面积分(三)今天十点发布，主要内容包括：对面积的曲面积分、对坐标曲面积分的定义性质、对坐标曲面积分的计算。

祝大家学习愉快！

#坐标面，面积面弧长的同类词就是面积，也都是坐标的同类词，都是一个数值类，所修饰的曲面或曲线都是一个形状类

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 5 月 3 日 5:42

《高等数学-微积分(2)》第 10 章 曲线积分与曲面积分(二)发布

亲爱的同学们：

第 10 章曲线积分与曲面积分(二)今天十点发布，主要内容包括：对坐标曲线积分的计算、格林公式、曲线积分与路径无关的条件、全微分求积。

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 4 月 26 日 5:29

《高等数学-微积分(2)》第 10 章 曲线积分与曲面积分(一)发布

亲爱的同学们：

第 10 章曲线积分与曲面积分(一)今天十点发布，主要内容包括：对弧长曲线积分的概念与性质、对弧长曲线积分的计算、对坐标曲线积分的概念与性质。

#坐标线，弧长线

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 4 月 19 日 5:53

《大学数学微积分(2)》第 9 章 重积分(三)及单元测验发布

亲爱的同学们：

第 9 章重积分(三)今天十点发布，主要内容有：重积分的一般变换、重积分的应用、习题课、用 MATLAB 计算重积分。

第 9 章单元测验于今天发布，本测验的测试时间为 60 分钟，截止日期为 6 月 5 日，请在截止日期前提交，本测验分数计入课程的最终成绩，截止时间之后提交不再计入期末成绩。

应同学要求，在本章习题课后发布了两个讨论题，欢迎各位学友参加讨论。讨论题自愿参加，不计入课程的最终成绩。

第 8 章随堂测验及思考题的答案，以 PDF 文档形式放在第 8 章第十讲习题课栏目中，请大家参考学习。

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 4 月 12 日 4:37

《大学数学微积分(2)》第 9 章 重积分(二)发布

亲爱的同学们：

第 9 章重积分(二)今天十点发布，主要内容包括：三重积分的定义、直角坐标系下三重积分的计算、柱面坐标系下三重积分的计算、球面坐标系下三重积分的计算

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 4 月 5 日 7:49

《大学数学微积分(2)》第 9 章 重积分(一)发布

亲爱的同学们:

第 9 章重积分(一)今天十点发布，主要内容包括：二重积分的概念和性质、直角坐标系下二重积分的计算、极坐标系下二重积分的计算

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 3 月 29 日 5:09

《高等数学-微积分(2)》第 8 章 多元函数微分学(二)及单元测验发布

亲爱的同学们:

第 8 章多元函数微分学(二)今天十点发布，主要内容包括：隐函数的微分法、微分在几何上的应用、多元函数的极值与最值、条件极值

#极最条极 隐微-微几 条极-极最值

第 8 章的单元测验于今天发布，本测验的测试时间为 60 分钟，截止日期为 5 月 5 日，请在截止日期前提交，本测验分数计入课程的最终成绩，截止时间之后提交不再计入期末成绩

第 7 章随堂测验及思考题的答案，以 PDF 文档形式放在第 7 章第 7 讲习题课栏目中，请大家参考学习

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 3 月 22 日 4:24

《高等数学-微积分(2)》第 8 章 多元函数微分学(一)发布

亲爱的同学们:

第 8 章多元函数微分学(一)今天十点发布，主要内容包括：多元函数的起源及概念、二元函数极限与连续、偏导数、全微分、多元复合函数的微分法。

祝大家学习愉快!

#函极连偏二极三柱球全 【函极连导中一常】

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 3 月 15 日 6:02

《高等数学-微积分(2)》第 7 章 空间解析几何及单元测验发布

亲爱的同学们：

第 7 章空间解析几何今天十点发布，主要内容有： 向量及运算、向量的数量积及方向余弦、向量的向量积、空间的平面及其方程、空间的直线及其方程、空间的曲面和曲线、用 MATLAB 绘制空间图形。

另外，第 7 章单元测验于今天发布，本测验的测试时间为 60 分钟，截止日期为 5 月 5 日，请在截止日期前提交，本测验分数计入课程的最终成绩，截止时间之后提交不再计入期末成绩。

第六章随堂测验及思考题的答案，以 PDF 文档形式放在第六章第十四讲习题课栏目中，请大家参考学习。

祝大家学习愉快!

《高等数学-微积分（2）》课程团队

2016 年 3 月 8 日 2:58

《高等数学-微积分(2)》第 6 章无穷级数（二）及单元测验发布

亲爱的同学们：

第 6 章 无穷级数（二）已发布，主要内容有： 幂级数的运算、函数展开成幂级数、反常积分、傅里叶级数、用 MATLAB 计算级数问题。

另外，第六章的单元测验于今天发布，本测验的测试时间为 60 分钟，截止日期为 5 月 5 日，请在截止日期前提交，本测验分数计入课程的最终成绩，截止时间之后提交不再计入期末成绩

祝大家学习愉快!

《高等-数学微积分（2）》课程团队

2016 年 3 月 3 日 10:24

《高等数学-微积分（2）》开课公告

亲爱的同学们大家好！

《高等数学-微积分（2）》今天正式开课了，欢迎来到《高等数学-微积分（2）》MOOC 课堂。这一周我们将为大家介绍无穷级数：主要内容有：级数的起源及常数项级数的概念、级数的基本性质、正项级数审敛法、任意项级数及交错级数审敛法、幂级数及其收敛域、幂级数的收敛半径。

另外提醒大家，为便于大家复习每章随堂测验及讨论题的详细答案，在本章结束后以 PDF 文档形式放在本章习题课课件后，大家可以下载学习。

如有学友要复习《高等数学-微积分（1）》的内容，可点击下列网址：http://www.icourse163.org/course/sdu-190001#/info

祝大家学习愉快！

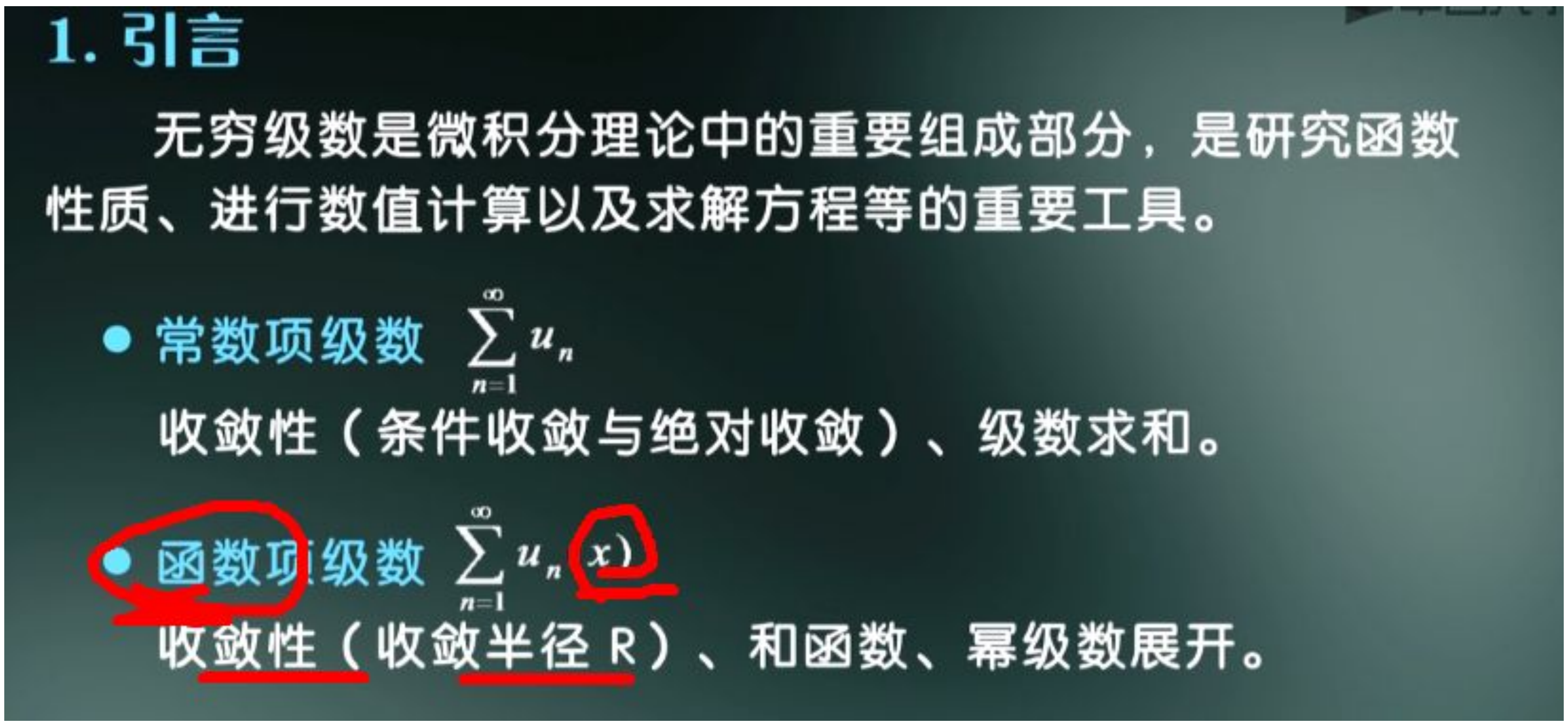
《高等数学-微积分(2)》课程团队

2016 年 2 月 23 日 5:32

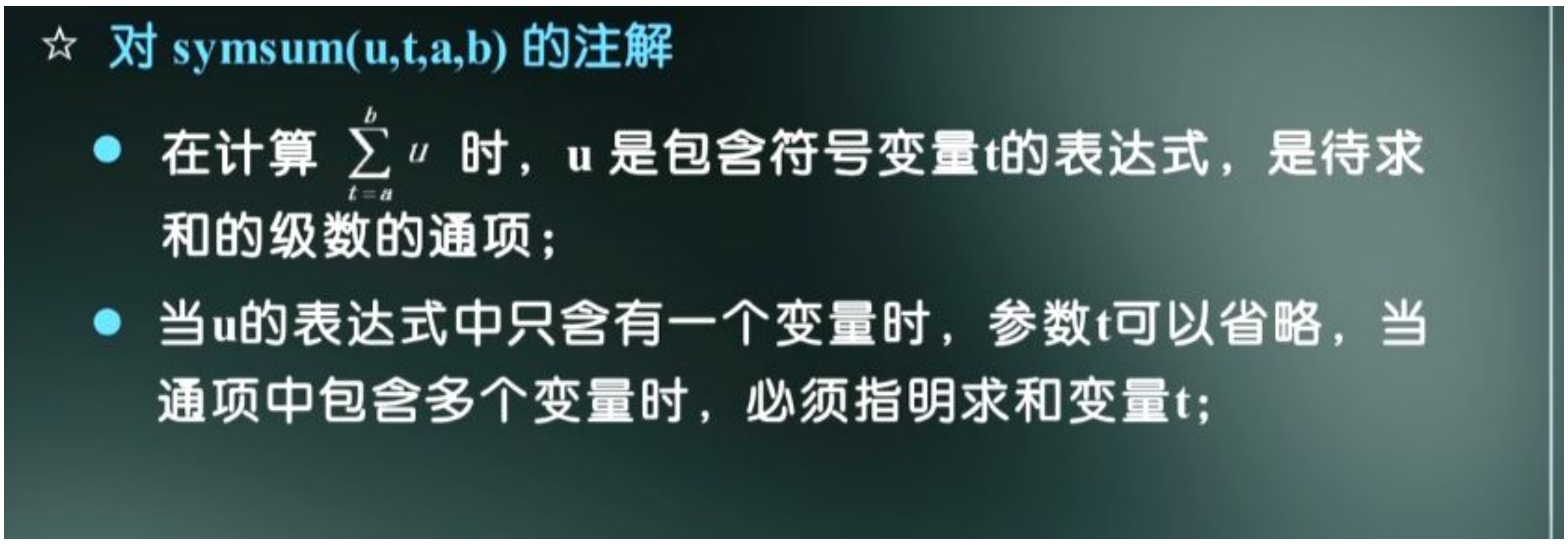
1.4 课件

课件

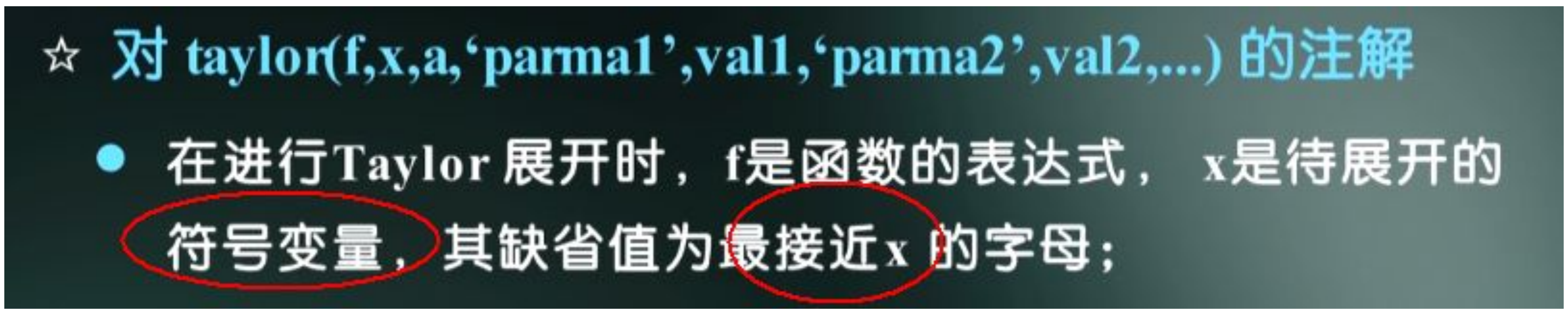
[考试说明及单元测验详...]
[第十五讲 用 Matlab 计...]
[第十四讲 习题课]
[第十三讲 场论]
[第十二讲 斯托克斯公式]
[第 十一讲 高斯公式]
[第十讲 对坐标曲面积..]
[.第九讲 对坐标曲面积...]
[第八讲 对面积的曲面积分]
[第七讲 全微分求积]

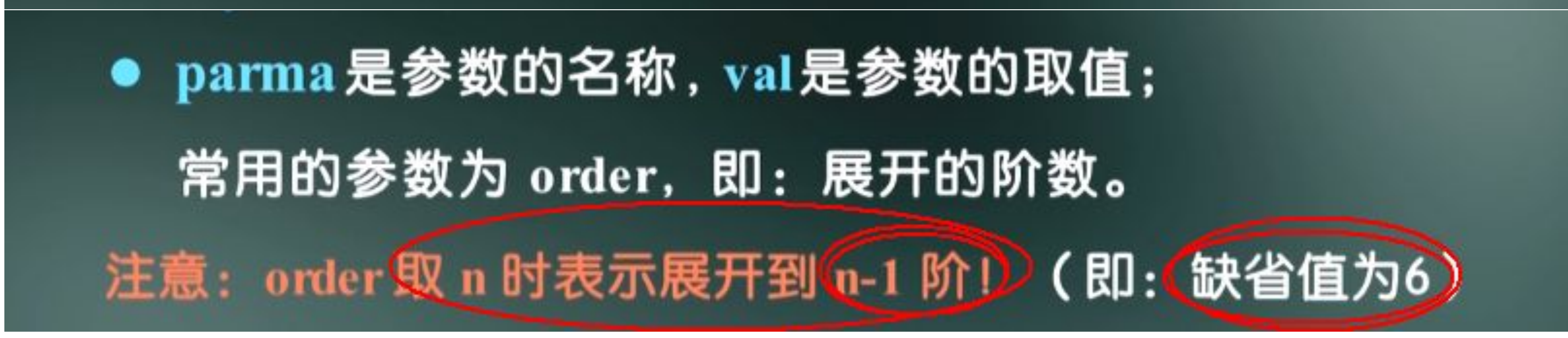


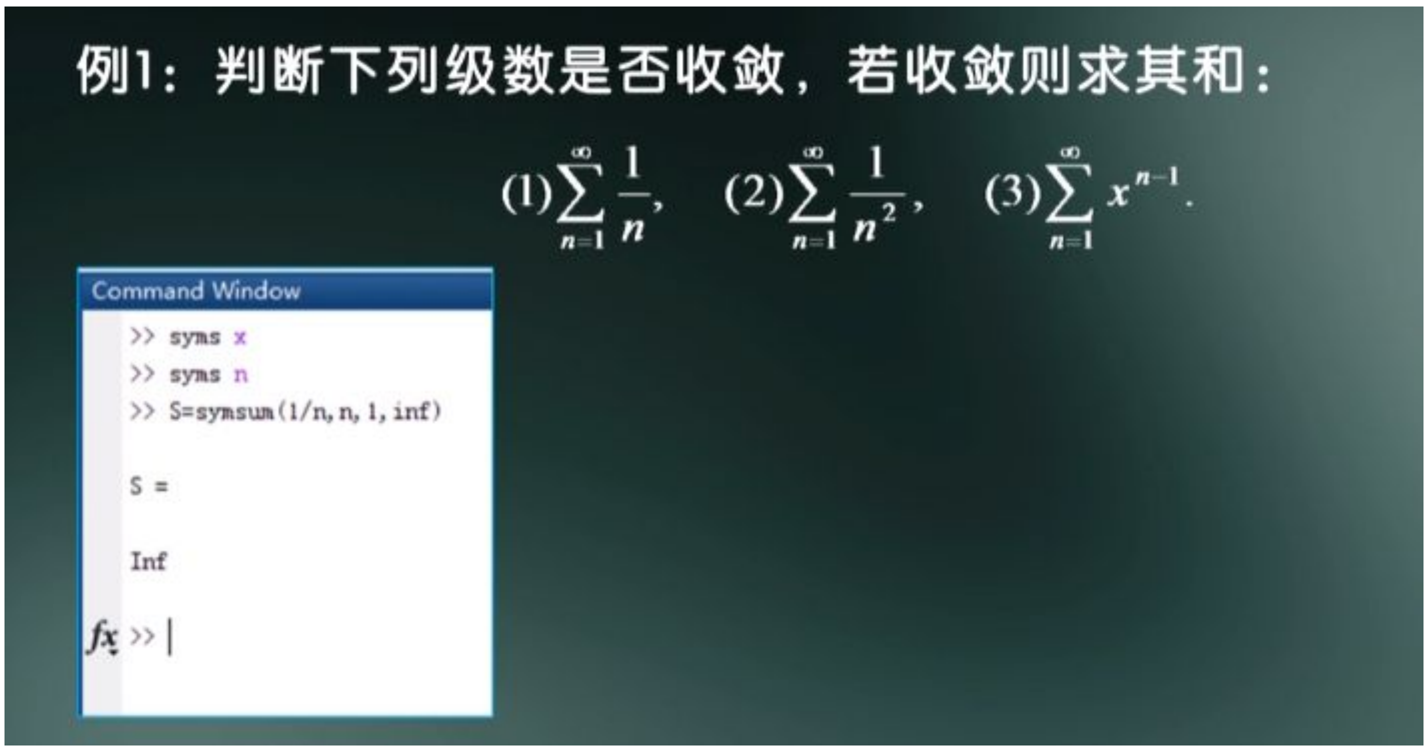
函数 变量，展开的点，

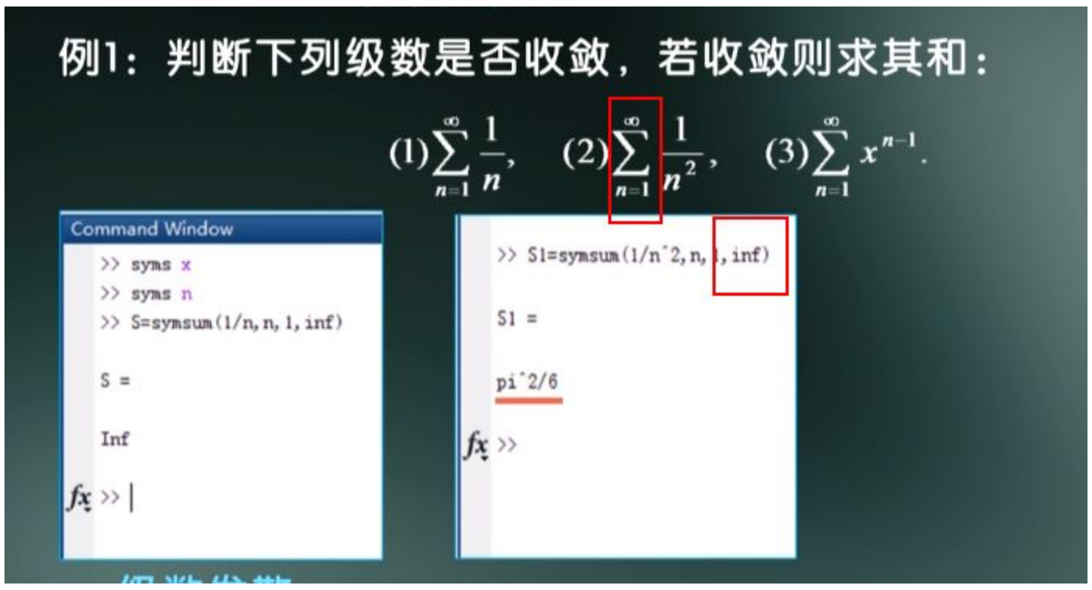


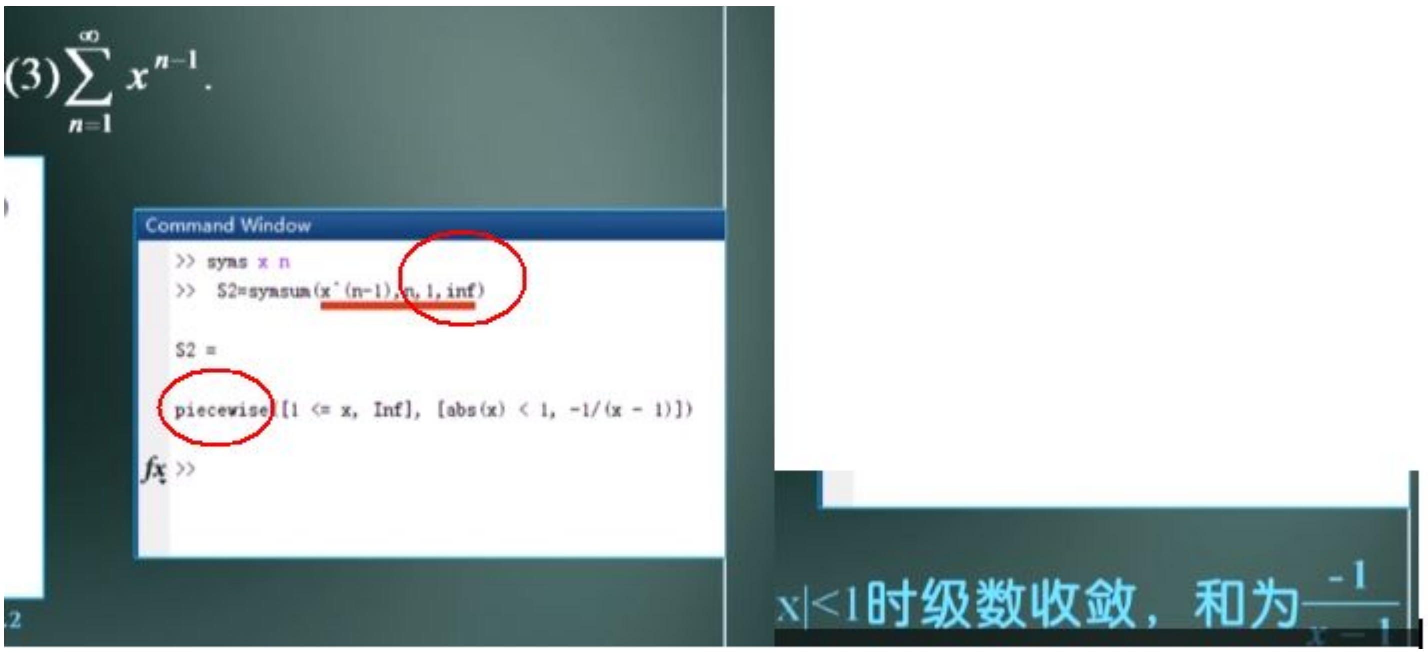
和的存不存在是否是收敛。

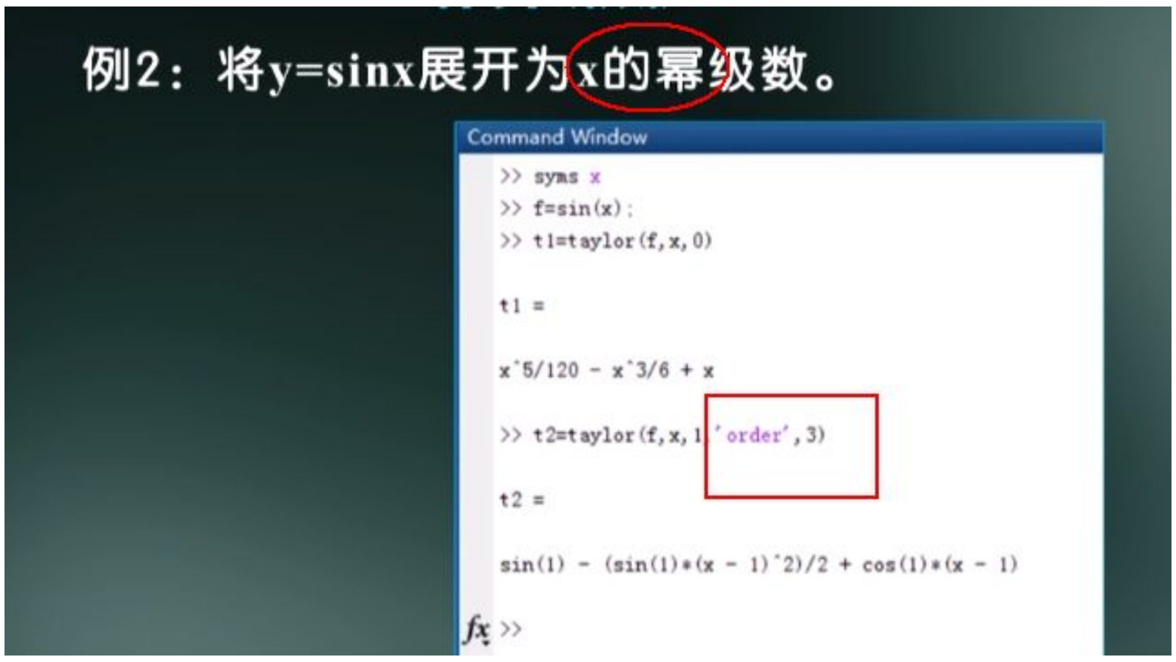


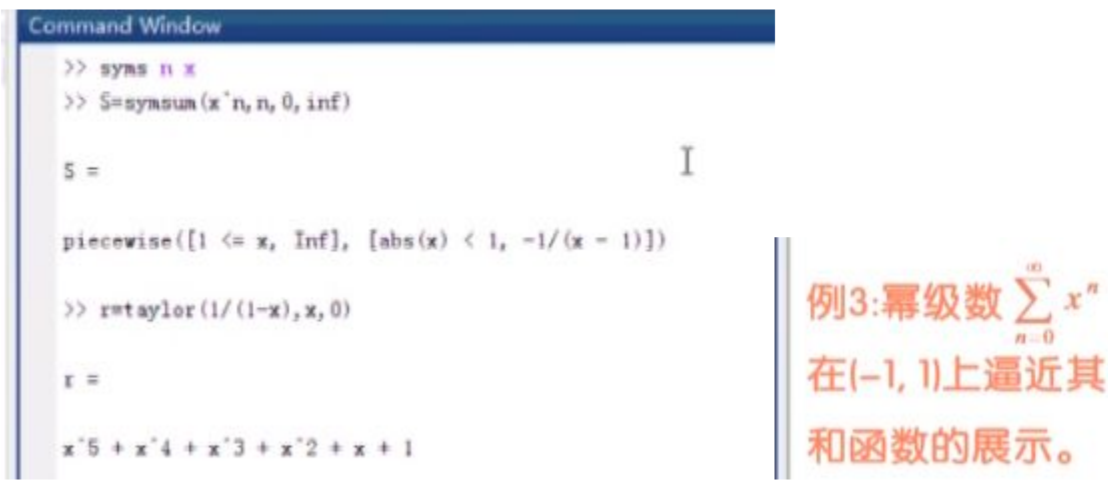


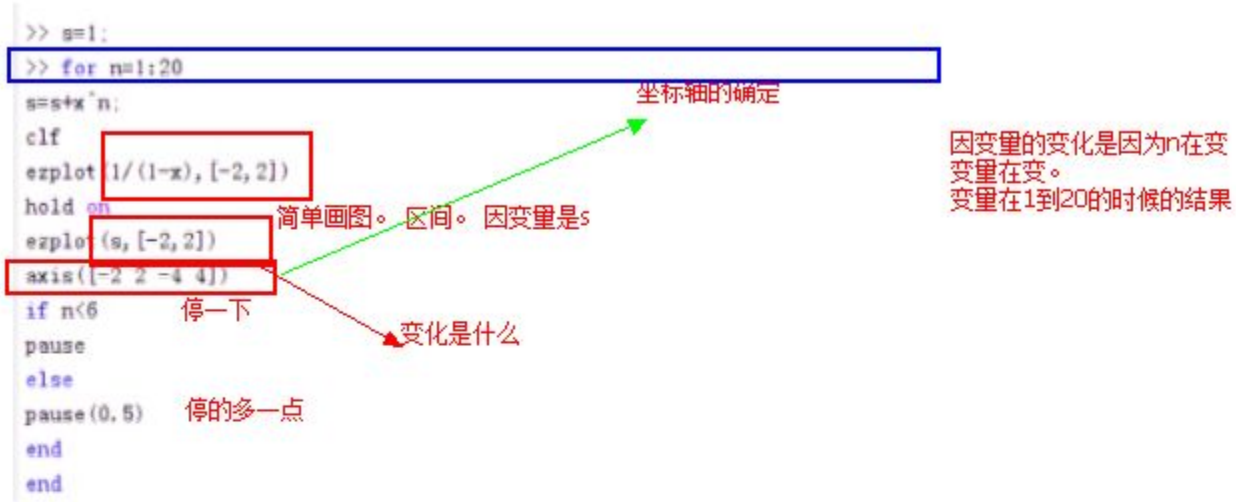



例1：判断下列级数是否收敛，若收敛则求其和：
(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，(3)$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$.
Command Window
>> syms x
>> syms n
>> S=symsum(1/n,n,1,inf)
S =
Inf
>> S1=symsum(1/n^2,n,1,inf)
S1 =
pi^2/6


(3)$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$.
Command Window
>> syms x n
>> S2=symsum(x^(n-1),n,1,inf)
S2 =
piecewise([1 <= x, Inf], [abs(x) < 1, -1/(x - 1)])
|x|<1时级数收敛，和为$\frac{-1}{x-1}$


例2：将y=sinx展开为x的幂级数。
Command Window
>> syms x
>> f=sin(x);
>> t1=taylor(f,x,0)
t1 =
x^5/120 - x^3/6 + x
>> t2=taylor(f,x,1,'order',3)
t2 =
sin(1) - (sin(1)*(x - 1)^2)/2 + cos(1)*(x - 1)


Command Window
>> syms n x
>> S=symsum(x^n,n,0,inf)
S =
piecewise([1 <= x, Inf], [abs(x) < 1, -1/(x - 1)])
>> r=taylor(1/(1-x),x,0)
r =
x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
例3:幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$
在(-1, 1)上逼近其
和函数的展示。



2.1 参考文献

C 语言程序设计精髓_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/learn/HIT-69005?tid=1001759015#/learn/announce
30 万奖学金争霸赛_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/topics/moocBOTScholarship/#/course
沟通心理学_哈尔滨工业大学_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/course/HIT-1001515007#/info
线性代数_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/learn/SDU-55001?tid=1001780006#/learn/announce
山东大学_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/university/SDU#/c
高等数学—微积分(2)_山东大学_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/course/SDU-192001#/info
二面角_百度百科 http://baike.baidu.com/view/353283.htm
径的解释|径的意思|汉典“径”字的详细解释 http://www.zdic.net/z/19/xs/5F84.htm
http://nos.netease.com/edu-lesson-pdfsrc/B551ACB13888941382DCBAEEF5DE8BF9-1425641919501?NOSAccessKeyId=7ba71f968e4340f1ab476ecb300190fa&Expires=1474123943&Signature=O640ps7bYJa12Q6KmtGhYKLb2MUQfk8fc6tek4ek81M%3D&download=6-1.pdf
高等数学—微积分(2)_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/learn/SDU-192001?tid=572002#/learn/forumdetail?pid=1002461110

中国大学 MOOC(慕课)_最好的在线课程学习平台 http://www.icourse163.org/
中国大学 MOOC(慕课)_最好的在线课程学习平台 http://www.icourse163.org/home.htm#/home?type=0
中国大学 MOOC(慕课)_最好的在线课程学习平台 http://www.icourse163.org/home.htm
高等数学—微积分(2)_中国大学 MOOC(慕课) http://www.icourse163.org/learn/SDU-192001?tid=572002#/learn/content