# uwnibook Color 樣本

◎ 枚鴉

[Department]

2025 年 06 月 04 日

# 序

Preamble 中填入序言

# 目錄

# 1 說明書



## 1.1 快速入門

### 使用範本

君可以 shell 命令復刻簡單範本.

sh
```sh
typst init @preview/uwnibook-color:0.1.0
```

範本內已有 uwnibook-color 模板之基礎. 循理衍其文章、行快而便也. 惟範本素而不飾、本冊 章 2 各例悉備、可以效也.

### 結構

範本結構如是:

```
./
├─ main.typ
├─ uwni-book.typ
├─ citation.bib
└─ chapters/
    ├─ preamble.typ
    ├─ 1_intro.typ
    └─ appendix.typ
```

於 ./ 目錄、行下列命令以成書◆

◆ 或以 IDE 插件 Tinymist

sh
```sh
typst compile main.typ
```

main.typ 全書之本也、開之、所見如此

typst
```typst
#import "uwnibook.typ": *

/// make the title page
#titlepage
```

```
#show: template

#preamble[
  #include "chapters/preamble.typ"
  // #include "chapters/more.typ"
]

/// make the abstract
#outline()

// this is necessary before starting your main text
#mainbody[
  #include "chapters/1_intro.typ"
  // Use the following line to include more chapters
  // #include "chapters/more.typ"
]

#appendix[
  #include "chapters/appendix.typ"
  // #include "chapters/more.typ"
]

/// make the bibliography
#bibliography("citation.bib")

/// make the index
#make-index()
```

**序** `#preamble(content)`
**目次** `#outline()`
**正文** `#mainbody(content)`
**附錄** `#appendix(content)`
**索引** `#make-index()`
體例凡三級、曰「章」、1 級 Heading 也．曰「節」、2 級 Heading 也．曰「小節」、3 級 Heading 也．餘者莫為飾．

## 1.2 基本特性

TODO, 写文档的复杂度超出了我的预料（暂时可参考后文的用法

#### 雙面式樣

#### 辭彙索引

#### 環境與引用

## 1.3 進階功能與預設

#### 以備付梓

- [ ] 出血及裁線以備付梓

## 1.4 解惑

- 惑於 Typst、參閱
  - 官方文檔 https://typst.app/docs/
  - 抑可入中文交流群 https://qm.qq.com/q/iDkMOD4kh4
- 惑於本書版
  - 於 GitHub Issue 垂詢
  - 入中文交流群

# 2 例文分析學

**獨以前文難為察狀貌也.是以作此章句以呈 *uwni-book* 模版之效.試論分析學之種種、不能盡述也.**



## 2.1 集論

### ZFC 公理

### 交集

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

### 勢

集 $S$ 其元之數、名曰**勢**、記曰 $|S|$. 例如 $|\{1,2,3\}| = 3$. 若 $(\exists n \in \mathbb{N}^*)|S| = n$、則稱 $S$ 爲**有限集**、否則爲**無限集**、如分數集、實數集等. 無限集中、$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ 若勢與自然數集之勢等、則名之**可數集**、否則曰**不可數集**. 例如分數集爲可數集、實數集爲不可數集. 有限集之勢皆自然數、且 $|\varnothing| = 0$. 何言其勢等?

$$S \cong T \Leftrightarrow (\exists f : S \to T) f \text{ 對射也}$$

此計數之抽象也、若有 $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ 集、數以一二三四而知其勢乃 4 也. 編號計數法實乃一雙射: $S \to \mathbb{N}^*_{\leq 4}$ 也. 無限集也、雖數不盡其元、猶可較也. 若有集可令其元一一對應於自然數者、正如數盡自然數之勢也.

### 冪集

集 $S$ 全子之所聚也、名曰冪集、記曰 $2^S := \{x \mid x \subset S\}$. 例如 $2^{\{1,2\}} = \{\{\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. $S$ 冪集之勢 $\left|2^S\right| = 2^{|S|}$ 也、請以歸納法證明之: $\left|2^\varnothing\right| = |\{\varnothing\}| = 1$ ,令 $\left|2^S\right| = 2^{|S|}$, 既添一新元 $x$ 於 $S$、其冪集必含原 $2^S$ 諸元、又以 $2^{S \cup \{x\}}$ 之新添乃 $x$ 與舊 $2^S$ 諸元之合併故

$$\left|2^{S\cup\{x\}}\right| = \overbrace{\left|2^{S}\right|}^{\text{原}S\text{之勢}} + \underbrace{\left|2^{S}\times\{x\}\right|}_{\text{新添之勢}} = 2^{|S|}+2^{|S|} = 2^{|S|+1} = 2^{|S\cup\{x\}|}$$

所證如是.

**最大與最小**

論以偏序集之構 $(T,\preceq)$、若 $\forall t\exists m(m\preceq t)$、則稱 $T$ 有**最小元** $m$、記曰 $\min T = m$. 若 $\forall t\exists M(t\preceq M)$、則謂之有**最大元** $M$、記曰 $\max T = M$. 設 $\mathcal{S} \coloneqq \{S \mid S\subseteq T\}$ 爲 $T$ 的子集族

$$\max\left(\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S\right) = \max\{\max S \mid S\in\mathcal{S}\}$$

$(\forall t_1\in T_1)(\forall t_2\in T_2)$

$$t_1 \leq \max T_1 \leq \max\{\max T_1, \max T_2\} \wedge t_2 \leq \max T_2 \leq \max\{\max T_1, \max T_2\}$$

- 有限偏序集不常有最大最小元. 例如 $T=\{\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$、偏序關係 $\preceq = \mathrm{id}$. 所以無最大及最小元者、不可相較而已.
- 有限全序集常有最大最小元. 請擬以歸納證明之
  1. $|S|=1$、$S$ 之元唯一、即最大最小元也.
  2. $|S|=2$、設 $S=\{t_1,t_2\}$、其最元得計算如下
  $$\max S = \begin{cases} t_1 & \text{if } t_2\preceq t_1 \\ t_2 & \text{if } t_1\preceq t_2 \end{cases}, \qquad \min S = \begin{cases} t_1 & \text{if } t_1\preceq t_2 \\ t_2 & \text{if } t_2\preceq t_1 \end{cases}$$
  3. 設 $|S|=N$、$S$ 有最大元 $M$ 與最小元 $m$.
  4. 察 $|S|=N+1$、令 $S'=S\setminus\{s\}$. 由前款知 $S'$ 有最大元 $M'$ 與最小元 $m'$. 然則 $\max S=\max\{M',s\}, \min S=\min\{m',s\}$ 也. 即 $S$ 有最大最小元也.

集之界、不逾之境也. 凡集 $S\subseteq T$ 之元 $s$、其或 $s\leq M$ 者、則名 $M$ 爲 $S$ 一**上界**. 反之、若 $M\leq s$ 則喚作**下界**. 若上下界並存、則謂之**有界**. 界不必屬於集也. 上界之最小者、號曰**上確界**、或曰最小上界、記曰 $\sup S$. 下界之最大者、號曰**下確界**、或曰最大下界、記曰 $\inf S$.

$$\sup S = \min\{t\in T \mid s\in S, s\leq t\}$$

$$\inf S = \max\{t\in T \mid s\in S, t\leq s\}$$

例以上界與上確界、察其性質、凡有二項、一曰 $\sup S$ 乃 $S$ 之上界也、二曰凡其上界莫小於 $\sup S$ 也、即最小之上界也. 請問偏序集恆有上界乎? 1. 有限集顯然恆有界、且 $\sup S=\max S$ 而 $\inf S=\min S$ 也. 依序可列 $S$ 之元,

## 2.2 代數

**關係**

稱集 $R\subseteq A\times B$ 爲集 $A$、$B$ 上之**二元關係**、畧以關係. 若 $A=B$ 即 $R\subseteq A^2$ 則畧以 $A$ 上之關係. 若以中綴表達式記 $a\in A$ 與 $b\in B$ 之適關係 $R$ 者、曰 $aRb$:

$$aRb \Leftrightarrow (\forall r\in R)(\exists a\in A)(\exists b\in B)r=(a,b)$$

亦可記作前綴表達式並輔以括弧讀號、如 $R(a,b)$. 這裡舉例同窗關係、朋友關係

**恆等關係**

記 $S$ 上之**恆等關係**曰 $\mathrm{id}_S$

$$\mathrm{id}_S \coloneqq \{(s,s) \mid s \in S\}$$

例如 $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$、$\mathrm{id}_S = \{(\clubsuit,\clubsuit),(\diamondsuit,\diamondsuit),(\heartsuit,\heartsuit)\}$

**偏序關係**

設以并關係集 $(S, \preceq)$、並有

**自反性** $(\forall s \in S) s \preceq s$

**反對稱性** $(\forall s,t \in S) s \preceq t \wedge t \preceq s \to s = t$

**傳遞性** $(\forall s,t,u \in S) s \preceq t \wedge t \preceq u \to s \preceq u$

則名 $\preceq$ 曰**偏序關係**．偏序關係之最小者、唯有恆等關係也．不難證明之．

1. id 適自反性、反對稱性、傳遞性、故爲偏序關係也．
2. 凡 $(\forall s \in S)\, \mathrm{id} \setminus \{(s,s)\}$ 之關係皆以有違自反性而非偏序關係也．故最小也
3. 凡偏序關係必含 id 也．可以歸謬法示其唯一也．

**全序關係**

若改 $\preceq$ 之自反性爲完全性、即

$$\begin{aligned} \text{完全性：} \quad & (\forall s,t \in S) s \preceq t \vee t \preceq s \\ \text{反對稱性：} \quad & (\forall s,t \in S) s \preceq t \wedge t \preceq s \to s = t \\ \text{傳遞性：} \quad & (\forall s,t,u \in S) s \preceq t \wedge t \preceq u \to s \preceq u \end{aligned}$$

則謂之**全序關係**、或曰**鏈**．凡全序之關係、恆偏序也．請備述之．全序關係滿足反對稱性與傳遞性、並以完全性蘊含自反性即知其亦偏序也．

## 2.3 換元術

夫換元之術者、分析學之魂魄也．以之解方程、求積分、皆有其用．且其法之簡明、使人易於理解．換元本爲函數之複合、請例以如下．求函數 $f(x) = 1 - x^2$ 之最大值．作換元 $g : x \mapsto \cos t$ 得

$$x \xrightarrow{g} \cos t \xrightarrow{f} 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

而其最值瞭然也． 簡記一階邏輯

$$(\forall a \in A) p(a) \Leftrightarrow \forall a (a \in A \to p(a))$$

## 2.4 數列單調收斂之定理

凡單調遞增數列之有上界者與單調遞減數列之有下界者、皆收斂．請證明之．

## 2.5 整數論

相等關係

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$$

凡自然數 $n$、察對射於 $\mathbb{N} \to \{n - 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 上者 $n \mapsto n - 0$．知整數之形如 $n - 0$ 者同構於 $\mathbb{N}$ 也．故可以整數 $n$ 記自然數 $n - 0$ 而無虞也． 逆元

$$-a \coloneqq 0 - a$$

## 2.6 分數論

相等關係

$$a//b = c//d \Leftrightarrow ad = bc$$

必有

$$(\exists x//y \in [a//b])\,\gcd(x, y) = 1$$

**約式**、或曰**最簡分式**、分式之子母互素者也. 例如 1/1、2/3、5/8. 以其子母皆最小、立爲 $\mathbb{Q}/=$ 之代表元也. 稱性: $a$

## 2.7 實數論

請問、正方形之對角線長 $l$ 幾何? 以勾股定理知 $l^2 = 2$、擬其長以一分數之約式 $l = p/q$

$l^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2 \mid p^2 \Leftrightarrow 2 \mid p$

$$\Leftrightarrow \exists p'(p = 2p') \Leftrightarrow 2p'^2 = q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q$$

$p$ 與 $q$ 皆偶數、而 $p/q$ 非約式也. 故知 $l$ 非分數之屬也. 以῞Ιππασος 之初覺爲嚆矢、分數之遺缺始昭於天下矣. 此所以分數不可以度量也.

另察一例、有集分數其平方皆小於 2 者

$$\mathbb{Q}_{<\sqrt{2}} \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

即知有上界也. 而無上確界. 擬以歸謬法證之: 設其上確界爲 $\bar{x}$、則 $\forall x \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} \geq x$、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} - \varepsilon < y$$

由全序關係之三歧性知

1. 若 $\bar{x}^2 = 2$: 證偽
2. 若 $\bar{x}^2 > 2$、需證明 $\exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, y < \bar{x}$、設 $y = \bar{x} - \varepsilon$、並使 $y^2 > 2$. 即 $y$ 爲上界而甚小耳.

   $$(\bar{x} - \varepsilon)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 \Leftarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon \geq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}}$$

   不妨取 $\varepsilon = \frac{\bar{x}^2-2}{2\bar{x}}$、即爲證
3. 若 $\bar{x}^2 < 2$、需證明 $\exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, y > \bar{x}$、設 $y = \bar{x} + \varepsilon$. 即 $\bar{x}$ 乃非上界耳.

   $$y^2 = (\bar{x} + \varepsilon)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 \Leftarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon \leq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{2 - \bar{x}^2}{2\bar{x}}$$

   不妨取 $\varepsilon = \frac{2-\bar{x}^2}{2\bar{x}}$、即爲證

故知 $\mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}$ 上確界之不存也.

二例.

$$\mathbb{Q}_{<2} \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 4\}$$

可知 $x \geq 2$ 皆上界也、而$\sup \mathbb{Q}_{<2} = 2$也

凡 $Q$ 爲 $\mathbb{Q}$ 上非空有上界子集、則定義為實數. 全序集 $(X, \preceq)$. 若其非空子集之有上界者有上確界. 曰**序完備**

**命題 2.1**

以下三命題等價也

1. $(X, \preceq)$ 序完備也
2. $X$ 非空子集之有下界者有下確界也
3. 凡 $\forall A, B \subseteq X$ 不空、$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b \to (\exists c \in X)(\forall a \in A, \forall b \in B) a \leq c \leq b$ 也.

## 2.8 極限

Figure 2.1 Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

若夫極限者、古希臘之先賢始用、至 Cauchy 嚴明定義之、已歷數千年矣. 然微分與無窮小之辯、相爭其存廢逾千載未能決也. 其或爲 0、或幾及 0 而非 0. 時 0 而時亦非 0、George Berkeley 等甚異之. 而物理學家總以無窮小算得正確之結果、故不以爲謬也. 數學之理也、必明必晰. 然則應先申明極限為何物、而後可以道嚴謹之分析而無虞也.

**定義 2.1 極限**

稱數列 $\{a_n\}$ 之極限曰

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} a_n = L \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N)|a_n - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

極限者近而不逮、傍而未屆也. $a_n$ 之值將屆於 $L$、抑不之至. 不得知也. 若以 $\varepsilon - N$ 定義論之. 恣取正數 $\varepsilon$、不論大小、必存一處 $N$、凡 $n$ 之後於 $N$ 者、$a_n$ 與 $L$ 相距幾微. 何以知其然也? 蓋其相距小於 $\varepsilon$ 者也. 凡正數者、皆見小於 $a_n$ 與 $L$ 之相距、此所以度量其近也. 豈非因 $n$ 之漸長而 $a_n$ 幾及於 $L$ 耶?!

### 單調有界性之定理

數列之收斂者、其極限必存焉. 以單調有界性之定理得知其收斂而不得知其極限也. 欲察極限幾何、猶須探其值而後驗以定義也. 幸有各術如下以索數列之極限、一曰夾逼定理、二曰四則運算、三曰 Stolz-Cesàro 定理也.

### 夾逼定理

夾逼定理者、求極限之要術也. 設有數列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$、自某項起恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$、且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$、則必有 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ 也.

**命題 2.2 夾逼定理**

設數列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 滿足

$$(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N) a_n \leq b_n \leq c_n$$

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$、則 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

證明: 以極限定義證之. 設 $\forall \varepsilon > 0$、因 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$、故

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N_1)|a_n - L| < \varepsilon$$

即 $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$. 同理、因 $\lim_{n\to\infty} c_n=L$、故

$$(\exists N_2\in\mathbb{N}^*)(\forall n>N_2)|c_n-L|<\varepsilon$$

即 $L-\varepsilon<c_n<L+\varepsilon$.

取 $N_0=\max\{N,N_1,N_2\}$、則當 $n>N_0$ 時有

$$L-\varepsilon<a_n\le b_n\le c_n<L+\varepsilon$$

故 $|b_n-L|<\varepsilon$、即 $\lim_{n\to\infty} b_n=L$. ∎

若數列 $\{b_n\}$ 之極限難求、但得覓取上下夾逼之數列 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$、則可藉求 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 之極限而得 $\{b_n\}$ 之極限也.

舉例以言之.

**例 2.1**

請證

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

蓋 $|\sin n|\le 1$、故

$$-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$$

而 $\lim_{n\to\infty} 1/n=\lim_{n\to\infty}(-1/n)=0$、由夾逼定理知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ 也.

夾逼定理不獨用於數列、亦可推廣於函數極限. 設函數 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 於點 $x_0$ 之某鄰域內（或去心鄰域內）滿足 $f(x)\le g(x)\le h(x)$、且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=L$、則 $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ 也.

### 極限之代數運算

極限之加減乘除是也. 設以 $\lim_{n\to\infty} a_n=L$、$\lim_{n\to\infty} b_n=M$、由定義知 $\forall\varepsilon>0$

$$(\exists N_a\in\mathbb{N}^*)(\forall n>N_a)|a_n-L|<\varepsilon$$
$$\land\quad(\exists N_b\in\mathbb{N}^*)(\forall n>N_b)|b_n-M|<\varepsilon$$

故而 $|-a_n-(-L)|=|a_n-L|<\varepsilon$、是以

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n)=-L \tag{2.1}$$

也. 設 $N\coloneqq\max\{N_a,N_b\}$、以三角不等式

$$|a_n+b_n-(L+M)|\le|a_n-L|+|b_n-M|<2\varepsilon$$

故而

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L+M \tag{2.2}$$

並由式 (2.1) 可知 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=L-M$ 也.

此所以極限之代數運算效也.

$$|a_nb_n-LM|$$

## 2.9 級數論

級數者、數列之累和也. 累數列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 項之和、名曰 $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$. 則記

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n$$

爲**無窮級數**、畧作**級數**. 其中凡 $a_n > 0$ 者、謂之**正項級數**. 若 $s_n$ 收斂即曰級數收斂. $s_n$ 發散即謂之級數發散.

**命題 2.3**

凡級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 之收斂者

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

證明: 不妨設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$、$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ 收斂於 $L$. 然則由極限定義知、於凡正數 $\varepsilon > 0$ 之中、必存有一自然數 $N$、而凡自然數 $n$ 之 $n > N+1$ 者

$$|s_{n-1} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

然則

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $s_n = s_{n-1} + a_n$、故 $\forall n > N$

$$|s_n - L - (s_{n-1} - L)| \leq |s_n - L| + |s_{n-1} - L| < \varepsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

欲料反之然否、請道以下例.

**例 2.2 調和級數**

調和級數者、形如 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 之級數也. 雖 $1/n \to 0$ 於 $n \to \infty$、然其級數發散. 請證以比較審斂法:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

分組而計:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

無界而知其發散也. 此為 Nicole Oresme 於十四世紀所證也.

有諸據可以斷級數之斂散. 請道其詳.

**檢比術**

**檢根術**

## 2.10 常數 e

常數 e、或曰**自然底數**、初見於複利率之計算．凡 $n > 0$ 有定義曰

$$\mathrm{e} \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

此處唯需證明 RHS 收斂．請道其證法

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^{\underline{k}}}{k!n^k}$$

$\frac{n^{\underline{k}}}{k!n^k} > 0$、則知 $a_n$ 之嚴格遞增矣．張之

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

茲定義曰 $e_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} 1/k!$、逐項比較即知 $a_n < e_n$

由 $(\forall k \geq 1)\ 1/k! \leq 1/2^{k-1}$

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e_n &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{2\times\cdots\times(n-1)\times n} \\ &\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

抑由

$$(\forall k \geq 2)\quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

亦得所欲證．由定義知 $\sup a_n = \mathrm{e}$ 也． 法前例亦可得證 $e_n$ 之收斂．然 $\lim_{n\to\infty} e_n \stackrel{?}{=} \mathrm{e}$ 之真僞猶未可辨、不宜臆斷．

再證二者收斂於同處．庶幾以夾逼定理證之、唯需各項 $a_n < e_n < \mathrm{e}$．以上圖料其然也．然理學也非證不信非驗不服．請證之如下．令式 (2.3) 之 $n \to \infty$、左邊收斂於 e 而 右邊 $\simeq e_n$ 也．故 $e_n < \mathrm{e}$、然則可以[假幣定理]得其證矣．

此二例以其典據垂於史、而級數之收斂至 e 者止此二例歟? 另察一例 $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ 可見

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$$

有違於前、$b_n$ 單調遞減並收斂至 e 也．請證明如下

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

欲證明 $\forall n > 1$、$b_n/b_{n-1} < 1$、即求證

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < \frac{n}{n+1}$$

凡 $x \in (0,1]$、因 $(1-x)(1+x) = 1-x^2 < 1$ 故 $(1-x)^n < (1+x)^{-n}$、換元以 $x \mapsto 1/n^2$、並乘兩邊以 $1+1/n$、再以 Bernoulli 不等式得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)^{-1} = 1$$

$b_n/b_{n-1} < 1$ 也. 而 $b_n$ 之嚴格遞減可知矣. 故 $\inf b_n = \mathrm{e}$

### 指數函數

定義 exp 函數曰

**定義 2.2 exp 函數**

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

審其斂散、法以比值

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \bigg/ \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0 \ \text{當}\ n \to \infty$$

故冪級數 $\exp x$ 於 $\mathbb{R}$ 處處絕對收斂也.

## 2.11 差分方程論

請問線性微分方程如 $y'' + y = 0$ 者當作何解? 得特徵方程 $r^2 + 1 = 0$ 有根 $r = \pm i$ 故知通解爲 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. 代入即明此誠爲其解也. 此**全解**耶? 請論其理. 定義數列 $\{x_n\}$ 之**前向差分算子**曰

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

而**逆向差分算子**曰

$$\nabla x_n = x_n - x_{n-1}$$

$n \geq 0$ 階差分遞歸定義曰

$$\Delta^n = \begin{cases} I & \text{if } n = 0 \\ \Delta \circ \Delta^{n-1} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

因 $\Delta(ax_n + by_n) = a\Delta x_n + b\Delta y_n$、可知 $\Delta$ 爲線性算子. 又以 $I$ 之線性、知 $\Delta^n$ 亦線性也. 稱形如

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k x_k = b$$

之方程式曰 $n$ **階常係數差分方程**. 特稱 $b = 0$ 者爲**齊次**、否則爲**非齊次**. 若有一列數 $\hat{x}_n$ 可令 $x_n = \hat{x}_n$ 滿足方程、則稱 $\hat{x}_n$ 爲方程之**解**. 請探其性質. 凡非齊次方程之解 $\{\hat{x}_n\}$、$\{\hat{y}_n\}$、其和 $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$ 亦解矣

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k (\alpha \hat{x}_k + \beta \hat{y}_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k \hat{x}_k + \beta \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k \hat{y}_k = 0$$

# 附錄 A

# EXPERIMENT DATA

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.

## A.1 A aaa

# PROOF OF

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius. Ego autem mirari satis non queo unde hoc sit tam insolens domesticarum rerum fastidium. Non est omnino hic docendi locus; sed ita prorsus existimo, neque eum Torquatum, qui hoc primus cognomen invenerit, aut torquem illum hosti detraxisse, ut aliquam ex eo est consecutus? – Laudem et caritatem, quae sunt vitae sine metu degendae praesidia firmissima. – Filium morte multavit. – Si sine causa, nollem me ab eo delectari, quod ista Platonis, Aristoteli, Theophrasti orationis ornamenta neglexerit. Nam illud quidem physici, credere aliquid esse minimum, quod profecto numquam putavisset, si a Polyaeno, familiari suo, geometrica discere maluisset quam illum etiam ipsum dedocere. Sol Democrito magnus videtur, quippe homini erudito in geometriaque perfecto, huic pedalis fortasse; tantum enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut fastidii delicatissimi. Mihi quidem videtur, inermis ac nudus est. Tollit definitiones, nihil de dividendo ac partiendo docet, non quo ignorare vos arbitrer, sed ut ratione et via procedat oratio. Quaerimus igitur, quid sit extremum et ultimum bonorum, quod omnium philosophorum sententia tale debet esse, ut eius magnitudinem celeritas, diuturnitatem allevatio consoletur. Ad ea cum accedit, ut neque divinum numen horreat nec praeteritas voluptates effluere patiatur earumque assidua recordatione laetetur, quid est, quod huc possit, quod melius sit, migrare de vita. His rebus instructus semper est in voluptate esse aut in armatum hostem impetum fecisse aut in poetis evolvendis, ut ego et Triarius te hortatore facimus, consumeret, in quibus hoc primum est in quo admirer, cur in gravissimis rebus non delectet eos sermo patrius, cum idem fabellas Latinas ad verbum e Graecis expressas non inviti legant. Quis enim tam inimicus paene nomini Romano est, qui Ennii Medeam aut Antiopam Pacuvii spernat aut reiciat, quod se isdem Euripidis fabulis delectari dicat, Latinas litteras oderit? Synephebos ego, inquit, potius Caecilii aut Andriam Terentii quam utramque Menandri legam? A quibus tantum dissentio, ut, cum Sophocles vel optime scripserit Electram, tamen male conversam Atilii mihi legendam putem, de quo Lucilius: 'ferreum scriptorem', verum, opinor, scriptorem tamen, ut legendus sit. Rudem enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut in dolore. Omnis autem privatione doloris putat Epicurus.

# 參考文獻

# 索引