一个函数秒杀 2Sum 3Sum 4Sum 问题

Original labuladong 2020-07-06 22:57
https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzAxODQxMDM0Mw==&mid=2247485789&idx=1&sn=efc1167b85011c019e05d2c3db1039e6&scene=21#wechat_redirect

经常刷 LeetCode 的读者肯定知道鼎鼎有名的 twoSum 问题，我们的旧文 Two Sum 问题的核心思想 对 twoSum 的几个变种做了解析。
但是除了 twoSum 问题，LeetCode 上面还有 3Sum，4Sum 问题，我估计以后出个 5Sum，6Sum 也不是不可能。
那么，对于这种问题有没有什么好办法用套路解决呢？本文就由浅入深，层层推进，用一个函数来解决所有 nSum 类型的问题。

一、twoSum 问题

力扣上的 twoSum 问题，题目要求返回的是索引，这里我来编一道 twoSum 题目，不要返回索引，返回元素的值：
如果假设输入一个数组 nums 和一个目标和 target，请你返回 nums 中能够凑出 target 的两个元素的值，比如输入 nums = [5,3,1,6], target = 9，那么算法返回两个元素 [3,6]。可以假设只有且仅有一对儿元素可以凑出 target。
我们可以先对 nums 排序，然后利用前文 「双指针技巧汇总」写过的左右双指针技巧，从两端相向而行就行了：

```
vector<int> twoSum(vector<int>& nums, int target) {
    // 先对数组排序
    sort(nums.begin(), nums.end());
    // 左右指针
    int lo = 0, hi = nums.size() - 1;
    while (lo < hi) {
        int sum = nums[lo] + nums[hi];
        // 根据 sum 和 target 的比较，移动左右指针
        if (sum < target) {
            lo++;
        } else if (sum > target) {
            hi--;
        } else if (sum == target) {
            return {nums[lo], nums[hi]};
        }
    }
    return {};
}
```

这样就可以解决这个问题，不过我们要继续魔改题目，把这个题目变得更泛化，更困难一点：nums 中可能有多对儿元素之和都等于 **target**，请你的算法返回所有和为 target 的元素对 儿，其中不能出现重复。

函数签名如下：

```
vector<vector<int>> twoSumTarget(vector<int>& nums, int target);
```

比如说输入为 nums = [1,3,1,2,2,3], target = 4，那么算法返回的结果就是：[[1,3],[2,2]]。
对于修改后的问题，关键难点是现在可能有多个和为 target 的数对儿，还不能重复，比如上述例子中 [1,3] 和 [3,1] 就算重复，只能算一次。
首先，基本思路肯定还是排序加双指针：

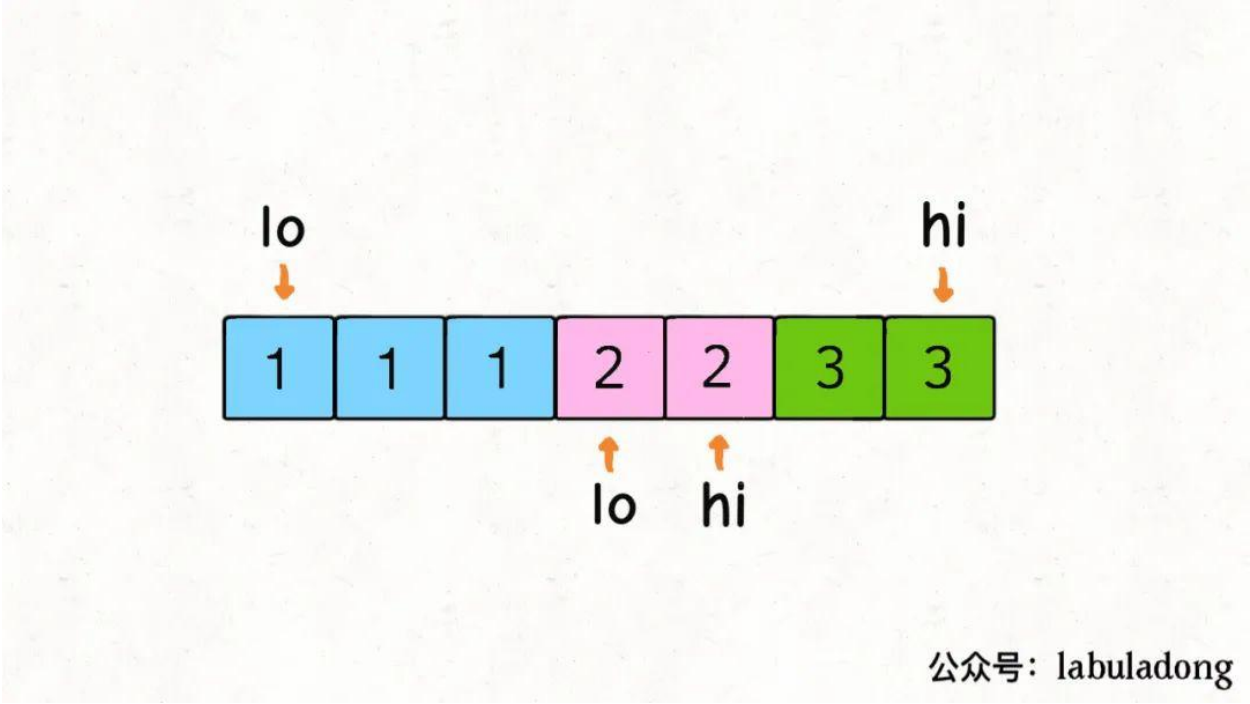
```
vector<vector<int>> twoSumTarget(vector<int>& nums, int target {
    // 先对数组排序
    sort(nums.begin(), nums.end());
    vector<vector<int>> res;
    int lo = 0, hi = nums.size() - 1;
    while (lo < hi) {
        int sum = nums[lo] + nums[hi];
        // 根据 sum 和 target 的比较，移动左右指针
        if      (sum < target) lo++;
        else if (sum > target) hi--;
        else {
            res.push_back({lo, hi});
            lo++; hi--; // important
        }
    }
    return res;
}
```

但是，这样实现会造成重复的结果，比如说 nums = [1,1,1,2,2,3,3], target = 4，得到的结果中 [1,3] 肯定会重复。
出问题的地方在于 **sum == target** 条件的 **if** 分支，当给 **res** 加入一次结果后，**lo** 和 **hi** 不应该改变 **1** 的同时，还应该跳过所有重复的元素：

所以，可以对双指针的 while 循环做出如下修改：

```
while (lo < hi) {
    int sum = nums[lo] + nums[hi];
    // 记录索引 lo 和 hi 最初对应的值
    int left = nums[lo], right = nums[hi];
    if (sum < target)      lo++;
    else if (sum > target) hi--;
    else {
        res.push_back({left, right});
        // 跳过所有重复的元素 important !!!
        while (lo < hi && nums[lo] == left) lo++;
```

```
        while (lo < hi && nums[hi] == right) hi--;
    }
}
```



这样就可以保证一个答案只被添加一次，重复的结果都会被跳过，可以得到正确的答案。不过，受这个思路的启发，其实前两个 if 分支也是可以做一点效率优化，跳过相同的元素：

```
vector<vector<int>> twoSumTarget(vector<int>& nums, int target) {
    // nums 数组必须有序
    sort(nums.begin(), nums.end());
    int lo = 0, hi = nums.size() - 1;
    vector<vector<int>> res;
    while (lo < hi) {
        int sum = nums[lo] + nums[hi];
        int left = nums[lo], right = nums[hi];
        if (sum < target) {
            while (lo < hi && nums[lo] == left) lo++;
        } else if (sum > target) {
            while (lo < hi && nums[hi] == right) hi--;
        } else {
            res.push_back({left, right});
            while (lo < hi && nums[lo] == left) lo++;
            while (lo < hi && nums[hi] == right) hi--;
        }
    }
```

```
    return res;
}
```

这样，一个通用化的 twoSum 函数就写出来了，请确保你理解了该算法的逻辑，我们后面解决 3Sum 和 4Sum 的时候会复用这个函数。
这个函数的时间复杂度非常容易看出来，双指针操作的部分虽然有那么多 while 循环，但是时间复杂度还是 O(N)，而排序的时间复杂度是 O(NlogN)，所以这个函数的时间复杂度是 O(NlogN)。

二、3Sum 问题 (a + b + c) = 0

这是力扣第 **15** 题「三数之和」
题目就是让我们找 nums 中和为 0 的三个元素，返回所有可能的三元组（triple），函数签名如下

```
vector<vector<int>> threeSum(vector<int>& nums);
```

这样，我们再泛化一下题目，不要光和为 0 的三元组了，计算和为 target 的三元组吧，同上面的 twoSum 一样，也不允许重复的结果：

```
vector<vector<int>> threeSum(vector<int>& nums) {
    // 求和为 0 的三元组
    return threeSumTarget(nums, 0);
}
vector<vector<int>> threeSumTarget(vector<int>& nums, int target) {
    // 输入数组 nums，返回所有和为 target 的三元组
}
```

这个问题怎么解决呢？很简单，穷举呗。现在我们想找和为 target 的三个数字，那么对于第一个数字，可能是什么？nums 中的每一个元素 nums[i] 都有可能！
那么，确定了第一个数字之后，剩下的两个数字可以是什么呢？其实就是和为 target - nums[i] 的两个数字呗，那不就是 twoSum 函数解决的问题么🤔
可以直接写代码了，需要把 twoSum 函数稍作修改即可复用：

```
// 从 nums[start] 开始，计算有序数组
// nums 中所有和为 target 的二元组
vector<vector<int>> twoSumTarget(
    vector<int>& nums, int start, int target) {
    // 左指针改为从 start 开始，其他不变
    int lo = start, hi = nums.size() - 1;
    vector<vector<int>> res;
    while (lo < hi) {
        ...
    }
    return res;
}
```

```
// 计算数组 nums 中所有和为 target 的三元组
vector<vector<int>> threeSumTarget(vector<int>& nums, int target) {
    // 数组得排个序
    sort(nums.begin(), nums.end());
    int n = nums.size();
    vector<vector<int>> res;
    // 穷举 threeSum 的第一个数
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // 对 target - nums[i] 计算 twoSum
        vector<vector<int>>
            tuples = twoSumTarget(nums, i + 1, target - nums[i]);
        // 如果存在满足条件的二元组，再加上 nums[i] 就是结果三元组
        for (vector<int>& tuple : tuples) {
            tuple.push_back(nums[i]);
            res.push_back(tuple);
        }
        // 跳过第一个数字重复的情况，否则会出现重复结果
        while (i < n - 1 && nums[i] == nums[i + 1]) i++;
    }
    return res;
}
```

需要注意的是，类似 twoSum，3Sum 的结果也可能重复，比如输入是 nums = [1,1,1,2,3], target = 6，结果就会重复。
关键点在于，不能让第一个数重复，至于后面的两个数，我们复用的 twoSum 函数会保证它们不重复。所以代码中必须用一个 while 循环来保证 3Sum 中第一个元素不重复。
至此，3Sum 问题就解决了，时间复杂度不难算，排序的复杂度为 O(NlogN)，twoSumTarget 函数中的双指针操作为 O(N)，threeSumTarget 函数在 for 循环中调用 twoSumTarget 所以总的时间复杂度就是 O(NlogN + N^2) = O(N^2)。

三、4Sum 问题

这是力扣第 **18** 题「四数之和」
函数签名如下：

```
vector<vector<int>> fourSum(vector<int>& nums, int target);
```

都到这份上了，4Sum 完全就可以用相同的思路：穷举第一个数字，然后调用 3Sum 函数计算剩下三个数，最后组合出和为 target 的四元组。

```
vector<vector<int>> fourSum(vector<int>& nums, int target) {
    // 数组需要排序
    sort(nums.begin(), nums.end());
```

```
    int n = nums.size();
    vector<vector<int>> res;
    // 穷举 fourSum 的第一个数
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // 对 target - nums[i] 计算 threeSum
        vector<vector<int>>
            triples = threeSumTarget(nums, i + 1, target - nums[i]);
        // 如果存在满足条件的三元组，再加上 nums[i] 就是结果四元组
        for (vector<int>& triple : triples) {
            triple.push_back(nums[i]);
            res.push_back(triple);
        }
        // fourSum 的第一个数不能重复
        while (i < n - 1 && nums[i] == nums[i + 1]) i++;
    }
    return res;
}

/* 从 nums[start] 开始，计算有序数组
 * nums 中所有和为 target 的三元组 */
vector<vector<int>>
    threeSumTarget(vector<int>& nums, int start, int target) {
        int n = nums.size();
        vector<vector<int>> res;
        // i 从 start 开始穷举，其他都不变
        for (int i = start; i < n; i++) {
            ...
        }
        return res;
```

这样，按照相同的套路，4Sum 问题就解决了，时间复杂度的分析和之前类似，for 循环中调用了 threeSumTarget 函数，所以总的时间复杂度就是 **O(N^3)**。

四、100Sum 问题？

在 LeetCode 上，4Sum 就到头了，但是回想刚才写 3Sum 和 4Sum 的过程，实际上是遵循相同的模式的。我相信你只要稍微修改一下 4Sum 的函数就可以复用并解决 5Sum 问题，然后解决 6Sum 问题……

那么，如果我让你求 100Sum 问题，怎么办呢？其实我们可以观察上面这些解法，统一出一个 nSum 函数：

```cpp
// 注意：调用这个函数之前一定要先给 nums 排序
vector<vector<int>> nSumTarget(
    vector<int>& nums, int n, int start, int target) {
    int sz = nums.size();
    vector<vector<int>> res;
    // 至少是 2Sum，且数组大小不应该小于 n
    if (n < 2 || sz < n) return res;
    // 2Sum 是 base case
    if (n == 2) {
        // 双指针那一套操作
        int lo = start, hi = sz - 1;
        while (lo < hi) {
            int sum = nums[lo] + nums[hi];
            int left = nums[lo], right = nums[hi];
            if (sum < target) {
                while (lo < hi && nums[lo] == left) lo++;
            } else if (sum > target) {
                while (lo < hi && nums[hi] == right) hi--;
            } else {
                res.push_back({left, right});
                while (lo < hi && nums[lo] == left) lo++;
                while (lo < hi && nums[hi] == right) hi--;
            }
        }
    } else {
        // n > 2 时，递归计算 (n-1) Sum 的结果
        for (int i = start; i < sz; i++) {
            vector<vector<int>>
                sub = nSumTarget(nums, n - 1, i + 1, target - nums[i]);
            for (vector<int>& arr : sub) {
                // (n-1)Sum 加上 nums[i] 就是 nSum
                arr.push_back(nums[i]);
                res.push_back(arr);
            }
            while (i < sz - 1 && nums[i] == nums[i + 1]) i++;
        }
    }
    return res;
}
```

嗯，看起来很长，实际上就是把之前的题目解法合并起来了，n == 2 时是 twoSum 的双指针解法，n > 2 时就是穷举第一个数字，然后递归调用计算 (n-1)Sum，组装答案。

需要注意的是，调用这个 nSum 函数之前一定要先给 nums 数组排序，因为 nSum 是一个递归函数，如果在 nSum 函数里调用排序函数，那么每次递归都会进行没有必要的排序，效率会非常低。

比如说现在我们写 LeetCode 上的 4Sum 问题：

```
vector<vector<int>> fourSum(vector<int>& nums, int target) {
    sort(nums.begin(), nums.end());
    // n 为 4，从 nums[0] 开始计算和为 target 的四元组
    return nSumTarget(nums, 4, 0, target);
}
```

再比如 LeetCode 的 3Sum 问题，找 target == 0 的三元组：

```
vector<vector<int>> threeSum(vector<int>& nums) {
    sort(nums.begin(), nums.end());
    // n 为 3，从 nums[0] 开始计算和为 0 的三元组
    return nSumTarget(nums, 3, 0, 0);
}
```

那么，如果让你计算 100Sum 问题，直接调用这个函数就完事儿了。