图论算法基础（修订版）

797. 所有可能的路径（Medium）

PS：这篇文章是之前 为什么我没写过「图」相关的算法？的修订版，主要是因为旧文中缺少 visited 数组和 onPath 数组的讨论，这里补上，同时将一些表述改得更准确，文末附带图论进阶算法。

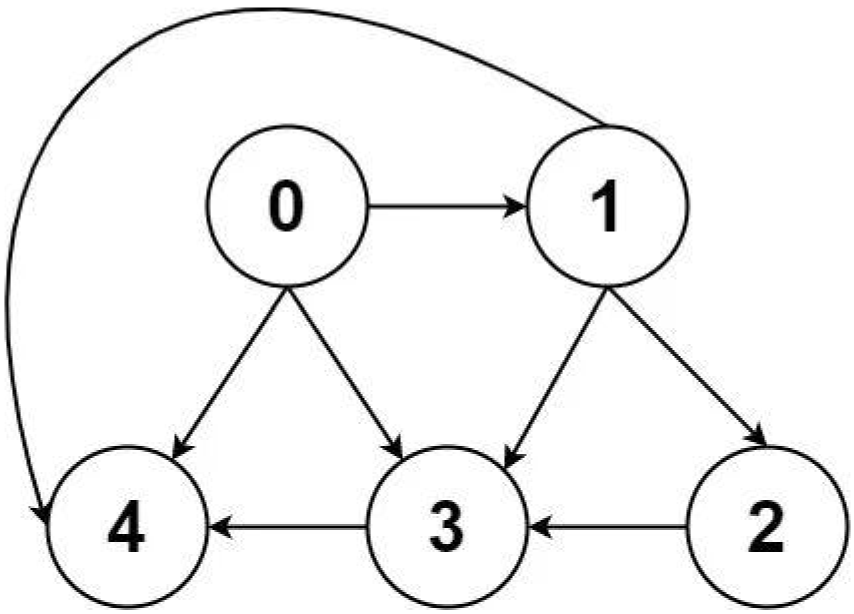
经常有读者问我「图」这种数据结构，其实我在学习数据结构和算法的框架思维 中说过，虽然图可以玩出更多的算法，解决更复杂的问题，但本质上图可以认为是多叉树的延伸。

面试笔试很少出现图相关的问题，就算有，大多也是简单的遍历问题，基本上可以完全照搬多叉树的遍历。

那么，本文依然秉持我们号的风格，只讲「图」最实用的，离我们最近的部分，让你心里对图有个直观的认识，文末我给出了其他经典图论算法，理解本文后应该都可以拿下的。

图的逻辑结构和具体实现

一幅图是由节点和边构成的，逻辑结构如下：



什么叫「逻辑结构」？就是说为了方便研究，我们把图抽象成这个样子。

根据这个逻辑结构，我们可以认为每个节点的实现如下：

```
/* 图节点的逻辑结构 */
class Vertex {
    int id;
    Vertex[] neighbors;
}
```

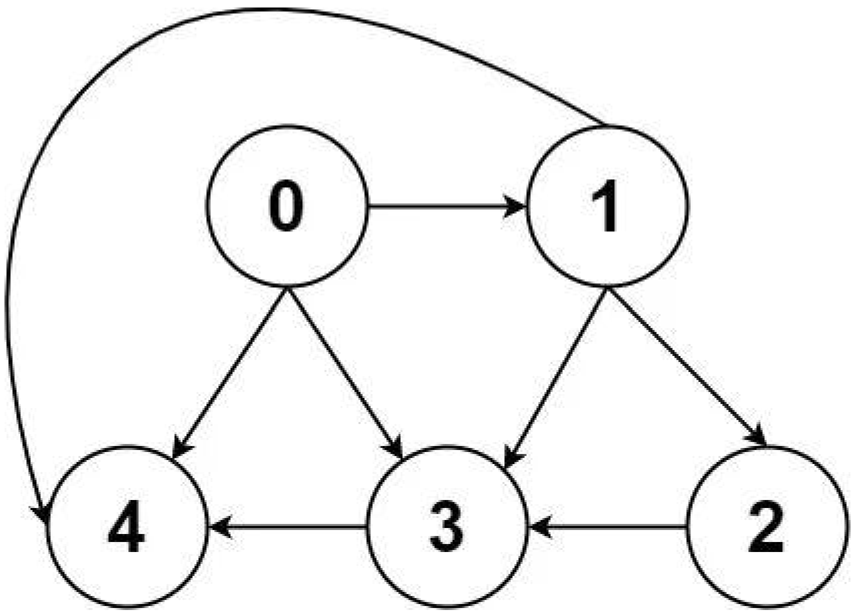
看到这个实现，你有没有很熟悉？它和我们之前说的多叉树节点几乎完全一样：

```
/* 基本的 N 叉树节点 */
class TreeNode {
    int val;
    TreeNode[] children;
}
```

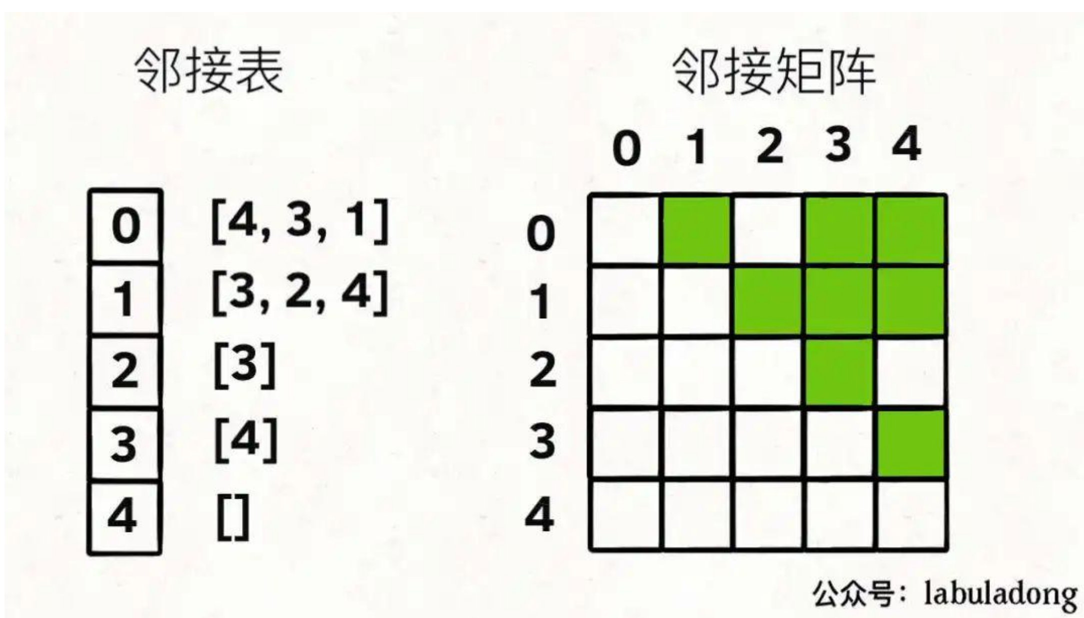
所以说，图真的没啥高深的，就是高级点的多叉树而已。

不过呢，上面的这种实现是「逻辑上的」实际上我们很少用这个**Vertex**类实现图，而是用常说的邻接表和邻接矩阵来实现。

比如还是刚才那幅图：



用邻接表和邻接矩阵的存储方式如下：



邻接表很直观，我把每个节点x的邻居都存到一个列表里，然后把x和这个列表关联起来，这样就可以通过一个节点x找到它的所有相邻节点。
邻接矩阵则是一个二维布尔数组，我们权且称为matrix，如果节点x和y是相连的，那么就把matrix[x][y]设为true（上图中绿色的方格代表true）。如果想找节点x的邻居，去扫一圈matrix[x][..]就行了。
如果用代码的形式来表现，邻接表和邻接矩阵大概长这样：

```
// 邻接表
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点
List<Integer>[] graph;

// 邻接矩阵
// matrix[x][y] 记录 x 是否有一条指向 y 的边
boolean[][] matrix;
```

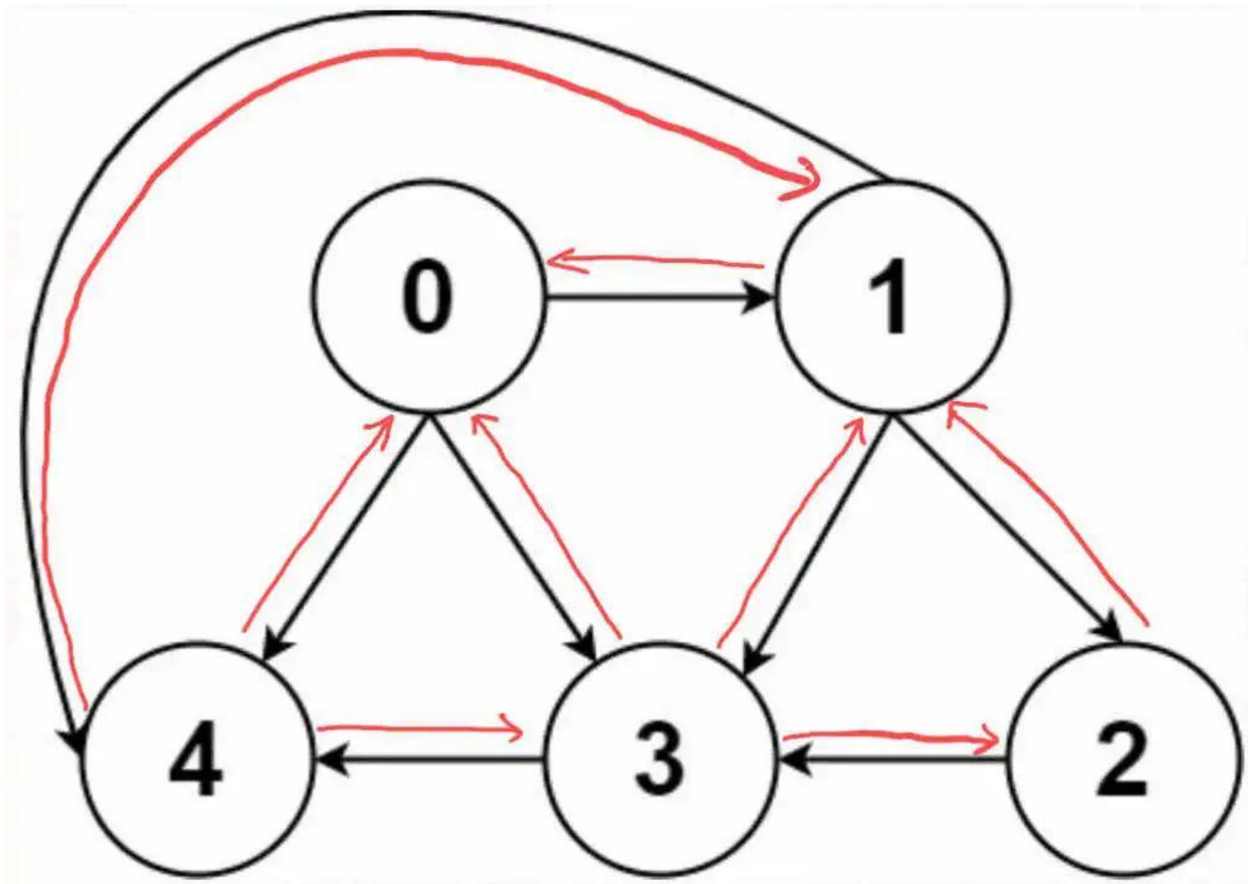
那么，为什么有这两种存储图的方式呢？肯定是因为他们各有优劣。
对于邻接表，好处是占用的空间少。但是，邻接表无法快速判断两个节点是否相邻。
你看邻接矩阵里面空着那么多位置，肯定需要更多的存储空间。
邻接表无法快速判断两个节点是否相邻。
比如说我想判断节点1是否和节点3相邻，我要去邻接表里1对应的邻居列表里查找3是否存在。但对于邻接矩阵就简单了，只要看看matrix[1][3]就知道了，效率高。
所以说，使用哪一种方式实现图，要看具体情况。
好了，对于「图」这种数据结构，能看懂上面这些就绰绰够用了。
那你可能会问，我们这个图的模型仅仅是 有向无权图」，不是还有什么加权图，无向图 等等

其实，这些更复杂的模型都是基于这个最简单的图衍生出来的。
有向加权图怎么实现？很简单呀：
如果是邻接表，我们不仅仅存储某个节点x的所有邻居节点，还存储x到每个邻居的权重，不就实现加权有向图了吗？
如果是邻接矩阵，matrix[x][y]不再是布尔值，而是一个 int 值，0 表示没有连接，其他值表示权重，不就变成加权有向图了吗？
如果用代码的形式来表现，大概长这样：

```
// 邻接矩阵
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点以及对应的权重
List<int[]>[] graph;

// 邻接矩阵
// matrix[x][y] 记录 x 指向 y 的边的权重，0 表示不相邻
int[][] matrix;
```

无向图怎么实现？也很简单，所谓的「无向」，是不是等同于「双向」？



如果连接无向图中的节点x和y，把matrix[x][y]和matrix[y][x]都变成true不就行了；邻接表也是类似的操作，在x的邻居列表里添加y，同时在y的邻居列表里添加x。
把上面的技巧合起来，就变成了无向加权图……
好了，关于图的基本介绍就到这里，现在不管来什么乱七八糟的图，你心里应该都有底了。
下面来看看所有数据结构都逃不过的问题：遍历。

图的遍历

学习数据结构和算法的框架思维 说过，**各种数据结构被发明出来无非就是为了遍历和访问**，所以「遍历」是所有数据结构的基础。
图怎么遍历？还是那句话，参考多叉树，多叉树的遍历框架如下：

```
/* 多叉树遍历框架 */
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;

    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
    }
}
```

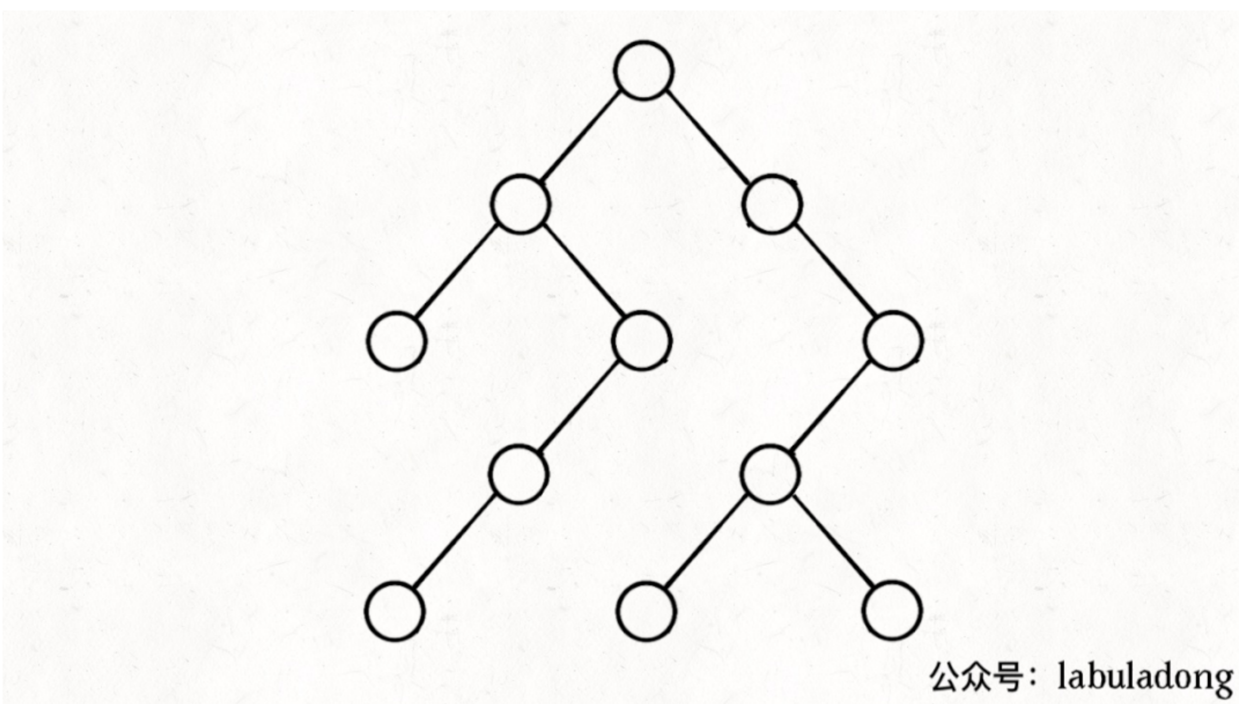
图和多叉树最大的区别是，图是可能包含环的，你从图的某一个节点开始遍历，有可能走了一圈又回到这个节点。

所以，如果图包含环，遍历框架就要一个visited数组进行辅助：

```
// 记录被遍历过的节点
boolean[] visited;
// 记录从起点到当前节点的路径
boolean[] onPath;

/* 图遍历框架 */
void traverse(Graph graph, int s) {
    if (visited[s]) return;
    // 经过节点 s，标记为已遍历
    visited[s] = true;
    // 做选择：标记节点 s 在路径上
    onPath[s] = true;
    for (int neighbor : graph.neighbors(s)) {
        traverse(graph, neighbor);
    }
    // 撤销选择：节点 s 离开路径
    onPath[s] = false;
}
```

注意**visited**数组和**onPath**数组的区别，因为二叉树算是特殊的图，所以用遍历二叉树的过程来理解下这两个数组的区别：



上述 GIF 描述了递归遍历二叉树的过程，在visited中被标记为 true 的节点用灰色表示，在onPath中被标记为 true 的节点用绿色表示，这下你可以理解它们二者的区别了吧。

如果让你处理路径相关的问题，这个onPath变量是肯定会被用到的，比如[拓扑排序](拓扑排序) 中就有运用。

另外，你应该注意到了，这个onPath数组的操作很像 回溯算法核心套路 中做「做选择」和「撤销选择」，

区别在于位置：回溯算法的「做选择」和「撤销选择」在 for 循环里面，而对 onPath数组的操作在 for 循环外面。

在 **for** 循环里面和外面唯一的区别就是对根节点的处理。

比如下面两种多叉树的遍历：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    System.out.println("enter: " + root.val);
    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
    }
    System.out.println("leave: " + root.val);
}

void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    for (TreeNode child : root.children) {
        System.out.println("enter: " + child.val);
        traverse(child);
        System.out.println("leave: " + child.val);
    }
}
```

前者会正确打印所有节点的进入和离开信息，而后者唯独会少打印整棵树根节点的进入和离开信息。

为什么回溯算法框架会用后者？因为回溯算法关注的不是节点，而是树枝，

不信你看 回溯算法核心套路 里面的图。

显然，对于这里「图」的遍历，我们应该把onPath的操作放到 for 循环外面，否则会漏掉记录起始点的遍历。

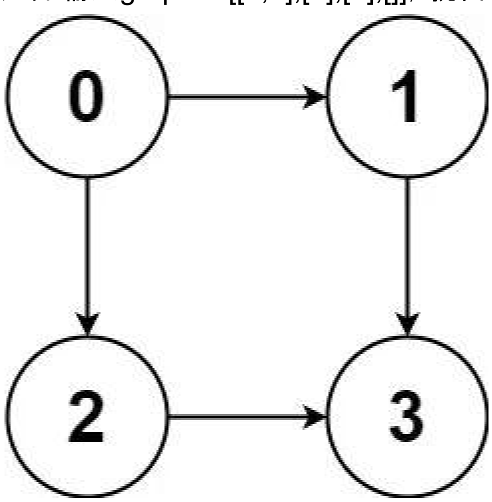
说了这么多onPath数组，再说下visited数组，其目的很明显了 由于图可能含有环，**visited**数组就是防止递归重复遍历同一个节点进入死循环的。
当然，如果题目告诉你图中不含环，可以把**visited**数组都省掉，基本就是多叉树的遍历。

题目实践

下面我们来看力扣第 797 题「所有可能路径」，函数签名如下：

```java
List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph);
```

题目输入一幅有向无环图，这个图包含n个节点，标号为0, 1, 2,..., n - 1，请你计算所有从节点0到节点n - 1的路径。
输入的这个graph其实就是「邻接表」表示的一幅图，graph[i]存储这节点i的所有邻居节点。
比如输入graph = [[1,2],[3],[3],[]], 就代表下面这幅图：



算法应该返回[[0,1,3],[0,2,3]]，即0到3的所有路径。
解法很简单，以0为起点遍历图，同时记录遍历过的路径，当遍历到终点时将路径记录下来即可。
既然输入的图是无环的，我们就不需要visited数组辅助了，直接套用图的遍历框架：

```java
// 记录所有路径
List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();

public List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph) {
    // 维护递归过程中经过的路径
    LinkedList<Integer> path = new LinkedList<>();
    traverse(graph, 0, path);
```

```java
    return res;
}

/* 图的遍历框架 */
void traverse(int[][] graph, int s, LinkedList<Integer> path) {
    // 添加节点 s 到路径
    path.addLast(s);

    int n = graph.length;
    if (s == n - 1) {
        // 到达终点
        res.add(new LinkedList<>(path));
        path.removeLast();
        return;
    }

    // 递归每个相邻节点
    for (int v : graph[s]) {
        traverse(graph, v, path);
    }

    // 从路径移出节点 s
    path.removeLast();
}
```

这道题就这样解决了，注意 Java 的语言特性，向res中添加path时需要拷贝一个新的列表，否则最终res中的列表都是空的。
最后总结一下，图的存储方式主要有邻接表和邻接矩阵，无论什么花里胡哨的图，都可以用这两种方式存储。
在笔试中，最常考的算法是图的遍历，和多叉树的遍历框架是非常类似的。
当然，图还会有很多其他的有趣算法，比如 二分图判定，环检测和拓扑排序（编译器循环引用检测就是类似的算法） 最小生成树，Dijkstra 最短路径算法 等等，有兴趣的读者可以去看看，本文就到这了。