Zadanie projektowe z Modelowania Matematycznego

„Podróbka Transport Tycoon”

Spis treści

Werbalny opis problemu

Twój szef bardzo zainteresował się grą ściągniętą niedawno z Internetu. Jest to gra łudząco podobna do Transport Tycoon – świadczy się różnego rodzaju usługi przewozu i zarabia za to pieniądze. Szefa interesuje wyłącznie transport pociągami, ponieważ w Internecie przeczytał, że jest to najbardziej dochodowe zajęcie na początku gry.

Wszystko odbywa się na mapie, na której znajduje się **L** miast. Na początku gry na mapie nie istnieje żadne połączenie między miastami. Każde z tych miast dzieli pewna odległość **d** wyrażona w jednostkach odległości zwanych „polami”. Każde z miast można połączyć budując między nimi dokładnie tyle kawałków torów, ile wynosi odległość między tymi miastami oraz ponosząc niezależny od odległości koszt zbudowania infrastruktury kolejowej **b**. Zbudowanie jednego „kawałka” torów, pozwalającego przebyć odległość jednego pola, kosztuje **t** pieniędzy. Każde z miast ma swój rozmiar **g** reprezentujący liczbę mieszkańców w tym mieście.
Ilość pieniędzy pozyskana z trasy między dwoma miastami jest funkcją rozmiarów tych miast oraz odległości między nimi.

Zadanie otrzymane od szefa brzmi: Znajdź taki sposób połączenia miast, aby zarobić jak najwięcej pieniędzy. Nie ma znaczenia koszt, oczywiście dopóki zmieścisz się w budżecie **P**.

Dodatkowo Szef, który jest bardzo początkującym graczem i nie potrafi dobrze tworzyć zaawansowanej sieci kolejowej, nałożył dodatkowe ograniczenia:

- **każde połączenie musi być bezpośrednie i tylko między dwoma miastami** - aby uniknąć konieczności synchronizacji pociągów z różnych tras na jednych torach
- **można położyć maksymalnie m „kawałków” torów**, gdzie każdy „kawałek” pozwala pokonać jedną jednostkę odległości – aby szef nie musiał zbyt dużo budować
- **można utworzyć co najwyżej n połączeń**

Występują też pewne ułatwienia wynikające z tego, że szef korzysta ze specjalnie zmodyfikowanej (uproszczonej na jego życzenie) wersji gry:

- **wszystkie połączenia można zawsze budować w linii prostej –** liczy się tylko odległość
- **można pominąć rozpatrywanie, czy tory na różnych trasach się przecinają**
- **każde miasto może być połączone z dowolnie dużą liczbą innych miast**
- **różne połączenia w jednym mieście w żaden sposób nie wpływają na siebie wzajemnie**
- **cała inwestycja nie generuje żadnych kosztów utrzymania** – liczy się tylko początkowy koszt zakupu
- **wszystko działa bezawaryjnie i nigdy się nie psuje**
- **na każdej trasie jeździ dokładnie jeden pociąg**

Cechy

$\boldsymbol{L}$ **–** liczba wszystkich miast

$\boldsymbol{d_{ij}}$ – odległość między miastami o indeksach i oraz j gdzie $i, j = \overline{1, L}$. Zawsze $d_{ij} = d_{ji}$ oraz zawsze $d_{ii} = 0$

$\boldsymbol{g_i}$ - rozmiar miasta o indeksie i (i = $\overline{1, L}$)

funkcja $\boldsymbol{F}: \langle g_1, g_2, d \rangle \in Q^2 \times N^+ \rightarrow Q^+$ która mówi, ile pieniędzy przyniesie wybudowanie trasy między miastami o wielkościach g_1 i g_2 oraz odległości między nimi d. Nie ma znaczenia, która z wielkości jest przyjęta jako g_1 a która jako g_2.

b – stały, niezależny od odległości, bazowy koszt utworzenia połączenia: koszt wybudowania peronów oraz zakupienia jednego pociągu

t – stały koszt wybudowania jednego „kawałka” torów

m – maksymalna ilość kawałków torów, jaką można zastosować

n – maksymalna ilość różnych połączeń, które można stworzyć

K – liczba wszystkich połączeń

$\boldsymbol{o_{ij}}$ - wartość binarna reprezentująca, czy między miastami o indeksach i oraz j (i,j = $\overline{1, L}$) zostało utworzone połączenie. Zawsze $o_{ij} = o_{ji}$. Zawsze $o_{ij} = 0$ jeżeli i = j (miasto nigdy nie jest połączone samo ze sobą)

$\boldsymbol{z}$ **–** ilość pieniędzy, jakie zarobi dana sieć połączeń między miastami

Opis cech

$$\dot{X} = \{< L, N^+ >, < b, Q^+ >, < t, Q^+ >, < m, N^+ >, < n, N^+ >, < K, N\ >,$$
$$< \left\{\{d_{ij}\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}, N^+ >, < \left\{\{g_{ij}\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}, N^+ >, < \left\{\{o_{ij}\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}, bin >,$$
$$< F(g_1, g_2, d), Q^+ >\}$$

Związki

ρ_1 : Nie można wydać więcej pieniędzy, niż wynosi początkowy budżet P

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} (o_{ij} * (d_{ij} * t + b)) \leq P$$

ρ_2 : Można zbudować co najwyżej m torów

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} * d_{ij} \leq m$$

ρ_3: Można utworzyć co najwyżej n połączeń między miastami

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} \leq n$$

przy sumowaniu wykorzystano fakt, że zarówno odległości między miastami, jak i istnienie między nimi połączeń są przemienne – stąd sumowanie $\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{i}(\dots)$. Gdyby zwizualizować d_{ij} oraz o_{ij} jako macierze, to brane z nich byłyby tylko elementy poniżej lub na przekątnej. Dzięki temu każde połączenie między miastami jest uwzględnione raz, a nie dwa.

Podział cech

Dane

a = $\langle L, m, n, t, b, \left\{\left\{d_{ij}\right\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}, \left\{\left\{g_{ij}\right\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}, F \rangle$

Zmienne decyzyjne

x = $\left\{\left\{o_{ij}\right\}_{i=1}^{L}\right\}_{j=1}^{L}$

Wskaźniki

w = $< z >$

Analiza poziomu informacyjnego dotycząca znajomości przez decydenta wartości danych w chwili podejmowania decyzji

Decydent zna dokładną wartość każdej z danych w chwili podejmowania decyzji

Zbiory dopuszczalnych wartości

Zbiór poprawnych wartości danych

A = $\{a \in < N_{+}^{3} \times Q_{+}^{2} \times N_{+}^{2} \times Q^{+} > \}$

Zbiór dopuszczalnych zestawów wartości zmiennych decyzyjnych

$$\Omega(a) = \left\{ x \subset N^2 \colon \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} (o_{ij} * (d_{ij} * t + b)) \leq P \ \wedge \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} * d_{ij} \leq m \wedge \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} \leq n \right\}$$

Zbiór przewidywanych wartości wskaźników dla zestawów: danych a i zmiennych decyzyjnych x

$$W(a, x) = \left\{ z \in R^{+} \colon z = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} * F(g_i, g_j, d_{ij}) \right\}$$

Funkcja oceny osiągnięcia celu

$$E_a(Z(x^*)) = \begin{cases} 1 & gdy\ Z(x *) = \max_{x \in \Omega(a)} Z(x) \\ 0 & w\, p.p. \end{cases}$$

$$Z(x) = f(a, x) = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{i} o_{ij} * F(g_i, g_j, d_{ij})$$

Zadanie optymalizacyjne

Dla danych

$$a \in A$$

wyznaczyć takie

$$x^* \in \Omega(a),$$

aby

$$E_a(Z(x^*)) = 1$$