

공통수학1 중3 정규반

다항식의 사칙연산 ~ 항등식과 나머지 정리

40문제 | 이민혁T 이름 _____

- 01** $x+y = -4$, $x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $x^4 + y^4$, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하시오.

- 02** $x+y = -1$, $x^2 + y^2 = 13$ 일 때, $x^4 + y^4$, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하시오.

- 03** $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때, $x - \frac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.
(단, $0 < x < 1$)

- 04** $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때, $x - \frac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.
(단, $x > 1$)

- 05** $x + \frac{1}{x} = 8$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

- 06** $x + \frac{1}{x} = 3$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

07 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$ 일 때, $ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

08 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=13$ 일 때, $ab+bc+ca$ 의 값은?

- ① -2
- ② $-\frac{3}{2}$
- ③ -1
- ④ $-\frac{1}{2}$
- ⑤ 0

09 $a+b=2+\sqrt{5}$, $b+c=2-\sqrt{5}$, $c+a=3$ 일 때, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

10 $a+b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $c+a=4$ 일 때, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

11 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - 2x^2 + 5) \div (x - 3)$$

12 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - x^2 + 4) \div (x - 3)$$

- 13** 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.
 $(x^3 - 2x^2 - 1) \div (x + 2)$

- 14** 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - 3x^2 + 2) \div (x + 2)$$

- 15** 다항식 $2x^3 - 3x^2 - 24x + 9$ 가 다항식 A 로 나누어떨어지고, 그때의 몫이 $x + 3$ 이다. 다항식 A 를 구하시오.

- 16** 다항식 $3x^3 - x^2 - 19x - 10$ 이 다항식 A 로 나누어떨어질 때의 몫이 $x + 2$ 이다. 다항식 A 를 구하시오.

- 17** 다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{4}{5}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x), R$ 라 한다. 다항식 $f(x)$ 를 $5x + 4$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 적은 것은?

- ① $Q(x), R$
- ② $Q(x), \frac{1}{5}R$
- ③ $\frac{1}{5}Q(x), R$
- ④ $\frac{1}{5}Q(x), 5R$
- ⑤ $5Q(x), 5R$

- 18** 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x + \frac{5}{2}$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $2x + 5$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 나열한 것은?

- ① $Q(x), R$
- ② $2Q(x), R$
- ③ $\frac{1}{2}Q(x), R$
- ④ $2Q(x), 2R$
- ⑤ $\frac{1}{2}Q(x), 2R$

19

다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = x(x^2 - 3) + c$$

20

다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 계수 비교법을 이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

$$(x-1)(x+1)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

21

다음 등식이 x, y 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

$$(4a+b+1)x + \left(a - \frac{1}{8}b + 1\right)y = 0$$

22

다음 등식이 x, y 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

$$(2a+b-3)x + (a+3b+2)y = 0$$

23

다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b 의 값을 구하시오.

$$(x-a)(x+3) = x^2 + bx - 6$$

24

[2024년 9월 고1 3번/2점]
등식 $x^2 + ax + b = x(x+3) + 4$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- | | | |
|------|------|------|
| ① 12 | ② 14 | ③ 16 |
| ④ 18 | ⑤ 20 | |

25 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a , b , c 의 값을 구하시오.

$$ax(x-1)+bx+c(x-1)=3x^2+3x+1$$

26 x 에 대한 항등식
 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$ 에서 a , b , c 의 값을 구하시오.

27 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하시오.

28 [2022년 3월 고2 24번 변형]
 등식
 $(2x-1)(x+2)+8=ax(x+2)+b(x+2)-cx$ 가
 x 에 대한 항등식일 때, abc 의 값을 구하시오.
 (단, a , b , c 는 상수이다.)

29 모든 실수 x 에 대하여
 등식 $a(x-4) + b(x-3) = x+7$ 이 성립할 때,
 상수 a , b 에 대하여 $a+2b$ 의 값을 구하시오.

30 모든 실수 x 에 대하여 등식
 $2a(x-3) - b(x-5) = 2x-4$ 가 성립할 때, 상수 a , b 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하시오.

31 다항식 $(x^2 + 3x - 5)^3$ 을 전개하였을 때, 상수항을 포함한 모든 항의 계수들의 합을 구하시오.

32 x 에 대한 다항식 $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때,

모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0
- ② 16
- ③ 32
- ④ 64
- ⑤ 1024

33 x 의 값에 관계없이 등식

$$(5x^2 - 2x - 4)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$$

이 항상 성립할 때, 상수 a_0, a_1, \dots, a_8 에 대하여

$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_8$ 의 값을 구하시오.

34 x 의 값에 관계없이 등식

$$(7x^2 - 3x - 6)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$$

이 항상 성립할 때, 상수 a_0, a_1, \dots, a_8 에 대하여

$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_8$ 의 값을 구하시오.

35 $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5$

$$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{15}(x-1)^{15}$$

일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ 의 값을 구하시오.

36 모든 실수 x 에 대하여 등식

$$x^{10} = a_0 + a_1(x-1) + \dots + a_{10}(x-1)^{10} \text{이 성립할}$$

때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 512
- ② 513
- ③ 1023
- ④ 1024
- ⑤ 1025

- 37** 다항식 $3x^3 + 3ax^2 + bx + c$ 를 $3x^2 + 1$ 로 나누었을 때, 몫은 $x - 3$ 이고 나머지는 2이다. 상수 a, b, c 의 값을 정하시오.

- 38** 다항식 $3x^3 + ax^2 + x + 3$ 을 $x - b$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x^2 + 6x + 3$ 이고 나머지가 c 이다. 상수 a, b, c 에 대하여 $a + 3b + c$ 의 값을?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

- 39** x 에 대한 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

- 40** 다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어 떨어질 때, $3a + b$ 의 값을?

- ① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

공통수학1 중3 정규반

다항식의 사칙연산 ~ 항등식과 나머지 정리

40문제 | 이민혁T 이름 _____

빠른정답

01 $x^4 + y^4 = 32, x^5 + y^5 = -64$

02 $x^4 + y^4 = 97, x^5 + y^5 = -211$ 03 $-3\sqrt{5}$

04 $3\sqrt{5}$ 05 62 06 7

07 -2 08 ① 09 $\frac{27}{2}$

10 13 11 몫: $x^2 + x + 3$, 나머지: 14

12 몫: $x^2 + 2x + 6$, 나머지: 22

13 몫: $x^2 - 4x + 8$, 나머지: -17

14 몫: $x^2 - 5x + 10$, 나머지: -18

15 $2x^2 - 9x + 3$

16 $3x^2 - 7x - 5$ 17 ③

18 ③ 19 $a=0, b=-3, c=2$

20 $a=1, b=-1, c=-1$

21 $a=-\frac{3}{4}, b=2$

22 $a=\frac{11}{5}, b=-\frac{7}{5}$ 23 $a=2, b=1$

24 ① 25 $a=3, b=7, c=-1$

26 $a=2, b=-1, c=1$ 27 5

28 24 29 12 30 2

31 -1 32 ③ 33 81

34 256 35 1 36 ①

37 $a=-3, b=1, c=-1$ 38 ⑤

39 1 40 ②

공통수학1 중3 정규반

다항식의 사칙연산 ~ 항등식과 나머지 정리

40문제 | 이민혁T 이름 _____

- 01** $x+y=-4$, $x^2+y^2=8$ 일 때, x^4+y^4 , x^5+y^5 의 값을 구하시오.

정답 $x^4+y^4=32$, $x^5+y^5=-64$

해설 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서
 $8=(-4)^2-2xy \therefore xy=4$
 $\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
 $= (x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
 $= 8^2-2 \times 4^2$
 $= 32$
또한, $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $= (-4)^3-3 \times 4 \times (-4)=-16$ 이므로
 $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
 $= 8 \times (-16)-4^2 \times (-4)=-64$

- 02** $x+y=-1$, $x^2+y^2=13$ 일 때, x^4+y^4 , x^5+y^5 의 값을 구하시오.

정답 $x^4+y^4=97$, $x^5+y^5=-211$

해설 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서
 $13=(-1)^2-2xy \therefore xy=-6$
 $\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
 $= (x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
 $= 13^2-2 \cdot (-6)^2$
 $= 97$
또한,
 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $= (-1)^3-3 \cdot (-6) \cdot (-1)=-19$ 이므로
 $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
 $= 13 \cdot (-19)-(-6)^2 \cdot (-1)=-211$

- 03** $x^2-7x+1=0$ 일 때, $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.
(단, $0 < x < 1$)

정답 $-3\sqrt{5}$

해설 $x^2-7x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로
양변을 x 로 나누면
 $x-7+\frac{1}{x}=0$
 $\therefore x+\frac{1}{x}=7$
 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=7^2-4=45$
이때 $0 < x < 1$ 이므로
 $x-\frac{1}{x} < 0 \quad \left(\because x < 1 < \frac{1}{x}\right)$
 $\therefore x-\frac{1}{x}=-3\sqrt{5}$

- 04** $x^2-7x+1=0$ 일 때, $x-\frac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.
(단, $x > 1$)

정답 $3\sqrt{5}$

해설 $x \neq 0$ 이므로 $x^2-7x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면
 $x-7+\frac{1}{x}=0, \therefore x+\frac{1}{x}=7$
 $\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=7^2-4=45$
그런데 $x > 1$ 면 $x-\frac{1}{x} > 0$ 이므로
 $\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

- 05** $x+\frac{1}{x}=8$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

정답 62

해설 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=8^2-2=62$

06 $x + \frac{1}{x} = 3$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

정답 7

해설 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$

07 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$ 일 때, $ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

정답 -2

해설 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$ 이므로
 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에서
 $5=1-2(ab+bc+ca)$
 $\therefore ab+bc+ca=-2$

08 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=13$ 일 때, $ab+bc+ca$ 의 값은?

- ① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

정답 ①

해설 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=13$ 이므로
 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에서
 $13=9-2(ab+bc+ca)$
 $\therefore ab+bc+ca=-2$

09 $a+b=2+\sqrt{5}$, $b+c=2-\sqrt{5}$, $c+a=3$ 일 때, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

정답 $\frac{27}{2}$

해설 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
 $=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$
 $=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)$
 $+ (c^2+2ca+a^2)\}$
 $=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$
 $=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2+3^2\}$
 $=\frac{1}{2}(9+9+9)$
 $=\frac{27}{2}$

10 $a+b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $c+a=4$ 일 때, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ 의 값을 구하시오.

정답 13

해설 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
 $=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$
 $=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$
 $=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+4^2\}$
 $=\frac{1}{2}(3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2+16)$
 $=\frac{26}{2}$
 $=13$

11 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$(x^3-2x^2+5) \div (x-3)$

정답 몫: $x^2 + x + 3$, 나머지: 14

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ x-3 \) \overline{x^3 - 2x^2 + 5} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ \underline{x^2} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ \underline{3x + 5} \\ \underline{3x - 9} \\ 14 \end{array}$$

\therefore 몫: $x^2 + x + 3$, 나머지: 14

12 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - x^2 + 4) \div (x - 3)$$

정답 몫: $x^2 + 2x + 6$, 나머지: 22

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ x-3 \) \overline{x^3 - x^2 + 4} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ \underline{2x^2} \quad + 4 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ \underline{6x + 4} \\ \underline{6x - 18} \\ 22 \end{array}$$

\therefore 몫: $x^2 + 2x + 6$, 나머지: 22

13 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - 2x^2 - 1) \div (x + 2)$$

정답 몫: $x^2 - 4x + 8$, 나머지: -17

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ x+2 \) \overline{x^3 - 2x^2 - 1} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ \underline{-4x^2} \quad - 1 \\ \underline{-4x^2 - 8x} \\ \underline{8x - 1} \\ \underline{8x + 16} \\ -17 \end{array}$$

\therefore 몫: $x^2 - 4x + 8$, 나머지: -17

14 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(x^3 - 3x^2 + 2) \div (x + 2)$$

정답 몫: $x^2 - 5x + 10$, 나머지: -18

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ x+2 \) \overline{x^3 - 3x^2 + 10} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ \underline{-5x^2} \quad + 10 \\ \underline{-5x^2 - 10x} \\ \underline{10x + 2} \\ \underline{10x + 20} \\ -18 \end{array}$$

\therefore 몫: $x^2 - 5x + 10$, 나머지: -18

15 다항식 $2x^3 - 3x^2 - 24x + 9$ 가 다항식 A 로 나누어떨어지고, 그때의 몫이 $x + 3$ 이다. 다항식 A 를 구하시오.

정답 $2x^2 - 9x + 3$

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ 2x^3 - 3x^2 - 24x + 9 = A(x+3) \text{이므로} \\ A = (2x^3 - 3x^2 - 24x + 9) \div (x+3) \\ x+3 \) \overline{2x^3 - 3x^2 - 24x + 9} \\ \underline{2x^3 + 6x^2} \\ \underline{-9x^2 - 24x} \\ \underline{-9x^2 - 27x} \\ \underline{+ 3x + 9} \\ \underline{+ 3x + 9} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A = 2x^2 - 9x + 3$

16 다항식 $3x^3 - x^2 - 19x - 10$ 이 다항식 A 로 나누어떨어질 때의 몫이 $x + 2$ 이다. 다항식 A 를 구하시오.

정답 $3x^2 - 7x - 5$

$$\begin{array}{r} \text{해설} \\ 3x^3 - x^2 - 19x - 10 = A(x+2) \text{이므로} \\ A = (3x^3 - x^2 - 19x - 10) \div (x+2) \\ x+2 \) \overline{3x^3 - x^2 - 19x - 10} \\ \underline{3x^3 + 6x^2} \\ \underline{-7x^2 - 19x} \\ \underline{-7x^2 - 14x} \\ \underline{-5x - 10} \\ \underline{-5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A = 3x^2 - 7x - 5$

17 다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{4}{5}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를

각각 $Q(x), R$ 라 한다. 다항식 $f(x)$ 를 $5x + 4$ 로
나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 적은 것은?

- ① $Q(x), R$
- ② $Q(x), \frac{1}{5}R$
- ③ $\frac{1}{5}Q(x), R$
- ④ $\frac{1}{5}Q(x), 5R$
- ⑤ $5Q(x), 5R$

정답 ③

해설 $f(x)$ 를 $x + \frac{4}{5}$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x), R$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{4}{5}\right)Q(x) + R \\ &= \frac{1}{5}(5x + 4)Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $5x + 4$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{5}Q(x)$,
나머지는 R 이다.

18 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x + \frac{5}{2}$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 R 라 할 때, 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $2x + 5$ 로
나눈 몫과 나머지를 차례로 나열한 것은?

- ① $Q(x), R$
- ② $2Q(x), R$
- ③ $\frac{1}{2}Q(x), R$
- ④ $2Q(x), 2R$
- ⑤ $\frac{1}{2}Q(x), 2R$

정답 ③

해설 $f(x)$ 를 일차식 $x + \frac{5}{2}$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$,
나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{5}{2}\right)Q(x) + R \\ &= (2x + 5) \cdot \frac{1}{2}Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 일차식 $2x + 5$ 로 나눈 몫과 나머지는
각각 $\frac{1}{2}Q(x), R$ 이다.

19 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c 의
값을 구하시오.

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = x(x^2 - 3) + c$$

정답 $a = 0, b = -3, c = 2$

$$\begin{aligned} \text{해설 } x^3 + ax^2 + bx + 2 &= x(x^2 - 3) + c \\ &= x^3 - 3x + c \\ \therefore a &= 0, b = -3, c = 2 \end{aligned}$$

20 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 계수 비교법을
이용하여 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

$$(x - 1)(x + 1)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

정답 $a = 1, b = -1, c = -1$

해설 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = -1, c = -1$

21 다음 등식이 x, y 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b 의
값을 구하시오.

$$(4a + b + 1)x + \left(a - \frac{1}{8}b + 1\right)y = 0$$

정답 $a = -\frac{3}{4}, b = 2$

해설 주어진 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로
 $4a + b + 1 = 0, a - \frac{1}{8}b + 1 = 0$
 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{3}{4}, b = 2$$

22

다음 등식이 x, y 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b 의 값을 구하시오.

$$(2a+b-3)x + (a+3b+2)y = 0$$

정답 $a = \frac{11}{5}, b = -\frac{7}{5}$

해설 주어진 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$2a+b-3=0, a+3b+2=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{11}{5}, b = -\frac{7}{5}$$

23

다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b 의 값을 구하시오.

$$(x-a)(x+3) = x^2 + bx - 6$$

정답 $a = 2, b = 1$

해설 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x-a)(x+3) = x^2 + (-a+3)x - 3a$$

$$\text{이때 } x^2 + (-a+3)x - 3a = x^2 + bx - 6 \text{ 이므로}$$

x 에 대한 항등식이므로

$$-a+3 = b, -3a = -6$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

24

[2024년 9월 고1 3번/2점]

등식 $x^2 + ax + b = x(x+3) + 4$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

- | | | |
|------|------|------|
| ① 12 | ② 14 | ③ 16 |
| ④ 18 | ⑤ 20 | |

정답 ①

해설 항등식의 성질 이해하기

$$x^2 + ax + b = x(x+3) + 4$$

$$= x^2 + 3x + 4$$

따라서 $a = 3, b = 4$ 이므로

$$ab = 12$$

25

다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

$$ax(x-1) + bx + c(x-1) = 3x^2 + 3x + 1$$

정답 $a = 3, b = 7, c = -1$

해설 주어진 등식의 양변에 $x = 0, x = 1, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$-c = 1, b = 7, 2a + 2b + c = 19$$

$$\therefore a = 3, b = 7, c = -1$$

26

x 에 대한 항등식

$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$ 에서 a, b, c 의 값을 구하시오.

정답 $a = 2, b = -1, c = 1$

해설 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$ 에서

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - 2 + 3 = a$$

$$\therefore a = 2$$

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$3 = a - b$$

$$\therefore b = -1$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4 - 4 + 3 = a + b + 2c$$

$$\therefore c = 1$$

27

등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하시오.

정답 5

해설 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{을 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

두 식을 연립하면 $b = 0, c = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

28

[2022년 3월 고2 24번 변형]

등식

$(2x-1)(x+2)+8=ax(x+2)+b(x+2)-cx$ 가
 x 에 대한 항등식일 때, abc 의 값을 구하시오.
(단, a, b, c 는 상수이다.)

정답 24

해설 주어진 등식에서 좌변의 이차항은 $2x^2$,
우변의 이차항은 ax^2 이므로 이차항의 계수를 비교하면
 $a=2$
주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $(-1) \cdot 2 + 8 = 0 + 2b - 0$
 $\therefore b=3$
또, 주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $0+8=0+0-(-2)c$
 $\therefore c=4$
따라서 $a=2, b=3, c=4$ 이므로
 $abc=24$

29모든 실수 x 에 대하여

등식 $a(x-4)+b(x-3)=x+7$ 이 성립할 때,
상수 a, b 에 대하여 $a+2b$ 의 값을 구하시오.

정답 12

해설 주어진 등식의 양변에 $x=4$ 를 대입하면
 $b=11$
주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $-a=10$
 $\therefore a=-10$
따라서 주어진 식의 값은
 $a+2b=(-10)+2 \cdot 11=12$

30모든 실수 x 에 대하여 등식

$2a(x-3)-b(x-5)=2x-4$ 가 성립할 때, 상수 a, b 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하시오.

정답 2

해설 주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $-b(3-5)=2 \cdot 3-4, 2b=2 \quad \therefore b=1$
주어진 등식의 양변에 $x=5$ 를 대입하면
 $2a(5-3)=2 \cdot 5-4, 4a=6 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$
 $\therefore 2a-b=3-1=2$

31

다항식 $(x^2+3x-5)^3$ 을 전개하였을 때, 상수항을 포함한 모든 항의 계수들의 합을 구하시오.

정답 -1

해설 $(x^2+3x-5)^3$
 $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$
이때 모든 항의 계수들의 합은
 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 이므로 계수들의 합은
주어진 식의 x 에 1을 값을 대입한 값과 같다.
따라서 주어진 식에 $x=1$ 을 대입하면
 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
 $= (1+3-5)^3 = (-1)^3 = -1$

32

x 에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하였을 때,
모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 1024

정답 ③

해설 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(4x^2-3x+1)^5 = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_0x$
+ a_{10} 과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면
 $x=1$ 을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5 = 32$

33 x 의 값에 관계없이 등식

$(5x^2-2x-4)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$
이 항상 성립할 때, 상수 a_0, a_1, \dots, a_8 에 대하여
 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_8$ 의 값을 구하시오.

정답 81

해설 주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_8 = 3^4 = 81$

34 *x*의 값에 관계없이 등식

$$(7x^2 - 3x - 6)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$$

이 항상 성립할 때, 상수 a_0, a_1, \dots, a_8 에 대하여 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_8$ 의 값을 구하시오.

정답 256**해설** 주어진 등식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_8 = 4^4 = 256$$

35 $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5$

$$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{15}(x-1)^{15}$$

일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ 의 값을 구하시오.

정답 1**해설** 주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{15} \quad \dots \textcircled{①}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \quad \dots \textcircled{②}$$

 $\textcircled{①} + \textcircled{②}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14} = 1$$

36 모든 실수 x 에 대하여 등식

$x^{10} = a_0 + a_1(x-1) + \dots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

- ① 512 ② 513 ③ 1023
 ④ 1024 ⑤ 1025

정답 ①**해설** 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{10} \quad \dots \textcircled{①}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \quad \dots \textcircled{②}$$

 $\textcircled{①} + \textcircled{②}$ 을 하면

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10}) = 1024$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 512$$

37

다항식 $3x^3 + 3ax^2 + bx + c$ 를 $3x^2 + 1$ 로 나누었을 때, 몫은 $x - 3$ 이고 나머지는 2이다. 상수 a, b, c 의 값을 정하시오.

정답 $a = -3, b = 1, c = -1$ **해설** $3x^3 + 3ax^2 + bx + c = (3x^2 + 1)(x - 3) + 2$ 이므로

우변을 정리하면

$$3x^3 + 3ax^2 + bx + c = 3x^3 - 9x^2 + x - 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$3a = -9, b = 1, c = -1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a = -3, b = 1, c = -1$$

38

다항식 $3x^3 + ax^2 + x + 3$ 을 $x - b$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x^2 + 6x + 3$ 이고 나머지가 c 이다. 상수 a, b, c 에 대하여 $a + 3b + c$ 의 값을?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

정답 ⑤**해설** $3x^3 + ax^2 + x + 3$

$$= (x - b)(3x^2 + 6x + 3) + c$$

$$= 3x^3 + (6 - 3b)x^2 + (3 - 6b)x - 3b + c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 6 - 3b, 1 = 3 - 6b, 3 = -3b + c$$

$$\therefore a = 5, b = \frac{1}{3}, c = 4$$

$$\therefore a + 3b + c = 10$$

39

x 에 대한 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

정답 1**해설** x^3 의 계수가 1이므로 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - x + 1$ 로나누었을 때의 몫을 $x + q$ (q 는 상수)라 하면

$$x^3 + ax + b = (x^2 - x + 1)(x + q)$$

$$\therefore x^3 + ax + b = x^3 + (q-1)x^2 + (1-q)x + q$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$0 = q - 1, a = 1 - q, b = q$$

따라서 $q = 1, a = 0, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 1$$

40

다항식 $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어떨어질 때,
 $3a+b$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3
 ④ -4 ⑤ -5

정답 ②

해설 $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$ 라 할 때,

$f(x)$ 가 $x^2 + 2$ 로 나누어떨어지므로

$f(x) = (x^2 + 2)(x - \alpha)$ 라 하자.

$(x^2 + 2)(x - \alpha) = x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha$ 에서

$$x^3 - 4x^2 + ax + b = x^3 - \alpha x^2 + 2x - 2\alpha$$

$$\therefore \alpha = 4, a = 2, b = -2\alpha, \frac{b}{\alpha} = -8$$

따라서 $a = 2, b = -8$ 이므로

$$3a + b = -2$$