

## BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

### DẠNG 1. NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$ . Tính bán kính  $R$  của  $(S)$ .

- A.  $R = 8$ .      B.  $R = 4$ .      C.  $R = 2\sqrt{2}$ .      D.  $R = 64$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + \frac{50}{9} = 0.$$

Tìm tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$ .

- A.  $I(1;1;2)$  và  $R = \frac{2}{3}$       B.  $I(-1;-1;-2)$  và  $R = \frac{2}{3}$   
C.  $I(1;1;2)$  và  $R = \frac{4}{9}$       D.  $I(-1;-1;-2)$  và  $R = \frac{4}{9}$

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình đó là phương trình của một mặt cầu.

- A.  $-5 < m < 5$ .      B.  $m < -5$  hoặc  $m > 1$ .      C.  $m < -5$ .      D.  $m > 1$ .

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$  có bán kính  $R = 5$ . Tìm giá trị của  $m$ .

- A.  $m = 4$ .      B.  $m = -4$ .      C.  $m = 16$ .      D.  $m = -16$ .

### DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

**Câu 5.** Phương trình mặt cầu tâm  $I(2;1;-2)$  bán kính  $R=2$  là

- A.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 10 = 0$       B.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$   
C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$       D.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$

**Câu 6.** Phương trình mặt cầu tâm  $I(2;1;-2)$  đi qua  $(3;2;-1)$  là

- A.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 6 = 0$       B.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z - 6 = 0$   
C.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 6 = 0$       D.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 6 = 0$

**Câu 7.** Phương trình mặt cầu đường kính  $AB$  biết  $A(2; -4; 6)$ ,  $B(4; 2; -2)$  là

- A.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 26$ .      B.  $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 26$ .  
C.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 26$ .      D.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 26$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1;4;2)$  và có thể tích bằng  $\frac{256\pi}{3}$ . Khi đó phương trình mặt cầu  $(S)$  là

- A.  $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$ .      B.  $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$ .

C.  $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$ .

D.  $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$ .

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $I(0;2;3)$ . Viết phương trình mặt cầu tâm  $I$  tiếp xúc với trục  $Oy$ .

A.  $x^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$ .

B.  $x^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$ .

C.  $x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ .

D.  $x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ .

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , nếu mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(a;b;c)$  bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng  $(Oxz)$  thì

A.  $|a|=1$ .

B.  $|b|=1$ .

C.  $|c|=1$ .

D.  $a+b+c=1$ .

**Câu 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm  $I(-3;2;-4)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $Oxz$ ?

A.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 2$ .

B.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$ .

C.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 4$ .

D.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 16$ .

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , phương trình mặt cầu đi qua hai điểm  $A(3;-1;2)$ ,  $B(1;1;-2)$  và có tâm thuộc trục  $Oz$  là

A.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$ .

B.  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 11$ .

C.  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$ .

D.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 11 = 0$ .

**Câu 13.** Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm  $O(0;0;0)$ ,  $A(4;0;0)$ ,  $B(0;4;0)$  và  $C(0;0;4)$  là

A.  $\sqrt{2}$

B.  $2\sqrt{2}$

C.  $3\sqrt{2}$

D.  $2\sqrt{3}$ .

**Câu 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;-4)$ ,  $B(1;-3;1)$ ,  $C(2;2;3)$ . Tính đường kính  $l$  của mặt cầu  $(S)$  đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

A.  $l = 2\sqrt{13}$ .

B.  $l = 2\sqrt{41}$ .

C.  $l = 2\sqrt{26}$ .

D.  $l = 2\sqrt{11}$ .

**Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(0;0;2)$ ,  $D(2;2;2)$ . Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  có bán kính là

A. 3

B.  $\sqrt{3}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**Câu 16.** Tọa độ tâm mặt cầu đi qua 4 điểm  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;1;1)$ ,  $C(1;2;1)$ ,  $D(1;1;2)$  là

A.  $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

B.  $(3;3;3)$

C.  $(3;-3;3)$

D.  $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

**Câu 17.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(0;0;2)$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với gốc tọa độ  $O$  qua trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ . Gọi  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Tính  $R$ .

$$\text{A. } R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{B. } R = \sqrt{3}.$$

$$\text{C. } R = \sqrt{2}.$$

$$\text{D. } R = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có tọa độ đỉnh  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(0; 0; 6)$ ,  $D(2; 4; 6)$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Viết phương trình mặt cầu  $(S')$  có tâm trùng với tâm của mặt cầu  $(S)$  và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu  $(S)$ .

$$\text{A. } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56.$$

$$\text{B. } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$$

$$\text{C. } (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.$$

$$\text{D. } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0.$$

**Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;0;-3)$ ,  $B(-3;-2;-5)$ . Biết rằng tập hợp các điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn đẳng thức  $AM^2 + BM^2 = 30$  là một mặt cầu  $(S)$ . Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$  là

$$\text{A. } I(-2;-2;-8); R=3.$$

$$\text{B. } I(-1;-1;-4); R=\sqrt{6}.$$

$$\text{C. } I(-1;-1;-4); R=3.$$

$$\text{D. } I(-1;-1;-4); R=\frac{\sqrt{30}}{2}.$$

### DẠNG 3. TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC MẶT CẦU - ĐIỂM VÀ MẶT CẦU - MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

**Câu 20.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sao cho hàm số  $y = 2x^3 + ax^2 + bx + c$  đạt cực trị tại  $x=1$  đồng thời có  $y(0)=2$  và  $y(1)=-3$ . Hỏi trong không gian  $Oxyz$ , điểm  $M(a;b;c)$  nằm trong mặt cầu nào sau đây?

$$\text{A. } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2 = 90.$$

$$\text{B. } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

$$\text{C. } x^2 + y^2 + (z+5)^2 = 60.$$

$$\text{D. } (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49.$$

**Câu 21.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0;0;4)$ , điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $(Oyx)$  và  $M \neq O$ . Gọi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $AM$  và  $E$  là trung điểm của  $OM$ . Biết đường thẳng  $DE$  luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

$$\text{A. } R=2.$$

$$\text{B. } R=1.$$

$$\text{C. } R=4.$$

$$\text{D. } R=\sqrt{2}.$$

**Câu 22.** Mặt phẳng  $Oxy$  cắt mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$  theo giao tuyến là đường tròn tâm  $H$ , bán kính  $R$ . Tọa độ tâm  $H$  và bán kính  $R$  là

$$\text{A. } H(1;2;0), R=\sqrt{5}.$$

$$\text{B. } H(-1;-2;0), R=\sqrt{5}.$$

$$\text{C. } H(1;2;0), R=5.$$

$$\text{D. } H(1;0;2), R=\sqrt{5}.$$

**Câu 23.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho các mặt cầu  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$  có bán kính  $r=1$  và lần lượt có tâm là các điểm  $A(0;3;-1)$ ,  $B(-2;1;-1)$ ,  $C(4;-1;-1)$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu  $(S)$  có bán kính nhỏ nhất là

$$\text{A. } R=2\sqrt{2}-1.$$

$$\text{B. } R=\sqrt{10}.$$

$$\text{C. } R=2\sqrt{2}.$$

$$\text{D. } R=\sqrt{10}-1.$$

### DẠNG 4. VẬN DỤNG CAO

**Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0;0;4)$ , điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $M \neq O$ . Gọi  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  lên  $AM$  và  $E$  là trung điểm của  $OM$ . Biết đường thẳng  $DE$  luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A.  $R=2$ .                      B.  $R=1$ .                      C.  $R=4$ .                      D.  $R=\sqrt{2}$ .

**Câu 25.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1;2;3)$  và đi qua điểm  $A(5;-2;-1)$ . Xét các điểm  $B, C, D$  thuộc  $(S)$  sao cho  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  có giá trị lớn nhất bằng.

- A. 256.                      B. 128.                      C.  $\frac{256}{3}$ .                      D.  $\frac{128}{3}$ .

**Câu 26.** Gọi  $(S)$  là mặt cầu đi qua  $A(1;1;1)$ , tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Oxz$  và có bán kính lớn nhất. Viết phương trình mặt cầu  $(S)$ .

- A.  $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ .
- B.  $(S): \left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ .
- C.  $(S): \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$ .
- D.  $(S): \left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0;-1;2)$ ,  $B(2;-3;0)$ ,  $C(-2;1;1)$ ,  $D(0;-1;3)$ . Gọi  $(L)$  là tập hợp tất cả các điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$ . Biết rằng  $(L)$  là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính  $r$  bằng bao nhiêu?

- A.  $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$ .                      B.  $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .                      C.  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 28.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thuộc mặt cầu  $S: x-3^2 + y-3^2 + z-2^2 = 9$  và ba điểm  $A(1;0;0)$ ,  $B(2;1;3)$ ,  $C(0;2;-3)$ . Biết rằng quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn  $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$  là đường tròn cố định, tính bán kính  $r$  đường tròn này.

- A.  $r = \sqrt{3}$ .                      B.  $r = 6$                       C.  $r = 3$ .                      D.  $r = \sqrt{6}$ .

**Câu 29.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(5;0;0)$  và  $B(3;4;0)$ . Với  $C$  là điểm nằm trên trục  $Oz$ , gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Khi  $C$  di động trên trục  $Oz$  thì  $H$  luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A.  $\frac{\sqrt{5}}{4}$ .

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 30.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt cầu  $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$  và các điểm  $A(4;0;0)$ ,  $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$ ,  $C(1;4;0)$ ,  $D(4;4;0)$ . Gọi  $M$  là điểm thay đổi trên  $(S_1)$ ,  $N$  là điểm thay đổi trên  $(S_2)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = MA + 2ND + 4MN + 6BC$  là

A.  $2\sqrt{265}$ .

B.  $\frac{5\sqrt{265}}{2}$ .

C.  $3\sqrt{265}$ .

D.  $\frac{7\sqrt{265}}{2}$ .

**Câu 31.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho  $A(1;2;0)$ ,  $B(5;4;4)$ ,  $C\left(\frac{11}{3}; \frac{22}{3}; -\frac{16}{3}\right)$ . Gọi  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$  là 3 mặt cầu tâm lần lượt là  $A$ ,  $B$ ,  $C$  và có cùng bán kính là  $\frac{13}{5}$ . Xác định số tiếp diện chung của ba mặt cầu trên.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.