VŨ HỮU BÌNH

PHƯƠNG TRÌNH và BÀI TOÁN với NGHIỆM NGUYÊN

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP 7 - 8 - 9

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Tλ

VŨ HỮU BÌNH

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BÀI TOÁN VỚI NGHIỆM NGUYÊN

(Dùng cho học sinh lớp 7, 8, 9)

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

*Phương trình và bài toán với nghiệm nguyên là một đề tài lí thú của Số học và Đại số, đã lôi cuốn nhiều người, từ các học sinh nhỏ với các bài toán như **Trăm trâu trăm cỏ** đến các chuyên gia toán học lớn với các bài toán như **định lí lớn Fecma**. Được nghiên cứu từ thời Điôphăng thế kỉ III, phương trình và bài toán với nghiệm nguyên mãi mãi còn là đối tượng nghiên cứu của toán học.*

Ngoài phương trình bậc nhất hai ẩn, các bài toán tìm nghiệm nguyên thường không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán, với số liệu riêng của nó, đòi hỏi một cách giải riêng phù hợp. Điều đó có tác dụng rèn luyện tư duy toán học mềm dẻo, linh hoạt và sáng tạo. Chính vì thế mà các bài toán tìm nghiệm nguyên thường có mặt trong các kì thi học sinh giỏi về Toán ở tất cả các cấp.

Cuốn sách này dành cho các thầy cô giáo dạy Toán, các em học sinh bậc Trung học, và chỉ đòi hỏi kiến thức toán của bậc trung học cơ sở. Cuốn sách không sử dụng các kiến thức về đồng dư, về phương trình đồng dư. Định lí nhỏ Fecma chỉ được sử dụng trong hai bài (bài 57d và 67) với mục đích giới thiệu định lí này tương ứng với việc giới thiệu định lí lớn Fecma ở phần Phụ lục. Cuốn sách cung cấp cho bạn đọc những phương pháp thường dùng để giải phương trình với nghiệm nguyên và cách

*1-PTVBTVNG

vận dụng chúng trong từng dạng toán tìm nghiệm nguyên. Lời giải trong cuốn sách đã được lựa chọn sao cho rõ ràng, dễ hiểu, chặt chẽ và tự nhiên nhất.

Tác giả hi vọng rằng cuốn sách sẽ đem lại cho bạn đọc nhiều điều bổ ích và giúp các bạn cảm nhận thêm vẻ đẹp của môn Toán qua các phương trình và bài toán với nghiệm nguyên.

VŨ HỮU BÌNH

Chương I

CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

Giải phương trình chứa các ẩn x, y, z, ... với nghiệm nguyên là tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z, ...) thỏa mãn phương trình đó.

Khi giải phương trình với nghiệm nguyên, do phải lợi dụng các tính chất của tập hợp **Z** nên ngoài các biến đổi tương đương, ta còn dùng đến các biến đổi mà các giá trị của ẩn mới chỉ thỏa mãn điều kiện cần (chứ chưa phải điều kiện cần và đủ) của nghiệm. Trong trường hợp này, ta cần kiểm tra lại các giá trị đó bằng cách thử vào phương trình đã cho.

Do đó, việc giải phương trình với nghiệm nguyên thường gồm hai bước :

Bước 1 : Giả sử phương trình có nghiệm nguyên (x_o, y_o, z_o, ...), ta suy ra các ẩn phải nhận các giá trị nào đó.

Bước 2. Thử lại các giá trị đó của ẩn để khẳng định tập nghiệm của phương trình.

Để đơn giản, trong nhiều bài toán ở cuốn sách này, bước 1 không tách riêng một cách tường minh và các giá trị x_o, y_o, z_o,... vẫn được biểu thị bởi x, y, z, ... Với các bài toán mà các biến đổi đều tương đương, ta không cần bước 2.

Một phương trình với nghiệm nguyên có thể vô nghiệm, có hữu hạn nghiệm, có vô số nghiệm. Trong trường hợp phương trình có vô số nghiệm nguyên, các nghiệm nguyên của phương trình thường được biểu thị bởi một công thức có chứa tham số là một số nguyên.

§1. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT

1. Phương pháp phát hiện tính chia hết của một ẩn

Ví dụ 1. Giải phương trình với nghiệm nguyên :

$$3x + 17y = 159 \qquad (1)$$

Giải

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y \vdots 3$, do đó $y \vdots 3$ (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Đặt $y = 3t$ ($t \in \mathbb{Z}$). Thay vào phương trình (1) ta được :

$$3x + 17.3t = 159$$

$$\Leftrightarrow x + 17t = 53.$$

Do đó : $\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{Z}$)

Đảo lại, thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên (x, y) được biểu thị bởi công thức :

$$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

2. Phương pháp đưa về phương trình ước số

Ví dụ 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$xy - x - y = 2.$$

Giải

Biến đổi phương trình thành :

$$x(y - 1) - y = 2$$

$$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 3.$$

Ta gọi phương trình trên là *phương trình ước số* : vế trái là một tích các thừa số nguyên, vế phải là một hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên $x - 1$ và $y - 1$ là các số nguyên và là ước của 3.

Do vai trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên có thể giả thiết rằng $x \geq y$, khi đó $x - 1 \geq y - 1$.

Ta có :

$x - 1$	3	-1
$y - 1$	1	-3

Do đó :

x	4	0
y	2	-2

Nghiệm nguyên của phương trình : (4 ; 2), (2 ; 4), (0 ; −2), (−2 ; 0).

3. Phương pháp tách ra các giá trị nguyên

Ví dụ 3. Giải phương trình ở ví dụ 2 bằng cách khác.

Giải

Biểu thị x theo y :

$$x(y - 1) = y + 2.$$

Ta thấy $y \neq 1$ (vì nếu $y = 1$ thì ta có $0x = 3$, vô nghiệm).

Do đó : $x = \frac{y+2}{y-1}$.

Tách ra ở phân thức $\frac{y+2}{y-1}$ các số nguyên :

$$x = \frac{y+2}{y-1} = \frac{y-1+3}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}.$$

Do x là số nguyên nên $\frac{3}{y-1}$ là số nguyên, do đó $y - 1$ là ước của 3. Lần lượt cho $y - 1$ bằng $-1, 1, -3, 3$, ta được các đáp số như ở ví dụ 2.

BÀI TẬP

Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình (bài 1 – bài 5) :

1. $2x + 13y = 156$.
2. $3xy + x - y = 1$.
3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$.
4. $x^3 - y^3 = 91$.
5. $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.
6. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(1).f(2) = 35$. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

§2. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ CỦA TỪNG VẾ

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên :

a) $x^2 - y^2 = 1998$;

b) $x^2 + y^2 = 1999$.

Giải

a) Dễ chứng minh x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư 0, 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$9x + 2 = y^2 + y .$$

Giải

Biến đổi phương trình : $9x + 2 = y(y + 1)$.

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y(y + 1)$ chia cho 3 dư 2.

Chỉ có thể : $y = 3k + 1$, $y + 1 = 3k + 2$ (k nguyên).

Khi đó : $9x + 2 = (3k + 1)(3k + 2)$

$$\Leftrightarrow 9x = 9k(k + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = k(k + 1).$$

Thử lại, $x = k(k + 1)$, $y = 3k + 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Đáp số : $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases}$ (k là số nguyên tùy ý).

BÀI TẬP

Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên (bài 7 - bài 11) :

7. $3x^2 - 4y^2 = 13$.

8. $19x^2 + 28y^2 = 2001$.

9. $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$.

10. $x^5 - 5x^3 + 4x = 24(5y + 1)$.

11. $3x^5 - x^3 + 6x^2 - 18x = 2001$.

12. Chứng minh rằng số A không là lập phương của một số tự nhiên :

$$A = 1\underbrace{00\ldots0}_{49}5\underbrace{00\ldots0}_{50}1.$$

§3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Phương pháp sắp thứ tự các ẩn

Ví dụ 6. Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải

Cách 1. Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Ta có :

$$x + y + z = xyz \tag{1}$$

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể *sắp thứ tự giá trị của các ẩn*, chẳng hạn :

$$1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z.$$

Do đó : $xyz = x + y + z \leqslant 3z$.

Chia hai vế của bất đẳng thức $xyz \leqslant 3z$ cho số dương z ta được : $xy \leqslant 3$.

Do đó $xy \in \{1 ; 2 ; 3\}$

Với $xy = 1$, ta có : $x = 1$, $y = 1$. Thay vào (1) được $2 + z = z$, loại.

Với $xy = 2$, ta có : $x = 1$, $y = 2$. Thay vào (1), được $z = 3$.

Với $xy = 3$, ta có : $x = 1$, $y = 3$. Thay vào (1), được $z = 2$, loại vì trái với sắp xếp $y \leqslant z$.

Vậy ba số phải tìm là 1 ; 2 ; 3.

Cách 2. Chia hai vế của $x + y + z = xyz$ (1) cho $xyz \neq 0$, được :

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1.$$

Giả sử $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. Ta có :

$$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \leqslant \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{z^2}.$$

Suy ra $\frac{3}{z^2} \geqslant 1$, do đó $z^2 \leqslant 3$ nên $z = 1$. Thay $z = 1$ vào (1) :

$$\begin{aligned} & x + y + 1 = xy \\ \Leftrightarrow\ & xy - x - y = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x(y - 1) - (y - 1) = 2 \\ \Leftrightarrow\ & (x - 1)(y - 1) = 2. \end{aligned}$$

Ta có $x - 1 \geqslant y - 1 \geqslant 0$ nên

$x - 1$	2
$y - 1$	1

Suy ra

x	3
y	2

Ba số phải tìm là 1 ; 2 ; 3.

2. Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Giải

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y$. Dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ hơn (là y).

Hiển nhiên ta có $\frac{1}{y} < \frac{1}{3}$ nên $y > 3$. (1).

Mặt khác do $x \geq y \geq 1$ nên $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$. Do đó :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}.$$

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{3} \text{ nên } y \leq 6. \qquad (2)$$

Ta xác định được khoảng giá trị của y là $4 \leq y \leq 6$.

Với $y = 4$ ta được : $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ nên $x = 12$.

Với $y = 5$ ta được : $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, loại vì x không là số nguyên.

Với $y = 6$ ta được : $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ nên $x = 6$.

Các nghiệm của phương trình là : (4 ; 12), (12 ; 4), (6 ; 6).

Chú ý

a) Để giới hạn $y \leq 6$, có thể lập luận :

$$y \leq x \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : 2 = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}.$$

Vậy $y \leq 6$.

b) Cách giải đưa về phương trình ước số :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{y + x}{xy} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow xy - 3x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(y - 3) = 9.$$

3. Phương pháp chỉ ra nghiệm nguyên

Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng : chỉ ra một hoặc vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Ví dụ 8. Tìm các số tự nhiên x sao cho :

$$2^x + 3^x = 5^x.$$

Giải

Viết phương trình dưới dạng :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1. \qquad (1)$$

Với $x = 0$ thì vế trái của (1) bằng 2, loại.

Với $x = 1$ thì vế trái của (1) bằng 1, đúng.

Với $x \geq 2$ thì $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$ nên :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1, \text{ loại.}$$

Nghiệm duy nhất của phương trình : $x = 1$.

4. Sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

Ta viết phương trình $f(x, y) = 0$ dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với x, khi đó y là tham số. Điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$ (để có nghiệm nguyên, còn cần Δ là số chính phương).

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x + y + xy = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Giải

Viết (1) thành phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm là $\Delta \geqslant 0$.

$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y =$

$= -3y^2 + 6y + 1.$

$$\Delta \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \leqslant 4.$$

Do đó $(y - 1)^2 \leqslant 1$. Suy ra :

$y - 1$	-1	0	1
y	0	1	2

Với $y = 0$, thay vào (2) được $x^2 - x = 0$. Ta có $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Với $y = 1$, thay vào (2) được $x^2 - 2x = 0$. Ta có $x_3 = 0$; $x_4 = 2$.

Với $y = 2$, thay vào (2) được $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ta có : $x_5 = 1$; $x_6 = 2$.

Thử lại, các giá trị trên nghiệm đúng phương trình (1).

Đáp số : (0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1), (2 ; 1) ; (1 ; 2), (2 ; 2).

Chú ý

a) Có thể giải bất phương trình bậc hai $3y^2 - 6y - 1 \leqslant 0$ bằng cách tìm nghiệm của tam thức bậc hai và định lí về dấu của tam thức bậc hai : tam thức $ay^2 + by + c$ trái dấu với a với các giá trị của y nằm trong khoảng hai nghiệm.

Nghiệm của $3y^2 - 6y - 1$ là $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{12}}{3}$. Do đó :

$$\frac{3 - \sqrt{12}}{3} \leqslant y \leqslant \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3 - 4}{3} < y < \frac{3 + 4}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < y < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow y \in \{0 ; 1 ; 2\}.$$

b) Cách khác giải phương trình (1) :

Biến đổi : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2$.

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

Trường hợp $x - 1 = 0$ cho đáp số : (1 ; 0), (1 ; 2).

Trường hợp $y - 1 = 0$ cho đáp số : (0 ; 1), (2 ; 1).

Trường hợp $x - y = 0$ cho đáp số : (0 ; 0), (2 ; 2).

BÀI TẬP

13. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

14. Tìm ba số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng.

15. Tìm bốn số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình (bài 16 – bài 19) :

16. $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$.

17. $x^2 + xy + y^2 = x + y$.

18. $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$.

19. $x^2 - 2xy + 5y^2 = y + 1$.

20. Tìm các số tự nhiên x sao cho :

$$2^x + 3^x = 35.$$

21.* Tìm các số nguyên x và y sao cho :

$$x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$$

Hướng dẫn. Chứng minh $y > x$ rồi xét hai trường hợp : $y = x + 1$ và $y > x + 1$.

22. * Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x! + y! = (x + y)!$$

23.* Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương : $x^{17} + y^{17} = 19^{17}$.

§4. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. Sử dụng tính chất về chia hết của số chính phương

Các tính chất thường dùng :

– Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

– Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2.

– Số chính phương chia cho 3 có số dư 0, 1 ;

số chính phương chia cho 4 có số dư 0, 1 ;

số chính phương chia cho 8 có số dư 0, 1, 4.

Ví dụ 10. Tìm các số nguyên x để $9x + 5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Giải

Cách 1. Giả sử $9x + 5 = n(n + 1)$ với n nguyên thì

$$36x + 20 = 4n^2 + 4n$$

$$\Rightarrow 36x + 21 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Rightarrow 3(12x + 7) = (2n + 1)^2.$$

Số chính phương $(2n + 1)^2$ chia hết cho 3, nên cũng chia hết cho 9. Ta lại có $12x + 7$ không chia hết cho 3 nên $3(12x + 7)$ không chia hết cho 9.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào để $9x + 5 = n(n + 1)$.

Cách 2. Giả sử $9x + 5 = n(n + 1)$ với n nguyên.

Biến đổi : $n^2 + n - (9x + 5) = 0$.

Để phương trình bậc hai đối với n có nghiệm nguyên, điều kiện cần là Δ là số chính phương.

Nhưng $\Delta = 1 + 4(9x + 5) = 36x + 21$, chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, nên không là số chính phương.

Vậy không tồn tại số nguyên n nào để $9x + 5 = n(n + 1)$, tức là không tồn tại số nguyên x để $9x + 5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

2. Tạo ra bình phương đúng

Ví dụ 11. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$2x^2 + 4x = 19 - 3y^2. \qquad (1)$$

Giải

$$2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 3(7 - y^2). \qquad (2)$$

Ta thấy $3(7 - y^2) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ.

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$.

Khi đó (2) có dạng : $2(x + 1)^2 = 18$.

Ta được : $x + 1 = \pm 3$, do đó : $x_1 = 2$; $x_2 = -4$.

Các cặp số (2 ; 1), (2 ; −1), (−4 ; 1), (−4 ; −1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

3. Xét các số chính phương liên tiếp

Hiển nhiên giữa hai số chính phương liên tiếp, không có số chính phương nào. Do đó với mọi số nguyên a, x, ta có :

$a^2 < x^2 < (a+1)^2$.

- Không tồn tại x để $a^2 < x^2 < (a+1)^2$.
- Nếu $a^2 < x^2 < (a+2)^2$ thì $x^2 = (a+1)^2$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho :

$$x(x+1) = k(k+2).$$

Giải

Giả sử $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên, x nguyên dương. Ta có :

$x^2 + x = k^2 + 2k$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Do $x > 0$ nên $x^2 < x^2 + x + 1 = (k+1)^2$ (1)

Cũng do $x > 0$ nên :

$(k+1)^2 = x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2$. Vô lí.

Vậy không tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1) = k(k+2)$.

Ví dụ 13*. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương : $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$.

Giải

Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ (1) với $y \in \mathbf{N}$.

Ta thấy :

$y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3)$

$\quad = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$.

Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ với $a = x^2 + x$.

Thật vậy :

$y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0.$

$(a + 2)^2 - y^2 = (x^2 + x + 2)^2 - (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3)$

$= 3x^2 + 3x + 1$ (bạn đọc tự rút gọn)

$= 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0.$

Do $a^2 < y^2 < (a + 2)^2$ nên $y^2 = (a + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ (bạn đọc tự rút gọn)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $x = 1$ hoặc $x = -2$, biểu thức đã cho bằng $9 = 3^2$.

Cách giải khác. Đưa về phương trình ước số :

Nhân hai vế của (1) với 4 :

$$4y^2 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 12$$
$$= 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 11$$
$$= [2x^2 + (2x + 1)]^2 + 11.$$

Do đó : $(2x^2 + 2x + 1 + 2y)(2x^2 + 2x + 1 - 2y) = -11.$

Ta có $2x^2 + 2x + 1 + 2y \geq 2x^2 + 2x + 1 - 2y$ nên có hai trường hợp :

a) $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + 2y = 11 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = 5 \\ 2y = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ hoặc } x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + 2y = 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = -5 \\ 2y = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ Vô nghiệm.

4. Sử dụng tính chất : Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương

Giả sử $ab = c^2$ với $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, $(a, b) = 1$.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong a và b có một số, chẳng hạn a, chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ thì số b không chứa thừa số p nên c^2 chứa thừa số p với số mũ lẻ, trái với giả thiết c^2 là số chính phương.

Ví dụ 14. Giải phương trình với nghiệm nguyên dương :

$$xy = z^2 \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta có thể giả sử $(x, y, z) = 1$. Thật vậy nếu bộ ba số x_0, y_0, z_0 thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_0 = dx_1$, $y_0 = dy_1$, $z_0 = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1).

Với $(x, y, z) = 1$ thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà $(x, y) = 1$ nên $x = a^2$, $y = b^2$ với $a, b \in \mathbf{N}^*$.

Suy ra : $z^2 = xy = (ab)^2$, do đó : $z = ab$.

Như vậy : $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \\ z = tab \end{cases}$

với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta các nghiệm nguyên dương của (1).

5. Sử dụng tính chất : Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0

Giả sử $a(a + 1) = k^2$ (1) với $a \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $a \neq 0$, $a + 1 \neq 0$ thì $k^2 \neq 0$. Do $k \in \mathbf{N}$ nên $k > 0$.

Từ (1) suy ra : $a^2 + a = k^2$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a = 4k^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4k^2 + 1$$

$$\Rightarrow (2a + 1)^2 = 4k^2 + 1. \qquad (2)$$

Do $k > 0$ nên $4k^2 < 4k^2 + 1 < 4k^2 + 4k + 1.$ (3).

Từ (2) và (3) : $(2k)^2 < (2a + 1)^2 < (2k + 1)^2$, vô lí.

Vậy nếu $a(a + 1) = k^2$ thì tồn tại một trong hai số a, a + 1 bằng 0.

Chú ý. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì chưa thể kết luận được mỗi số đều là số chính phương. Chẳng hạn : hai số −1 và 0.

Ví dụ 15. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \qquad (1)$$

Giải

Thêm xy vào hai vế :

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1) \qquad (2)$$

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0. Từ (1) có $x^2 + y^2 = 0$ nên x = y = 0.

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = −1 nên (x, y) bằng (1 ; −1) hoặc (−1 ; 1).

Thử lại, ba cặp số (0 ; 0), (1 ; −1), (−1 ; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Các cách giải khác :

Cách 2. Đưa về phương trình ước số :

$$4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 4y^2 = 4x^2y^2 + 4xy$$
$$\Leftrightarrow (2x + 2y)^2 = (2xy + 1)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (2xy + 1)^2 - (2x + 2y)^2 = 1.$$

Sau đó đưa về phương trình ước số.

Cách 3. Dùng tính chất của số chính phương và đưa về phương trình ước số :

$$4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x + y)^2 + 3y^2 = 4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (2x + y)^2 = y^2(4x^2 - 3).$$

Nếu y = 0 thì x = 0, ta có (0 ; 0) là một nghiệm.

Nếu y ≠ 0 thì $4x^2 - 3$ phải là số chính phương.

Ta có $4x^2 - 3 = k^2$ ($k \in \mathbf{N}$), đưa về

$$(2x + k)(2x - k) = 3.$$

Ta tìm được $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. Từ đó tìm được y.

Cách 4. Dùng bất đẳng thức. Không mất tính tổng quát, giả sử $|x| \leq |y|$, thế thì $x^2 \leq y^2$, $xy \leq |xy| \leq y^2$.

Do đó : $x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leq y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2$.

Nếu $y = 0$ thì $x = 0$.

Nếu $y \neq 0$ thì chia hai vế cho y^2 được $x^2 \leq 3$. Do đó $x^2 = 1$. Ta có thêm hai nghiệm : $(1 ; -1)$, $(-1 ; 1)$.

Cách 5. Đưa về phương trình bậc hai đối với x :

$(y^2 - 1)x^2 - yx - y^2 = 0$ (2)

Xét $y = 1$, (2) có dạng : $-x - 1 = 0$ được $x = -1$.

Xét $y = -1$, (2) có dạng : $x - 1 = 0$ được $x = 1$.

Xét $y \neq \pm 1$, (2) là phương trình bậc hai đối với x.

$$\Delta = y^2 + 4y^2(y^2 - 1) = y^2(4y^2 - 3).$$

Ta phải có Δ là số chính phương.

Nếu $y = 0$ thì từ (2) suy ra $x = 0$.

Nếu $y \neq 0$ thì $4y^2 - 3$ phải là số chính phương.

Ta có $4y^2 - 3 = k^2$ $(k \in \mathbf{N})$ nên $(2y + k)(2y - k) = 3$.

Ta tìm được $y = \pm 1$, loại vì ta đang xét $y \neq \pm 1$.

BÀI TẬP

24. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$.

25. Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x và y sao cho $x^2 + y$ và $y^2 + x$ đều là số chính phương ?

26. Chứng minh rằng có vô số số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương :

$(1 + 2 + 3 + ... + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + x^2)$.

27.* Chứng minh rằng không có số chính phương nào viết được dưới dạng $2^p + 3^p$ trong đó p là một số nguyên tố.

28.* Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

29. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$$

30.* Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

31.* Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

§5. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

Ví dụ 16. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3 \qquad (1)$$

Giải

Hiển nhiên $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 được :

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3 \qquad (2)$$

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 được :

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3 \qquad (3)$$

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 được :

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3 \qquad (4)$$

Như vậy nếu (x, y, z) là nghiệm của (1) thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1) trong đó $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.

Lập luận tương tự như trên, (x_2, y_2, z_2) cũng là nghiệm của (1) trong đó $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến : x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của (1).

Chú ý

Ta gọi phương pháp giải trên là *phương pháp lùi vô hạn*.

Nếu ví dụ 16 được cho dưới dạng : Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ (1), ta có thể trình bày chứng minh bằng *nguyên tắc cực hạn :*

Giả sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nguyên dương của (1), trong đó x_0 là giá trị nguyên dương nhỏ nhất trong các giá trị mà x có thể nhận.

Lập luận như trong cách giải trên ta được (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm nguyên dương của (1) mà $x_0 = 2x_1$, tức là $x_1 < x_0$. Điều này trái với giả thiết x_0 là số nguyên dương nhỏ nhất trong các giá trị nhận được của x. Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

BÀI TẬP

Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình (bài 32 – bài 34) :

32. $x^3 - 3y^3 = 9z^3$

33. a) $x^2 + y^2 = 3z^2$

b) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$.

34. $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

35. a) Tìm các nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 7z^2$.

b*) Chứng minh rằng số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số hữu tỉ.

Chương II

CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

§6. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Ví dụ

Ví dụ 17. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$11x + 18y = 120 \qquad (1)$$

Giải

Chú ý đến tính chia hết, ta thấy $11x \vdots 6$ nên $x \vdots 6$. Đặt $x = 6k$ (k nguyên). Thay vào (1) và rút gọn ta được :

$$11k + 3y = 20.$$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được :

$$y = \frac{20 - 11k}{3}$$

Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức này :

$$y = 7 - 4k + \frac{k-1}{3}$$

Lại đặt $\frac{k-1}{3} = t$ (t nguyên) suy ra $k = 3t + 1$. Do đó :

$$y = 7 - 4(3t + 1) + t = 3 - 11t.$$

$$x = 6k = 6(3t + 1) = 18t + 6.$$

Thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.

Vậy các nghiệm nguyên của (1) được biểu thị bởi công thức :

$$\begin{cases} x = 18t + 6 \\ y = 3 - 11t \end{cases} \text{ (với t là số nguyên tùy ý)}$$

Chú ý

a) Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của (1) thì sau khi được nghiệm nguyên tổng quát, ta giải các điều kiện :

$$\begin{cases} 18t + 6 > 0 \\ 3 - 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < t < \frac{3}{11}.$$

Do đó $t = 0$ (vì t nguyên). Nghiệm nguyên dương của (1) là : $x = 6$, $y = 3$.

Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên dương của (1), ta còn có thể giải như sau :

$$11x + 18y = 120.$$

Do $y \geqslant 1$ nên $11x \leqslant 120 - 18.1 = 102$.

Do x nguyên nên $x \leqslant 9$.

Mặt khác $x \,\vdots\, 6$ và x nguyên dương nên $x = 6$. Suy ra $y = 3$.

b) Có nhiều cách tách giá trị nguyên của biểu thức

$y = \dfrac{20 - 11k}{3}$, chẳng hạn :

$$y = 7 - 4k + \frac{k - 1}{3} \text{ (cách 1)}$$

$$y = 7 - 3k - \frac{1 + 2k}{3} \text{ (cách 2)}$$

$$y = 6 - 3k + \frac{2(1 - k)}{3} \text{ (cách 3)}$$

Bạn đọc tự giải theo các cách trên để thấy :

– Cách 1 gọn hơn cách 2 vì trong cách 1 hệ số của k ở phần phân số bằng 1, do đó sau khi đặt $\frac{k-1}{3} = t$ ta không cần dùng thêm một ẩn phụ nào nữa.

– Trong cách 3, nhờ đặt được thừa số chung mà hệ số của k ở phần phân số bằng –1, do đó sau khi đặt $\frac{1-k}{3} = t$ cũng không cần dùng thêm một ẩn phụ nào nữa.

2. Cách giải phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ với nghiệm nguyên ($a, b, c \in Z$)

– Rút gọn phương trình, chú ý đến tính chia hết của các ẩn.

– Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (chẳng hạn x) theo ẩn kia.

– Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức của x.

– Đặt điều kiện để phân số trong biểu thức của x bằng một số nguyên t_1, ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn y và t_1.

– Cứ tiếp tục làm như trên cho đến khi các ẩn đều được biểu thị dưới dạng một đa thức với các hệ số nguyên.

Thực chất của cách giải này là thay giải phương trình $ax + by = c$ bởi giải các phương trình :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

trong đó các hệ số $a_1, a_2, \ldots ; b_1, b_2, \ldots$ có giá trị tuyệt đối nhỏ dần cho đến khi được một hệ số có giá trị tuyệt đối bằng 1

Chú ý. Ngoài cách giải bằng phương pháp tách riêng giá trị nguyên như trên, còn có thể giải phương trình $ax + by = c$ bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, xem §18.

BÀI TẬP

36. Tìm các nghiệm nguyên : $12x - 7y = 45$.

37. Tìm các nghiệm nguyên : $9x + 20y = 547$.

38. Cho phương trình : $11x + 8y = 73$.

a) Tìm các nghiệm nguyên.

b) Tìm các nghiệm nguyên dương.

39. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương :

$$11x + 1999y = 11.1999.$$

40. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$6x + 8y = m + 1,$$

trong đó m là số nguyên cho trước.

§7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ HAI ẨN

Ví dụ 18. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$5x - 3y = 2xy - 11.$$

Giải

Biểu thị y theo x :

$$(2x + 3)y = 5x + 11.$$

Dễ thấy $2x + 3 \neq 0$ (vì x nguyên), do đó :

$$y = \frac{5x + 11}{2x + 3} = 2 + \frac{x + 5}{2x + 3}$$

Để $y \in \mathbf{Z}$ phải có $x + 5 \vdots 2x + 3$

$\Rightarrow 2(x + 5) \vdots 2x + 3$

$\Rightarrow 2x + 3 + 7 \vdots 2x + 3$

$\Rightarrow 7 \vdots 2x + 3.$

Ta có :

$2x + 3$	1	−1	7	−7
x	−1	−2	2	−5
y	6	−1	3	2

Thử lại, các cặp giá trị trên của (x, y) đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Cách giải khác . Đưa về phương trình ước số :

$$(2x + 3)(2y - 5) = 7.$$

Ví dụ 19. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 - 2x - 11 = y^2 \qquad (1)$$

Giải

Cách 1. Đưa về phương trình ước số :

$$x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - y^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 + y)(x - 1 - y) = 12.$$

Ta có các nhận xét :

a) Vì (1) chứa y với số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng $y \geq 0$. Thế thì $x - 1 + y \geq x - 1 - y$.

b) $(x - 1 + y) - (x - 1 - y) = 2y$ nên $x - 1 + y$ và $x - 1 - y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp :

$x - 1 + y$	6	-2
$x - 1 - y$	2	-6

Do đó :

$x - 1$	4	-4
y	2	2
x	5	-3

Đáp số : (5 ; 2), (5 ; -2), (-3 ; 2), (-3 ; -2).

Cách 2. Viết thành phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 - 2x - (11 + y^2) = 0 \qquad (2)$$

$$\Delta' = 1 + 11 + y^2 = 12 + y^2.$$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm nguyên :

Δ' là số chính phương $\Leftrightarrow 12 + y^2 = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow k^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (k + y)(k - y) = 12.$

Giả sử $y \geqslant 0$ thì $k + y \geqslant k - y$ và $k + y \geqslant 0$.

$(k + y) - (k - y) = 2y$ nên $k + y$ và $k - y$ cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn.

Từ các nhận xét trên ta có :

$$\begin{cases} k + y = 6 \\ k - y = 2 \end{cases}$$

Do đó : $y = 2$.

Thay vào (2) : $x^2 - 2x - 15 = 0$.

$$x_1 = 5 \ ; \ x_2 = -3.$$

Ta có bốn nghiệm : (5 ; 2), (5 ; -2), (-3 ; 2), (-3 ; -2).

Ví dụ 20. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0 \qquad (1)$$

Giải

Viết thành phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 + (3y - 1)x + (2y^2 - y + 3) = 0 \qquad (2)$$

$$\Delta = (3y - 1)^2 - 4(2y^2 - y + 3) = y^2 - 2y - 11.$$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm nguyên :

Δ là số chính phương $\Leftrightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2$ (3) ($k \in N$).

Giải (3) với nghiệm nguyên như ở ví dụ 19 được $y_1 = 5$; $y_2 = -3$.

Với $y = 5$, thay vào (2) được $x^2 + 14x + 48 = 0$. Ta có $x_1 = -8$; $x_2 = -6$.

Với $y = -3$, thay vào (2) được $x^2 - 10x + 24 = 0$. Ta có $x_3 = 6$; $x_4 = 4$.

Đáp số : $(-8 ; 5)$, $(-6 ; 5)$, $(6 ; -3)$, $(4 ; -3)$.

Cách giải khác. Đưa về phương trình ước số :

$$(x + y)(x + 2y - 1) = -3.$$

BÀI TẬP

41. Tìm các nghiệm nguyên : $xy - 2y - 3 = 3x - x^2$.

42. Tìm các nghiệm nguyên : $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$.

43. Tìm các nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 - x - y = 8$.

44. Tìm các số nguyên x để $x^2 - 2x - 14$ là số chính phương.

45. Tìm các số nguyên x để $x^2 - 4x - 25$ là số chính phương.

46. Tìm các số nguyên x để $x(x + 12)$ là số chính phương.

47. a) Tìm các số nguyên x để $x^2 + 7x$ là số chính phương.

b*) Tìm các số hữu tỉ x để $x^2 + 7x$ là số chính phương.

48. a) Tìm các số nguyên x để $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

b*) Tìm các số hữu tỉ x để $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

49. Tìm hai số nguyên dương có hiệu bằng 17 và tích của chúng là một số chính phương.

50. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên :

$$7x^2 - 5y^2 = 3.$$

51. Tìm các nghiệm nguyên : $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$.

52. Tìm các nghiệm nguyên : $3(x^2 - xy + y^2) = 7(x + y)$.

53. Tìm các nghiệm nguyên : $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$.

54. Tìm các nghiệm nguyên : $8y^2 - 25 = 3xy + 5x$.

§8. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRỞ LÊN CÓ HAI ẨN

Ví dụ 21. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2 \qquad (1)$$

Giải

Nếu y thỏa mãn phương trình thì $-y$ cũng thỏa mãn, do đó ta giả sử $y \geqslant 0$.

$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2$.

Đặt $x^2 + 3x + 1 = a$, ta được :

$(a - 1)(a + 1) = y^2 \Leftrightarrow a^2 - 1 = y^2$

$\Leftrightarrow (a + y)(a - y) = 1$.

Suy ra $a + y = a - y$, do đó $y = 0$.

Thay vào (1) được : $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -2$; $x_4 = -3$.

Đáp số : $(0 ; 0)$, $(-1 ; 0)$, $(-2 ; 0)$, $(-3 ; 0)$.

Ví dụ 22.* Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^3 - y^3 = xy + 8 \qquad (1)$$

Giải

Cách 1. $|x - y|.|x^2 + xy + y^2| = |xy + 8|$

Dễ thấy $x \neq y$, vì nếu $x = y$ thì (1) trở thành $0 = x^2 + 8$, loại.

Do x, y nguyên nên $|x - y| \geqslant 1$.

Suy ra : $|x^2 + xy + y^2| \leqslant |xy + 8|$

Do đó : $x^2 + xy + y^2 \leqslant |xy + 8| \qquad (2)$

Xét hai trường hợp :

a) $xy + 8 < 0$. Khi đó (2) trở thành :

$$x^2 + xy + y^2 \leq -xy - 8 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq -8, \text{ loại.}$$

b) $xy + 8 \geq 0$. Khi đó (2) trở thành :

$$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 8 \qquad (3)$$

Do đó : $x^2, y^2 \in \{0 ; 1 ; 4\}$.

Nếu $x = 0$ thì từ (1) có $y^3 = -8$, nên $y = -2$.

Nếu $y = 0$ thì từ (1) có $x^3 = 8$, nên $x = 2$.

Nếu x, y đều khác 0 thì $x^2, y^2 \in \{1 ; 4\}$. Do $x \neq y$ (gi thích ở trên) nên chỉ có :

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ. Kh đó vế trái của (1) lẻ, còn vế phải của (1) chẵn, không xảy ra

Đáp số : $(0 ; -2), (2 ; 0)$.

Cách 2. $x^3 - y^3 - xy = 8 \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 27xy = 216$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 215 \qquad (2)^{(*)}$$

(*) Quá trình tìm tòi cách giải để biến đổi từ (1) đến (2) có thể diễn ra như sau Vế trái của (1) có dạng $x^3 - y^3 - xy$ làm ta nghĩ đến dạng $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Ta sử dụng hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c).\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

Đối chiếu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ với $x^3 - y^3 - xy$, ta đặt $a = x$, $b = -y$, và để $-xy = -3abc$ ta chọn $c = -\frac{1}{3}$. Ta viết (1) dưới dạng :

$$x^3 - y^3 - \frac{1}{27} - 3x(-y)\left(-\frac{1}{3}\right) = 8 - \frac{1}{27}.$$

Nhân hai vế với 27, ta được (2).

Ta thấy $27x^3$, $-27y^3$, -1 lần lượt là lập phương của $3x$, $-3y$, -1, còn $27xy$ là 3 lần tích của ba số ấy. Áp dụng hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$= (a + b + c).\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

với $a = 3x$, $b = -3y$, $c = -1$, ta biến đổi (2) thành :

$$(3x - 3y - 1).\left[\frac{(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2}{2}\right] = 215 \quad (3).$$

Đặt biểu thức trong dấu móc của (3) là A. Ta dễ thấy $A > 0$ nên A và $3x - 3y - 1$ là ước tự nhiên của 215. Phân tích ra thừa số nguyên tố : $215 = 5.43$ nên 215 có bốn ước tự nhiên : 1, 5, 43, 215.

Do $3x - 3y - 1$ chia cho 3 dư 2 nên $3x - 3y - 1 \in \{5 ; 215\}$.

Xét hai trường hợp :

$$\begin{cases} 3x - 3y - 1 = 5 & (4) \\ A = 43 & (5) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = 215 \\ A = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1 : Từ (4) suy ra $x - y = 2$. Thay $y = x - 2$ vào (5) được :

$$[3x + 3(x - 2)]^2 + [1 - 3(x - 2)]^2 + (3x + 1)^2 = 86.$$

Rút gọn được : $x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 2$.

Với $x = 0$ thì $y = -2$. Với $x = 2$ thì $y = 0$.

Trường hợp 2 : Từ $A = 1$ suy ra :

$$(3x + 3y)^2 + (1 - 3y)^2 + (3x + 1)^2 = 2.$$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên có một số bằng 0, hai số bằng số 1. Số bằng 0 không thể là $1 - 3y$ hoặc $3x + 1$, do đó $3x + 3y = 0$. Nghiệm nguyên của hệ :

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ (1 - 3y)^2 = 1 \\ (3x + 1)^2 = 1 \end{cases}$$

là $x = y = 0$, không thoả mãn $3x - 3y - 1 = 215$.

Đáp số : $(0 ; -2)$, $(2 ; 0)$.

Chú ý. Ta có thể đưa ra hai nhận xét sau để giảm bớt s trường hợp phải xét :

a) $3x - 3y - 1 > 0$ nên $x - y > \frac{1}{3}$. Do x, y nguyên nê $x - y \geq 1$, do đó $3x - 3y - 1 \geq 2$.

b) Biến đổi :

$$A = \frac{1}{2}(9x^2 + 9y^2 + 18xy + 9y^2 - 6y + 1 + 1 + 6x + 9x^2) =$$
$$= 9(x^2 + y^2 + xy) + 3(x - y) + 1.$$

Ta thấy $x^2 + y^2 + xy = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (không xảy r dấu "=" vì $x > y$) nên $x^2 + y^2 + xy \geq 1$. Do đó :

$$A \geq 9.1 + 3.1 + 1 = 13.$$

Nhận xét thứ hai giúp ta loại trường hợp $A = 1$.

Cách 3. $x^3 - y^3 = xy + 8$

$\Leftrightarrow (x - y)^3 + 3xy(x - y) = xy + 8$.

Đặt $x - y = a$, $xy = b$ ta có :

$a^3 + 3ab = b + 8$

$\Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a - 1)$

Suy ra : $a^3 - 8 \vdots 3a - 1$

$\Rightarrow 27(a^3 - 8) \vdots 3a - 1$

$\Rightarrow 27a^3 - 1 - 215 \vdots 3a - 1$.

Do $27a^3 - 1 \vdots 3a - 1$ nên $215 \vdots 3a - 1$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $215 = 5.43$

Do đó $3a - 1 \in \{\pm 1 ; \pm 5 ; \pm 43 ; \pm 215\}$

Do $3a - 1$ chia cho 3 dư 2 nên $3a - 1 \in \{-1 ; 5 ; -43 ; 215\}$

Ta có :

$3a - 1$	-1	5	-43	215
a	0	2	-14	72
$b = \dfrac{a^3 - 8}{1 - 3a}$	-8	0	-64	-1736

Chú ý rằng $(x - y)^2 + 4xy \geq 0$ nên $a^2 + 4b \geq 0$, do đó trong bốn trường hợp trên chỉ có $a = 2$; $b = 0$. Ta được : $x - y = 2$; $xy = 0$.

Đáp số : $(0 ; -2)$ và $(2 ; 0)$.

BÀI TẬP

55. Tìm các nghiệm nguyên : $(x^2 + y)(x + y^2) = (x + y)^3$

56. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương :

a) $x^4 - x^2 + 2x + 2$;

b*) $x(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$;

c*) $x(x + 1)(x + 7)(x + 8)$.

57. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên :

a) $x^3 + y^3 = 2004$;

b) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 3$;

c) $(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 3996$;

d*) $x^2 - y^3 = 7$.

Hướng dẫn : Trước hết chứng minh bổ đề :

Nếu $a^2 + b^2 \,\vdots\, p$ mà p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì $a \,\vdots\, p$, $b \,\vdots\, p$.

58.* Tìm các nghiệm nguyên : $x^3 + y^3 = 3xy + 3$.

59.* Tìm các nghiệm nguyên : $x^3 - y^3 = xy + 25$.

60. Tìm các nghiêm nguyên : $x^2 + y^3 = y^6$

§9. PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC CÓ BA ẨN TRỞ LÊN

có

th

ch

cl

Ví dụ 23. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$6x + 15y + 10z = 3.$$

Giải

Ta thấy $10z \vdots 3$ nên $z \vdots 3$. Đặt $z = 3k$ ta được :

$6x + 15y + 10.3k = 3$

$\Leftrightarrow 2x + 5y + 10k = 1.$

Đưa về giải phương trình hai ẩn x, y có các hệ số tươ ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau.

$2x + 5y = 1 - 10k.$

$$x = \frac{1 - 10k - 5y}{2} = -5k - 2y + \frac{1-y}{2}$$

Đặt $\frac{1-y}{2} = t$ (t nguyên). Ta có :

$y = 1 - 2t$

$x = -5k - 2(1 - 2t) + t = 5t - 5k - 2.$

$z = 3k.$

Nghiệm của phương trình :

$(5t - 5k - 2\ ;\ 1 - 2t\ ;\ 3k)$ với t, k là các số nguyên tùy

Ví dụ 24. Chứng minh rằng phương trình sau không nghiệm nguyên :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1999 \qquad (1)$$

Giải

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 cũng dư

Tổng $x^2 + y^2 + z^2$ là số lẻ nên trong ba số x^2, y^2, z^2 phải có : hoặc có một số lẻ, hai số chẵn ; hoặc ba số đều lẻ.

Trường hợp trong ba số x^2, y^2, z^2 có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái của (1) chia cho 4 dư 1, còn vế phải (là 1999) chia cho 4 dư 3, loại.

Trường hợp ba số x^2, y^2, z^2 đều lẻ thì vế trái của (1) chia cho 8 dư 3, còn vế phải (là 1999) chia cho 8 dư 7, loại.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

BÀI TẬP

61. Tìm các nghiệm nguyên :

a) $2x + 5y - z = 4$;

b) $2x - 5y - 6z = 4$.

62. Tìm các nghiệm nguyên :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2y + 2z + 2 = 0.$$

63. Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên :

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

64. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2003.$$

65. Tìm các nghiệm nguyên : $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 1995$.

66.* Tìm các nghiệm nguyên : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

67. Tìm các nghiệm nguyên : $x^7 + y^7 = 7z$.

68. Tìm các nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

§10. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Ví dụ 25. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}.$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình với 6xy :

$$6y + 6x + 1 = xy.$$

Đưa về phương trình ước số :

$$x(y - 6) - 6(y - 6) = 37$$

$$\Leftrightarrow (x - 6)(y - 6) = 37.$$

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y \geq 1$, thế thì $x - 6 \geq y - 6 \geq -5$.

Chỉ có một trường hợp :

$$\begin{cases} x - 6 = 37 \\ y - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 7 \end{cases}$$

Đáp số : (43 ; 7), (7 ; 43).

Ví dụ 26. Tìm các số nguyên x sao cho

$\frac{x - 17}{x - 9}$ là bình phương của một phân số.

Giải

Giả sử $\frac{x - 17}{x - 9} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ với $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}^*$

Xét a = 0 thì x = 17.

Xét $a \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử (a, b) = 1

Do $(a^2, b^2) = 1$ nên :

$$x - 17 = a^2k \quad (1)$$

$$x - 9 = b^2k \quad (2)$$

k nguyên.

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(x - 9) - (x - 17) = (b^2 - a^2)k$$

$$8 = (b + a)(b - a)k.$$

Ta thấy b + a và b − a là ước của 8. Chú ý rằng (b + a) − (b − a) = 2a nên b + a và b − a cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có b + a > b − a và b + a > 0. Có các trường hợp :

b + a	b − a	k	b	a	$x = b^2k + 9$
4	2	1	3	1	18
4	−2	−1	1	3	8
2	−2	−2	0, loại		
2	−4	−1	−1, loại		

Có ba đáp số :

$x = 17$ thì $\dfrac{17-17}{17-9} = \dfrac{0}{8} = 0^2$.

$x = 18$ thì $\dfrac{18-17}{18-9} = \dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

$x = 8$ thì $\dfrac{8-17}{8-9} = 9 = 3^2$.

BÀI TẬP

69. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}.$$

70. Giải phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

với x và y là các số tự nhiên khác nhau, p là số nguyên n cho trước.

71. Tìm các nghiệm tự nhiên : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$.

72. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$\frac{1}{x^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{x^2(x^2+y^2+z^2)} = 1.$$

73. Tìm ba số tự nhiên khác nhau có tổng các nghịch đảo của chúng là một số nguyên.

74. Tìm các nghiệm tự nhiên của phương trình :

$$\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{40}{31}.$$

75.* Tìm ba số nguyên dương x, y, z sao cho :

$xy + 1$ chia hết cho z,

$xz + 1$ chia hết cho y,

$yz + 1$ chia hết cho x.

76. a) Tìm các nghiệm nguyên dương :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

b*) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương với $n \geq 2$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đôi một khác nhau

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

77.* Tìm các nghiệm nguyên dương :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$$

với m = 2, m = 3, m = 4.

78. Tìm các số nguyên x sao cho $\frac{x-3}{4x+6}$ là bình phương của một phân số.

79. Tìm các nghiệm nguyên :

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

§11. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG MŨ

Ví dụ 27. Tìm các số tự nhiên x và các số nguyên y sao cho :

$$2^x + 3 = y^2.$$

Giải

Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x :

Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 4$, nên $y = \pm 2$.

Nếu $x = 1$ thì $y^2 = 5$, không có nghiệm nguyên.

Nếu $x \geqslant 2$ thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia cho 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia cho 4 dư 1. Mâu thuẫn.

Kết luận : Nghiệm của phương trình là :

$$(0\ ;\ 2),\ (0\ ;\ -2).$$

Ví dụ 28. Giải phương trình với nghiệm nguyên dương :

$$2^x + 57 = y^2 \qquad (1).$$

Giải

Xét hai trường hợp :

a) x lẻ. Đặt $x = 2n + 1$ ($n \in N$). Ta có :

$2^x = 2^{2n+1} = 2.4^n = 2(3+1)^n = 2(BS3 + 1) = BS3 + 2.$

Khi đó vế trái của (1) là số chia cho 3 dư 2, còn vế phải là số chính phương, chia cho 3 không dư 2, loại.

b) x chẵn. Đặt $x = 2n$ ($n \in N^*$). Ta có :

$$y^2 - 2^{2n} = 57$$

$$\Leftrightarrow (y + 2^n)(y - 2^n) = 3.19.$$

Ta thấy $y + 2^n > 0$ nên $y - 2^n > 0$ và $y + 2^n > y - 2^n$

Do đó có các trường hợp :

$y + 2^n$	57	19
$y - 2^n$	1	3
2^n	28, loại	8
n		3
y		11
$x = 2n$		6

Ta có : $2^6 + 57 = 11^2$.

Kết luận : Nghiệm của phương trình là (6 ; 11).

Ví dụ 29. Giải phương trình với nghiệm tự nhiên :

$$2^x + 2^y + 2^z = 1024 \quad (1) \text{ với } x \leqslant y \leqslant z.$$

Giải

Chia hai vế của (1) cho $2^x \neq 0$ ta được :

$$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \quad (2)$$

Do $2^{10-x} > 1$ nên 2^{10-x} là bội của 2. Ta lại có $z > x$, vì nếu $z = x$ thì $x = y = z$, khi đó (2) trở thành $1 + 2^0 + 2^0 = B$(2), loại. Do đó 2^{z-x} là bội của 2.

Suy ra $1 + 2^{y-x}$ là bội của 2. Do đó $2^{y-x} = 1$, vậy $y = x$.

Thay vào (2) :

$$1 + 1 + 2^{z-x} = 2^{10-x}$$

$\Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{10-x}$

$\Leftrightarrow 2(1 + 2^{z-x-1}) = 2^{10-x}$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{9-x}$.

Do $2^{9-x} > 1$ nên 2^{9-x} là bội của 2. Do đó $2^{z-x-1} = 1$ và $2 = 2^{9-x}$. Từ đó $x = 8$; $y = 8$; $z = 9$.

Chú ý

a) Do 2^{10} là luỹ thừa của 2 có số mũ không quá lớn nên có thể giải ví dụ trên bằng cách xét các lũy thừa của 2 với số mũ từ 0 đến 9, đó là : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 rồi bằng lập luận chọn ra :

256 + 256 + 512 = 1024, tức là $2^8 + 2^8 + 2^9 = 1024$.

b) Ta có bài toán tổng quát hơn ví dụ 29 :

Giải phương trình với nghiệm tự nhiên :

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^n$$

trong đó $x \leqslant y \leqslant z$ va n là số tự nhiên cho trước ($n \geqslant 2$). Với cách giải tương tự như trên, ta được :

$$x = y = n - 2,\ z = n - 1.$$

BÀI TẬP

80. Tìm các số tự nhiên x sao cho :

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

81. Tìm các số nguyên x và các số tự nhiên y sao cho :

a) $x^y = x^4$, b) $x^2 + 1 = 2^y$;

c) $x^2 = 4^y + 5$; d) $5x^3 = 3^y + 317$.

82. Giải phương trình với nghiệm tự nhiên :

a) $3^x + 1 = 2^y$; b) $x^2 - 2^y = 33$;

c) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$; d) $10^x - 1 = 81y$.

83. Giải phương trình với nghiệm tự nhiên :

a) $7^x + 13^y = 19^z$;

b) $2^x + 2^y = 2^z$;

c) $2^x + 2^y + 2^z = 552$ $(x < y < z)$;

d) $x^y + 1 = z^2$ (x là số nguyên tố).

84. Tìm các số nguyên dương x, y, z, t sao cho :

a) $x^y + x^z = x^t$;

b*) $x^x + y^y + z^z = t^t$.

85.** Tìm các số nguyên dương x và y khác nhau sao ch

$$x^y = y^x.$$

§12. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ví dụ 30. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Giải

Điều kiện : $x \geq 1$.

$$y = \sqrt{(x-1) + 1 + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x-1) + 1 - 2\sqrt{x-1}}$$

$$= |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1|$$

$$= \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|.$$

Xét hai trường hợp :

a) Với $x = 1$ thì $y = 2$.

b) Với $x \geq 2$ thì $y = \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2\sqrt{x-1}$.

Do đó : $y^2 = 4(x - 1)$. Do $x \geq 2$ nên có thể đặt $x - 1 =$ với t nguyên dương.

Ta có : $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t \end{cases}$

Kết luận : Nghiệm nguyên của phương trình là :

$(1 ; 2)$ và $(t^2 + 1 ; 2t)$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Ví dụ 31. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = y.$$

Giải

Ta có : $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Bình phương hai vế rồi chuyển vế :

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y^2 - x = k \ (k \in \mathbf{N}).$$

Bình phương hai vế rồi chuyển vế :

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = k^2 - x = m \ (m \in \mathbf{N}).$$

Bình phương hai vế :

$$x + \sqrt{x} = m^2.$$

Ta biết rằng với x nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do $x + \sqrt{x} = m^2$ $(m \in \mathbf{N})$ nên $\sqrt{x}$ không là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên và là số tự nhiên.

Ta có : $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = m^2$

Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x} + 1$ có tích là một số chính phương nên số nhỏ bằng 0 :

$$\sqrt{x} = 0$$

Suy ra : $x = 0$; $y = 0$, thoả mãn phương trình đã cho.

Nghiệm của phương trình là $(0 ; 0)$.

Ví dụ 32. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \qquad (1)$$

Giải

$$\sqrt{x} = \sqrt{1980} - \sqrt{y} \qquad (2)$$

Với điều kiện $0 \leqslant x, y \leqslant 1980$:

(2) $\Leftrightarrow x = 1980 + y - 2\sqrt{1980y}$

$\Leftrightarrow x = 1980 + y - 12\sqrt{55y}$.

Do x, y nguyên nên $12\sqrt{55y}$ nguyên. Ta biết rằng với nguyên thì $\sqrt{55y}$ hoặc là số nguyên, hoặc là số vô tỉ. Do $\sqrt{55y}$ là số nguyên, tức là 55y là số chính phương :

$11.5.y = k^2$. Do đó : $y = 11.5.a^2 = 55a^2$ ($a \in \mathbf{N}$).

Tương tự : $x = 55b^2$ ($b \in \mathbf{N}$).

Thay vào (1) :

$a\sqrt{55} + b\sqrt{55} = 6\sqrt{55}$

$\Leftrightarrow a + b = 6$.

Giả sử $y \leqslant x$ thì $a \leqslant b$. Ta có :

a	b	$x = 55a^2$	$y = 55b^2$
0	6	0	1980
1	5	55	1375
2	4	220	880
3	3	495	495

Có 7 đáp số :

(0 ; 1980), (1980 ; 0), (55 ; 1375), (1375 ; 55), (220, 880) (880 ; 220), (495 ; 495).

Chú ý. Ta có nhận xét : Nếu các số $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ với $x, y \in \mathbf{N}$ tổng là số vô tỉ $6\sqrt{55}$ thì $\sqrt{x} = b\sqrt{55}$, $\sqrt{y} = a\sqrt{55}$ với $a, b \in$ và $a + b = 6$.

BÀI TẬP

Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình (bài 86 – bài 92) :

86. $y^2 = 1 + \sqrt{9 - x^2 - 4x}$

87. $y = x + \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}}$.

88. $y\sqrt{2} = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

89. $y = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x-2}}$.

90. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \sqrt{48}$.

91. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y$ nếu :

a) vế trái có 100 dấu căn ;

b) vế trái có n dấu căn.

92.* $\sqrt{x + 4\sqrt{x + 4\sqrt{x + \ldots + 4\sqrt{x + 4\sqrt{5x}}}}} = x$

(vế trái có 100 dấu căn).

93. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2000}\ ?$$

§13. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 33.* Tìm các nghiệm nguyên của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Giải

Ta có hằng đẳng thức :

$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

nên : $27 - 3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow 8 = (x + y)(y + z)(z + x)$.

Đặt $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$.

Ta có $abc = 8 \Rightarrow a, b, c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

Giả sử $x \leq y \leq z$ thì $a \geq b \geq c$.

Ta có : $a + b + c = 2(x + y + z) = 6$ nên $a \geq 2$.

a) Với $a = 2$ ta có : $\begin{cases} b + c = 4 \\ bc = 4 \end{cases}$

Suy ra : $b = c = 2$.

Ta được : $x = y = z = 1$.

b) Với $a = 4$ ta có : $\begin{cases} b + c = 2 \\ bc = 2 \end{cases}$

Không có nghiệm nguyên.

c) Với $a = 8$ ta có : $\begin{cases} b + c = -2 \\ bc = 1 \end{cases}$

Suy ra : $b = c = -1$.

Ta được : $x = 4$; $y = 4$; $z = -5$.

Đáp số : (1 ; 1 ; 1), (4 ; 4 ; –5), (4 ; –5 ; 4), (–5 ; 4 ;

BÀI TẬP

94. Tìm các nghiệm nguyên :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5y + 3z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x - 3z = 4 \end{cases}$

95. Tìm các nghiệm nguyên : a) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{1}{y}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ z = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$

b*) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ c*) $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 209 \end{cases}$

96. Tìm các nghiệm nguyên :

$$\begin{cases} xy + 2zt = 0 \\ xt - yz = 1 \end{cases}$$

§14. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 34. Tìm các số thực a để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên :

$$x^2 - ax + (a + 2) = 0 \qquad (1)$$

Giải

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên của (1). Theo định lí Viét :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1x_2 = a + 2 \end{cases}$$

Do đó : $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2$

$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 1) - (x_2 - 1) = 3$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3.$

$x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ là ước của 3. Giả sử $x_1 \geqslant x_2$ thì $x_1 - 1 \geqslant x_2 - 1$. Ta có hai trường hợp :

a) $\begin{cases} x_1 - 1 = 3 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Khi đó a = 6.

b) $\begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Khi đó $a = -2$.

BÀI TẬP

97. Tìm các số nguyên dương k để phương trình sau
nghiệm nguyên : $x^2 - y^2 = k$.

98. Tìm các số nguyên a để phương trình sau có nghiệ
nguyên dương : $|4 - 3x| = 5 - a$.

99. Tìm các số nguyên a để các nghiệm của phương trì
sau là số nguyên : a) $x^2 + ax + 6a = 0$;

b) $x^2 + a^2x + (a - 1) = 0$.

100. Tìm các số nguyên a và b sao cho $a + b = 25$ và c
nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ là số nguyên. T
các nghiệm đó.

101.* Tìm các số nguyên dương a và b $(a \geq b)$ sao cho
nghiệm của phương trình sau là số nguyên :

$$x^2 - abx + (a + b) = 0.$$

102. Cho a và b là các số nguyên.

a) Gọi x_0, y_0 là các số nguyên sao cho biểu thức $ax_0 +$
có giá trị nguyên dương nhỏ nhất là n. Gọi r là số dư của p
chia a cho n. Chứng minh rằng r cũng viết được dưới d
$ax + by$ trong đó x và y là các số nguyên.

b) Chứng minh rằng $r = 0$.

c) Cho biết a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh r
các phương trình : $ax + by = 1$ và $ax + by = c$ (c nguyên)
nghiệm nguyên.

Chương III

CÁC BÀI TOÁN VỚI NGHIỆM NGUYÊN

§15. BÀI TOÁN VỀ SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ

Ví dụ 35. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp, mỗi số có hai chữ số, biết rằng viết số lớn trước số nhỏ ta được một số chính phương.

Giải

Gọi hai số tự nhiên phải tìm là x và x + 1.

Ta có :

$$\overline{(x+1)x} = n^2 \qquad (1)$$

trong đó : $x, n \in \mathbf{N}$ Do x và x + 1 đều có hai chữ số và n^2 là số có bốn chữ số nên

$$10 \leqslant x \leqslant 98 \ ; \ 32 \leqslant n \leqslant 99 \qquad (2)$$

Từ (1) ta có :

$$100(x+1) + x = n^2$$

$$\Leftrightarrow 101x + 100 = n^2$$

$$\Leftrightarrow (n+10)(n-10) = 101x \qquad (3)$$

Chú ý đến tính chia hết : tích (n + 10)(n − 10) chia hết cho số nguyên tô 101, do đó tồn tại một thừa số chia hết cho 101.

Từ (2) ta có : $22 \leqslant n - 10 \leqslant 89$,

$$42 \leqslant n + 10 \leqslant 109$$

Do đó chỉ có thể : $n + 10 = 101$.

Suy ra : $n = 91$; $n^2 = 91^2 = 8281$.

Đáp số : Hai số tự nhiên phải tìm là 81 và 82.

Ví dụ 36. Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$, ta có :

$$\overline{abcd} = (a + b + c + d)^3 \qquad (1)$$

Đặt $a + b + c + d = m$. Số $\overline{abcd}$ và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư nên :

$$\overline{abcd} - m \,\vdots\, 9 \Rightarrow \overline{abcd} = 9k + m \ (k \in N)$$

Thay vào (1) :

$9k + m = m^3$

$\Rightarrow m^3 - m \,\vdots\, 9$

$\Rightarrow (m - 1)\, m\, (m + 1) \,\vdots\, 9.$

Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3. Tích của chúng chia hết cho 9 nên có một và chỉ một số chia hết cho 9.

Ta có : $1000 \leqslant \overline{abcd} \leqslant 9999$

$\Rightarrow 1000 \leqslant m^3 \leqslant 9999$

$\Rightarrow 10 \leqslant m \leqslant 21.$

Do đó : $9 \leqslant m - 1 \leqslant 20$; $11 \leqslant m + 1 \leqslant 22$.

Xét ba trường hợp :

a) $m \,\vdots\, 9 \Rightarrow m = 18$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 18^3 = 5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3.$

b) $m + 1 \,\vdots\, 9 \Rightarrow m + 1 = 18 \Rightarrow m = 17.$

$\overline{abcd} = 17^3 = 4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3.$

T2

c) $m - 1 \vdots 9 \Rightarrow m - 1 = 18 \Rightarrow m = 19$.

$\overline{abcd} = 19^3 = 6859$, loại vì tổng các chữ số không bằng 19.

Đáp số : 5832 và 4913.

Ví dụ 37. Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng tổng các bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và số tạo bởi hai chữ số cuối biết rằng hai chữ số cuối giống nhau.

Giải

Ta có : $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2$

Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cc} = y$ trong đó $x, y \in \mathbf{N}$;

$10 \leqslant x \leqslant 99$, $0 \leqslant y \leqslant 99$. Ta có :

$$100x + y = x^2 + y^2.$$

Viết phương trình trên dưới dạng phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 - 100x + (y^2 - y) = 0$$

$$\Delta' = 2500 - (y^2 - y).$$

Để tồn tại x, phải có $\Delta' \geqslant 0$, tức là :

$y^2 - y \leqslant 2500 \Leftrightarrow y(y - 1) \leqslant 2500$.

Ta thấy : $(y - 1)^2 \leqslant y(y - 1) \leqslant 2500 = 50^2$

$\Rightarrow y - 1 \leqslant 50 \Rightarrow y \leqslant 51$.

Ta dễ thấy $y \neq 0$ và $y \vdots 11$ nên

$y \in \{11 ; 22 ; 33 ; 44\}$. Xét các trường hợp :

y	$y^2 - y$	Δ'	Nhận xét
11	110	2390	Không chính phương vì $2390 \vdots 5$ nhưng 2390 không chia hết cho 25
22	462	2038	Không chính phương.
33	1056	$1444 = 38^2$	$x_1 = 50 - 38 = 12$ $x_2 = 50 + 38 = 88$
44	1892	608	Không chính phương.

Đap số : $8833 = 88^2 + 33^2$;
$1233 = 12^2 + 33^2$

BÀI TẬP

103. Tìm các số $\overline{abc}$ có các chữ số khác nhau sao cho

$$9a = 5b + 4c.$$

104. Tìm các số tự nhiên có ba chữ số biết rằng nếu cộng chữ số hàng trăm với n, trừ các chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho n thì được một số gấp n lần số ban đầu (n là số tự nhiên nhỏ hơn chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của số ban đầu).

105. Tìm hai số chính phương có bốn chữ số biết rằng mỗi chữ số của số thứ nhất lớn hơn chữ số cùng hàng của số thứ hai :

a) là 3 ;

b) cùng một số đơn vị.

106. Tìm các số tự nhiên có hai chữ số và bằng bình phương của tổng các chữ số của nó.

107. Tìm các số tự nhiên có ba chữ số và bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

108. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số và bằng lũy thừa bốn của tổng các chữ số của nó.

109. Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng bình phương của tổng hai số tạo bởi hai chữ số đầu và hai chữ số cuối của số đó (viết theo thứ tự như cũ).

110. Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số, hai chữ số đầu như nhau, hai chữ số cuối như nhau sao cho số đó :

a) Bằng tổng các bình phương của hai số tạo bởi hai chữ số đầu và hai chữ số cuối của số đó (viết theo thứ tự cũ) ;

b) Bằng tích của hai số có hai chữ số, mỗi số gồm hai chữ số như nhau.

111*. Tìm các số $\overline{abcd}$ biết rằng :

$$\begin{cases} ab = c + d \\ a + b = cd \end{cases}$$

112. Có tồn tại hay không một số tư nhiên nào mà khi xóa một chữ số đầu thì số đó giảm đi :

a) 146 lần ?

b) 145 lần ?

113*. Đầu năm mới, thầy giáo dạy Toán của lớp 9C chúc cả lớp : 9C + CỐ + HỌC = GIỎI.

Các bạn 9C rất thích thú khi biết rằng lời chúc là một bài toán điền chữ số.

Bạn hãy giải bài toán trên biết rằng :

– Các chữ Ố, Ọ, Ỏ biểu thị cùng một số (ta kí hiệu chung là Ô để khỏi lẫn với số 0).

– Các chữ khác nhau biểu thị các chữ số khác nhau, chúng cũng có thể bằng 9.

114**. Tìm số $A = \overline{a_0a_1 \ldots a_9}$ biết rằng :

a_0 bằng số chữ số 0 của số A,

a_1 bằng số chữ số 1 của số A,

……

a_9 bằng số chữ số 9 của số A.

§16. BÀI TOÁN VỀ CHIA HẾT VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

Ví dụ 38. Tìm các số nguyên dương n và các số nguyên tố p sao cho :

$$p = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Giải

Cách 1. Với n = 1 thì p = 0, không là số nguyên tố.

Với n = 2 thì p = 2, là số nguyên tố.

Với n = 3 thì p = 5, là số nguyên tố.

Với $n \geq 4$, ta viết p dưới dạng :

$$p = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Xét hai trường hợp :

– Nếu n lẻ ($n \geq 5$) thì $p = \frac{n-1}{2} \cdot (n+2)$, là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên p là hợp số .

– Nếu n chẵn ($n \geq 4$) thì $p = (n-1) \cdot \frac{n+2}{2}$, là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên p là hợp số.

Đáp số : $\begin{cases} n = 2 \\ p = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} n = 3 \\ p = 5 \end{cases}$

Cách 2. $p = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Để p là số nguyên tố, trong n – 1 và n + 2, cần có một số bằng 1, thừa số kia chia hết cho 2 ; hoặc một thừa số bằng 2.

Ta có n + 2 > 2 nên trường hợp thứ nhất cho n – 1 = 1 suy ra n = 2, p = 2 ; trường hợp thứ hai cho n – 1 = 2, suy ra n = 3, p = 5.

BÀI TẬP

115. Tìm các số tự nhiên n sao cho biểu thức sau là số nguyên tố :

a) $n^3 + n^2 - n + 2$; b) $n^3 - 4n^2 + 4n - 1$;

c) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$; d) $(n^2 - 8)^2 + 36$;

e) $n^4 + n^2 + 1$; g) $n^5 + n + 1$.

116. Tìm các số tự nhiên n sao cho biểu thức sau là số nguyên tố :

a) $n^4 + 4$; b*) $n^4 + 4^n$.

117. Tìm các số nguyên tố p sao cho biểu thức sau là số nguyên tố : a) $8p^2 + 1$; b) $p^3 + p^2 + 11p + 2$; c) $2^p + p^2$.

118. Tìm các số tự nhiên n biết rằng :

n chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2, 5, 7 ;

5n có nhiều hơn n là 8 ước số ;

8n có nhiều hơn n là 18 ước số.

119. Tìm các số nguyên tố p để 4p + 1 là số chính phương

120. Tìm các số chính phương sao cho chia nó cho 39 ta được thương là một số nguyên tố và số dư bằng 1.

121. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c biết rằng :

$a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

122. Tìm các nghiệm nguyên tố của phương trình :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = zyz$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$;

c) $5(x + y + z) = xyz$.

123. Chứng minh rằng không có các số nguyên tố a, b, m, n, p nào thỏa mãn phương trình :

a) $a^2 = m^2 + n^2$;

b*) $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

124*. Tìm các số nguyên x sao cho :

a) $x + 3$ chia hết cho $x^2 + 1$;

b) $2x^3 - 8x^2 + 3x$ chia hết cho $x^2 + 1$.

125*. Tìm các số tự nhiên n sao cho n chia hết cho $[\sqrt{n}]$.

126*. Tìm các số tự nhiên n sao cho n chia hết cho $[\sqrt[3]{n}]$

§17. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN

Ví dụ 39

Một trăm con trâu,
Một trăm bó cỏ.
Trâu đứng ăn năm,
Trâu nằm ăn ba,
Ba con trâu già
Chỉ ăn một bó.
Tính xem trong đó
Mỗi loại mấy trâu ?

Giải

Gọi số trâu đứng là x, số trâu nằm là y, số trâu già là z. Ta có hệ hai phương trình ba ẩn với nghiêm nguyên dương :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 15x + 9y + z = 300 \end{cases}$$

Suy ra : $14x + 8y = 200$

$\Leftrightarrow 7x + 4y = 100$

Ta thấy $7x \vdots 4$ nên $x \vdots 4$. Đặt $x = 4k$ (k nguyên dương)

$7k + y = 25 \Rightarrow y = 25 - 7k$

$z = 100 - 4k - (25 - 7k) = 75 + 3k$

Ta phải có :

$$\begin{cases} x = 4k > 0 \\ y = 25 - 7k > 0 \Leftrightarrow 0 < k < 3\frac{4}{7}. \\ z = 75 + 3k > 0 \end{cases}$$

Ta có :

k	x	y	z
1	4	18	78
2	8	11	81
3	12	4	84

Có ba đáp số :

4 trâu đứng, 18 trâu nằm, 78 trâu già ;

8 trâu đứng, 11 trâu nằm, 81 trâu già ;

12 trâu đứng, 4 trâu nằm, 84 trâu già.

Ví dụ 40. Anh Tâm và bác Đức là hai công nhân của một xí nghiệp. Một ngày đầu năm 1999, bác Đức hỏi anh Tâm :

- Năm nay cháu bao nhiêu tuổi rồi ?

Anh Tâm hóm hỉnh trả lời :

- Tuổi cháu năm nay đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh.

Bác Đức tính ra ngay tuổi của anh Tâm. Bác gật gù nói :

- Lúc bác bằng tuổi cháu hiện nay, bác đang là chiến sĩ quân giải phóng miền Nam và cũng có tuổi bằng tổng các chữ số của năm sinh.

Anh Tâm cũng tính đúng tuổi của bác Đức.

Hãy tính xem anh Tâm và bác Đức sinh năm nào ?

Giải

Gọi năm sinh của anh Tâm là $\overline{19xy}$, ta có :

$$1999 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$$

$$\Leftrightarrow 99 - (10x + y) = 10 + x + y$$

$$\Leftrightarrow 89 = 11x + 2y$$

Ta thấy $0 \leqslant 2y \leqslant 18$ nên $71 \leqslant 11x \leqslant 89$, do đó $7 \leqslant x \leqslant$

Với $x = 7$ thì $y = 6$.

Với $x = 8$ thì $2y = 1$, loại.

Anh Tâm sinh năm 1976, đến năm 1999 có tuổi là :

$$1999 - 1976 = 23.$$

Bác Đức 23 tuổi năm $\overline{19ab}$ và $1 + 9 + a + b = 23$.

Do đó $a + b = 13$. Vì $1960 \leqslant \overline{19ab} \leqslant 1975$ nên $\overline{ab} = 67$

Bác Đức sinh năm :

$$1967 - 23 = 1944.$$

Ví dụ 41. Một lần một người bạn của Anhxtanh đến thă ông khi ông bị ốm và để làm ông khuây khỏa, người bạn cho ông một bài toán :

– Chúng ta lấy vị trí của hai kim đồng hồ lúc 12 giờ là ví dụ. Nếu kim giờ và kim phút đổi chỗ cho nhau, ta vẫn một vị trí hợp lí của hai kim đồng hồ. Nhưng nếu ở 6 g chẳng hạn thì sự đổi chỗ hai kim đồng hồ sẽ dẫn đến một trí không thể có ở một chiếc đồng hồ đúng : kim phút khô thể chỉ số 6 trong khi kim giờ chỉ số 12. Vậy có bao nhiêu trí của hai kim đồng hồ mà sự hoán vị của chúng dẫn đến m vị trí có thể được trên một chiếc đồng hồ đúng ?

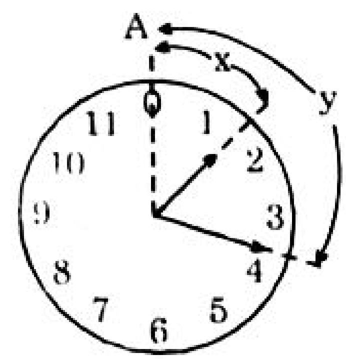
– Đúng, – Anhxtanh đáp – đó là một bài toán khá lí thú và không quá dễ. Tôi chỉ sợ là cuộc tiêu khiển không kéo dài được lâu : tôi đã bắt đầu giải bài toán rồi đấy !

Và, hơi nhổm lên khỏi giường, bằng một vài nét vạch, Anhxtanh vẽ trên giấy một sơ đồ biểu thị dữ kiện của bài toán. Để giải bài toán này, ông đã không cần nhiều thời gian hơn thời gian phát biểu đề bài.

Bạn hãy giải bài toán trên.

(*Theo Ia. Pêrelman*)

Giải



Chia mặt đồng hồ thành 60 vạch chia phút. Gọi số 12 trên mặt đồng hồ là số 0 và gọi A là vị trí của số đó.

Giả sử một trong các vị trí phải tìm là : kim giờ vượt quá A là x vạch, kim phút vượt quá A là y vạch.

Vì mỗi giờ kim giờ quay được 5 vạch nên lúc nó quay quá A là x vạch thì thời điểm lúc này là $\frac{x}{5}$ giờ. Trước thời điểm này y phút (tức $\frac{y}{60}$ giờ), kim phút ở vị trí A nên kim giờ chỉ *chính xác* vào vị trí của số m trong 12 số của mặt đồng hồ. Ta có :

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m \text{ với } m = 0, 1, 2, \ldots, 11.$$

Khi hai kim đồng hồ đổi chỗ cho nhau, lập luận tương tự, ta có :

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots, 11.$$

Ta co hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{60} = m \\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{60} = n \end{cases} \quad (1)$$

Cần tính xem hệ (1) có bao nhiêu nghiệm.

Do m nhận 12 giá trị, với mỗi giá trị của m thì n nhận 12 giá trị nên có : 12.12 = 144 hệ phương trình. Mỗi hệ phương trình có một nghiệm nên có tất cả 144 nghiệm.

Tuy nhiên chỉ có 143 vị trí của hai kim đồng hồ vì :

Khi $m = n = 0$ thì $x = y = 0$, đồng hồ chỉ 12 giờ .

Khi $m = n = 11$ thì $x = y = 60$, đồng hồ cũng chỉ 12 giờ

Chú ý. Ta tìm công thức nghiệm của hệ (1) :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{60} = m \\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{60} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - y = 60m \\ 12y - x = 60n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - y = 60m \\ 144y - 12x = 720n \end{cases}$$

Cộng từng vế : $143y = 60m + 720n$

Do đó : $y = \dfrac{60(m + 12n)}{143}$;

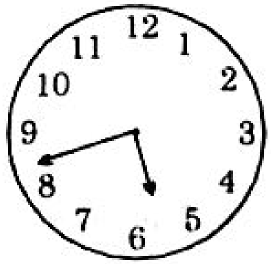
$$x = \frac{60(n + 12m)}{143}.$$

Ta đưa ra một ví dụ : Với $m = 5$, $n = 8$ thì :

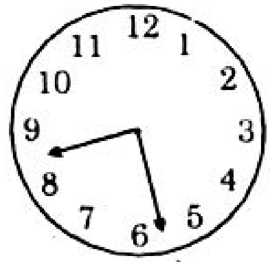
$y = \dfrac{60(5 + 12.8)}{143} \approx 42,38$; $\quad x = \dfrac{60(8 + 12.5)}{143} \approx 28,53$.

Các thời điểm tương ứng là : 5 giờ 42,38 phút

và 8 giờ 28,53 phút.



5 giờ 42,38 phút



8 giờ 28,53 phút

BÀI TẬP

127. Đầu năm mới 1997, Thành vui vẻ nói với các bạn :

- Năm nay là năm may mắn đối với mình : tuổi của mình đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh.

Thành sinh năm nào, các bạn ?

128. Ngày đầu năm mới, Thủy tính tuổi của mẹ và của mình, chợt phát hiện ra :

- Mẹ ơi, tổng các chữ số của tuổi mẹ đúng bằng tuổi con.

Mẹ Thủy hỏi lại :

- Thế tổng các chữ số của tuổi con thì bằng tuổi ai ?

- A, đúng bằng tuổi của em Tuấn !

Tuổi của mỗi người là bao nhiêu, nếu tuổi của ba mẹ con cộng lại bằng 54 ?

129. Nhân dịp Tết, các cụ phụ lão, các anh chị thanh niên và các em thiếu nhi, tất cả gồm 15 người, mang 50 chiếc bánh chưng đến tặng một đơn vị bộ đội. Mỗi cụ phụ lão mang 4 chiếc bánh, mỗi anh chị thanh niên mang 6 chiếc bánh, mỗi em thiếu nhi mang 1 chiếc bánh. Có bao nhiêu phụ lão, thanh niên, thiếu nhi ?

130. Các bạn Tuấn, Hùng, Cường cùng với các chị của mình là Mai, Vân, Nga (không nhất thiết viết đúng thứ tự) dạo chơi hội hoa xuân. Cô bán hàng nói với họ rằng ai mua bông hoa nào giá bao nhiêu trăm (giá mỗi bông hoa là một số nguyên trăm) thì phải mua từng ấy bông hoa đó. Tính ra mỗi bạn đều mua ít hơn chị của mình là 4800 đồng. Ngoài ra Tuấn mua ít hơn chị Vân 9 bông, Hùng mua ít hơn chị Mai 7 bông.

Hãy xác định các cặp chị em và tính xem mỗi người mua bao nhiêu bông hoa ? (mỗi người chỉ mua một loại hoa).

131. Tân và Hùng gặp nhau trong hội nghị học sinh giỏi toán. Tân hỏi số nhà của Hùng, Hùng trả lời :

– Nhà mình ở chính giữa đoạn phố, đoạn ấy có tổng các số nhà bằng 161, và không có số nhà nào đánh số a, b ...

Nghỉ một chút, Tân nói :

– Bạn ở số nhà 23 chứ gì !

Hỏi Tân đã tìm ra như thế nào ?

132. Ba người bạn đi câu được một số cá. Buổi tối họ ngủ lại bên bờ sông. Nửa đêm, người thứ nhất thức dậy, muốn về trước, thấy số cá chia cho 3 dư 1 nên quẳng một con xuống nước, lấy một phần ba mang về. Người thứ hai thức dậy tưởng hai bạn còn ngủ, đếm thấy số cá chia cho 3 dư 1 nên cũng vứt một con xuống nước, lấy một phần ba mang về. Người thứ ba tỉnh dậy, cũng vứt một con xuống nước, lấy một phần ba mang về.

Hỏi cả ba người câu được bao nhiêu con cá biết rằng họ là những người câu cá tồi?

133*. Trong một đợt thi đua, An làm vượt mức 10 sản phẩm, Bách vượt mức 16 sản phẩm, Dũng vượt mức 26 sản phẩm. Số sản phẩm vượt mức của mỗi người gồm loại I và loại II. Số sản phẩm vượt mức của ba người khác nhau nhưng do sản phẩm loại II được thưởng ít tiền hơn loại I nên ai cũng được thưởng 140 nghìn đồng. Tính xem mỗi người làm được bao nhiêu sản phẩm từng loại và tiền thưởng cho một sản phẩm mỗi loại là bao nhiêu ?

134*. Một bãi cỏ đủ nuôi con bò và con dê trong 45 ngày, hoặc con bò và con ngỗng trong 60 ngày, hoặc con dê và con ngỗng trong 90 ngày. Hỏi bãi cỏ ấy nuôi cả ba con trong bao lâu biết rằng trong một ngày, số cỏ bò ăn bằng tổng số cỏ dê và ngỗng ăn.

Theo Xem Lôidơ

135. Hiện nay là 0 giờ, các kim giờ, kim phút, kim giây đều chập nhau. Ngoài thời điểm trên, trong khoảng từ 0 giờ đến 12 giờ, còn các thời điểm nào để :

a) Kim giờ và kim phút lại chập nhau ?

b*) Cả ba kim đều chập nhau ?

PHỤ LỤC

§18. PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM RIÊNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mở đầu

Giả sử phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) có nghiệm nguyên. Trong nhiều trường hợp, ta có thể tìm được ngay một nghiệm của phương trình, ta gọi đó là một *nghiệm riêng*. Có công thức biểu thị tất cả các nghiệm của phương trình theo nghiệm riêng nói trên.

Lấy lại ví dụ 17 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$11x + 18y = 120 \qquad (1)$$

Bằng cách thử chọn, ta tìm được $x = 6$; $y = 3$ là một nghiệm riêng của (1). Ta có :

$$11x + 18y = 120$$

$$11.6 + 18.3 = 120.$$

Trừ từng vế :

$$11(x - 6) + 18(y - 3) = 0$$

$$11(x - 6) = 18(3 - y) \qquad (2)$$

Như vậy $x - 6 \,\vdots\, 18$. Đặt $x - 6 = 18t$ (t nguyên) ta được $x = 6 + 18t$. Thay vào (2) và rút gọn :

$$11t = 3 - y.$$

Suy ra $y = 3 - 11t$.

Có thể chứng minh được rằng công thức cho mọi nghiệm của (1) là :

$$\begin{cases} x = 6 + 18t \\ y = 3 - 11t \end{cases} \quad \text{(t nguyên tùy ý)}$$

2. Cách giải tổng quát

Xét phương trình $$ax + by = c \qquad (1)$$
trong đó a, b, c $\in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng (a, b, c) = 1. Thật vậy, nếu (a, b, c) = d $\neq$ 1 thì ta chia hai vế của phương trình cho d.

Ta có hai định lí sau :

Định lí 1. Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì (a, b) = 1. (*)

Chứng minh :

Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm nguyên của (1) thì $ax_o + by_o = c$.

Nếu a và b có ước chung là $d \neq 1$ thì $c \,\vdots\, d$, trái với giả thiết (a, b, c) = 1.

Vậy (a, b) = 1.

Định lí 2. Nếu (x_o, y_o) là một nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên và mọi nghiệm nguyên của nó đều có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\begin{cases} x = x_o + bt \\ y = y_o - at \end{cases}$$

trong đó t là một số nguyên tùy ý (t = 0, ± 1, ± 2, ...).

(*) Ta cũng có điều đảo lại : Nếu phương trình ax + by = c có (a, b) = 1 thì phương trình đó có nghiệm nguyên. Xem bài tập 102.

Chứng minh :

a) *Bước 1* : Mọi cặp số $(x_o + bt, y_o - at)$ đều là nghiệm của (1). Thật vậy (x_o, y_o) là nghiệm của (1) nên $ax_o + by_o = c$.

Ta có : $ax + by = a(x_o + bt) + b(y_o - at) = ax_o + by_o = c$.

Do đó $(x_o + bt, y_o - at)$ là nghiệm của (1).

b) *Bước 2* : Mọi nghiệm (x, y) của (1) đều có dạng $(x_o + bt, y_o - at)$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, do (x_o, y_o) và (x, y) là nghiệm của (1) nên

$$ax + by = c$$

$$ax_o + by_o = c.$$

Trừ từng vế : $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

$$\Rightarrow a(x - x_o) = b(y_o - y) \qquad (2)$$

Ta có $a(x - x_o) \vdots b$ mà $(a, b) = 1$ (theo định lí 1) nên $x - x_o \vdots b$.

Vậy tồn tại số nguyên t sao cho :

$$x - x_o = bt$$

tức là : $x = x_o + bt$.

Thay vào (2) :

$abt = b(y_o - y)$

$\Rightarrow at = y_o - y$

$\Rightarrow y = y_o - at.$

Vậy tồn tại số nguyên t sao cho :

$$\begin{cases} x = x_o + bt \\ y = y_o - at \end{cases}$$

3. Ví dụ

Ví dụ 42. Bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, hãy tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình :

$$3x - 2y = 5$$

Giải

Cách 1. Ta thấy $x_o = 3$; $y_o = 2$ là một nghiệm riêng.

Theo định lí 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

Cách 2. Ta thấy $x_o = 1$; $y_o = -1$ là một nghiệm riêng.

Mọi nghiệm nguyên của phương trình là :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

Cách 3. Ta thấy $x_o = 5$; $y_o = 5$ là một nghiệm riêng.

Mọi nghiệm nguyên của phương trình là :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases} \quad \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

Chú ý. Qua ba cách giải trên, ta thấy có nhiều công thức biểu thị tập hợp các nghiệm nguyên của cùng một phương trình.

4. Cách tìm một nghiệm riêng của phương trình ax + by = c

Để tìm một nghiệm riêng của phương trình $ax + by = c$, ta có thể dùng phương pháp thử chọn : lần lượt cho x bằng các số có giá trị tuyệt đối nhỏ (0, ± 1, ± 2, ...) rồi tìm giá trị tương ứng của y.

Cách làm này là đơn giản đối với phương trình $3x - 2y = 5$ ở ví dụ 42, nhưng không thích hợp với những phương trình mà phép thử chọn phải tiến hành quá nhiều lần.

Có một thuật toán cho phép ta tìm được ngay một nghiệ
riêng của phương trình ax + by = c.

Xét phương trình : $40x - 31y = 1$

(chú ý rằng vế phải của phương trình bằng 1)

Dùng thuật toán Ơclit tìm ƯCLN (40, 31) :

$$\begin{array}{ccccc} & & & 40 & 31 \\ & & 31 & 9 & 1 \\ & 9 & 4 & 3 & \\ 4 & 1 & 2 & & \\ 0 & 4 & & & \end{array}$$

Ta viết lần lượt thương của các phép chia trên, trừ thươn
cuối cùng : 1, 3, 2.

Gọi các thương trên là $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ta tính liên phân số

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

được phân số $\frac{m}{n}$.

Người ta chứng minh được rằng tồn tại một nghiệm riên
(x_o, y_o) của phương trình mà $\begin{cases} |x_o| = m \\ |y_o| = n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x_o| = n \\ |y_o| = m \end{cases}$

Trong ví dụ nêu trên :

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \frac{9}{7}.$$

Tồn tại một nghiệm riêng (x_o, y_o) mà

$$\begin{cases} |x_o| = 7 \\ |y_o| = 9 \end{cases}$$

(Do $|40| > |-31|$ nên ta chọn $|x_o| < |y_o|$).

Ở phương trình $40x - 31y = 1$, không thể có x và y trái dấu. Ta chỉ cần thử với nhiều nhất là hai cặp số $(7 ; 9)$, $(-7 ; -9)$ thì chọn được nghiệm riêng, đó là $(7 ; 9)$.

Các nghiệm nguyên của phương trình $40x - 31y = 1$ có dạng :

$$\begin{cases} x = 7 - 31t \\ y = 9 - 40t \end{cases} \quad \text{(t nguyên tùy ý)}$$

Ví dụ 43. Bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, hãy tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình :

$$47x + 162y = 2 \qquad (1)$$

Giải

Trước hết ta tìm một nghiệm riêng của phương trình :

$$47x + 162y = 1 \qquad (2)$$

Dùng thuật toán Ơclit tìm (162, 47) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & 162 & 47 \\
 & & 47 & 21 & 3 \\
 & 21 & 5 & 2 & \\
5 & 1 & 4 & & \\
 & 5 & & &
\end{array}$$

Ta có : $3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{31}{9}$.

Tồn tại một nghiệm riêng của (2) là (x_o, y_o) mà $|x_o| = 31$, $|y_o| = 9$ (do $|47| < |162|$ nên ta chọn $|x_o| > |y_o|$).

Ở phương trình (2), không thể có x_o, y_o cùng dấu. Bằng thử chọn, ta được $(-31 ; 9)$ là một nghiệm riêng của phương trình $47x + 162y = 1$.

Do đó $(-62 ; 18)$ là một nghiệm riêng của phương trình $47x + 162y = 2$.

Các nghiệm của phương trình (1) có dạng :

$$\begin{cases} x = -62 + 162t \\ y = 18 - 47t \end{cases} \quad \text{(t nguyên tùy ý)}$$

BÀI TẬP

136. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình :

$$17x - 39y = 4$$

bằng hai cách :

Cách 1 : Dùng phương pháp tìm một nghiệm riêng.

Cách 2 : Dùng phương pháp tách ra các giá trị nguyên.

§19. PHƯƠNG TRÌNH ĐIÔPHĂNG

Phương trình Điôphăng là phương trình có dạng

$$f(x, y, z, ..) = 0$$

trong đó vế trái của nó là đa thức với hệ số nguyên và các ẩn x, y, z, .. nhận các giá trị nguyên hoặc giá trị tự nhiên (số ẩn từ 2 trở lên).

Trong số 23 bài toán mà nhà toán học Đức Hinbe chọn ra để "gửi tới thế kỉ 20", có bài toán thứ mười : "Có một phương pháp nào mà nhờ đó, sau một số hữu hạn các phép toán, có thể khẳng định rằng một phương trình Điôphăng có nghiệm nguyên hay không ?"

Năm 1970 nhà toán học Matchiaxêvich 23 tuổi đã giải quyết được bài toán này. Câu trả lời là ; Không tồn tại phương pháp chung để với mọi phương trình Điôphăng cho trước khẳng định được nó có nghiệm nguyên hay không.

Điôphăng (*Diophantus*) là nhà toán học Hi Lạp thế kỉ III tác giả cuốn sách *Số học*. Chính tại bên lề của một trang trong cuốn sách này, Fecma đã ghi những dòng chữ nổi tiếng mở đầu cho một thời kì chứng minh định lí lớn Fecma (xem §22).

Có thể hiểu thêm về tiểu sử của Điôphăng qua bài thơ ghi trên mộ ông (xem bài tập 137).

BÀI TẬP

137. Hỡi khách qua đường,

Cho hay Điôphăng thọ bao nhiêu tuổi ?

Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời,

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi.

Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.

5 năm nữa trôi qua,

Và một cậu con trai đã được sinh ra.

Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa đời cha.

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.

Điôphăng thọ bao nhiêu, hãy tính cho ra.

§20. PHƯƠNG TRÌNH PEL

1. Ví dụ

Ví dụ 44. Cho phương trình : $x^2 - 2y^2 = 1$ (1).

a) Kiểm tra rằng : (3 ; 2) là một nghiệm của (1).

b) Khai triển $(3 + 2\sqrt{2})^k$ được $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbf{N}$).

Chứng minh rằng (a, b) là nghiệm của (1).

c) Bằng nhận xét ở câu b, hãy tìm thêm hai nghiệm nguyên dương khác của (1).

Giải

a) $3^2 - 2.2^2 = 1$. Vậy (3 ; 2) là một nghiệm của (1).

b) Ta có : $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$

$$\Rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^k(3 - 2\sqrt{2})^k = 1.$$

Ta biết rằng nếu $(3 + 2\sqrt{2})^k = a + b\sqrt{2}$ thì

$(3 - 2\sqrt{2})^k = a - b\sqrt{2}$. Do đó :

$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 1$

$\Rightarrow a^2 - 2b^2 = 1$.

Vậy (a, b) là nghiệm của (1).

c) Ta tính :

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 + 12\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}(3 + 2\sqrt{2})^3 &= (17 + 12\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})\\ &= 51 + 34\sqrt{2} + 36\sqrt{2} + 48\\ &= 99 + 70\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy : (17 ; 12) , (99 ; 70) cũng là nghiệm của (1).

2. Phương trình Pel

Phương trình $x^2 - Py^2 = 1$ với P là số nguyên dương không chính phương gọi là phương trình Pel, mang tên nhà toán học Anh là Pel *(Pell)*.

Thực ra nhà toán học Pháp Lagrăng, cùng thời với Pel, là người đầu tiên công bố lời giải đầy đủ của phương trình trên năm 1766.

Phương trình Pel có vô số nghiệm nguyên. Ngoài nghiệm tầm thường $x = \pm 1$; $y = 0$, để tìm các nghiệm nguyên của phương trình, ta chỉ cần tìm nghiệm nguyên dương của nó.

Ta gọi (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pel nếu nó là nghiệm không tầm thường và $x_1 + y_1\sqrt{P}$ là số nhỏ nhất trong tập hợp :

$$\{x + y\sqrt{P} \mid x, y \in \mathbf{N}^*,\ x^2 - Py^2 = 1\}$$

Bảng sau cho ta các nghiệm nguyên dương nhỏ nhất (x_1, y_1) của một số phương trình Pel :

P	$x^2 - Py^2 = 1$	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = 1$	3	2
3	$x^2 - 3y^2 = 1$	2	1
5	$x^2 - 5y^2 = 1$	9	4
6	$x^2 - 6y^2 = 1$	5	2
7	$x^2 - 7y^2 = 1$	4	3
8	$x^2 - 8y^2 = 1$	3	1
10	$x^2 - 10y^2 = 1$	19	6
11	$x^2 - 11y^2 = 1$	10	3
12	$x^2 - 12y^2 = 1$	7	2
13	$x^2 - 13y^2 = 1$	649	180

Người ta chứng minh được rằng : Nếu (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pel thì mọi nghiệm nguyên dương (x_k, y_k) của phương trình được xác định bởi :

$$x_k + y_k\sqrt{P} = (x_1 + y_1\sqrt{P})^k \text{ với } k = 1, 2, 3, \ldots$$

BÀI TẬP

138. Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất rồi tìm thêm hai nghiệm nguyên dương khác của phương trình :

$$x^2 - 15y^2 = 1.$$

139. Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên : $x^2 - 8y^2 = 1$.

§21. PHƯƠNG TRÌNH PITAGO

1. Ví dụ

Ví dụ 45*. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1).$$

Giải

Trước hết ta có thể giả sử x, y, z nguyên tố cùng nhau. Thật vậy nếu bộ ba số x_o, y_o, z_o thỏa mãn (1) và có ƯCLN là d, giả sử $x_o = dx_1$, $y_o = dy_1$, $z_o = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1).

Với x, y, z nguyên tố cùng nhau thì chúng đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số ấy có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta thấy x và y không thể cùng chẵn (vì chúng nguyên tố cùng nhau), không thể cùng lẻ (vì nếu x và y cùng lẻ thì z chẵn, khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 2, còn $z^2 \vdots 4$). Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ.

Cách 1. Giả xử x lẻ, y chẵn thì z lẻ. Ta viết (1) dưới dạng :

$$x^2 = (z + y)(z - y).$$

Ta có $z + y$ và $z - y$ là các số lẻ. Chúng nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử $z + y \vdots d$, $z - y \vdots d$ (d lẻ) thì :

$$(z + y) + (z - y) = 2z \vdots d$$

$$(z + y) - (z - y) = 2y \vdots d$$

Do $(2, d) = 1$ nên $z \vdots d$; $y \vdots d$.

Do $(y, z) = 1$ nên $d = 1$. Vậy $(z + y, z - y) = 1$.

Hai số nguyên dương $z + y$ và $z - y$ nguyên tố cùng nhau, có tích là số chính phương x^2 nên mỗi số $z + y$ và $z - y$ cũng là số chính phương.

Đặt $z + y = m^2$

$z - y = n^2$

với m, n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, $m > n$.

Ta được :

$$\begin{cases} x = mn \\ y = \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases} \qquad \text{(công thức I)}$$

với m và n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, $m > n$.

Đảo lại, dễ thấy bộ ba số (x, y, z) nói trên thỏa mãn (1).

Cách 2. Giả sử x chẵn, y lẻ thì z là số lẻ.

Ta có : $x^2 = (z + y)(z - y)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z + y}{2} \cdot \frac{z - y}{2}.$$

Do z, y là các số lẻ nguyên tố cùng nhau nên $\frac{z+y}{2}$, $\frac{z-y}{2}$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau (thật vậy, giả sử $\frac{z+y}{2} \vdots d$, $\frac{z-y}{2} \vdots d$ thì $\begin{cases} \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} \vdots d \\ \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \vdots d \\ y \vdots d \end{cases} \Rightarrow d = 1$).

Hai số nguyên dương $\frac{z+y}{2}$, $\frac{z-y}{2}$ nguyên tố cùng nhau có tích là số chính phương $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ nên mỗi số là số chính phương.

Đặt $\frac{z+y}{2} = m^2$; $\frac{z-y}{2} = n^2$ ($m, n \in \mathbf{N}$) thì :

$$z = m^2 + n^2; \quad y = m^2 - n^2.$$

Do y, z lẻ nên m, n chẵn lẻ khác nhau.

Do $(m^2, n^2) = 1$ nên $(m, n) = 1$.

Như vậy :

$$\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases} \quad \text{(công thức II)}$$

với m và n là các số nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau, $m > n$.

Đảo lại, dễ thấy bộ ba số (x, y, z) nói trên thỏa mãn (1).

Ta gọi bộ ba số (x, y, z) nói trên là *bộ ba số Pitago gốc*. Nhân bộ ba số này với mọi số nguyên dương, ta được tất cả các bộ ba số Pitago, đó là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

2. Phương trình Pitago

Ta gọi phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ với x, y, z là các số nguyên dương là *phương trình Pitago*.

Nghiệm tổng quát của phương trình Pitago là :

a) Tính theo công thức I :

$$\begin{cases} x = tmn \\ y = t \cdot \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = t \cdot \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases}$$

với t, m, n là các số nguyên dương bất kì, m và n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, m > n.

b) Tính theo công thức II :

$$\begin{cases} x = 2tmn \\ y = t(m^2 - n^2) \\ z = t(m^2 + n^2) \end{cases}$$

với t, m, n là các số nguyên dương bất kì, m và n là các số nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau , m > n.

Dưới đây là một số bộ ba số Pitago gốc :

a) Tính theo công thức I :

m	n	x = m	$y = \dfrac{m^2 - n^2}{2}$	$z = \dfrac{m^2 + n^2}{2}$
3	1	3	4	5
5 5	1 3	5 15	12 8	13 17
7 7 7	1 3 5	7 21 35	24 20 12	25 29 37
9 9 9	1 5 7	9 45 63	40 28 16	41 53 65

b) Tính theo công thức II :

m	n	$x = 2mn$	$y = m^2 - n^2$	$z = m^2 + n^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

BÀI TẬP

140. Hãy chứng minh cách chỉ ra bộ ba số Pitago gốc Pitago đưa ra : Chọn số nhỏ nhất là số lẻ k ($k \geq 3$) thì l số kia là hai số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng k^2.

$x = k$	k^2	$y = \dfrac{k^2 - 1}{2}$	$z = \dfrac{k^2 + 1}{2}$
3	9	4	5
5	25	12	13
7	49	24	25

141. Hãy chứng minh cách chỉ ra bộ ba số Pitago gốc do Platôn (nhà toán học Hi Lạp thế kỉ 4 trước công nguyên) đưa ra : Chọn $x = 4k$ ($k \geqslant 1$) thì $y = 4k^2 - 1$; $z = 4k^2 + 1$.

k	$x = 4k$	$4k^2$	$y = 4k^2 - 1$	$z = 4k^2 + 1$
1	4	4	3	5
2	8	16	15	17
3	12	36	35	37

142. Hãy chứng minh các tính chất sau của bộ ba số Pitago : Trong ba số của bộ ba số Pitago :

a) Tồn tại một số là bội của 3.

b) Tồn tại một số là bội của 4.

c) Tồn tại một số là bội của 5.

§22. PHƯƠNG TRÌNH FECMA

1. Định lí lớn Fecma

Ta biết có vô số bộ ba số nguyên dương thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Đương nhiên xuất hiện một câu hỏi : Có ba số nguyên dương nào thỏa mãn phương trình $x^3 + y^3 = z^3$ không ?

Vào năm 1637, nhà toán học Pháp Fecma *(Pierre de Fermat,* 1601 – 1665) đã nêu lên mệnh đề sau, được gọi là *định lí lớn Fecma* :

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ với n là số nguyên lớn hơn 2 không có nghiệm nguyên dương.

Fecma đã viết vào lề cuốn *Số học* của Điôphăng, ở cạnh mục giải phương trình $x^2 + y^2 = z^2$:"Không thể phân tích được một lập phương đúng thành tổng của hai lập phương, không th phân tích được một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, và nói chung với bất cứ lũy thừa nào lớn hơn hai thàn tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm được cách chứn minh kì diệu mệnh đề này, nhưng lề sách này quá chật nê không thể ghi lại được".

Năm 1670, năm năm sau khi Fecma mất, con trai ông đ công bố mệnh đề trên.

2. Lịch sử về chứng minh định lí lớn Fecma

Người ta đã tìm thấy chứng minh của Fecma với $n = 3$ v $n = 4$, nhưng không biết được ông đã giải bài toán tổng quá như thế nào. Liệu lời giải của ông có sai lầm hay không ?

Chỉ biết rằng phải đến một thế kỉ sau, Ơ-le mới chứng min được bài toán với $n = 3$ năm 1753 trong thư gửi Gônbach Năm 1825, bằng những phát minh mới về lí thuyết số, Đirichl và Lơgiăngđrơ chứng minh được với $n = 5$. Năm 1839 Lam chứng minh được với $n = 7$. Sau đó khoảng năm 1850 Kume chứng minh được với mọi $n \leqslant 100$. Nhờ máy tính điện tử người ta đã chứng minh được bài toán với mọi $n \leqslant 12500$ năm 1978, với mọi $n \leqslant 4000000$ năm 1992.

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ được gọi là *phương trình Fecma* Nó đã lôi cuốn các nhà toán học chuyên nghiệp và nghiệp d suốt hơn ba thế kỉ. Trên con đường tìm cách giải phương trìn đó, nhiều lí thuyết toán học mới đã được sáng tạo ra. Tron bốn chục năm gần đây, nhiều nhà toán học đã đạt được nhữn kết quả quan trọng. Và để chứng minh định lí lớn Fecma, c còn chứng minh giả thuyết do Taniyama nêu ra : Mọi đườ cong elliptic đều là đường cong Weil.

Chúng ta tìm hiểu đôi chút điều này.

Ta xem mỗi nghiệm nguyên của phương trình là một điểm có tọa độ nguyên của một đường cong. Đường cong elliptic được Taniyama đưa ra năm 1955 trong một hội nghị quốc tế ở Nhật Bản, đó là đường cong cho bởi phương trình $y^2 = x^3 + mx^2 + nx + p$ thỏa mãn điều kiện "không có điểm kì dị".

Nhà toán học Đức Frey là người đầu tiên gắn việc chứng minh định lí lớn Fecma với các đường cong elliptic : Giả sử định lí lớn Fecma không đúng thì tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 và số tự nhiên n sao cho $a^n + b^n = c^n$. Khi đó tồn tại một đường cong elliptic đặc biệt dạng Frey.

Năm 1986, Ribet chứng minh được rằng : Đường cong elliptic dạng Frey nếu tồn tại thì nó không phải là đường cong Weil.

Như thế, nếu định lí lớn Fecma không đúng thì tồn tại một đường cong elliptic mà không phải là đường cong Weil, trái với giả thuyết Taniyama. Điều đó có nghĩa là, nếu chứng minh được giả thuyết Taniyama thì cũng chứng minh được định lí lớn Fecma.

Ngày 23 tháng 6 năm 1993, trong một hội nghị toán học quốc tế ở Anh, nhà toán học Anh *Andrew Wiles* (Enđriu Oailơ), sinh năm 1953, công bố chứng minh giả thuyết Taniyama cho các đường cong elliptic dạng Frey dày 200 trang, tức là đã chứng minh được định lí lớn Fecma.

Tháng 12 năm ấy, người ta tìm thấy một "lỗ hổng" trong chứng minh của Wiles. Tuy nhiên, các chuyên gia trong lĩnh vực này cho rằng con đường đi của Wiles là hợp lí, sai lầm của Wiles là có thể khắc phục được.

Đúng như vậy, một năm sau, tháng 10 năm 1994, A.Wiles cùng với R.Taylor công bố một bài báo dài 25 trang hoàn thiện cách chứng minh của Wiles trước đây.

Việc chứng minh được định lí lớn Fecma cho thấy bộ óc của con người thật diệu kì : Bất cứ đỉnh cao trí tuệ nào con người

cũng có thể vươn tới. Không có bài toán nào mà con ngư
không giải được, chỉ có sớm hay muộn.

3. Chứng minh định lí lớn Fecma với n = 4

Để chứng minh định lí lớn Fecma với n = 4 tức là chứn
minh tổng của hai trùng phương không bằng một trùng phươn
ta chỉ cần chứng minh tổng của hai trùng phương không bằn
một số chính phương, tức là chỉ cần chứng minh phương trìn
sau không có nghiệm nguyên dương :

$$x^4 + y^4 = z^2.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử x, y, z nguyê
tố cùng nhau. Chứng minh định lí lớn Fecma với n = 4, xem
bài tập 143.

BÀI TẬP

143*. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm
với x, y, z là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau :

$$x^4 + y^4 = z^2.$$

Hướng dẫn : Dùng nguyên tắc cực hạn.

Giả sử (x_o, y_o, z_o) là nghiệm của phương trình đã cho c
$x_o^4 + y_o^4$ nhỏ nhất. Hãy chứng minh tồn tại nghiệm của phươn
trình là (x_1, y_1, z_1) mà $x_1^4 + y_1^4 < x_o^4 + y_o^4$.

Sử dụng bổ đề sau (đã chứng minh ở §21) : Để các số nguyê
tố cùng nhau x, y, z là nghiệm nguyên dương của phương trìn
Pitago $x^2 + y^2 = z^2$, điều kiện cần và đủ là :
$x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$ (giả sử x chẵn, y lẻ
trong đó m và n là hai số nguyên dương tùy ý, nguyên tố cùn
nhau, chẵn lẻ khác nhau, $m > n$.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I

CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

1. Ta thấy $x \vdots 13$. Đặt $x = 13t$ (t nguyên), ta được $2t + y = 12$.

Đáp số : $\begin{cases} x = 13t \\ y = 12 - 2t \end{cases}$ (t nguyên tùy ý).

2. Đưa về phương trình ước số :

$$(3x - 1)(3y + 1) = 2.$$

Đáp số : (1 ; 0), (0 ; − 1).

3. Đưa về phương trình ước số :

$$(x + 2y)(2x - y) = 7.$$

Đáp số : (3 ; − 1) , (− 3 ; 1).

4. Đưa về phương trình ước số :

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 13.7\,.$$

Chú ý rằng $x^2 + xy + y^2 > 0$.

Đáp số : (6 ; 5) , (− 5 ; − 6), (4 ; − 3), (3 ; − 4).

5. Biểu thị y theo x :

$xy - 5y = x^2 - 6x + 8$

$\Leftrightarrow (x - 5)y = x^2 - 6x + 8.$

Do $x \neq 5$ nên $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} = x - 1 + \dfrac{3}{x - 5}$. Ta có :

x-5	1	-1	3	-3
x	6	4	8	2
y	8	0	8	0

6. Giả sử đa thức f(x) có nghiệm nguyên a. Thế thì

$$f(x) = (x - a).g(x),$$

trong đó g(x) là đa thức có các hệ số nguyên.

Suy ra $f(1) = (1 - a).g(1)$

$f(2) = (2 - a).g(2)$,

trong đó g(1), g(2) là các số nguyên.

Do đó : $f(1) \,.\, f(2) = (1 - a)(2 - a)g(1).g(2)$

$\Rightarrow 35 = (1 - a)(2 - a)g(1).g(2)$.

Không xảy ra đẳng thức trên vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn (do có tích của hai số nguyên liên tiếp $1 - a$, $2 - a$).

7. Xét : $3x^2 - 4y^2 = 13$.

Vế phải chia cho 4 dư 1. Hãy chứng minh rằng vế trái chia cho 4 có số dư khác 1 (chú ý rằng x^2 chia cho 4 có số dư bằng 0 hoặc 1).

8. Vế phải là số lẻ nên $19x^2$ là số lẻ, do đó x là số lẻ.

x^2 chia cho 4 dư 1 nên $19x^2$ chia cho 4 dư 3.

Vế trái chia cho 4 dư 3, còn vế phải 2001 chia cho 4 dư 1.

9. Vế trái chia cho 8 dư 0, 1, 4. Còn vế phải chia cho 8 dư 3 (nếu y chẵn) hoặc dư 5 (nếu y lẻ).

10. Biến đổi : $x(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 120y + 24$.

Vế trái là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5, còn vế phải không chia hết cho 5.

11. Vế phải chia hết cho 3. Suy ra $x^3 \vdots 3$, do đó $x \vdots 3$. Khi đó vế trái chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9.

12. A là số chia cho 9 dư 7. Còn lập phương của một số nguyên khi chia cho 9 chỉ có số dư 0, 1, 8

(nếu $a = 3k$ thì a^3 chia hết cho 9,

nếu $a = 3k + 1$ thì a^3 chia cho 9 dư 1,

nếu $a = 3k + 2$ thì a^3 chia cho 9 dư 8).

13. Giả sử $1 \leqslant x \leqslant y$ thì $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{2}{x} \Rightarrow x \leqslant 8.$$

Mặt khác : $\frac{1}{x} < \frac{1}{4} \Rightarrow x > 4$.

x	5	6	7	8
y	20	12	loại	8

Đáp số : (5 ; 20), (20 ; 5), (6 ; 12), (12 ; 6), (8 ; 8).

14. *Cách 1* : $xyz = 2(x + y + z)$. (1)

Giả sử $x \leqslant y \leqslant z$. Ta có : $xyz = 2(x + y + z) \leqslant 2.3z = 6z$.

Suy ra $xy \leqslant 6$.

Xét $xy = 1$, có $x = y = 1$. Thay vào (1) : $z = -4$, loại.

Xét $xy = 2$, có $x = 1$, $y = 2$. Thay vào (1) : loại.

Xét $xy = 3$, có $x = 1$, $y = 3$. Thay vào (1) : $z = 8$.

Xét $xy = 4$, với $x = 1$, $y = 4$, thay vào (1) : $z = 5$;

với $x = y = 2$, thay vào (1) : $z = 4$.

Xét $xy = 5$, có $x = 1$, $y = 5$. Thay vào (1) : $z = 4$, loại.

Xét $xy = 6$, với $x = 1$, $y = 6$, thay vào (1) : loại ;

với $x = 2$, $y = 3$, thay vào (1) : loại.

Đáp số : Bộ ba số phải tìm là : 1 ; 3 ; 8 ;

hoặc 1 ; 4 ; 5 ; hoặc 2 ; 2

Cách 2. Chia hai vế của $2(x + y + z) = xyz$ (1) cho 2

được : $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$.

Giả sử $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$ thì $\frac{3}{z^2} \geqslant \frac{1}{2}$ nên $z^2 \leqslant 6$. Vậy $z \in \{1 ; 2$

Với $z = 1$, thay vào (1) : $2(x + y + 1) = xy$.

Đưa về phương trình ước số : $(x - 2)(y - 2) = 6$

Ta được : $x = 8$, $y = 3$; $x = 5$, $y = 4$.

Với $z = 2$, thay vào (1) : $x + y + z = xy$.

Đưa về phương trình ước số : $(x - 1)(y - 1) = 3$.

Ta được : $x = 4$, $y = 2$.

15. $x + y + z + t = xyzt$ (1)

Giả sử $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Ta có $xyzt = x + y + z + t \leqslant$
nên $xyz \leqslant 4$.

Với $xyz = 1$ ta có $x = y = z = 1$. Thay vào (1) : loại.

Với $xyz = 2$ ta có $x = y = 1$, $z = 2$. Thay vào (1) : $t =$

Với $xyz = 3$ ta có $x = y = 1$, $z = 3$. Thay vào (1) :

Với $xyz = 4$ ta có $x = 1$, $y = z = 2$; hoặc $x = y =$
$z = 4$. Cả hai trường hợp, thay vào (1) : loại.

Đáp số : Bốn số phải tìm là 1 ; 1 ; 2 ; 4.

16. Biến đổi : $x^2 + (y - 2)x + (y^2 - y) = 0$ (1)

$$\Delta = (y - 2)^2 - 4(y^2 - y) = 4 - 3y^2.$$

Giải điều kiện $\Delta \geqslant 0$ được $3y^2 \leqslant 4$ nên $|y| \leqslant 1$.

Với $y = -1$ thay vào (1) được $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ta có : $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Với $y = 0$ thay vào (1) được $x^2 - 2x = 0$. Ta có : $x_3 = 0$; $x_4 = 2$.

Với $y = 1$ thay vào (1) được $x^2 - x = 0$. Ta có $x_5 = 0$; $x_6 = 1$.

Đáp số : $(1 ; -1), (2 ; -1), (0 ; 0), (2 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 1)$.

17. Biến đổi : $x^2 + (y - 1)x + (y^2 - y) = 0$ (1)

Giải $\Delta \geqslant 0$ cho ta $3y^2 - 2y - 1 \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1.$$

Với $y = 0$, thay vào (1) được : $x^2 - x = 0$. Ta có : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Với $y = 1$, thay vào (1) được : $x^2 = 0$. Ta có : $x_3 = 0$.

Đáp số : $(0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1)$.

18. Biến đổi : $x^2 - 3yx + 3y(y - 1) = 0$ (1)

$$\Delta = -3y(y - 4)$$

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant 4.$$

Với $y = 0$, thay vào (1) được : $x^2 = 0$. Ta có : $x_1 = 0$.

Với $y = 1$, thay vào (1) được : $x^2 - 3x = 0$. Ta có : $x_2 = 0$; $x_3 = 3$.

Với $y = 2$ thì $\Delta = 12$, không là số chính phương, loại.

Với $y = 3$, thay vào (1) được : $x^2 - 9x + 18$. Ta có : $x_4 = 3$; $x_5 = 6$.

Với $y = 4$, thay vào (1) được : $(x - 6)^2 = 0$. Ta có : $x_6 = 6$.

Đáp số : $(0 ; 0), (0 ; 1), (3 ; 1), (3 ; 3), (6 ; 3), (6 ; 4)$.

19. *Cách 1*. Biến đổi : $x^2 - 2yx + (5y^2 - y - 1) = 0$ (1)

$$\Delta' \geqslant 0 \Leftrightarrow 4y^2 - y - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \leqslant y \leqslant \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$$

Suy ra : $\frac{1-5}{8} < y < \frac{1+5}{8} \Rightarrow -\frac{1}{2} < y < \frac{3}{4}$.

Suy ra : $y = 0$.

Đáp số : $(1 ; 0)$, $(-1 ; 0)$

Cách 2 : Biến đổi : $y + 1 = x^2 - 2xy + 5y^2 = (x - y)^2 + 4y^2$

Do đó : $y + 1 \geqslant 4y^2$ (1)

Ta lại có nhận xét $y^2 \geqslant y$ với $y \in Z$ nên $y^2 + 1 \geqslant y + 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y^2 + 1 \geqslant 4y^2 \Rightarrow 1 \geqslant 3y^2$. Do đó $y = 0$

Khi đó $x = \pm 1$.

Đáp số : $(1 ; 0)$, $(-1 ; 0)$.

20. $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ không thỏa mãn $2^x + 3^x = 35$.

$x = 3$ thỏa mãn $2^x + 3^x = 35$ vì $8 + 27 = 35$.

Với $x > 3$ thì $2^x + 3^x > 2^3 + 3^3 = 35$, loại.

Đáp số : $x = 3$.

21. Ta có : $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$.

Ta thấy $x^2 + x + 1 > 0$ nên $x^3 < y^3$, do đó $x < y$.

Xét hai trường hợp :

a) Xét $y = x + 1$. Ta có : $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)^3$

Giải phương trình trên : $2x^2 + 2x = 0$ nên $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

b) Xét $y > x + 1$. Ta có : $x^3 + x^2 + x + 1 > (x + 1)^3$

$\Leftrightarrow 2x(x + 1) < 0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 0$: loại.

Đáp số : $x = 0$ thì $y = 1$;

$x = -1$ thì $y = 0$

22. $x! + y! = (x + y)!$

Giả sử $x \geqslant y$ thì $x! \geqslant y!$. Do đó :

$$(x + y)! = x! + y! \leqslant 2x!$$

Như vậy : $2x! \geq (x + y)!$

tức là : $2x! \geq x!(x + 1)(x + 2) \ldots (x + y)$

nên : $2 \geq (x + 1)(x + 2) \ldots (x + y)$

Chỉ xảy ra khi $x = 1$, $y = 1$

Thử lại, cặp số $(1 ; 1)$ thỏa mãn $1! + 1! = 2!$

23. Giả sử : $x^{17} + y^{17} = 19^{17}$ và $1 \leq x \leq y < 19$.

Ta có $19^{17} \geq (y + 1)^{17} = y^{17} + 17y^{16} + \ldots$

$\Rightarrow 19^{17} > y^{17} + 17y^{16}$.

Do đó : $x^{17} + y^{17} > y^{17} + 17y^{16} \Rightarrow x^{17} > 17y^{16}$.

Do $y \geq x \geq 1$ nên từ $x^{17} > 17y^{16}$ suy ra $x^{17} > 17x^{16}$, vậy $x > 17$.

Ta có : $17 < x \leq y < 19$, chỉ có thể : $x = y = 18$.

Thử : $18^{17} + 18^{17} = 19^{17}$, loại vì vế trái chẵn, vế phải lẻ. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

24. Biến đổi : $3x^2 - 6x + 3 = 16 - 4y^2$

$$3(x - 1)^2 = 4(4 - y^2)$$

Ta có $4 - y^2 \geq 0$ và $4 - y^2 \vdots 3$ nên $y^2 = 1$ hoặc $y^2 = 4$.

Đáp số : $(3 ; 1)$, $(3 ; -1)$, $(-1 ; 1)$, $(-1 ; -1)$, $(1 ; 2)$, $(1 ; -2)$.

25. Giả sử $y \leq x$. Ta có :

$$x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x + 1)^2.$$

$x^2 + y$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không thể là số chính phương.

26. Ta đặt : $(1 + 2 + 3 + \ldots + x)(1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + x^2) = y^2$.

Áp dụng công thức

$1^2 + 2^2 + \ldots + x^2 = \dfrac{1}{6}x(x + 1)(2x + 1)$ ta được :

$$\frac{x(x+1)}{2} \cdot \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 . \frac{2x+1}{3} = y^2$$

Ta phải có $\frac{2x+1}{3} = (2n+1)^2$ với n nguyên.

Phương trình này có vô số nghiệm nguyên :

$$x = 6n^2 + 6n + 1.$$

27. Giả sử $2^p + 3^p = n^2$ (1)

Xét $p = 2$ thì $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = n^2$, vô nghiệm.

Xét $p > 2$ thì p là số lẻ (vì p là số nguyên tố).

Cách 1. Viết (1) dưới dạng : $2^p + (4-1)^p = n^2$.

Ta có 2^p chia hết cho 4, còn $(4-1)^p = BS4 - 1$ nên vế tr chia cho 4 dư 3, còn vế phải là số chính phương lẻ nên ch cho 4 dư 1.

Cách 2. Viết (1) dưới dạng : $(3-1)^p + 3^p = n^2$.

Vế trái chia cho 3 dư 2, còn vế phải chia cho 3 dư 1.

28. *Cách 1*. Giả sử $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (1) với $y \in$ N

Biến đổi : $4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

$\Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4$

$= (2x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x+2)^2 > (2x^2 + x)^2$.

Do $(2y)^2 > (2x^2 + x)^2$ nên $(2y)^2 \geq (2x^2 + x + 1)^2$

$\Rightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \geq 4x^4 + x^2 + 1 + 4x^3 + 4x^2 +$

$\Rightarrow 0 \geq x^2 - 2x - 3$

$\Rightarrow 0 \geq (x+1)(x-3)$.

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Xét $x = -1$, thay vào (1) được : $y^2 = 1 = 1^2$.

Xét $x = 0$, thay vào (1) được : $y^2 = 1 = 1^2$.

Xét $x = 1$, thay vào (1) được : $y^2 = 5$, loại.

Xét $x = 2$, thay vào (1) được : $y^2 = 31$, loại.

Xét $x = 3$, thay vào (1) được : $y^2 = 121 = 11^2$.

Đáp số : $x = -1$; $x = 0$; $x = 3$.

Cách 2 :

Giả sử $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$ (1) với $y \in N$.

Biến đổi : $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 4y^2$.

Ta sẽ chứng minh : $A^2 < 4y^2 \leq (A + 2)^2$.

Ta thấy

$4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x^2 + 4x + 4$

$= (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4$

$= (2x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x + 2)^2 > (2x^2 + x)^2 = A^2$ (2)

Xét $(A + 2)^2 - 4y^2 = (2x^2 + x + 2)^2 - 4y^2$

$= (2x^2 + x)^2 + 4(2x^2 + x) + 4 - (2x^2 + x)^2 - 3x^2 - 4x - 4$

$= 8x^2 + 4x - 3x^2 - 4x = 5x^2$ (3)

Nếu $x = 0$ thì từ (1) có $y^2 = 1$.

Nếu $x \neq 0$ thì từ (3) suy ra $(A + 2)^2 > 4y^2$. Kết hợp với (2) được :

$A^2 < 4y^2 < (A + 2)^2$

Suy ra $(2y)^2 = (A + 1)^2$

$\Leftrightarrow 4y^2 = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 = (2x^2 + x)^2 + 2(2x^2 + x) + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

Đáp số : $x = 0$; $x = 3$; $x = -1$. Biểu thức đã cho theo thứ tự bằng 1 ; 121 ; 1.

29. $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$.

Cộng 1 vào hai vế :

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x + 1) = (2y + 1)^2.$$

Vế phải là số lẻ nên $x^2 + 1$ và $x + 1$ cùng lẻ. Dễ thấy $x^2 + 1$ và $x + 1$ cùng dương. Ta lại thấy $(x^2 + 1, x + 1) = 1$. Thật vậy, giả sử $x^2 + 1 \vdots d$; $x + 1 \vdots d$ thì $x^2 + 1 \vdots d$, $x^2 - 1 \vdots d$ nên $(x^2 + 1) - (x^2 - 1) = 2 \vdots d$; do d lẻ nên $d = 1$.

Hai số $x^2 + 1$ và $x + 1$ là hai số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau, có tích là số chính phương nên cả hai số đều là số chính phương. Do x^2 và $x^2 + 1$ là hai số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên số nhỏ bằng 0, đó là $x^2 = 0$.

Từ $x = 0$ ta được $y = 0$ hoặc $y = -1$.

Đáp số : $(0 ; 0)$; $(0 ; -1)$.

30. Nhân hai vế của phương trình với 4 rồi cộng với 1 :

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 1 = (2y + 1)^2.$$

Trước hết, ta tìm các giá trị của x để xảy ra bất đẳng thức :

$$(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (2y + 1)^2 - (2x^2 + x)^2 > 0 \\ (2x^2 + x + 1)^2 - (2y + 1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 > 0 \\ (2x^2 + x)^2 + 2(2x^2 + x) + 1 - (2x^2 + x)^2 - 3x^2 - 4x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(3x + 1) > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > -\dfrac{1}{3} \\ x < 0 \quad \text{ hoặc } x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \text{ (do } x \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Như vậy với $x < -1$ hoặc $x > 2$ thì $(2y + 1)^2$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp, vô lí.

Vậy số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số hữu tỉ.

CHƯƠNG II

CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

36. Đặt $y = 3k$. Rút gọn : $4x - 7k = 15$.

$$x = \frac{7k+15}{4} = 2k + 4 - \frac{k+1}{4}.$$

Đặt $\frac{k+1}{4} = t$.

Đáp số : $\begin{cases} x = 7t + 2 \\ y = 12t - 3 \end{cases}$ (t nguyên tùy ý).

37. $x = \frac{547 - 20y}{9} = 61 - 2y - \frac{2(1+y)}{9}$.

Đặt $\frac{1+y}{9} = t$.

Đáp số : $\begin{cases} x = 63 - 20t \\ y = 9t - 1 \end{cases}$ (t nguyên tùy ý).

38. a) $y = \frac{73 - 11x}{8} = 8 - x + \frac{3(3-x)}{8}$.

Đặt $\frac{3-x}{8} = t$.

Đáp số : $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$ (t nguyên tùy ý).

b) $\begin{cases} 3 - 8t > 0 \\ 5 + 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{11} < t < \frac{3}{8}$.

Do $t \in \mathbf{Z}$ nên $t = 0$. Vậy $x = 3$; $y = 5$.

39. Ta thấy $1999y \vdots 11 \Rightarrow y \vdots 11$.

Do y nguyên dương nên $y \geq 11$. Do đó $1999y \geq 1999.11$.

Suy ra vế trái của phương trình $(11x + 1999y)$ lớn hơn vế phải (11.1999). Phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Chú ý : Chứng minh tương tự như trên ta có bài toán tổng quát : Nếu các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau thì phương trình $ax + by = ab$ không có nghiệm nguyên dương.

40. Dễ thấy m lẻ. Đặt $m = 2k - 1$ (k nguyên). Ta có :

$6x + 8y = 2k$ nên $3x + 4y = k$.

$x = \dfrac{k - 4y}{3} = -y + \dfrac{k - y}{3}$. Đặt $\dfrac{k - y}{3} = t$.

Đáp số : $\begin{cases} x = -k + 4t \\ y = k - 3t \end{cases}$

với m lẻ, $k = \dfrac{m + 1}{2}$, t là số nguyên tùy ý.

Trường hợp m chẵn, phương trình không có nghiệm nguyên.

41. *Cách 1.* Biểu thị y theo x rồi tách ra giá trị nguyên : $y(x - 2) = 3 + 3x - x^2$.

$x = 2$ không thỏa mãn phương trình .

Với $x \neq 2$ thì $y = \dfrac{3 + 3x - x^2}{x - 2} = \dfrac{-x(x - 2) + x - 2 + 5}{x - 2} =$

$-x + 1 + \dfrac{5}{x - 2}$.

Ta có :

x − 2	1	− 1	5	− 5
x	3	1	7	− 3
y	3	− 5	− 5	3

Cách 2. Đưa về phương trình ước số :

$y(x-2) + x^2 - 2x - x + 2 = 5$

$\Leftrightarrow y(x-2) + x(x-2) - (x-2) = 5$

$\Leftrightarrow (x-2)(y+x-1) = 5.$

Giải tiếp như cách 1.

42. Biến đổi : $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$

$\Leftrightarrow 2x^2 - xy + 4xy - 2y^2 = 7$

$\Leftrightarrow (x+2y)(2x-y) = 7.$

Ta có :

$x + 2y$	1	− 1	7	− 7
$2x - y$	7	− 7	1	− 1
x	3	− 3	loại	loại
y	− 1	1		

43. Biến đổi : $x(x-1) + y(y-1) = 8$

Tích hai số nguyên liên tiếp là số không âm và chỉ tận cùng bằng 0, 2, 6. Do đó trong hai tích $x(x-1)$ và $y(y-1)$, có một tích bằng 2, tích còn lại bằng 6.

Giả sử $x(x-1) = 2$, $y(y-1) = 6$, ta được $x \in \{2 ; -1\}$, $y \in \{3 ; -2\}$.

Đáp số : 8 nghiệm là (2 ; 3), (2 ; − 2), (− 1 ; 3), (− 1 ; − 2) và các hoán vị.

44. Đưa về phương trình ước số :

$x^2 - 2x + 1 - 15 = y^2$ (giả sử $y \in N$)

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 15$

$\Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y) = 15.$

Chú ý rằng $x - 1 + y \geq x - 1 - y$ nên :

$x - 1 + y$	15	-1	5	-3
$x - 1 - y$	1	-15	3	-5
$x - 1$	8	-8	4	-4
x	9	-7	5	-3

45. Đưa về phương trình ước số :

$x^2 - 4x + 4 - 29 = y^2$ (giả sử $y \in \mathbf{N}$)

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - y^2 = 29$

$\Leftrightarrow (x - 2 + y)(x - 2 - y) = 29.$

Đáp số : $x_1 = 17$; $x_2 = -13$.

46. $x^2 + 12x = y^2$ (giả sử $y \in \mathbf{N}$)

$\Leftrightarrow (x + 6)^2 - y^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x + 6 + y)(x + 6 - y) = 36.$

Nếu $y = 0$ thì $x_1 = 0$; $x_2 = -12$.

Nếu $y > 0$ thì $x + 6 + y > x + 6 - y$. Chú ý rằng $x + 6 + y$ và $x + 6 - y$ phải cùng chẵn. Từ đó có thêm : $x_3 = 4$; $x_4 = -16$.

Đáp số : 0 ; - 12 ; 4 ; - 16.

47. a) $x^2 + 7x = y^2$ (giả sử $y \in \mathbf{N}$)

$\Leftrightarrow 4x^2 + 28x = 4y^2$

$\Leftrightarrow (2x + 7)^2 - (2y)^2 = 49$

$\Leftrightarrow (2x + 7 + 2y)(2x + 7 - 2y) = 49.$

Xét $y = 0$ được $x_1 = 0$; $x_2 = -7$.

Xét $y > 0$ được $x_3 = 9$; $x_4 = -16$.

b) *Cách 1.* Trước hết ta chứng minh rằng x phải là số nguyên.

Thật vậy giả sử x không là số nguyên, đặt $x = \frac{m}{n}$ trong đó m, n là số nguyên, nguyên tố cùng nhau ; $m \neq 0$; $n \geq 2$.

Ta có : $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 7 \cdot \frac{m}{n} = y^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 7mn = y^2 n^2.$

Suy ra $m^2 \vdots n$, trái với giả thiết $(m, n) = 1$.

Vậy x phải là số nguyên.

Giải tiếp như ở câu a.

Cách 2. Giả sử $x^2 + 7x = y^2$ (giả sử $y \in \mathbf{N}$) thì

$$x^2 + 7x - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 49 + 4y^2$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4y^2}}{2} \quad (2)$$

Để x hữu tỉ thì phải có $49 + 4y^2$ là số chính phương.

Đặt $49 + 4y^2 = m^2$ (m tự nhiên) ta có

$$(m + 2y)(m - 2y) = 49.$$

Chú ý rằng $m + 2y \geq m - 2y$ và $m + 2y > 0$ nên :

$m + 2y$	49	7
$m - 2y$	1	7
y	12	0

Với $y = 12$, thay vào (2) được : $x_1 = 9$; $x_2 = -16$.

Với $y = 0$, thay vào (1) được : $x_3 = 0$; $x_4 = -7$.

Đáp số : 9 ; − 16 ; 0 ; − 7.

48. Giải tương tự bài 47.

Đáp số : 5 ; – 6.

49. Cần tìm các số nguyên dương x và y sao cho

$$x(x + 17) = y^2.$$

Ta được : $x = 64$.

Đáp số : 64 và 81.

50. $7x^2 - 5y^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 6y^2 + x^2 + y^2 = 3$.

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3$.

Ta thấy x^2, y^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $x^2 + y^2 \vdots 3$ nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3 nên x^2, y^2 chia hết cho 9.

Vế trái $(7x^2 - 5y^2)$ chia hết cho 9, còn vế phải (3) không chia hết cho 9.

Phương trình không có nghiệm nguyên.

51. Ta có $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$

7 và 39 nguyên tố cùng nhau nên :

$$\begin{cases} x + y = 7m & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 39m & (2) \text{ (m nguyên)} \end{cases}$$

Từ (1) suy ra : $x^2 + 2xy + y^2 = 49m^2$

Trừ đi (2) được : $xy = 49m^2 - 39m$.

Ta có bất đẳng thức $(x + y)^2 \geqslant 4xy$ nên :

$49m^2 \geqslant 4(49m^2 - 39m)$, suy ra $m(52 - 49m) \geqslant 0$.

Do đó $0 \leqslant m \leqslant \dfrac{52}{49}$. Do m là số nguyên nên $m \in \{0 ; 1\}$

Với m = 0 thì : $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$

Ta có nghiệm (0 ; 0).

Với m = 1 thì : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$

Ta có nghiệm (5 ; 2), (2 ; 5).

Đáp số : (0 ; 0) ; (5 ; 2), (2 ; 5).

52. Giải tương tự bài 51.

Cách giải khác. Ta có :

$$\begin{cases} x + y = 3m & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 7m & (2) \end{cases} \text{. (m nguyên)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3m \\ xy = \dfrac{9m^2 - 7m}{3} \end{cases}$$

x và y là nghiệm của phương trình :

$$3X^2 - 9mX + (9m^2 - 7m) = 0 \qquad (3)$$

$$\Delta = -27m^2 + 84m$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{28}{9}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

Ta còn phải có $\Delta = 3(-9m^2 + 28m)$ là số chính phương nên phải có $-9m^2 + 28m \vdots 3$

$\Rightarrow 28m \vdots 3 \Rightarrow m \vdots 3$. Vậy $m \in \{0 ; 3\}$

Với m = 0, thay vào (3) được $X_1 = 0$.

Với m = 3, thay vào (3) được :

$3X^2 - 27X + 60 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 9X + 20 = 0.$

$$X_1 = 5 ; X_2 = 4.$$

Các nghiệm của (3) đều nguyên nên thỏa mãn.

Đáp số : (0 ; 0), (5 ; 4), (4 ; 5).

53. $\begin{cases} x + 2y = 5m & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 7m & (2) \end{cases}$ m nguyên.

Rút x từ (1), thay vào (2) rồi rút gọn :

$$3y^2 - 15my + (25m^2 - 7m) = 0 \qquad (3)$$

$\Delta = -75m^2 + 84m.$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{28}{25}.$

Do m nguyên nên $m \in \{0 ; 1\}$.

Với m = 0, thay vào (3) được y = 0.

Với m = 1, thay vào (3) được :

$$3y^2 - 15y + 18 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 3 \end{array}\right.$$

Đáp số : (0 ; 0), (1 ; 2), (– 1 ; 3).

54. Ta thấy : $8y^2 - 25 \vdots 3y + 5$

$\Rightarrow 9(8y^2 - 25) \vdots 3y + 5$

$\Rightarrow 8(9y^2 - 25) - 25 \vdots 3y + 5$

$\Rightarrow 25 \vdots 3y + 5.$

3y + 5	– 1	– 5	– 25	1	5	25
3y	– 6	– 10	– 30	– 4	0	20
y	– 2	loại	– 10	loại	0	loại
x	– 7		– 31		– 5	

55. Khai triển rồi rút gọn :

$$xy(3x + 3y - xy - 1) = 0 \qquad (1)$$

Nếu x = 0 thì y nguyên tùy ý.

Nếu y = 0 thì x nguyên tùy ý.

Nếu xy ≠ 0 thì $3x + 3y - xy - 1 = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow (x - 3)(y - 3) = 8.$

Đáp số : (11 ; 4) , (4 ; 11), (7 ; 5), (5 ; 7), (2 ; – 5),

$(-5 ; 2)$, $(1 ; -1)$, $(-1 ; 1)$, $(0 ; k)$, $(t ; 0)$

với k, t là các số nguyên tùy ý.

56. a) $x^4 - x^2 + 2x + 2 = y^2$ (giả sử $y \in \mathbf{N}$)

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = y^2$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2[(x - 1)^2 + 1] = y^2$.

Nếu $x + 1 = 0$, tức là $x = -1$ thì $y = 0$, thỏa mãn.

Nếu $x + 1 \neq 0$ thì $(x - 1)^2 + 1 = k^2$ (k tự nhiên)

$\Leftrightarrow k^2 - (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow (k + x - 1)(k - x + 1) = 1$.

Suy ra $k + x - 1 = k - x + 1$ nên $x = 1$. Khi đó $y = 2$.

Đáp số : -1 và 1.

b) $x(x + 2)(x^2 + 2x + 3) = y^2$ (1) (giả sử $y \in \mathbf{N}$)

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 3) = y^2$.

Đặt $x^2 + 2x = k$ ta có $k(k + 3) = y^2$ (2)

- Xét $y = 0$, từ (1) ta có $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

- Xét $y > 0$. Biến đổi : $4k^2 + 12k = 4y^2$

$\Leftrightarrow (2k + 3)^2 - 4y^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2k + 3 + 2y)(2k + 3 - 2y) = 9$.

Ta thấy $2k + 3 + 2y > 2k + 3 - 2y$ nên có hai trường hợp :

Trường hợp 1 : $\begin{cases} 2k + 3 + 2y = 9 \\ 2k + 3 - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2k + 3 = 5 \Rightarrow k = 1$.

Khi đó $x(x + 2) = 1$, không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 2 : $\begin{cases} 2k + 3 + 2y = -1 \\ 2k + 3 - 2y = -9 \end{cases}$

$\Rightarrow 2k + 3 = -5 \Rightarrow k = -4$.

Khi đó $x(x + 2) = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$, vô nghiệm.

Đáp số : 0 và -2.

c) $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ (1) (giả sử $y \in N$)

$\Leftrightarrow (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$

Đặt $x^2 + 8x = k$ ta có $k(k+7) = y^2$ (2)

- Xét $y = 0$, từ (1) ta được : $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -7$; $x_4 = -8$.

- Xét $y > 0$. Giải (2) được $k_1 = 9$; $k_2 = -16$ (xem bài 47a).

Với $k = 9$ ta có $x^2 + 8x = 9$ được $x_5 = 1$; $x_6 = -9$.

Với $k = -16$ ta có $x^2 + 8x = -16$ được $x_7 = -4$.

Đáp số : 0 ; − 1 ; − 7 ; − 8 ; 1 ; − 9 ; − 4.

57. a) Ta thấy lập phương của một số nguyên a chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 8 (thật vậy nếu $a \vdots 3$ thì $a^3 \vdots 9$, nếu $a = BS3 \pm 1$ thì $a^3 = BS9 \pm 1$).

Theo nhận xét trên, $x^3 + y^3$ chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 8, 2, 7, còn 2004 chia cho 9 dư 6.

Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) $x^2(x^2 - y^2) - 4y^2(x^2 - y^2) = 3$

$\Leftrightarrow (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y) = 3$ (1)

Nếu $y = 0$ thì $x^4 = 3$, không có nghiệm nguyên.

Nếu $y \neq 0$ thì vế trái của (1) là tích của bốn thừa số khác nhau đôi một, còn vế phải chỉ phân tích được thành nhiều nhất là tích của ba thừa số khác nhau đôi một : $3 = (-3).1.(-1)$.

Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

c) Biến đổi : $2(x^2 + y^2 + xy)^2 = 2.1998$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + xy)^2 = 1998.$$

Số chính phương không tận cùng bằng 8.

d) Bổ đề : Nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ mà p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử một trong hai số a và b không chia hết cho p thì theo giả thiết suy ra số kia cũng không chia hết cho p.

Theo định lí nhỏ Fecma (*) :

$$a^{p-1} - 1 \vdots p$$

$$b^{p-1} - 1 \vdots p$$

Suy ra : $a^{p-1} + b^{p-1} - 2 \vdots p$. Do $p = 4k + 3$ nên

$$a^{4k+2} + b^{4k+2} - 2 \vdots p .$$

Ta có : $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots a^2 + b^2 \vdots p$

nên $2 \vdots p$. Do p là số nguyên tố nên $p = 2$, trái với $p = 4k + 3$. Bổ đề được chứng minh.

Xét phương trình : $x^2 - y^3 = 7$ (1)

Biến đổi : $x^2 + 1 = y^3 + 8$ (2)

Xét hai trường hợp :

- Nếu y chẵn thì x lẻ. Khi đó vế trái của (2) chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia hết cho 4. Mâu thuẫn .

- Nếu y lẻ, ta có :

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4).$$

Ta thấy $y^2 - 2y + 4 = (y - 1)^2 + 3$ chia cho 4 dư 3 nên có ước nguyên tố p có dạng $4k + 3$. Do đó $x^2 + 1$ có ước nguyên tố p có dạng $4k + 3$.

(*) Định lí nhỏ Fecma thường được diễn đạt dưới hai dạng :

- Dạng 1 : Nếu p là một số nguyên tố và a là một số nguyên thì $a^p - a \vdots p$.

- Dạng 2 : Nếu a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thì $a^{p-1} - 1 \vdots p$.

Theo bổ đề trên, $1 \vdots p$, vô lí.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

58. *Cách 1.* Giải tương tự như cách 2 của ví dụ 22 :

$$x^3 + y^3 = 3xy + 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3xy = 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 1 - 3xy = 4$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1) \cdot \left[\frac{(x-y)^2 + (y-1)^2) + (x-1)^2}{2}\right] = 4.$$

Đặt biểu thức trong dấu móc là A, A là ước dương của 4.

Do đó :

x + y + 1	4	2	1
A	1	2	4

Suy ra : $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)^2 \in \{2 ; 4 ; 8\}$.

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nếu ba số đó là 1, 1, 0 ; tổng bằng 4 nếu ba số là 4, 0 , 0 ; tổng bằng 8 nếu ba số là 4, 4 , 0 ; trong trường hợp nào cũng có một số bằng 0, tức là :

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ x = y \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp :

a) $x + y + 1 = 4$, tức là $x + y = 3$.

Nếu $x = 1$ thì $y = 2$, thỏa mãn (1).

Nếu $y = 1$ thì $x = 2$, thỏa mãn (1).

Không có trường hợp $x = y$.

b) $x + y + 1 = 2$, tức là $x + y = 1$.

Nếu $x = 1$ thì $y = 0$, không thỏa mãn (1).

Nếu $y = 1$ thì $x = 0$, không thỏa mãn (1).

Không có trường hợp $x = y$.

c) $x + y + 1 = 1$, tức là $x + y = 0$.

Nếu $x = 1$ thì $y = -1$, thỏa mãn (1).

Nếu $y = 1$ thì $x = -1$, thỏa mãn (1).

Nếu $x = y$ thì $x = y = 0$, không thỏa mãn (1).

Đáp số : $(2 ; 1)$, $(1 ; 2)$, $(1 ; -1)$, $(-1 ; 1)$.

Cách 2. Giải tương tự như cách 3 của ví dụ 22.

$$x^3 + y^3 = 3xy + 3$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3xy + 3.$$

Đặt $x + y = a$, $xy = b$ ta có :

$$a^3 - 3ab = 3b + 3$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3 = 3b(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3 \vdots a + 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 1 - 4 \vdots a + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \vdots a + 1.$$

Ta có :

$a + 1$	1	-1	2	-2	4	-4
a	0	-2	1	-3	3	-5
$b = \dfrac{a^3 - 3}{3(a + 1)}$	-1	không nguyên	không nguyên	5	2	không nguyên

Trường hợp $a = 0$, $b = -1$ cho cặp số $(1 ; -1)$ và hoán vị.

Trường hợp $a = -3$, $b = 5$ không cho nghiệm.

Trường hợp $a = 3$, $b = 2$ cho cặp số $(1 ; 2)$ và hoán vị.

59. *Cách 1*. Giải tương tự như cách 2 của ví dụ 22.

Đưa $x^3 - y^3 - xy = 25$ (1) về dạng :

$$(3x - 3y - 1).A = 674 \qquad (2)$$

với $$A = \frac{(3x + 3y)^2 + (1 - 3y)^2 + (3x + 1)^2}{2}$$

Do $A > 0$ nên A và $3x - 3y - 1$ là ước dương của 674. Ước dương của 674 là 1, 2, 337, 674. Do $3x - 3y - 1$ chia cho 3 dư 2 nên $3x - 3y - 1 \in \{2 ; 674\}$.

Trường hợp $\begin{cases} 3x - 3y - 1 = 2 \\ A = 337 \end{cases}$ cho $(4 ; 3)$ và $(-3 ; -4)$

Trường hợp $\begin{cases} 3x - 3y - 1 = 674 \\ A = 1 \end{cases}$ không cho nghiệm nguyên.

Chú ý. Ta có thể loại trường hợp thứ hai bằng cách đưa ra nhận xét $A \geqslant 13$ (xem mục chú ý của ví dụ 22).

Cách 2. Giải tương tự như cách 3 của ví dụ 22.

$$x^3 - y^3 = xy + 25$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^3 + 3xy(x - y) = xy + 25.$$

Đặt $x - y = a$, $xy = b$ ta có :

$$a^3 + 3ab = b + 25.$$

Bạn đọc tự giải tiếp để được $a^3 - 25 \vdots 3a - 1$, từ đó $3a - 1$ là ước của 674 và chọn được

$$3a - 1 \in \{-1 ; 2 ; -337 ; 674\}$$

Tương ứng tìm được :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -25 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -112 \\ b = -4169 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 225 \\ b = -16900. \end{cases}$$

Do phải có $a^2 + 4b \geq 0$ nên chỉ có một trường hợp $a = 1$, $b = 12$ cho các đáp số : $(4 ; 3)$, $(-3 ; -4)$.

Chú ý. Nếu giải $x^3 - y^3 = xy + 25$ (1) với nghiệm nguyên dương, ta có cách giải sau :

Từ (1) suy ra $x > y$, do đó $x - y \geq 1$.

(1) $\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25$.

Do $x - y \geq 1$, $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên

$$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25.$$

Suy ra $x^2 + y^2 \leq 25$ nên $x \leq 4$ (2)

Mặt khác do $x > y$ nên $xy \geq 2$. Từ (1) suy ra

$$x^3 - y^3 \geq 27 \Rightarrow x^3 > 27 \Rightarrow x > 3 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $x = 4$.

Do $y < x$ nên $y \in \{1 ; 2 ; 3\}$

Chỉ có $y = 3$ thỏa mãn (1) :

Đáp số : $(4 ; 3)$.

60. $y^6 - y^3 = x^2 \Leftrightarrow y^3(y^3 - 1) = x^2$.

Tích hai số nguyên liên tiếp là số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Trường hợp $y^3 = 0$ cho $y = 0$; $x = 0$.

Trường hợp $y^3 - 1 = 0$ cho $y = 1$; $x = 0$.

Đáp số : $(0 ; 0)$, $(0 ; 1)$.

61. a) $\begin{cases} x = m \\ y = n \\ z = 2m + 5n - 4 \end{cases}$ (m,n là các số nguyên tùy ý)

b) Ta thấy $5y \,\vdots\, 2$ nên $y \,\vdots\, 2$. Đặt $y = 2k$. Ta có :

$x - 5k - 3z = 2 \Rightarrow x = 5k + 3z + 2$.

Nghiệm : $\begin{cases} x = 5k + 3t + 2 \\ y = 2k \\ z = t \end{cases}$ (k, t là các số nguyên tùy ý)

62. Biến đổi : $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 0$.

Đáp số : $(1 ; 1 ; -1)$.

63. Ta thấy $(x ; 0 ; 0)$ với x nguyên tùy ý thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên.

64. Lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 8 (giải thích ở lời giải bài 57a). Do đó vế trái của phương trình chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8. Còn vế phải chia cho 9 dư 5.

Phương trình không có nghiệm nguyên.

65. Nếu a là số chẵn thì $a^4 \vdots 16$.

Nếu a là số lẻ thì a^2 chia cho 8 dư 1 nên
$a^4 = (8k + 1)^2 = 64k^2 + 16k + 1$, chia cho 16 dư 1.

Mỗi số x^4, y^4, z^4, t^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1 nên
$x^4 + y^4 + z^4 + t^4$ chia cho 16 có số dư nhỏ hơn hoặc bằng 4.

Trong khi đó, vế phải (là 1995) chia cho 16 dư 11 (lớn hơn 4).

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

66. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ (1)

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1$.

Dễ thấy $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$ nên chỉ có thể :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1 & (3) \end{cases}$$

Bình phương hai vế của (2) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $xy + yz + zx = 0$

Do đó : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (5)

Giả sử $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ thì từ (5) suy ra : $z = 0$, $y = 0$, $x = \pm 1$

Bộ số (– 1 ; 0 ; 0) không thỏa mãn (2).

Đáp số : (1 ; 0 ; 0) và các hoán vị.

67. $x^7 + y^7 = 7z$ (1)

$x^7 + y^7$ chia hết cho số nguyên tố 7.

Theo định lí nhỏ Fecma : $x^7 - x \vdots 7$, $y^7 - y \vdots 7$.

Viết (1) dưới dạng

$$(x^7 - x) + (y^7 - y) + (x + y) = 7z.$$

Ta có : $x + y \vdots 7$. Đặt $x + y = 7k$ (k nguyên)

$$\text{Nghiệm : } \begin{cases} x = t \\ y = 7k - t \\ z = \dfrac{t^7 + (7k - t)^7}{7} \end{cases} \quad \text{(t, k nguyên tùy ý)}$$

(Dễ thấy biểu thức của z cho một số nguyên)

68. $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ (1)

x^2y^2 là số chính phương nên chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1.

Nếu x^2y^2 chia cho 4 dư 1 thì x, y lẻ. Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 2 nên $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 2 hoặc 3.

Mâu thuẫn.

Vậy $x^2y^2 \vdots 4$ (2). Do đó x và y không thể đều lẻ. Xét hai trường hợp :

a) Trong x và y có một số chẵn, một số lẻ, chẳng hạn x chẵn, y lẻ. Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 1, còn z^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 1 hoặc 2, trái với (2)

b) x và y đều chẵn. Suy ra z chẵn.

Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ với x_1, y_1 nguyên.

Thay vào (1) được :

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1^2y_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2 \qquad (3)$$

Vế phải của (3) chia hết cho 4. Lại lập luận như trên suy ra x_1, y_1, z_1 chẵn.

• Đặt $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$. Thay vào (3) và rút gọn : $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16x_2^2y_2^2$

Bạn đọc tự giải tiếp bằng phương pháp lùi vô hạn.

Nghiệm duy nhất của phương trình là (0 ; 0 ; 0).

69. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10} \qquad (1)$

Với x, y ≠ 0 thì (1) $\Leftrightarrow xy = 10(x + y)$

$\Leftrightarrow (x - 10)(y - 10) = 100 \qquad (2)$

Ta thấy $100 = 2^2 . 5^2$ do đó 100 có 9 ước tự nhiên, có 18 ước nguyên. Phương trình (2) có 18 nghiệm nguyên, trong đó có nghiệm (0 ; 0).

Vậy phương trình (1) có 17 nghiệm nguyên.

70. Biến đổi : $(x - p)(y - p) = p^2$.

Ước của p^2 là ± 1, $\pm p$, $\pm p^2$. Giả sử $x > y$ thì $x - p > y - p$. Có hai trường hợp :

a) $\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p^2 + p \\ y = p + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - p = -1 \\ y - p = -p^2 \end{cases}$ Khi đó $y = p - p^2 < 0$, loại .

Đáp số : $(p^2 + p , p + 1)$, $(p + 1, p^2 + p)$.

71. *Cách 1*. Giả sử $x \geq y$ thì $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$, $\frac{1}{2xy} < \frac{1}{y}$ nên :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} < \frac{3}{y}$$

Suy ra : $y < 6$. Mặt khác $y > 2$.

Xét $y \in \{3 ; 4 ; 5\}$ được : $y = 3$; $x = 7$.

Đáp số : $(7 ; 3)$, $(3 ; 7)$.

Cách 2. Nhân hai vế với 2xy được :

$$2y + 2x + 1 = xy$$

Đưa về phương trình ước số :

$$(x - 2)(y - 2) = 5.$$

72. Đặt $x^2 = a$, $x^2 + y^2 = b$, $x^2 + y^2 + z^2 = c$ thì a, b, c nguyên dương, $1 \leq a \leq b \leq c$.

Phương trình trở thành : $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1$.

Do đó $a + b + c = abc$.

Giải như ví dụ 6 được $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.

Suy ra $x^2 = y^2 = z^2 = 1$.

Phương trình có tám nghiệm nguyên :

$(1 ; 1 ; 1)$, $(1 ; 1 ; -1)$, $(1 ; -1 ; 1)$, $(-1 ; 1 ; 1)$,

$(1 ; -1 ; -1)$, $(-1 ; 1 ; -1)$, $(-1 ; -1 ; 1)$, $(-1 ; -1 ; -1)$.

73. Gọi ba số tự nhiên nhỏ dần là x, y, z. Ta có :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n$ với $x > y > z \geq 1$; $n \in N^*$.

Suy ra : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1\frac{5}{6}$. Vậy $n = 1$.

Ta được : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Nhận xét : $\frac{1}{z} < 1 \Rightarrow z > 1$

Mặt khác $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{z} \Rightarrow z < 3$. Vậy $z = 2$.

Ta được : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Nhận xét : $\frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$

Mặt khác $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{2}{y} \Rightarrow y < 4$. Vậy $y = 3$.

Suy ra $x = 6$.

Ba số phải tìm là : 2 ; 3 ; 6.

74. Ta có : $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{40}{31}$.

Viết mỗi vế dưới dạng tổng của một số tự nhiên và một phân số dương nhỏ hơn 1 :

$$x + \frac{zt + 1}{yzt + y + t} = 1 + \frac{9}{31}.$$

Do có duy nhất một cách viết như trên nên : $x = 1$; $\frac{zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{9}{31}$.

Suy ra : $\frac{yzt + y + t}{zt + 1} = \frac{31}{9}$.

Lại tiếp tục làm như trên :

$$y + \frac{t}{zt + 1} = 3 + \frac{4}{9}.$$

Suy ra : $y = 3$; $\frac{zt + 1}{t} = \frac{9}{4}$

$$z + \frac{1}{t} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Suy ra : $z = 2$; $t = 4$.

Đáp số : $(1 ; 3 ; 2 ; 4)$.

75. Từ giả thiết suy ra : $(xy + 1)(yz + 1)(xz + 1) \vdots xyz$

Rút gọn được : $xy + yz + zx + 1 \vdots xyz$.

Do đó : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = n$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

Giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$ thì $\frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z} \leq 1$.

Do đó : $n = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq 4$.

Suy ra $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Xét bốn trường hợp :

a) Với $n = 1$, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1$.

Ta thấy : $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{4}{z}$ nên $z \leq 4$. Mặt khác

$z > 1$. Suy ra : $z \in \{2 ; 3 ; 4\}$.

Với $z = 2$, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$. Giải như bài 71 được :

$x = 7$; $y = 3$; $z = 2$.

Với $z = 3$, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3xy} = \frac{2}{3}$. Ta thấy :

$\frac{2}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3xy} < \frac{3}{y}$ nên $y \leq 4$. Mặt khác $y \geq z = 3$.

Lần lượt xét $y = 3$, $y = 4$ đều không được x nguyên.

Với $z = 4$, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{4xy} = \frac{3}{4}$. Ta thấy :

$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{4xy} < \frac{3}{y}$ nên $y < 4$, trái với $y \geq z = 4$.

b) Với n = 2, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 2$.

Ta thấy : $2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{4}{z}$ nên $z \leq 2$.

Suy ra : $z \in \{1 ; 2\}$.

Với z = 1, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$. Ta thấy :

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{3}{y}$ nên $y \leq 3$. Mặt khác $y > 1$.

Xét y = 2 được x = 3. Xét y = 3 thì x không nguyên.

Với z = 2, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} = \frac{3}{2}$. Ta thấy :

$\frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} < \frac{3}{y}$ nên $y < 2$, trái với $y \geq z = 2$.

c) Với n = 3, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 3$.

Ta thấy : $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{4}{z}$ nên z = 1.

Suy ra : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 2$. Ta thấy $2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{3}{y}$ nên y = 1. Suy ra : x = 2.

d) Với n = 4, ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 4$.

Chỉ xảy ra điều này khi mỗi số hạng ở vế trái đều bằng 1, tức là x = y = z = 1.

Kết luận : Bộ ba số phải tìm là :

(7 ; 3 ; 2), (3 ; 2 ; 1), (2 ; 1 ; 1), (1 ; 1 ; 1) và các hoán vị.

76. a) Nghiệm duy nhất là (2 ; 2 ; 2 ; 2). Chú ý rằng trong bốn số x, y, z, t, không thể có số nào bằng 1, cũng không thể có số nào lớn hơn hoặc bằng 3.

b) Giả sử $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$.

Ta có $x_1 > 1$ nên $x_1 \geq 2$; $x_2 \geq 3, \dots, x_n \geq n + 1$.

Do đó :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \quad + \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} <$$

$$< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \quad + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Phương trình không có nghiệm nguyên dương.

77. Xét $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$ (1)

Bình phương hai vế :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{t^2} + \frac{t^2}{x^2} + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{xz}{yt} + \frac{t}{y} + \frac{y}{t} + \frac{yt}{xz} + \frac{z}{x}\right) = m^2$$

$$\Rightarrow m^2 = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}\right) + \left(\frac{z^2}{t^2} + \frac{t^2}{x^2}\right) +$$

$$+ 2\left[\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{t}{y} + \frac{y}{t}\right) + \left(\frac{xz}{yt} + \frac{yt}{xz}\right)\right]$$

Áp dụng các bất đẳng thức : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với a, b > 0 ta được :

$$m^2 \geq 2\left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) + 2(2 + 2 + 2) \geq 2 \cdot 2 + 12 = 16.$$

Suy ra $m \geq 4$ (chú ý rằng $m > 0$).

Như vậy :

Với m = 4, (1) nghiệm đúng khi và chỉ khi $x = y = z = t$.

Với m = 3 hoặc m = 2, (1) không có nghiệm nguyên.

78. Giả sử $\frac{x-3}{4x+6} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ với $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}^*$.

Xét a = 0 thì x = 3.

Xét $a \neq 0$. Giả sử $(a, b) = 1$ thì $(a^2, b^2) = 1$. Do đó :

$x - 3 = a^2k$

$4x + 6 = b^2k$ (k nguyên)

Giải tương tự như ví dụ 26, ta đi đến phương trình ước số :

$$18 = (b + 2a)(b - 2a)k.$$

Ta đưa ra các nhận xét : $b + 2a > 0$;

$b + 2a > b - 2a$; $b + 2a$ và $b - 2a$ cùng lẻ ;

$(b + 2a)(b - 2a) \leq 18$. Do đó có các trường hợp :

$b + 2a$	$b - 2a$	k	4a	a	$b > 0$	$x = a^2k + 3$
1	-1	-18	2, loại			
1	-3	-6	4	1	− 1, loại	
1	-9	-2	10, loại			
3	1	6	2, loại			
3	-1	-6	4	1	1	-3
3	-3	-2	6, loại			
9	1	2	8	2	5	11
9	-1	-2	10, loại			

Có ba đáp số :

$x = 3$ thì $\frac{3-3}{12+6} = \frac{0}{18} = 0^2$.

$x = -3$ thì $\frac{-3-3}{-12+6} = 1 = 1^2$.

$x = 11$ thì $\frac{11-3}{44+6} = \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

79. *Cách 1.* $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$ (1)

$\Rightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz \Rightarrow xyz > 0.$

Do đó trong x, y, z, hoặc cả ba số dương, hoặc có một số dương, hai số âm. Chú ý rằng nếu đổi dấu hai trong ba số x, y, z thì (1) không đổi, do đó có thể giả thiết $x, y, z > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ta được :

$$3xyz = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 \geq x^2yz + xyz^2 + xy^2z =$$
$$= xyz(x + y + z).$$

Chia hai vế cho số dương xyz :

$$3 \geq x + y + z.$$

Do x, y, z nguyên dương nên $x = y = z = 1$.

Đổi dấu hai trong ba số x, y, z ta được thêm ba nghiệm nữa :

$(1 ; -1 ; -1)$, $(-1 ; 1 ; -1)$, $(-1 ; -1 ; 1)$.

Cách 2. Cũng nhận xét như ở cách 1 để giả thiết $x, y, z > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương :

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3.$$

$A = 3$ khi và chỉ khi :

$$\frac{xy}{z} = \frac{xz}{y} = \frac{yz}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Đổi dấu hai trong ba số x, y, z ta được thêm ba nghiệm nữa :

$(1 ; -1 ; -1)$, $(-1 ; 1 - 1)$, $(-1 ; -1 ; 1)$

Phương trình có bốn nghiệm nguyên.

80. Phương trình không nghiệm đúng với $x = 0$ và $x = 1$.

Phương trình được nghiệm đúng với $x = 2$.

Với $x \geq 3$, viết phương trình dưới dạng : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

Ta có $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$

nên $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

81. a) $x^y = x^4$.

Nếu $x = 0$, ta có $0^y = 0$, đúng với mọi y nguyên dương (chú ý rằng 0^0 không có nghĩa).

Nếu $x = 1$, ta có $1^y = 1$, đúng với mọi số tự nhiên y.

Nếu $x = -1$, ta có $(-1)^y = 1$, đúng với mọi y chẵn.

Nếu $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$, ta có $y = 4$.

b) Lần lượt xét số mũ của 2 là : $y = 0$; $y = 1$; $y \geq 2$.

Đáp số : (0 ; 0), (1 ; 1), (−1 ; 1).

c) Lần lượt xét số mũ của 4 là : $y = 0$; $y = 1$; $y \geq 2$.

Chú ý rằng với $y \geq 2$ thì vế phải chia cho 8 dư 5, do đó vế trái lẻ và chia cho 8 dư 1.

Đáp số : (3 ; 1), (−3 ; 1).

d) Lần lượt xét $y = 0$; $y = 1$; $y \geq 2$. Chú ý rằng với $y \geq 2$ thì vế phải chia cho 9 dư 2, còn x^3 chia cho 9 dư 0, 1, 8 (xem giải thích ở lời giải của bài 57a) nên vế trái chia cho 9 dư 0, 5, 4.

Đáp số : (4 ; 1).

82. a) Lần lượt xét số mũ của 2 là : $y = 0$; $y = 1$; $y = 2$; $y \geq 3$. Chú ý rằng với $y \geq 3$ thì vế phải chia hết cho 8, còn vế trái chia cho 8 :

- hoặc dư 2 nếu $x = 2k$;
- hoặc dư 4 nếu $x = 2k + 1$.

Đáp số : (0 ; 1), (1 ; 2).

b) Xét hai trường hợp : y lẻ và y chẵn. Giải tương tự như ví dụ 28.

Đáp số : (7 ; 4), (17 ; 8).

c) Giả sử $x \geq y$. Chia hai vế cho 2^y được :

$$2^{x-y} + 1 = 2^x \qquad (1)$$

Nếu $x = y$ thì $2 = 2^x$ nên $x = 1$.

Nếu $x > y$ thì vế trái của (1) lẻ, còn vế phải chẵn. Mâu thuẫn.

Đáp số : (1 ; 1).

d) Nếu $x = 0$ thì $y = 0$.

Nếu $x \geq 1$, ta có : $\underbrace{99...9}_{x \text{ chữ số}} = 81y$ nên $y = \underbrace{99...9}_{x \text{ chữ số}} : 81$.

Chia số gồm toàn chữ số 9 cho 81, lấy đến chín chữ số 9 đem chia thì được thương là $A = 12345679$ và số dư bằng 0.

Đáp số : (0 ; 0) và

$$\begin{cases} x = 9k \text{ với } k \text{ nguyên dương} \\ y = \overline{AA...A} \text{ với } A = 12345679. \end{cases}$$

83. a) Phương trình không có nghiệm tự nhiên. Hãy xét số dư khi chia cho 3 của mỗi số 7^x , 13^y, 19^z.

b) Giả sử $x \geq y$. Chia hai vế cho $2^y \neq 0$ được :

$$2^{x-y} + 1 = 2^{z-y} \qquad (1)$$

Từ đề bài suy ra $z > y$ nên vế phải của (1) là số chẵn. đó $2^{x-y} = 1$, vậy $x - y = 0$, tức là $x = y$.

Đặt $x = y = k$ (k tự nhiên). Thay vào (1) :

$$2 = 2^{z-k} \Leftrightarrow 1 = z - k \Leftrightarrow z = k + 1.$$

Đáp số : $(k ; k ; k + 1)$ với k là số tự nhiên tùy ý.

c) $2^x + 2^y + 2^z = 552$

$$2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^3.3.23.$$

Do $y > x$, $z > x$ nên $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ là số lẻ.

Do đó : $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Bạn đọc tự giải tiếp.

Đáp số : (3 ; 5 ; 9)

d) $x^y = z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$

Do x là số nguyên tố nên $z + 1$, $z - 1$ là các lũy thừa của
Đặt $z - 1 = x^m$, $z + 1 = x^{m+n}$ với $m, n \in \mathbf{N}$. Ta có :

$$(z + 1) - (z - 1) = x^{m+n} - x^m$$

$$\Leftrightarrow 2 = x^m(x^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^m = 2 \\ x^n - 1 = 1 \end{cases}$$

Từ đó : $x = 2$; $m = 1$; $n = 1$.

Đáp số : (2 ; 3 ; 3).

84. a) $$x^y + x^z = x^t \qquad (1)$$

Giả sử $y \leqslant z < t$. Chia hai vế cho x^y được :

$$1 + x^{z-y} = x^{t-y} \qquad (2)$$

Nếu $z > y$ thì từ (2) suy ra $1 \vdots x$, do đó $x = 1$, không th
mãn (1). Vậy $z = y$. Đặt $z = y = k$ (k nguyên dương)

Thay vào (2) được : $2 = x^{t-k}$ nên $x = 2$; $t - k = 1$.

Đáp số : $(2 ; k ; k ; k + 1)$ với k nguyên dương tùy ý.

b) $x^x + y^y + z^z = t^t$ (1)

Giả sử $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z < t$.

Nếu $z = 1$ thì $x = y = 1$. Ta có $3 = t^t$, loại.

Nếu $z = 2$ thì $t \geqslant 3$. Khi đó :

$t^t \geqslant 3^3 > 3 . 2^2 \geqslant x^x + y^y + z^z$, trái với (1).

Nếu $z \geqslant 3$ thì :

$t^t \geqslant (z + 1)^{z+1} > z^{z+1} = z . z^z \geqslant 3 . z^z \geqslant x^x + y^y + z^z$, trái với (1).

Vậy phương trình không có nghiệm tự nhiên.

85. Giả sử $1 \leqslant x < y$. Chia hai vế của phương trình $x^y = y^x$ cho x^x được :

$$x^{y-x} = \frac{y^x}{x^x}.$$

Ta có $y^x \vdots x^x$ mà x nguyên dương nên $y \vdots x$. Đặt $y = kx$ với $k \in N$, $k \geqslant 2$. Theo đề bài :

$x^{kx} = (kx)^x \Leftrightarrow (x^k)^x = (kx)^x \Leftrightarrow x^k = kx \Leftrightarrow x^{k-1} = k$ (1)

Ta thấy $x \geqslant 2$ vì nếu $x = 1$ thì $k = 1$, loại. Do đó (2).

$$x^{k-1} \geqslant 2^{k-1}$$ (3).

Từ (1) và (2) : $k \geqslant 2^{k-1}$, do đó $2k \geqslant 2^k$

Dễ thấy với $k \geqslant 3$ thì bất đẳng thức (3) không xảy ra (có thể chứng minh điều này bằng quy nạp toán học)

Do đó $k = 2$. Thay $k = 2$ vào (1) được :

$$x = 2.$$

Suy ra $y = kx = 2 . 2 = 4$.

Thử lại : $2^4 = 4^2$.

Đáp số : (2 ; 4), (4 ; 2).

86. $y^2 = 1 + \sqrt{13 - (x^2 + 4x + 4)} = 1 + \sqrt{13 - (x + 2)^2}$
$\leq 1 + \sqrt{13}$.

Suy ra : $1 \leq y^2 \leq 4$.

Với $y^2 = 1$ thì $13 = (x + 2)^2$, không có nghiệm nguyên.

Với $y^2 = 4$ thì $3 = \sqrt{13 - (x + 2)^2}$.

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Đáp số : (0 ; 2), (0 ; −2), (− 4 ; 2), (− 4 ; − 2).

87. Đặt $\sqrt{x + 1} = t$ ($t \in N$) thì $x = t^2 - 1$. Ta có :

$y = t^2 - 1 + \sqrt{t^2 + 1 + 2t} = t^2 - 1 + t + 1 = t^2 + t$

Đáp số : $(t^2 - 1 ; t^2 + t)$ với t là số tự nhiên tùy ý.

88. $2y = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}}$
$= \sqrt{2x - 1} + 1 + |\sqrt{2x - 1} - 1|$

Điều kiện : $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Do x là số nguyên nê
$x \geq 1$.

Do đó : $2y = \sqrt{2x - 1} + 1 + \sqrt{2x - 1} - 1 = 2\sqrt{2x - 1}$
nên $y = \sqrt{2x - 1}$.

Đặt $2x - 1 = t^2$ ($t \in N$) thì $x = \frac{t^2 + 1}{2}$ với t lẻ.

Đáp số : $\left(\frac{t^2 + 1}{2} ; t\right)$ với t là số tự nhiên lẻ tùy ý.

89. Điều kiện $x \geq 2$. Rút gọn được :

$y = |\sqrt{x - 2} - 1| + |\sqrt{x - 2} - 2|$

Xét : $\sqrt{x - 2} \geq 1 \Leftrightarrow x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

$\sqrt{x - 2} \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6$.

Xét các trường hợp :

a) Với $x = 2$ thì $y = 1 + 2 = 3$.

b) Với $3 \leqslant x < 6$ ta có :

$$y = \sqrt{x-2} - 1 + 2 - \sqrt{x-2} = 1.$$

Ta có các nghiệm : $(3 ; 1)$, $(4 ; 1)$, $(5 ; 1)$.

c) Với $x \geqslant 6$:

$$y = \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{x-2} - 2 = 2\sqrt{x-2} - 3.$$

Đặt $x - 2 = t^2$ ($t \in \mathbf{N}$, $t \geqslant 2$ để $x \geqslant 6$)

thì $x = t^2 + 2$; $y = 2t - 3$.

Đáp số : $(2 ; 3)$, $(3 ; 1)$, $(4 ; 1)$, $(5 ; 1)$ và $(t^2 + 2 ; 2t - 3)$ với $t \in \mathbf{N}$, $t \geqslant 2$.

90.. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4\sqrt{3}$ (1)

Điều kiện : $y \geqslant 0$; $x \geqslant 12$.

Rút $3\sqrt{y}$ từ (1) ; $3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4\sqrt{3}$

Bình phương : $9y = 4x + 48 - 16\sqrt{3x}$.

Lập luận như ở ví dụ 32, ta có $3x$ là số chính phương nên $x = 3a^2$ ($a \in \mathbf{N}$).

Rút $2\sqrt{x}$ từ (1) và cũng lập luận như trên ta được :

$$y = 3b^2 \quad (b \in \mathbf{N})$$

Thay vào (1) :

$$2a\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2a - 3b = 4.$$

Ta thấy $b \vdots 2$, Đặt $b = 2t$ thì $a - 3t = 2$ nên $a = 3t + 2$ ($t \in \mathbf{N}$).

Khi đó : $x = 3a^2 = 3(3t + 2)^2$

$y = 3b^2 = 12t^2$ với $t \in \mathbf{N}$.

Điều kiện $x \geqslant 12$ được thỏa mãn.

Đáp số : $\begin{cases} x = 3(3t+2)^2 \\ y = 12t^2 \end{cases}$ với t là số tự nhiên tùy ý.

91. a) Giải tương tự như ở ví dụ 31 ta được :

$$x = 0 \; ; \; y = 0.$$

b) Nếu $n = 1$ ta có : $\sqrt{x} = y$. Nghiệm là $(t^2 \; ; \; t)$ với t tự nhiên tùy ý.

Nếu $n \geq 2$, giải như ở câu a, ta được : (0 ; 0).

92. $\sqrt{x + 4\sqrt{x + 4\sqrt{x + \ldots + 4\sqrt{x + 4\sqrt{5x}}}}} = x$ (1)

Ta thấy : $x \geq 0$. Xét các trường hợp :

a) $x = 0$, (1) được nghiệm đúng.

b) $x = 5$, (1) được nghiệm đúng.

c) $0 < x < 5$. Ta có $x^2 < 5x \Rightarrow x < \sqrt{5x} \Rightarrow 4x < 4\sqrt{5x}$

$\Rightarrow 5x < x + 4\sqrt{5x} \Rightarrow \sqrt{5x} < \sqrt{x + 4\sqrt{5x}} \ldots$

Như vậy : Vế phải $x < \sqrt{5x} < \sqrt{x + 4\sqrt{5x}} < \ldots <$ vế trái.

d) $x > 6$. Tương tự :

Vế phải $x > \sqrt{5x} > \sqrt{x + 4\sqrt{5x}} > \ldots >$ vế trái.

Đáp số : $x = 0$ và $x = 5$.

93. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 20\sqrt{5}$ (1)

Lập luận như ở ví dụ 32 ta đưa về :

$a\sqrt{5} + b\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$ $(a, b \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow a + b = 20$ (2)

Ứng với một cặp số tự nhiên (a, b) có một cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn (1). Ta thấy a nhận các giá trị : 0 ; 1 ; 2, ... 20 ; tương ứng b nhận các giá trị 20 ; 19, 18, ..., 0

(2) có 21 nghiệm, do đó (1) có 21 nghiệm nguyên.

94. a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ 5y + 3z = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) : y chẵn. Đặt $y = 2k$ (k nguyên) được :

$x + 3k = 4$ nên $x = 4 - 3k$.

Thay $y = 2k$ vào (2) :

$10k + 3z = 1$ nên :

$$z = \frac{1-10k}{3} = -3k + \frac{1-k}{3}.$$

Đặt $\frac{1-k}{3} = t$ (t nguyên) $\Rightarrow k = 1 - 3t$.

$x = 4 - 3(1 - 3t) = 1 + 9t$

$y = 2(1 - 3t) = 2 - 6t$

$z = -3(1 - 3t) + t = 10t - 3$

Đáp số : $(1 + 9t \,;\, 2 - 6t \,;\, 10t - 3)$ với t là số nguyên tùy ý.

b) *Đáp số* :

$$\begin{cases} x = 15t - 1 \\ y = 1 - 9t \\ z = 10t - 2 \end{cases}$$ với t là số nguyên tùy ý

95. Biến đổi :

$$\begin{cases} 2x = y + \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = z + \frac{1}{z} & (2) \\ 2z = x + \frac{1}{x} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $\frac{1}{y}$ nguyên, do đó $y = \pm 1$.

Tương tự : $z = \pm 1$; $x = \pm 1$.

Chú ý rằng x, y, z cùng dấu.

Đáp số : (1 ; 1 ; 1), (− 1 ; − 1 ; − 1).

b) Giải tương tự như ví dụ 33.

Đưa về : $6 = abc$ với $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$.

Ta tìm được : $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$.

Suy ra : $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$.

Đáp số : $(0 ; 1 ; 2)$ và các hoán vị.

c) $\begin{cases} x + y + z = 25 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 209 & (2) \end{cases}$

Rút z từ (1) : $z = 25 - x - y$.

Thay vào (2) : $x^2 + y^2 + (25 - x - y)^2 = 209$.

Rút gọn được : $x^2 + (y - 25)x + (y^2 - 25y + 208) = 0$ (3).

Để tồn tại x phải có : $\Delta \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (y - 25)^2 - 4(y^2 - 25y + 208) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow - 3y^2 + 50y - 207 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 50y + 207 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 7\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 9$.

Do y là số nguyên nên $y = 8$ hoặc $y = 9$.

Với $y = 8$, (3) là $x^2 - 17x + 72 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 8$; $x_2 = 9$.

Với $y = 9$, (3) là $x^2 - 16x + 64 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 8$.

Đáp số : $(8 ; 8 ; 9)$, $(9 ; 8 ; 8)$, $(8 ; 9 ; 8)$.

96. Ta có : $xy + 2zt = 0$ (1) ; $xt - yz = 1$ (2)

Suy ra : $(xy + 2zt)^2 + 2(xt - yz)^2 = 2$.

Rút gọn : $(x^2 + 2z^2)(y^2 + 2t^2) = 2$.

Xét hai trường hợp :

a) $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 1 \\ y^2 + 2t^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$; $z = 0$; $y = 0$; $t = \pm 1$.

Từ (2) : $xt = yz + 1 = 1 \Rightarrow$ x và t cùng dấu.

T3

Ta có : (1 ; 0 ; 0 ; 1) và (- 1 ; 0 ; 0 ; - 1).

b) $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 2 \\ y^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 ; z = \pm 1 ; y = \pm 1 ; t = 0$

Từ (2) : $yz = xt - 1 = -1 \Rightarrow$ y và z trái dấu.

Ta có : (0 ; 1 ; - 1 ; 0) và (0 ; -1 ; 1 ; 0).

Đáp số : Bốn nghiệm (1 ; 0 ; 0 ; 1), (- 1 ; 0 ; 0 ; - 1), (0 ; 1 ; - 1 ; 0), (0 ; - 1 ; 1 ; 0).

97. Xét bốn trường hợp : $k = 4n$; $k = 4n + 1$; $k = 4n + 2$; $k = 4n + 3$ với n tự nhiên.

Với $k = 4n$, phương trình $x^2 - y^2 = k$ (1) có nghiệm nguyên, chẳng hạn : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2n \end{cases}$ cho $\begin{cases} x = n + 1 \\ y = n - 1 \end{cases}$

Với $k = 4n + 1$ thì (1) có nghiệm nguyên, chẳng hạn :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 4n + 1 \end{cases} \text{ cho } \begin{cases} x = 2n + 1 \\ y = 2n \end{cases}$$

Với $k = 4n + 3$ thì (1) có nghiệm nguyên, chẳng hạn :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 4n + 3 \end{cases} \text{ cho } \begin{cases} x = 2n + 2 \\ y = 2n + 1 \end{cases}$$

Với $k = 4n + 2$ thì (1) không có nghiệm nguyên vì k chia cho 4 dư 2, còn $x^2 - y^2 \vdots 4$ (bạn đọc tự giải thích).

Vậy $k \neq 4n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

98. $|4 - 3x| = 5 - a$ (1)

a) Xét $x \leqslant \frac{4}{3}$, ta được : $x = \frac{a - 1}{3}$.

Để x là số nguyên dương và thuộc khoảng đang xét, ta giải hệ : $0 < \frac{a - 1}{3} \leqslant \frac{4}{3}$; $a - 1 \vdots 3$.

Ta được : $a = 4$. Khi đó $x = 1$.

b) Xét $x > \frac{4}{3}$, ta được : $x = \frac{9-a}{3}$

Giải hệ :

$$\begin{cases} \frac{9-a}{3} > \frac{4}{3} \\ 9 - a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5 \\ a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3k \text{ với } k \leq 1$$

Ta được : $a = 3k$ với $k \leq 1$. Khi đó $x = 3 - k$

Đáp số : $a = 4$

$a = 3k$ với k nguyên, $k \leq 1$.

99. a) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên của phương trình.

Theo định lí Viét :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = 6a \end{cases}$$

Đưa về phương trình ước số :

$$(x_1 + 6)(x_2 + 6) = 36.$$

Giả sử $x_1 \geq x_2$. Có 10 trường hợp :

$x_1 + 6$	36	18	12	9	6	-1	-2	-3	-4	-6
$x_2 + 6$	1	2	3	4	6	-36	-18	-12	-9	-6
x_1	30	12	6	3	0	-7	-8	-9	-10	-12
x_2	-5	-4	-3	-2	0	-42	-24	-18	-15	-12
a	-25	-8	-3	-1	0	49	32	27	25	24

b) $x^2 + a^2x + (a - 1) = 0$ (1)

$\Delta = a^4 - 4(a - 1) = a^4 - 4a + 4$.

Ta phải có Δ là số chính phương.

Với $a \leq -3$ thì $(a^2)^2 < \Delta < (a^2 + 1)^2$. Thật vậy :

T4

$\Delta - a^4 = 4 - 4a \geqslant 4 + 12 = 16 > 0$;

$(a^2 + 1)^2 - \Delta = a^4 + 2a^2 + 1 - a^4 + 4a - 4 = 2a^2 + 4a - 3 =$

$= 2(a + 1)^2 - 5 \geqslant 2.4 - 5 = 3 > 0.$

Δ không là số chính phương.

Với $a = -2$ thì $\Delta = 28$, không chính phương.

Với $a = -1$ thì $\Delta = 9$. Ta có $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

Với $a = 0$ thì $\Delta = 4$. Ta có $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

Với $a = 1$ thì $\Delta = 1$. Ta có $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

Với $a > 1$ thì $(a^2 - 1)^2 < \Delta < (a^2)^2$. Thật vậy :

$$a^4 - \Delta = 4a - 4 > 0.$$

$$\Delta - (a^2 - 1)^2 = a^4 - 4a + 4 - a^4 + 2a^2 - 1 =$$
$$= 2a^2 - 4a + 3 = 2(a - 1)^2 + 1 > 0.$$

Δ không là số chính phương.

Đáp số : $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$.

100. Điều kiện cần để các nghiệm của phương trình

$x^2 + ax + b = 0$ (1) là số nguyên :

$\Delta = a^2 - 4b$ là số chính phương, tức là :

$a^2 - 4b = m^2$ $(m \in \mathbf{N})$

$\Leftrightarrow a^2 - 4(25 - a) = m^2$.

$\Leftrightarrow a^2 + 4a - (100 + m^2) = 0$ (2)

$\Delta' = 4 + 100 + m^2 = m^2 + 104.$

Để (2) có nghiệm nguyên ta phải có :

$m^2 + 104 = n^2$ $(n \in \mathbf{N})$

$\Leftrightarrow (n + m)(n - m) = 8.13.$

Ta thấy n + m và n − m cùng chẵn. Có hai trường hợp :

a) $\begin{cases} n + m = 52 \\ n - m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 27 \\ m = 25 \end{cases}$

Khi đó nghiệm của (2) là : $a = -2 \pm n = -2 \pm 27$.

Do đó $\begin{cases} a_1 = 25 \\ b_1 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_2 = -29 \\ b_2 = 54 \end{cases}$

Ta có các phương trình :

$x^2 + 25x = 0$ có nghiệm 0 ; − 25 ;

$x^2 - 29x + 54 = 0$ có nghiệm 2 ; 27.

b) $\begin{cases} n + m = 26 \\ n - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ m = 11 \end{cases}$

Khi đó nghiệm của (2) là : $a = -2 \pm n = -2 \pm 15$.

Do đó : $\begin{cases} a_3 = 13 \\ b_3 = 12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_4 = -17 \\ b_4 = 42 \end{cases}$

Ta có các phương trình :

$x^2 + 13x + 12 = 0$ có nghiệm 1 ; 12.

$x^2 - 17x + 42 = 0$ có nghiệm 14 ; 3.

101. Gọi m, n là các nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 - abx + (a + b) = 0 \quad (1)$$

Giả sử $m \geq n$. Theo định lí Viét :

$$\begin{cases} m + n = ab \\ mn = a + b \end{cases} \quad (2)$$

Do a, b nguyên dương nên m, n nguyên dương.

Trước hết ta có bổ đề : Nếu hai số lớn hơn 2 thì tích của chúng lớn hơn tổng của chúng. Thật vậy, giả sử $a > 2$, $b > 2$ thì $ab > 2b$, $ab > 2a$ nên $2ab > 2(a + b)$, do đó $ab > a + b$

Theo bổ đề trên, nếu cả bốn số a, b, m, n đều lớn hơn 2 thì $ab > a + b$, $mn > m + n$, không thể xảy ra (2). Do đó trong bốn số a, b, m, n, tồn tại một số không quá 2.

Không mất tính tổng quát, giả sử $n \leq 2$.

Giả sử $a \geq b$. Xét hai trường hợp :

a) Xét $n = 1$. Từ (2) ta có :

$$\begin{cases} ab = m + 1 \\ a + b = m \end{cases}$$

Do đó : $ab - a - b = 1 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 2$.

Ta có : $\begin{cases} a - 1 = 2 \\ b - 1 = 1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. Khi đó $m = 5$.

b) Xét $n = 2$. Từ (2) ta có :

$$\begin{cases} ab = m + 2 \\ a + b = 2m \end{cases}$$

Do đó : $2ab - a - b = 4 \Leftrightarrow 4ab - 2a - 2b = 8$

$\Leftrightarrow (2a - 1)(2b - 1) = 9$.

Có hai trường hợp :

$\begin{cases} 2a - 1 = 9 \\ 2b - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$. Khi đó $m = 3$.

$\begin{cases} 2a - 1 = 3 \\ 2b - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$. Khi đó $m = 2$.

Kết luận : Phương trình (1) có nghiệm nguyên với :

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

102. a) $ax_0 + by_0 = n$. Giả sử $a = nk + r$ (k nguyên) thì :

$r = a - nk = a - k(ax_0 + by_0)$

$= a - akx_0 - bky_0 = a(1 - kx_0) + b(-ky_0)$.

Đặt $1 - kx_o = x$; $-ky_o = y$, ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử $r \neq 0$ thì r là số nguyên dương. Do r là số dư của phép chia a cho n nên $r < n$.

Như vậy tồn tại số nguyên dương r nhỏ hơn n mà vẫn viết được dưới dạng $ax + by$, trái với giả thiết n là giá trị nguyên dương nhỏ nhất của $ax + by$. Vậy $r = 0$.

c) Gọi r' là số dư của phép chia b cho n.

Chứng minh tương tự như trên : $r' = 0$.

Do đó $a \vdots n$ và $b \vdots n$. Vậy n là ước chung của a và b. Nếu $(a, b) = 1$ thì $n = 1$.

Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $ax + by = 1$ có một trong các nghiệm nguyên là (x_o, y_o).

Do đó phương trình $ax + by = c$ có một trong các nghiệm là (cx_o , cy_o).

Chú ý . Cách khác chứng minh phương trình $ax + by = 1$ có nghiệm nguyên nếu $(a, b) = 1$.

Không mất tính tổng quát, chỉ cần chứng minh phương trình $ax - by = 1$ có nghiệm nguyên, trong đó có thể giả sử $a, b \in N$. Để chứng minh điều này, ta sẽ chứng minh tồn tại một bội của a có dạng $by + 1$ tức là chia cho b dư 1.

Xét các bội của a dạng ka với $1 \leqslant k \leqslant b - 1$.

Trong $b - 1$ bội đó của a, không có số nào chia hết cho b. Thật vậy giả sử $ka \vdots b$ thì do $(a, b) = 1$ nên $k \vdots b$, điều này trái với $1 \leqslant k \leqslant b - 1$.

Ta sẽ chứng minh trong $b - 1$ bội của a nói trên, tồn tại một số chia cho b dư 1.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử không tồn tại số nào chia cho b dư 1 thì các số dư khi chia ka cho b chỉ có thể là

2, 3, 4, ... , $b - 1$ (không có số dư 0 như đã chứng minh ở trên). Có $b - 2$ số dư, mà có $b - 1$ số ka nên tồn tại hai số có số dư bằng nhau, chẳng hạn hai số đó là ma và na, trong đó $1 \leq n < m \leq b - 1$. Thế thì $ma - na \vdots b \Rightarrow (m - n)a \vdots b$. Lại do $(a, b) = 1$ nên $m - n \vdots b$, điều này trái với

$$0 < m - 1 < b - 1.$$

CHƯƠNG III

CÁC BÀI TOÁN VỚI NGHIỆM NGUYÊN

103. Biến đổi : $9a = 5b + 4c$ (1)

$$\Rightarrow 9a - 9c = 5b - 5c$$

$$\Rightarrow 9(a - c) = 5(b - c)$$

Suy ra : $5(b - c) \vdots 9 \Rightarrow b - c \vdots 9$.

Theo đề bài, $b \neq c$ nên có hai trường hợp :

a) $\begin{cases} b = 9 \\ c = 0 \end{cases}$

Thay vào (1) được $a = 5$. Ta có số 590.

b) $\begin{cases} c = 9 \\ b = 0 \end{cases}$

Thay vào (1) được $a = 4$. Ta có số 409.

Đáp số : 590 và 409.

104. Gọi số phải tìm là x. Thêm n vào hàng trăm, bớt n ở hàng chục và hàng đơn vị, số đó tăng thêm :

$$100n - 10n - n \text{ hay } 89n.$$

Ta có : $nx - x = 89n$

$\Rightarrow (n - 1)x = 89n.$

$89n \vdots n - 1 \Rightarrow 89 \vdots n - 1$

$\Rightarrow n - 1 = 1$ (chú ý $1 \leq n \leq 9$)

$\Rightarrow n = 2 \Rightarrow x = 178.$

Ta có : $2.178 = 356.$

105. Ta giải câu b là trường hợp tổng quát của bài toán.

Đặt $x^2 = \overline{abcd}$

$y^2 = \overline{a'b'c'd'}$

trong đó $a - a' = b - b' = c - c' = d - d' = m.$

Ta có : $32 \leq y < x \leq 99$

$$x^2 - y^2 = 1111.m$$

$\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 11.101m$

Do 11 và 101 là số nguyên tố và

$x - y \leq 99 - 32 = 67$

$x + y \leq 99 + 98 = 197$

nên : $\begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 11m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{101 + 11m}{2} \\ y = \dfrac{101 - 11m}{2} \end{cases}$

$y \geq 32 \Leftrightarrow 101 - 11m \geq 64 \Leftrightarrow m \leq 3\dfrac{4}{11}.$

Mặt khác, m lẻ để y nguyên. Do đó $m \in \{1 ; 3\}$.

Với $m = 1$ thì $\begin{cases} x = 56 \\ y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3136 \\ y^2 = 2025 \end{cases}$

Với $m = 3$ thì $\begin{cases} x = 67 \\ y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4489 \\ y^2 = 1156 \end{cases}$

106. *Cách 1.* $\overline{xy} = (x + y)^2 \Leftrightarrow 10x + y = (x + y)^2$

$\Leftrightarrow 9x = (x + y)^2 - (x + y)$

$\Leftrightarrow 9x = (x + y)(x + y - 1)$

Hai số nguyên tố cùng nhau có tích chia hết cho 9 nên tồn tại một số chia hết cho 9.

Ta có : $10 \leq (x + y)^2 \leq 99 \Rightarrow 4 \leq x + y \leq 9$

$\Rightarrow 3 \leq x + y - 1 \leq 8.$

Do $x + y \vdots 9 \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow \overline{xy} = 9^2 = 81.$

Cách 2. Xét các số chính phương có hai chữ số : 16, 25, 36, 49, 64, 81, chỉ có số 81 thỏa mãn :

$16 \neq (1 + 6)^2$, $25 \neq (2 + 5)^2, \ldots, 81 = (8 + 1)^2.$

107. *Cách 1*. Giải tương tự như ví dụ 36.

Cách 2. $\overline{abc} = (a + b + c)^3.$

$100 \leq (a + b + c)^3 < 1000$

nên $5 \leq a + b + c \leq 9.$

$a + b + c$	$(a + b + c)^3$	Kiểm tra
5	125	Tổng các chữ số khác 5, loại
6	216	Tổng các chữ số khác 6, loại
7	343	Tổng các chữ số khác 7, loại
8	512	Tổng các chữ số số bằng 8, đúng
9	729	Tổng các chữ số khác 9, loại.

Đáp số : $512 = (5 + 1 + 2)^3.$

108. Giải như cách 2 của bài 107.

Đáp số : $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4.$

109. $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2.$

Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cd} = y.$

Ta có : $100x + y = (x + y)^2$

$\Leftrightarrow 99x = (x + y)^2 - (x + y)$ (1)

$\Leftrightarrow 99x = (x + y)(x + y - 1)$.

Xét hai trường hợp :

a) Một trong hai thừa số $x + y$, $x + y - 1$ chia hết cho 99.

Do $32 \leqslant x + y \leqslant 99$; $31 \leqslant x + y - 1 \leqslant 98$

nên $x + y = 99$. Ta có $99^2 = 9801$.

b) Trong hai thừa số $x + y$, $x + y - 1$ không có số nào chia hết cho 99. Chú ý rằng chúng nguyên tố cùng nhau nên phải có một số chia hết cho 11, số kia chia hết cho 9.

Lại xét hai trường hợp :

$x + y \vdots 11$	33	44	55	66	77	88
$x + y - 1 \vdots 9$	32	43	54 đúng	65	76	87

$x + y = 55$. Ta có : $55^2 = 3025$.

$x + y - 1 \vdots 11$	33	44	55	66	77	88
$x + y \vdots 9$	34	45 đúng	56	67	78	89

$x + y = 45$. Ta có : $45^2 = 2025$.

Đáp số : $9801 = (98 + 01)^2$

$3025 = (30 + 25)^2$

$2025 = (20 + 25)^2$.

110. a) $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$ (1)

$\Leftrightarrow 1100x + 11y = (11x)^2 + (11y)^2$

$\Leftrightarrow 100x + y = 11(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow 99x + x + y = 11(x^2 + y^2) \qquad (2)$$

Suy ra : $x + y \vdots 11 \Rightarrow x + y = 11$.

Thay vào (2) :

$99x + 11 = 11(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow 9x + 1 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 9x + 2xy + 1 = (x + y)^2$

$\Leftrightarrow x(9 + 2y) + 1 = 121$

$\Leftrightarrow x(9 + 2y) = 120$.

Ta thấy $9 + 2y$ lẻ nên $x \vdots 8$, do đó $x = 8$.

Suy ra : $y = 3$.

Đáp số : $8833 = 88^2 + 33^2$.

b) $\overline{xxyy} = \overline{aa}.\overline{bb}$

$\Leftrightarrow 1100x + 11y = 11a.11b$

$\Leftrightarrow 100x + y = 11ab$

$\Leftrightarrow 99x + x + y = 11ab$.

Suy ra : $x + y \vdots 11 \Rightarrow x + y = 11$.

Xét các số $\overline{x0y}$ có $x + y = 11$:

$\overline{x0y}$	209	308	407	506	605	704	803	902
$ab = \dfrac{\overline{x0y}}{11}$	19	28	37	46	55	64	73	82

Chỉ có hai trường hợp viết được thành tích của hai chữ số :

$$28 = 4.7 \ ; \quad 64 = 8.8$$

Đáp số : $3388 = 44.77$;

$7744 = 88.88$.

111. Ta có : $\begin{cases} ab = c + d \\ a + b = cd \end{cases}$

Trong bốn số a, b, c, d, dễ thấy nếu một số bằng 0 thì ba số còn lại cũng bằng 0, loại.

Vậy a, b, c, d là các số nguyên dương.

Giải tương tự như ở lời giải bài 101, ta tìm được a, b, c, d.

Ta có 9 đáp số :

a) 2222 ;

b) 3251, 3215, 2351, 2315 ;

c) 5132, 5123, 1532, 1523.

112. a) Giả sử có số $A = \overline{a_1a_2 \dots a_n}$, xóa chữ số a_1 được số $B = \overline{a_2a_3 \dots a_n}$ và A = 146B thì :

$a_1 . 10^{n-1} + B = 146B$. Suy ra :

$a_1 . 10^{n-1} = 145B = 5 . 29B$.

Do đó $a_1 \vdots 29$, vô lí.

Vậy không tồn tại số A.

b) Giả sử có số $A = \overline{a_1a_2 \dots a_n}$, xóa chữ số a_1 được số B và A = 145B.

Lập luận như trên đi đến $a_1 . 10^{n-1} = 144B = 9 . 16B$.

Ta chọn $a_1 = 9$ thì $B = \dfrac{10^{n-1}}{16} = \dfrac{10^{n-1}}{2^4}$

Ta chọn n = 5 thì $B = \dfrac{10^4}{2^4} = 5^4 = 625$.

Như thế tồn tại số A = 90625 = 145.625.

113. $\begin{array}{r} 9C \\ + \; CÔ \\ HÔC \\ \hline GIÔI \end{array}$

Xét ba trường hợp :

a) Trường hợp 1 : H = 9 và cột hàng trăm được nhớ 1 ở hàng chục sang

Như vậy G = 1, I = 0. Ta có :

$$\begin{array}{r} 9C \\ CÔ \\ 9ÔC \\ \hline 10Ô0 \end{array}$$

$90 + C + 10.C + Ô + 900 + 10.Ô + C = 1000 + 10.Ô$

$\Leftrightarrow 12.C + Ô = -10$. Loại.

b) Trường hợp 2 : H = 9 và cột hàng trăm được nhớ 2.

Như vậy G và I đều bằng 1, loại.

c) Trường hợp 3 : H = 8 và cột hàng trăm được nhớ 2.

Như vậy G = 1, I = 0 . Ta có :

$$\begin{array}{r} 9C \\ CÔ \\ 8ÔC \\ \hline 10Ô0 \end{array}$$

$90 + C + 10 . C + Ô + 800 + 10.Ô + C = 1000 + 10. Ô$

$\Leftrightarrow 12.C + Ô = 110$

$\Leftrightarrow C = 9 \; ; \; Ô = 2.$

Đáp số : 99 + 92 + 829 = 1020.

114. $A = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9}$

Số A có 10 chữ số nên :

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_9 = 10 \qquad (1)$$

Đặt $a_0 = k$ ($k \geq 1$). Số A có k chữ số 0.

Chia 10 chữ số của A thành hai nhóm :

- Nhóm I gồm chữ số đầu (là k) và k chữ số 0.

Nhóm này chiếm $k + 1$ vị trí và có tổng các chữ số bằng k.

– Nhóm II gồm các chữ số còn lại. Nhóm này chiếm :

$10 - (k + 1) = 9 - k$ vị trí và có tổng các chữ số bằng $10 - k$.

Ở nhóm II, tổng các chữ số lớn hơn số chữ số của nó là : $(10 - k) - (9 - k) = 1$.

Điều này chỉ xảy ra khi trong $9 - k$ chữ số ở nhóm II, có một chữ số 2, còn lại $8 - k$ chữ số đều là 1.

Ta sẽ chứng minh $a_o \neq 2$ và $a_o \neq 1$. Thật vậy :

Nếu $a_o = 2$ (tức $k = 2$) thì số chữ số 1 (của nhóm II và cũng là của A) là : $8 - 2 = 6$. Suy ra $a_1 = 6$. Chỉ riêng a_1 và sáu chữ số 1 đã có tổng là : $6 + 6 = 12 > 10$, loại.

Nếu $a_o = 1$ (tức $k = 1$) thì số chữ số 1 (của nhóm II) là : $8 - 1 = 7$. Số chữ số 1 của A là $a_1 = 8$. Chỉ riêng a_1 và tám chữ số 1 đã có tổng là : $8 + 8 = 16 > 10$, loại.

Vậy A chỉ có một chữ số 2, tức là $a_2 = 1$.

Ta đã có : $a_o = k$

$a_1 = 8 - k$

$a_2 = 1$.

Do đó : $a_o + a_1 + a_2 = 9$.

Suy ra : $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 1$ (2)

Chỉ xảy ra (2) khi vế trái của (2) có một số 1, sáu số 0.

Ta thấy $a_1 \neq 0$, vì nếu $a_1 = 0$ thì A không có chữ số 1, trái với $a_2 = 1$. Do a_o, a_1, a_2 khác 0 nên trong mười chữ số của A, có đúng sáu chữ số 0, tức là $a_o = 6$.

Suy ra : $a_1 = 8 - k = 8 - 6 = 2$.

Trong bảy số $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, số bằng 1 là $a_6 = 1$, còn lại $a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$.

Ta có A = 6 210 001 000 .

115. a) Phân tích thành nhân tử : $(n + 2)(n^2 - n + 1)$.

Cách 1. Phải có một nhân tử bằng ± 1.

Xét bốn trường hợp :

$n + 2 = 1$; $n + 2 = -1$; $n^2 - n + 1 = 1$;

$n^2 - n + 1 = -1$.

Cách 2. $(n + 2)[n(n - 1) + 1]$

Xét $n = 0$; $n = 1$; $n \geq 2$.

Đáp số : $n = 0$; $n = 1$.

b) $(n - 1)[n(n - 3) + 1]$

Đáp số : $n = 3$.

c) Biến đổi : $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Do $n(n + 1)(n + 2) \vdots 6$ (tích ba số tự nhiên liên tiếp) nên p là số tự nhiên. Do đó $(n + 3)(n^2 + 2) \vdots 6$.

Với n bằng 1 ; 2 ; 3 ta được p bằng 2 ; 5 ; 11, thỏa mãn.

Với $n \geq 4$ thì $\dfrac{n+3}{6} > 1$, $\dfrac{n^2+2}{6} > 1$. Do đó p viết được thành một tích của hai thừa số lớn hơn 1, nên p là hợp số.

Đáp số : 1 ; 2 ; 3.

d) Biến đổi : $(n^2 - 8)^2 + 36 = (n^2 + 10 + 6n)(n^2 + 10 - 6n)$.

Thừa số nhỏ phải bằng 1 tức là $n^2 + 10 - 6n = 1$.

Đáp số : $n = 3$.

e) $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.

Thừa số nhỏ phải bằng 1 tức là $n^2 - n + 1 = 1$.

Đáp số : $n = 1$.

$n^3 - n^2 + 1$ ...

g) $n^5 + n + 1 = (n^2 + n + 1)[n^2(n - 1) + 1]$.

Đáp số : $n = 1$.

116. a) $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)[(n - 1)^2 + 1]$

Đáp số : $n = 1$.

b) Hiển nhiên n lẻ, đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có :

$p = n^4 + 4^n = n^4 + 2n^2 . 2^n + 4^n - 2n^2 . 2^n$

$= (n^2 + 2^n)^2 - (n . 2^{k+1})^2$

$= (n^2 + 2^n + n . 2^{k+1}) (n^2 + 2^n - n. 2^{k+1})$.

Với $k = 0$ thì $n = 1$; $p = 5$.

Với $k > 0$ ta sẽ chứng minh rằng $n^2 + 2^n - n.2^{k+1} > 1$.

Thật vậy : $n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1} = n^2 + 2^{2k} - 2.2^k.n + 2^{2k} =$

$= (n - 2^k)^2 + 2^{2k} \geq 2^{2k} > 1$.

Do đó p là hợp số.

Đáp số : $n = 1$.

117. a) Xét p dưới các dạng : $3k$, $3k + 1$, $3k - 1$.

Đáp số : $p = 3$.

b) Xét p dưới các dạng : $3k$, $3k + 1$, $3k - 1$.

Đáp số : $p = 3$.

c) $A = 2^p + p^2$.

Với $p = 2$ thì $A = 8$, loại.

Với $p = 3$ thì $A = 17$, là số nguyên tố.

Với $p > 3$ thì $A = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$, cả hai biểu thức trong ngoặc đều chia hết cho 3, loại .

118. Gọi $n = 2^x.5^y.7^z$ thì :

$$5n = 2^x.5^{y+1}.7^z$$

$8n = 2^{x+3}.5^y.7^z$

Ta có $\begin{cases}(x+1)(y+2)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 8\\(x+4)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 18\end{cases}$

Suy ra : $\begin{cases}(x+1)(z+1) = 8\\(y+1)(z+1) = 6\end{cases}$

Do đó : $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ và $n = 1400$.

119. Đặt $4p + 1 = (2k+1)^2$ $(k \in N)$

$$\Leftrightarrow p = k(k+1).$$

Do $k(k+1)$ là số chẵn nên p là số chẵn. Do p là số nguyên tố nên $p = 2$. Khi đó $4p + 1 = 9 = 3^2$.

120. Gọi số chính phương phải tìm là x^2 $(x \in N)$

Ta có : $x^2 = 39p + 1$ (p là số nguyên tố)

Biến đổi : $(x+1)(x-1) = 3.\ 13.\ p$. Ta có :

$x - 1$	$x + 1$	Tính p
1	39p	$39p = 3$, loại
3	13p	$13p = 5$, loại
13	3p	$3p = 15 \Rightarrow p = 5$
p	39	$p + 2 = 39 \Rightarrow p = 37$
39	p	$p = 41$
3p	13	$3p + 2 = 13$, loại
13p	3	$13p + 2 = 3$, loại
39p	1	$39p + 2 = 1$, loại

Với $p = 5$ thì $x = 14$; $x^2 = 196$.

Với $p = 37$ thì $x = 38$; $x^2 = 1444$.

Với $p = 41$ thì $x = 40$; $x^2 = 1600$.

121. Tồn tại một trong ba số a, b, c chia hết cho 3, vì nếu cả ba số không chia hết cho 3 thì mỗi số a^2, b^2, c^2 chia cho 3

dư 1 nên $a^2 + b^2 + c^2 \vdots 3$, và lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố.

Xét hai trường hợp :

$2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, là hợp số, loại.

$3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$, là số nguyên tố.

Đáp số : 3 ; 5 ; 7.

122. a) Tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 3.

Thật vậy nếu cả ba số không chia hết cho 3 thì vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3.

Giả sử $z \vdots 3$ thì $z = 3$.

Ta có : $x^2 + y^2 + 9 = 3xy$.

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3$. Hãy chứng minh rằng $x = y = 3$.

Thử lại : $3^2 + 3^2 + 3^2 = 3.\ 3.\ 3$.

b) Tồn tại một trong bốn số x, y, z, t chia hết cho 2 (bạn đọc tự giải thích).

Giả sử $t \vdots 2$ thì $t = 2$. Ta có : $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2xyz$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \vdots 2$. Tồn tại một trong ba số x, y, z, chia hết cho 2, giả sử $z \vdots 2$ thì $z = 2$.

Ta có : $x^2 + y^2 + 8 = 4xy$.

Do đó : $x^2 + y^2$ chia hết cho 4. Hãy chứng minh rằng $x = y = 2$.

Thử lại : $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 2.2.2.2$.

c) $xyz \vdots 5$, tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 5, chẳng hạn $z \vdots 5$, do đó $z = 5$.

Ta có : $x + y + 5 = xy$

$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 6$.

Giả sử $x \geqslant y$ thì :

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$, loại $\quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

Đáp số : (7 ; 2 ; 5) và các hoán vị của nó.

123. a) $a^2 = m^2 + n^2$.

Hiển nhiên a phải là số lẻ. Khi đó trong hai số m và n, có một số chẵn một số lẻ, chẳng hạn m chẵn (do đó m = 2), n lẻ.

Ta có : $(a + n)(a - n) = 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + n = 4 \\ a - n = 1 \end{cases}$. Suy ra : $a = \dfrac{5}{2}$, loại.

b) $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$ (1)

Ta có nhận xét : Mỗi số ở vế trái khác các số ở vế phải. Thật vậy giả sử b = p thì $a^2 = m^2 + n^2$, không có nghiệm nguyên tố (theo câu a).

Xét hai số a và b ở vế trái :

- Nếu có một số chẵn, chẳng hạn a thì a = 2. Theo nhận xét trên : m, n, p phải khác 2 nên đều lẻ, do đó b lẻ. Khi đó vế trái chia cho 4 dư 1, vế phải chia cho 4 dư 3, mâu thuẫn.

- Nếu a và b đều lẻ thì $a^2 + b^2$ chia cho 8 dư 2, nên $m^2 + n^2 + p^2$ chẵn. Hoặc một số (trong m, n, p) bằng 2, hoặc cả ba số bằng 2. Trong trường hợp thứ nhất, vế phải của (1) chia cho 8 dư 6, mâu thuẫn. Trong trường hợp thứ hai, vế phải của (1) là 12, chia cho 8 dư 4, mâu thuẫn.

Vậy (1) không có nghiệm nguyên tố.

124. a) $x + 3 \ \vdots \ x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 - 9 \ \vdots \ x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 10 \ \vdots \ x^2 + 1$

$\Rightarrow 10 \ \vdots \ x^2 + 1$

Đáp số : 0 ; 1 ; – 1 ; 2 ; – 3.

b) $2x^3 - 8x^2 + 3x \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow 2x^3 + 2x - 8x^2 - 8 + x + 8 \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow 2x(x^2 + 1) - 8(x^2 + 1) + x + 8 \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow x + 8 \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow (x + 8)(x - 8) \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 65 \;\vdots\; x^2 + 1$

$\Rightarrow 65 \;\vdots\; x^2 + 1$

Đáp số : -8 ; 0 ; 2.

125. Ta phải có $n \neq 0$. Đặt $[\sqrt{n}] = a$ thì :

$$\begin{cases} a \in N^* \\ a \leq \sqrt{n} < a + 1 \end{cases}$$

Suy ra : $a^2 \leq n < a^2 + 2a + 1$.

Đặt $n = ka$ $(k \in N^*)$ thì :

$a^2 \leq ka < a^2 + 2a + 1$

$\Leftrightarrow a^2 \leq ka \leq a^2 + 2a$

$\Leftrightarrow a \leq k \leq a + 2$.

Do đó : $k \in \{a, a + 1, a + 2\}$.

Tương ứng : $n \in \{a^2, a(a + 1), a(a + 2)\}$ với a nguyên dương.

126. Ta phải có $n \neq 0$. Đặt $[\sqrt[3]{n}] = a$ thì :

$$\begin{cases} a \in N^* \\ a \leq \sqrt[3]{n} < a + 1 \end{cases}$$

Suy ra : $a^3 \leq n < (a + 1)^3$.

Đặt $n = ka$ $(k \in N^*)$ thì :

$a^3 \leq ka < a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

$\Leftrightarrow a^3 \leq ka \leq a^3 + 3a^2 + 3a$

$\Leftrightarrow a^2 \leq k \leq a^2 + 3a + 3.$

Do đó : $k \in \{a^2, a^2 + 1, a^2 + 2, ..., a^2 + 3a + 3\}$.

Tương ứng : $n \in \{a^3, a(a^2 + 1), a(a^2 + 2), ..., a(a^2 + 3a + 3)\}$, với a nguyên dương.

127. Thành sinh năm 1975, đến năm 1997 thì tròn 22 tuổi $(1 + 9 + 7 + 5 = 22)$.

128. Gọi tuổi của mẹ Thủy là $\overline{ab}$ thì tuổi của Thủy là $a + b$. Tuổi của Thủy là một số có hai chữ số, vì nếu là một số có một chữ số thì tuổi của Thủy bằng tuổi của bé Tuấn. Ta lại có $a + b \leq 18$ nên Thủy $\overline{1m}$ tuổi, bé Tuấn $1 + m$ tuổi, ít hơn Thủy 9 tuổi. Tuổi của bé Tuấn là $a + b - 9$. Ta có : $\overline{ab} + (a + b) + (a + b - 9) = 54$.

Rút gọn : $4a + b = 21$. Ta được :

$\begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \end{cases}$ thỏa mãn $a + b \geq 10$.

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$ loại vì $a + b < 10$.

$\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$ loại vì $a + b < 10$.

Mẹ của Thủy 39 tuổi, Thủy 12 tuổi, bé Tuấn 3 tuổi.

129. Gọi số phụ lão, số thanh niên, số thiếu nhi theo thứ tự là x, y, z. Theo đề bài thì x, y, z là các số nguyên lớn hơn 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 4x + 6y + z = 50 \end{cases}$$

với nghiệm nguyên lớn hơn 1.

Trả lời : Có 5 phụ lão, 4 thanh niên, 6 thiếu nhi.

130. Nếu một bạn nào đó mua x bông hoa thì phải trả x^2 (trăm đồng). Chị của bạn đó mua y bông hoa phải trả y^2 (trăm đồng). Ta có :

$$y^2 - x^2 = 48.$$

Giải phương trình trên với nghiệm nguyên dương được :

$$\begin{cases} x_1 = 11 \\ y_1 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 7 \end{cases}.$$

Tuấn mua ít hơn chị Vân 9 bông nên Tuấn mua 4 bông, chị Vân mua 13 bông. Hùng mua ít hơn chị Mai 7 bông nên Hùng mua 1 bông, chị Mai mua 8 bông. Còn lại Cường mua 11 bông, chị Nga mua 7 bông.

Các cặp chị em là : Vân – Cường, Mai – Tuấn, Nga – Hùng.

131. *Cách 1*. Gọi n số nhà của dãy là :

$x + 2, x + 4, x + 6, ..., x + 2n$.

Ta có : $(x + 2) + (x + 4) + ... + (x + 2n) = 161$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2+x+2n) \cdot n}{2} = 161$$

$$\Leftrightarrow (x + n + 1) \cdot n = 161$$

Ta có : $x + n + 1 > n > 1$ nên :

$$\begin{cases} x + n + 1 = 23 \\ n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ n = 7 \end{cases}$$

Các số nhà của đoạn phố : 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

Số nhà chính giữa là : 23.

Cách 2. Gọi số nhà của Hùng (ở chính giữa đoạn phố) là x

Trung bình cộng của hai số nhà cách đều nhà Hùng cũng bằng x

Gọi số số nhà là n thì : $x.n = 161$.

161 có bốn ước tự nhiên là 1, 7, 23, 161.

Loại các trường hợp :

Có 1 nhà, số nhà là 161 ;

Có 23 nhà, số nhà giữa là 7 ;

Có 161 nhà, số nhà giữa là 1.

Còn một trường hợp :

Có 7 nhà, số nhà giữa là 23.

132. *Cách 1*. Gọi x là số cá cả ba người câu được.

Số cá còn lại sau khi người I lấy :

$$\frac{2}{3}(x-1) \text{ tức là } \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Số cá còn lại sau khi người II lấy :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 1\right) \text{ tức là } \frac{4}{9}x - \frac{10}{9}.$$

Số cá còn lại sau khi người III lấy :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}x - \frac{10}{9} - 1\right) \text{ tức là } \frac{8}{27}x - \frac{38}{27}.$$

Gọi số cá còn lại sau khi người III lấy là y.

Ta phải giải phương trình với nghiệm nguyên dương :

$$\frac{8}{27}x - \frac{38}{27} = y \text{ tức là } 8x - 27y = 38 \qquad (1)$$

Do $y \vdots 2$, đặt $y = 2k$. Thay vào (1)

$$4x - 27k = 19$$

$$x = \frac{27k+19}{4} = 7k + 5 - \frac{k+1}{4}.$$

Đặt $\frac{k+1}{4} = t$ (t nguyên) thì $k = 4t - 1$

$$x = 7(4t-1) + 5 - t = 27t - 2.$$

Vì ba chàng câu cá tồi, chọn $t = 1$ để x nhận giá trị nguyên dương và nhỏ nhất : $x = 25$.

Ba chàng câu được 25 con cá.

Họ mang về : 8 con, 5 con, 3 con.

Cách 2. Gọi x là số cá câu được. Gọi a, b, c là số cá người I, người II, người III mang về. Ta có :

$$\begin{cases} x - 1 = 3a & (1) \\ 2a - 1 = 3b & (2) \\ 2b - 1 = 3c & (3) \end{cases}$$

Từ (3) : c lẻ. Đặt $c = 2k + 1$.

Thay vào (3) : $b = 3k + 2$.

Thay vào (2) : $2a = 9k + 7 \Rightarrow k$ lẻ.

Đặt $k = 2t + 1$ thì $2a = 18t + 16 \Rightarrow a = 9t + 8$.

Thay vào (1) : $x = 27t + 25$.

Vì ba chàng câu cá tồi, chọn $t = 0$, số cá họ câu được là : 25 con.

133. Gọi số sản phẩm loại I của An, Bách, Dũng là x, y, z chiếc, tiền thưởng cho một sản phẩm loại I là t nghìn đồng, loại II là u nghìn đồng.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} tx + u(10 - x) = 140 & (1) \\ ty + u(16 - y) = 140 & (2) \\ tz + u(26 - z) = 140 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t - u)x + 10u = 140 \\ (t - u)y + 16u = 140 \\ (t - u)z + 26u = 140 \end{cases}$$

Lấy hai phương trình trên trừ đi phương trình cuối :

$$\begin{cases} (t - u)(x - z) = 16u & (4) \\ (t - u)(y - z) = 10u & (5) \end{cases}$$

Do đó : $\dfrac{x - z}{y - z} = \dfrac{8}{5}$ (6)

Suy ra : $x - z \vdots 8$.

Theo đề, $t > u$ nên từ (4) suy ra $x > z$.

Ta lại có : $1 \leqslant x \leqslant 9$;

$$1 \leqslant z \leqslant 25$$

nên $1 \leqslant x - z \leqslant 8$. Do đó $x - z = 8$.

Vậy $x = 9$; $z = 1$.

Thay vào (6) được $y = 6$.

Thay các giá trị của x và z vào (1) và (3) :

$$\begin{cases} 9t + u = 140 \\ t + 25u = 140 \end{cases}$$

Hệ phương trình này cho : $t = 15$; $u = 5$.

Như vậy :

An làm vượt 9 sản phẩm loại I, 1 sản phẩm loại II.

Bách làm vượt 6 sản phẩm loại I, 10 sản phẩm loại II.

Dũng làm vượt 1 sản phẩm loại I, 25 sản phẩm loại II.

Mỗi sản phẩm loại I được thưởng 15 nghìn đồng, mỗi sản phẩm loại II được thưởng 5 nghìn đồng.

134. Gọi số cỏ bò, dê, ngỗng ăn trong một ngày là x, y, z, số cỏ có sẵn ở bãi cỏ là u, số cỏ mọc thêm trong một ngày là v, số ngày cần tìm là t. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 45(x + y) = u + 45v & (1) \\ 60(x + z) = u + 60v & (2) \\ 90(y + z) = u + 90v & (3) \\ t(x + y + z) = u + tv & (4) \\ x = y + z & (5) \end{cases}$$

Cần tìm t trong hệ trên. Viết bốn phương trình đầu dưới dạng :

$$\begin{cases} 45(x + y - v) = u \\ 60(x + z - v) = u \\ 90(y + z - v) = u \\ t(x + y + z - v) = u \end{cases}$$

Như vậy :

$45(x + y - v) = 60(x + z - v) = 90(y + z - v) = u$

hay : $\dfrac{x+y-v}{4} = \dfrac{x+z-v}{3} = \dfrac{y+z-v}{2} = \dfrac{u}{180}$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, mỗi tỉ số trên bằng :

$\dfrac{(x+z-v)-(y+z-v)}{3-2} = \dfrac{x-y}{1} = z$ (do (5))

Do đó : $x + y - v = 4z \Rightarrow x + y + z - v = 5z$

Ngoài ra : $u = 180z$.

Vậy $t = \dfrac{u}{x+y+z-v} = \dfrac{180z}{5z} = 36$.

Cả ba con ăn trong 36 ngày thì hết bãi cỏ.

135. a) Trong một giờ, kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng.

Khoảng thời gian để kim phút gặp lại kim giờ lần tiếp theo là :

$$1 : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{12}{11} \text{ (giờ)}.$$

Các thời điểm để kim giờ và kim phút chập nhau là : $\frac{12}{11}m$ (giờ) với $m \in \mathbf{N}$.

Do $0 \leq \frac{12}{11}m \leq 12$ nên $0 \leq m \leq 11$. Ngoài thời điểm 0 giờ, còn 11 thời điểm khác mà kim giờ và kim phút chập nhau là :

$1\frac{1}{11}$ giờ, $2\frac{2}{11}$ giờ, $3\frac{3}{11}$ giờ, ..., $10\frac{10}{11}$ giờ, 12 giờ.

b) Trong một giờ, kim giây quay được 60 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng.

Khoảng thời gian để kim giây gặp lại kim giờ lần tiếp theo là :

$$1 : \left(60 - \frac{1}{12}\right) = \frac{12}{719} \text{ (giờ)}.$$

Các thời điểm để kim giờ và kim giây chập nhau là : $\frac{12}{719}n$ (giờ) với $n \in \mathbf{N}$.

Để tìm thời điểm cả ba kim đồng hồ chập nhau, ta phải giải phương trình với nghiệm tự nhiên :

$$\frac{12m}{11} = \frac{12n}{719} \Leftrightarrow 719m = 11n.$$

Ta có : $719m \vdots 11$, mà $(719, 11) = 1$ nên $m \vdots 11$.

Do $0 \leqslant m \leqslant 11$ nên $m = 0$ hoặc $m = 11$.

Như vậy, ngoài thời điểm 0 giờ, chỉ có thời điểm 12 giờ là cả ba kim đồng hồ đều chập nhau.

Chú ý. Có các giá trị của m làm cho kim giờ và kim phút chập nhau, còn kim giây lệch đi một chút. Ta xét phương trình :

$719m = 11n$

$\Leftrightarrow 65.11m + 4m = 11n.$

Chọn $m = 3$ và $m = 8$. Khi đó $4m$ bằng 12 và 32, sát với các bội của 11 là 11 và 33.

Với $m = 3$ ta có thời điểm

$$3\frac{3}{11} \text{ giờ} = 3 \text{giờ } 16 \text{ phút } 21\frac{9}{11} \text{ giây}.$$

Với m = 8 ta có thời điểm

$$8\frac{8}{11} \text{ giờ} = 8 \text{ giờ } 43 \text{ phút } 38\frac{2}{11} \text{ giây.}$$

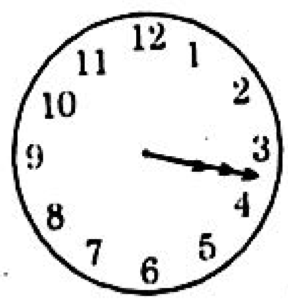
Sát với các thời điểm trên còn có :

- Nếu kim giờ và kim giây chập nhau, còn kim phút lệch đi một chút, ta có hai thời điểm :

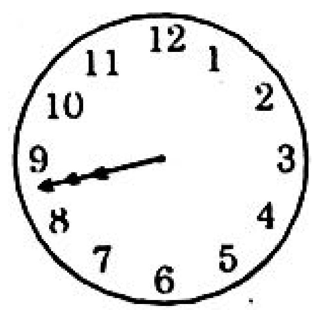
3 giờ 16 phút $16\frac{256}{719}$ giây và 8 giờ 43 phút $43\frac{463}{719}$ giây.

Nếu kim phút và kim giây chập nhau, còn kim giờ lệch đi một chút, ta có hai thời điểm :

3 giờ 16 phút $16\frac{16}{59}$ giây và 8 giờ 43 phút $\frac{43}{59}$ giây.



≈ 3 giờ 16 phút



≈ 8 giờ 43 phút

PHỤ LỤC

136. *Cách 1.* Trước hết tìm một nghiệm riêng của :

$$17x - 39y = 1 \qquad (1)$$

Dùng thuật toán Ơclit tìm (39, 17) :

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
 & & & 39 & 17 \\ \cline{5-5}
 & & 17 & 5 & 2 \\ \cline{4-4}
 & 5 & 2 & 3 & \\ \cline{3-3}
2 & 1 & 2 & & \\ \cline{2-2}
0 & 2 & & &
\end{array}$$

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}.$$

Tồn tại một nghiệm riêng (x_o , y_o) của (1) mà :

$$|x_o| = 16, |y_o| = 7$$

(do $|17| < |-39|$ nên ta chọn $|x_o| > |y_o|$).

Chú ý rằng ở (1), x_o và y_o không thể trái dấu.

Bằng cách thử chọn ta tìm được : $x_o = -16$; $y_o = -7$.

Do đó $(-64 ; -28)$ là một nghiệm riêng của phương trình $17x - 39y = 4$. Mọi nghiệm của phương trình có dạng :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x = -64 - 39t \\ y = -28 - 17t \end{cases} \quad \text{(t nguyên tùy ý)}$$

Cách 2. $17x - 39y = 4$

$$x = \frac{39y + 4}{17} = 2y + \frac{5y + 4}{17}.$$

Đặt $\frac{5y + 4}{17} = k$ (k nguyên) $\Rightarrow 5y = 17k - 4$

$$\Rightarrow y = \frac{17k - 4}{5} = 3k + \frac{2(k - 2)}{5}$$

Đặt $\frac{k - 2}{5} = t$ (t nguyên) $\Rightarrow k = 5t + 2$.

$$y = 3(5t + 2) + 2t = = 17t + 6.$$
$$x = 2(17t + 6) + (5t + 2) = 39t + 14.$$

Mọi nghiệm nguyên của phương trình :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = 14 + 39t \\ y = 6 + 17t \end{cases} \quad \text{(t nguyên tùy ý)}$$

Chú ý

a) Phương pháp tìm một nghiệm riêng bằng cách tìm ước chung lớn nhất thường cho nghiệm riêng có giá trị tuyệt đối lớn. Để có nghiệm riêng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn, ở công thức (I) ta có thể cho $t = -2$ và được nghiệm riêng :

$$x = -64 + 78 = 14$$

$$y = -28 + 34 = 6.$$

b) Ở công thức (I) thay t bởi $-t-2$ ta được công thức (II).

137. Gọi x là tuổi thọ của Điôphăng. Phương trình :

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x \ ; \ x = 84.$$

Điôphăng thọ 84 tuổi.

138. Kiểm tra ta được (4 ; 1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất.

$$(4 + \sqrt{15})^2 = 31 + 8\sqrt{15}.$$

$$(4 + \sqrt{15})^3 = 244 + 63\sqrt{15}.$$

Hai nghiệm nguyên dương khác : (31 ; 8) và (244 ; 63).

139. Gọi (a, b) là nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 8y^2 = 1$ (1) thì :

$$a^2 - 8b^2 = 1$$

$$\Rightarrow (a + b\sqrt{8})(a - b\sqrt{8}) = 1$$

$$\Rightarrow (a + b\sqrt{8})^2(a - b\sqrt{8})^2 = 1$$

$$\Rightarrow (a^2 + 8b^2 + 2ab\sqrt{8})(a^2 + 8b^2 - 2ab\sqrt{8}) = 1$$

$$\Rightarrow (a^2 + 8b^2)^2 - 8(2ab)^2 = 1.$$

Như vậy, nếu cặp số (a, b) là nghiệm của (1) thì cặp số $(a^2 + 8b^2, 2ab)$ cũng là nghiệm của (1).

Ta thấy (3 ; 1) là một nghiệm dương của (1).

Do đó $(3^2 + 8 \ ; \ 2.3)$ cũng là nghiệm dương của (1) và lớn hơn nghiệm cũ. Cứ tiếp tục như vậy, (1) có vô số nghiệm.

140. Chứng minh hằng đẳng thức :

$$k^2 + \left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2$$

141. Chứng minh hằng đẳng thức :

$(4k)^2 + (4k^2 - 1)^2 = (4k^2 + 1)^2$.

142. Dùng công thức II :

$$x = 2mn \ ; \ y = m^2 - n^2 \ ; \ z = m^2 + n^2$$

với m và n là các số chẵn lẻ khác nhau, $(m, n) = 1$, $m > n$.

a) Nếu m hoặc n chia hết cho 3 thì $x \vdots 3$.

Nếu m và n đều không chia hết cho 3 thì m^2 và n^2 đều chia cho 3 dư 1, do đó $m^2 - n^2 \vdots 3$, suy ra $y \vdots 3$.

b) m và n chẵn lẻ khác nhau nên $mn \vdots 2$. Suy ra $x \vdots 4$.

c) Nếu m hoặc n chia hết cho 5 thì $x \vdots 5$.

Nếu m và n đều không chia hết cho 5 thì m^2 và n^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4. Xét hai trường hợp :

- Nếu các số dư này như nhau thì $m^2 - n^2 \vdots 5$ nên $y \vdots 5$.
- Nếu các số dư này khác nhau thì $m^2 + n^2 \vdots 5$ nên $z \vdots 5$.

143. Giả sử (x_o, y_o, z_o) là nghiệm nguyên dương của :

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (1)$$

thì $x_o^4 + y_o^4 = z_o^2$.

Do đó bộ ba số (x_o^2, y_o^2, z_o) nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình Pitago. Theo bổ đề, tồn tại các số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau, m > n mà :

$$\begin{cases} x_o^2 = 2mm & \text{(chẵn)} \\ y_o^2 = m^2 - n^2 & \text{(lẻ)} \\ z_o = m^2 + n^2 & \text{(lẻ)} \end{cases}$$

Ta có $y_o^2 = m^2 - n^2$ nên $y_o^2 + n^2 = m^2$.

Vậy bộ số (y_o, n, m) thỏa mãn phương trình Pitago .

Do m, n nguyên tố cùng nhau nên y_o, m, n, nguyên tố cùng nhau. Ở phương trình Pitago, trong hai số y_o và n có một số chẵn, một số lẻ. Do y_o lẻ nên n chẵn.

Bộ ba số (y_o, n, m) nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình Pitago nên theo bổ đề, tồn tại các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau mà :

$$\begin{cases} y_o = a^2 - b^2 & \text{(lẻ)} \\ n = 2ab & \text{(chẵn)} \\ m = a^2 + b^2 & \text{(lẻ)} \end{cases}$$

Ta có : $x_o^2 = 2mn = 2(a^2 + b^2).2ab = 4ab(a^2 + b^2)$.

Do đó ab $(a^2 + b^2)$ là số chính phương. Dễ dàng chứng minh được ab và $a^2 + b^2$ nguyên tố cùng nhau nên ab và $a^2 + b^2$ đều là số chính phương.

Ta lại có a và b nguyên tố cùng nhau nên a và b đều là số chính phương. Vậy tồn tại các số nguyện dương x_1, y_1, z_1 sao cho :

$$a = x_1^2$$

$$b = y_1^2$$

$$a^2 + b^2 = z_1^2.$$

Suy ra : $x_1^4 + y_1^4 = (x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = a^2 + b^2 = z_1^2$.

Do a, b nguyên tố cùng nhau nên x_1, y_1 nguyên tố cùng nhau, do đó x_1, y_1, z_1 nguyên tố cùng nhau.

Ta có (x_o, y_o, z_o) và (x_1, y_1, z_1) đều là nghiệm của (1). Ta có $x_1^4 + y_1^4 < x_o^4 + y_o^4$ vì :

$$x_1^4 + y_1^4 = a^2 + b^2 = m < m^2 + n^2 = z_o < z_o^2 = x_o^4 + y_o^4.$$

Nếu giả sử (x_o, y_o, z_o) là nghiệm của (1) mà $x_o^4 + y_o^4$ nhỏ nhất, thế thì ta có (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1) mà $x_1^4 + y_1^4$ nhỏ hơn $x_o^4 + y_o^4$.

Điều vô lí trên chứng tỏ phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập lần đầu :

LƯƠNG BÍCH LƯU

Biên tập tái bản :

PHẠM BẢO KHUÊ

Trình bày bìa :

TẠ TRỌNG TRÍ

Sửa bản in :

LƯƠNG BÍCH LƯU

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BÀI TOÁN VỚI NGHIỆM NGUYÊN

Mã số : 8H657T5 – CNĐ

In 3.000 bản, khổ 14,5 x 20,5cm tại Công ty CP in SGK Hòa Phát - Tp. Đà Nẵng. Số XB: 21/579-05/CXB. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2005.

TÌM ĐỌC BỘ SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN 7, 8, 9
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

8934980525807

Giá: