Giải đề cương Phương pháp tính MI2010

Nguyễn Tiến Được

Ngày 13 tháng 12 năm 2021

Mục lục

Chương 1

Sai số

1.1 Đo trọng lượng của 1 dm^2 nước ở 0^oC nhận được $p = 999.847 \pm 0.001(g)$. Hãy xác định sai số tương đối giới hạn của phép đo trên.

$$\rightarrow \text{Sai số tương đối giới hạn } \delta p = \frac{\Delta p}{p} = \frac{0.001}{999.847} = 1.00015 \times 10^{-6}$$

1.2 Làm tròn những số sau đến 3 chữ số có nghĩa, xác định sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các số xấp xỉ nhận được.

a) 2.1514 b) 0.16152 c) 0.009922

a) Làm tròn $a^* = 2.15$
Sai số tuyệt đối $\Delta a = |a - a^*| = 0.0014$
Sai số tương đối $\delta a = \frac{\Delta a}{|a^*|} = \frac{0.0014}{2.15} = 6.51163 \times 10^{-4}$
b) Làm tròn $b^* = 0.16$
Sai số tuyệt đối $\Delta b = |b - b^*| = 0.00152$
Sai số tương đối $\delta a = \frac{\Delta a}{|a^*|} = \frac{0.00152}{0.16} = 9.5 \times 10^{-3}$
c) Làm tròn $c^* = 0.01$
Sai số tuyệt đối $\Delta c = |c - c^*| = 7.8 \times 10^{-5}$
Sai số tương đối $\delta c = \frac{\Delta c}{|c^*|} = \frac{7.8 \times 10^{-5}}{0.01} = 7.8 \times 10^{-3}$

1.3 Xác định số các chữ số tin tưởng của các số sau biết sai số tương đối tương ứng của chúng

a) $a = 1.8921, \delta a = 0.1 \times 10^{-2}$
b) $a = 0.000135, \delta a = 0.15$
c) $a = 22.351, \delta a = 0.1$
d) $a = 0.2218, \delta a = 0.2 \times 10^{-1}$
e) $a = 0.11452, \delta a = 0.1\%$
f) $a = 48361, \delta a = 1\%$

a) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.18921 \times 10^{-2}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{-3} < \Delta a < 0.5 \times 10^{-2} \rightarrow$ a có 2 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy.

b) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.2025 \times 10^{-4}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{-5} < \Delta a < 0.5 \times 10^{-4} \rightarrow$ a có 4 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy.

c) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.2351 \times 10^{1}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{=} < \Delta a < 0.5 \times 10^{1} \rightarrow$ a có 1 chữ số tin tưởng trước dấu phẩy.

d) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.4436 \times 10^{-2}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{-3} < \Delta a < 0.5 \times 10^{-2} \rightarrow$ a có 2 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy.

e) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.11452 \times 10^{-3}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{-2} < \Delta a < 0.5 \times 10^{-3} \rightarrow$ a có 3 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy.

f) $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \rightarrow \Delta a = \delta a \times |a| = 0.48361 \times 10^{3}$
$\rightarrow 0.5 \times 10^{2} < \Delta a < 0.5 \times 10^{3} \rightarrow$ a có 3 chữ số tin tưởng.

1.4 Đo chiều dài của một cây cầu và một chiếc đinh tán, ta thu được kết quả tương ứng là 9999cm và 9cm. Giả sử cây cầu và chiếc đinh có độ dài thực tế lần lượt là 10000cm và 10cm. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các giá trị đo được ở trên.

- Gọi chiều dài thực tế của cây cầu là $l^* = 10000cm$

  chiều dài đo được $l = 9999cm$

  Sai số tuyệt đối $\Delta l = |l - l*| = 1cm$

  Sai số tương đối $\delta l = \dfrac{\Delta l}{|l|} = \dfrac{1}{9999} = 1.0001 \times 10^{-4}$

- Gọi chiều dài thực tế của chiếc đinh là $d^* = 10cm$

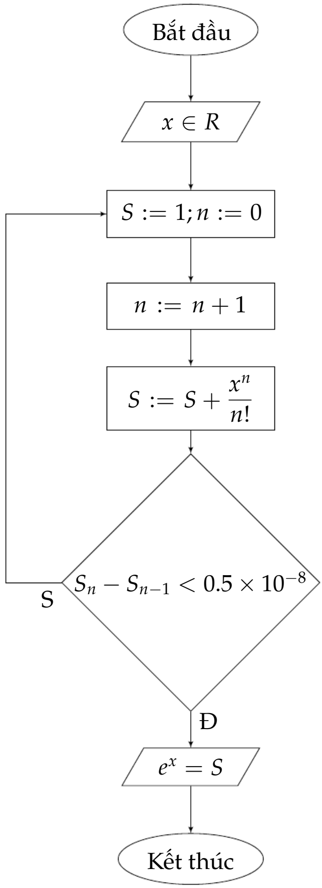
  chiều dài đo được $d = 9cm$

  Sai số tuyệt đối $\Delta d = |d - d*| = 1cm$

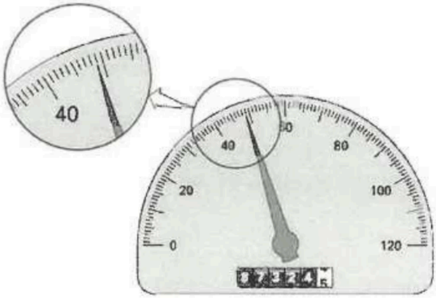
  Sai số tương đối $\delta d = \dfrac{\Delta d}{|d|} = \dfrac{1}{9} = 0.1111111$

1.5 Viết sơ đồ khối tính xấp xỉ giá trị của số e tới tám chữ số tin tưởng dựa vào khai triển Maclaurin sau:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$



1.6 Một đồng hồ đo tốc độ của xe máy chỉ như Hình 1. Hỏi tốc độ di chuyển của xe máy là bao nhiêu? Sai số của phép đo trên là bao nhiêu phần trăm?



Mỗi vạch trên đồng hồ đo tương ứng với 1km/h.

Dựa theo vạch phóng to thì tốc độ di chuyển của xe máy là $v = 49km/h$.

Sai số tuyệt đối của phép đo chính là độ chia nhỏ nhất trên thang đo $\rightarrow \Delta v = 1km/h$.

Sai số của phép đo là $\delta v = \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{1}{49} = 0.0204082$

1.7 Cạnh của một hình lập phương đo được là 8cm bằng thước đo vạch chia đến 0.01cm. Hỏi sai số tương đối và sai số tuyệt đối khi tính thể tích của hình hộp là bao nhiêu?

Gọi cạnh của hình lập phương là $a = 8 \pm 0.01\ cm$

Thể tích của hình lập phương $V = a^3\ (cm^3) \rightarrow |\dfrac{\partial V}{\partial a}| = 3a^2$

Sai số tuyệt đối của thể tích hình lập phương

$$\Delta V = |\frac{\partial V}{\partial a}|\Delta a = 3a^2 \times \Delta a = 192\ (cm^3)$$

Sai số tương đối của thể tích hình lập phương

$$\delta V = \frac{\Delta V}{|V|} = \frac{192}{8^3} = 0.375\%$$

1.8 Cho làm số $u = ln(x_1 + x_2^2)$. Hãy xác định giá trị của hàm số tại $x_1 = 0.97, x_2 = 1.132$. Hãy xác định sai số tuyệt đối và sai số tương đối của u biết mọi chữ số của x_1 và x_2 đều là các chữ số tin tưởng.

Vì mọi chữ số của x_1 và x_2 đều là các chữ số tin tưởng

$$\rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 0.5 \times 10^{-2} \\ \Delta x_2 = 0.5 \times 10^{-3} \end{cases}$$

Sai số tuyệt đối cần tìm là

$$\Delta u = |\frac{\partial u}{\partial x_1}|\Delta x_1 + |\frac{\partial u}{\partial x_2}|\Delta x_2 = \frac{1}{x_1 + x_2^2}\Delta x_1 + \frac{2x_2}{x_1 + x_2^2}\Delta x_2 = 2.72361 \times 10^{-3}$$

Sai số tương đối cần tìm là

$$\delta u = \frac{\Delta u}{|u|} = 3.3560 \times 10^{-3}$$

Chương 2

Giải gần đúng phương trình đại số và siêu việt

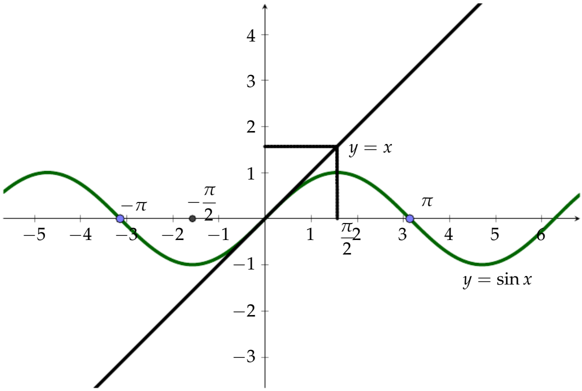
2.1 Tìm những khoảng cách ly nghiệm thực của các phương trình sau:

a) $x^4 - 4x + 2 = 0$ b) $\sin x - x = 0$

a) $y(x) = x^4 - 4x + 2$
$\rightarrow y'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$y_{CT} = -1$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét: $y(1) \times y(2) = -1 \times 10 < 0$ và y(x) liên tục và đơn điệu trên [1,2]
$\rightarrow (1,2)$ là khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho.
b) $\sin x = x$



Khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho là $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2.2 Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm của các phương trình sau với sai số cho phép là $\Delta x = 0.5 \times 10^{-2}$.

a) $x^3 - 1.5x^2 + 0.58x - 0.057 = 0$ b) $0.1e^x - \sin^2 x + 0.5 = 0, x \in [-5\pi, 5\pi]$

a) Đặt $y(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.58x - 0.057$

$\rightarrow y'(x) = 3x^2 - 3x + 0.58$

$$y'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 0.73805 \\ x_2 \approx 0.26195 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0.26195		0.73805		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9.978730×10^{-3}	$\searrow$	-0.0439787	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta chọn $a = 0.3, b = 0.7$ và dễ thấy (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho.

Đánh giá sai số:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|b-a|}{2^n}| \leq \varepsilon$$

$$N = \frac{\ln(\frac{|b-a|}{\varepsilon})}{\ln 2} = \frac{\ln(\frac{|0.7-0.3|}{0.5\times 10^{-2}})}{\ln 2} = 6.3219$$

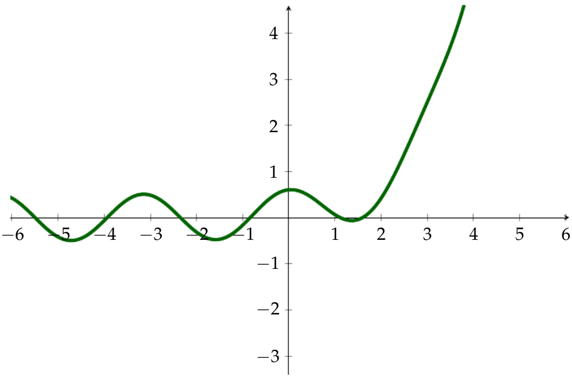
$\rightarrow$ Số lần lặp $n = [N] + 1 = 6 + 1 = 7$

Vậy ta có bảng

n	a_n	b_n	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$
1	0.3	0.7	-
2	0.3	0.5	-
3	0.3	0.4	+
4	0.35	0.4	+
5	0.375	0.4	+
6	0.3875	0.4	-
7	0.3875	0.39375	+

Vậy $x = 0.390625$ là nghiệm cần tìm.

b) Đặt $y(x) = 0.1e^x - \sin^2 x + 0.5$



Dựa vào đồ thị ta tìm được khoảng cách ly nghiệm (1,1.3).

Đánh giá sai số

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|b-a|}{2^n}| \leq \varepsilon$$

$$N = \frac{\ln(\frac{|b-a|}{\varepsilon})}{\ln 2} = \frac{\ln(\frac{|1.3-1|}{0.5\times 10^{-2}})}{\ln 2} = 5.90689 \rightarrow n = [N] + 1 = 5 + 1 = 6$$

Vậy ta có bảng

n	a_n	b_n	$f(\frac{a_n+b_n}{2})$
1	1	1.3	+
2	1.15	1.3	+
3	1.225	1.3	+
4	1.2625	1.3	+
5	1.28125	1.3	+
6	1.29063	1.3	+

Vậy $x = 1.295315$ là nghiệm cần tìm.

2.3 Sử dụng phương pháp lặp đơn giải các phương trình dưới đây với sai số 0.5×10^{-4}.

a) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 + 4\sin x - 1 = 0$ c) $1.4^x - x = 0$

a) Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn $a = 0.7, b = 0$ Ta có

$$\begin{cases} f(x) \text{ liên tục, đơn điệu trên}[-0.7, 0] \\ f(a) = 0.127 \\ f(b) = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ [-0.7,0] là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.

Có $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{1 - x^3}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1 - x^3}{3}} = \varphi(x)$

$$\rightarrow |\varphi'(x)| = |\frac{1}{2}(-x^2)(\frac{1-x^3}{3})^{-1/2}| < \frac{1}{2} = q < 1 \, \forall \, x \in (-0.7, 0)$$

Đánh giá sai số

$$|x_n - x^*| = \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon = 0.5 \times 10^{-4}$$

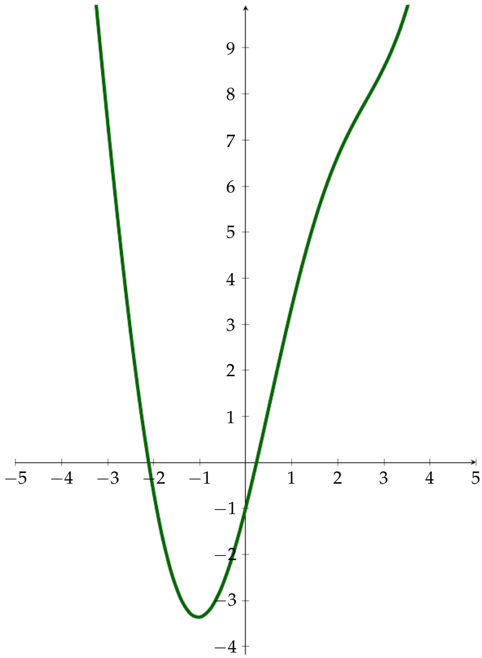
$$\rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{(1-q)\varepsilon}{q} = 0.5 \times 10^{-4}$$

Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

$$x_n = -\sqrt{\frac{1-x_{n-1}^3}{3}}$$

n	x_n
0	- 0.7
1	- 0.66908
2	- 0.65816
3	- 0.65450
4	- 0.65329
5	- 0.65290
6	- 0.65277
7	- 0.65272

Vậy $x = -0.65272$ là nghiệm cần tìm.
b) Đặt $f(x) = x^2 + 4\sin x - 1$
Ta có đồ thị hàm số f(x)



Ta tìm được 1 khoảng cách ly nghiệm là (0,0.25).

$$f(x) = x^2 + 4\sin x - 1 = 0 \to \sin x = \frac{1-x^2}{4} \to x = \arcsin\frac{1-x^2}{4} = \varphi(x)$$

$$\to \varphi'(x) = (\frac{-x}{2})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^2}}\right) < \frac{1}{2} = q < 1$$

Đánh giá sai số

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{(1-q)\varepsilon}{q} = 0.5 \times 10^{-4}$$

Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

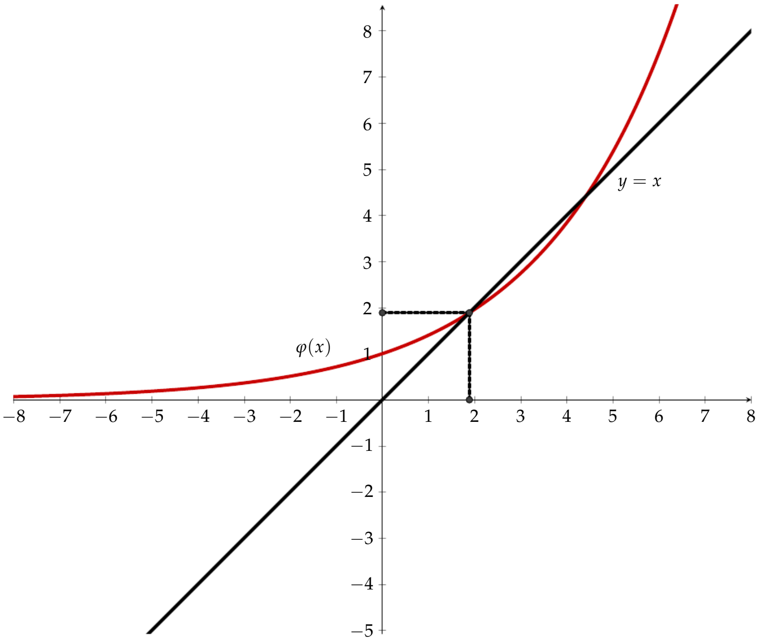
$$x_n = \arcsin(\frac{1-x_{n-1}^2}{4})$$

n	x_n
0	0
1	0.25238
2	0.23623
3	0.23830
4	0.23805
5	0.23808
6	0.23807

Vậy $x = 0.23807$ là nghiệm cần tìm.

c) Đặt $\varphi(x) = 1.4^x$

Khảo sát đồ thị hàm số $\varphi(x)$ và $y = x$



Dựa vào đồ thị ta tìm được 1 khoảng cách ly nghiệm (1.7,2).

$$\varphi'(x) = 1.4^x ln(1.4) \leq 0.65949 < 1 \,\forall\, x \in \; [1.7, 2]$$

Đánh giá sai số

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{(1-q)\varepsilon}{q} = 0.25816 \times 10^{-4}$$

Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

$$x_n = 1.4^{x_{n-1}}$$

n	x_n	n	x_n
0	1.7	10	1.88484
1	1.77181	11	1.88550
2	1.81514	12	1.88593
3	1.84180	13	1.88620
4	1.85840	14	1.88637
5	1.86881	15	1.88648
6	1.87536	16	1.88654
7	1.87950	17	1.88659
8	1.88212	18	1.88662
9	1.88378	19	1.88663

Vậy $x = 1.88663$ là nghiệm cần tìm.

2.4 Sử dụng phương pháp Newton để tính gần đúng nghiệm của phương trình $e^{-x} - x = 0$ với giá trị xấp xỉ ban đầu là $x_0 = 0$.

Đặt $f(x) = e^{-x} - x$
$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \ \forall x \in R$
$f'' = e^{-x} > 0 \ \forall x \in R$
Chọn $a = 0 \to f(a) = 1; b = 0.6 \to f(b) = -0.05119$
$\to f(a).f(b) < 0$ và $f(x)$ liên tục, đơn điệu trên [a,b] $\to$ (0,0.6) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.

Lại có $f(x_0).f''(x) > 0 \ \forall x \in [0, 0.6]$ Chọn x_0 là xấp xỉ ban đầu ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

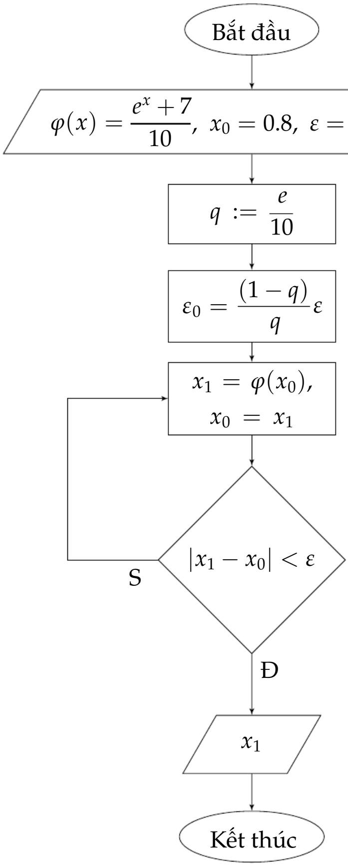
$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}$$

n	x_n
1	0.5
2	0.5663
3	0.5671432
4	0.5671432

Vậy $x = 0.5671432$ là nghiệm cần tìm.

2.5 Lập sơ đồ khối tính gần đúng nghiệm đến 5 chữ số tin tưởng sau dấu phẩy của phương trình $e^x - 10x + 7 = 0$ bằng phương pháp lặp đơn.

Ta có $\Delta x = 0.5 \times 10^{-5}$
Khoảng cách ly nghiệm $(0.8, 1)$; $\varphi(x) = \dfrac{e^x + 7}{10}$



2.6 Cho phương trình $2^x - 5x + \sin x = 0$ và khoảng cách li nghiệm [0,0.5]. Dùng phương pháp Newtom tìm nghiệm xấp xỉ sau 5 bước lặp và đánh giá sai số.

Đặt $f(x) = 2^x - 5x + \sin x = 0$
$\rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + \cos x - 5 < 0 \, \forall \, x \; \in [0, 0.5]$
$\quad f''(x) = 2^x \ln^2 2 - \sin x > 0 \, \forall \, x \; \in [0, 0.5]$
Chọn $x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) f''(x) > 0$

Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \left(\frac{2^{x_n} - 5x_n + \sin x_n}{2^{x_n} \ln 2 + \cos x_n - 5} \right)$$

n	x_n
0	0
1	0.3024023
2	0.3083570
3	0.3083586354
4	0.3083586354
5	0.3083586354

Vậy $x = 0.3083586354$ là nghiệm cần tìm với 10 chữ số đáng tin sau dấu phẩy.

2.7 Giải gần đúng phương trình $x^{10} - 2 = 0$ bằng cách sử dụng phương pháp dây cung với sai số 10^{-5}.

Đặt $f(x) = x^{10} - 2$
$\rightarrow f'(x) = 10x^9 \rightarrow f''(x) = 90x^8$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $a = 1 \rightarrow f(a) = -1, b = 1.1 \rightarrow f(b) = 0.5937$
Lại có $f(x)$ liên tục, đơn điệu trên [1,1.1]
$\rightarrow$ [1,1.1] là khoảng cách ly nghiệm của phương trình đã cho.
Kiểm tra điều kiện hội tụ

$$0 < 10 < f'(x) < 10 \times 1.1^9 \, \forall x \in [1, 1.1]$$

$$f''(x) = 90x^8 > 0 \,\forall\, x \in [1, 1.1]$$

$$\text{Do } f(1.1)f''(x) > 0 \text{ và } f(1)f''(x) < 0$$

Đánh giá sai số

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

$$\rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon m_1}{M_1 - m_1} = \frac{10^{-5}10}{10 \times 1.1^9 - 10} = 0.736405 \times 10^{-5}$$

$\rightarrow$ Chọn $d = 1.1, x_0 = 1$. Theo định lý về điều kiện hội tụ ta có dãy:

$$x_n = x_{n-1} - \left(\frac{1.1 - x_{n-1}}{f(1.1) - f(x_{n-1})}f(x_{n-1})\right)$$

n	x_{n-1}	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
1	1	1.062745395	0.062745395
2	1.062745395	1.07073996	0.7994565×10^{-4}
3	1.07073996	1.07165662	0.91666×10^{-5}
4	1.07165662	1.071760272	0.103652×10^{-5}

Vậy $x = 1.071760272$ là nghiệm cần tìm.

2.8 Lập sơ đồ khối phương pháp chia đôi, phương pháp lặp đơn, phương pháp dây cung và phương pháp tiếp tuyến giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng cách li nghiệm (a,b) với sai số cho trước ε.

Chương 3

Một số phương pháp giải hệ đại số tuyến tính

3.1 Tính chuẩn theo hàng, theo cột và chuẩn Euclid của các ma trận sau:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 89.13 & -13.59 & 23.46 \\ 2.14 & 1.27 & 21.35 \\ 2.46 & -81.70 & -25.28 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 22 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Chuẩn theo cột

$||A_1|| = \max\{89.13 + 2.14 + 2.46, 13.59 + 1.27 + 81.70, 23.46 + 21.35 + 25.28\}$

$\rightarrow ||A_1|| = \max\{93.73, 96.56, 73.09\} = 96.56$

Chuẩn theo hàng

$||A_\infty|| = \max\{89.13 + 13.59 + 23.46, 2.14 + 1.27 + 21.35, 2.46 + 81.70 + 25.28\}$

$\rightarrow ||A_\infty|| = \max\{126.18, 38.62, 109.44\} = 126.18$

Chuẩn Euclide

$||A_2|| = \sqrt{89.13^2 + 13.59^2 + 23.46^2 + 2.14^2 + 1.27^2 + 21.35^2 + 2.46^2 + 81.70^2 + 25.28^2}$

$\rightarrow ||A_2|| = \sqrt{16461.2516} = 128.3014092$

b) Chuẩn theo cột

$$||A_1|| = \max\{10 + 3 + 22, 2 + 1 + 1, 3 + 1 + 0\}$$

$\rightarrow ||A_1|| = \max\{35, 4, 4\} = 35$

Chuẩn theo hàng

$$||A_\infty|| = \max\{10 + 2 + 3, 3 + 1 + 1, 22 + 1 + 0\}$$

$\rightarrow ||A_\infty|| = \max\{15, 5, 23\} = 23$

Chuẩn Euclide

$$||A_2|| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 1 + 1 + 22^2 + 1}$$

$\rightarrow ||A_2|| = \sqrt{609} = 24.677925$

3.2 Lập sơ đồ khối tìm chuẩn theo hàng, theo cột và theo chuẩn Euclid của ma trận trận A có kích thước $m \times n$ cho trước.

3.3 Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss - Jordan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 & = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 & = 2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 6 \end{cases}$$

Ta lập ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Chọn phần tử trội là $a_{11} = 1$

$$\xrightarrow[h_4 - 2h_1 \to h_4]{h_2 - h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

Chọn phần tử trội là $a_{32} = 1$

$$\xrightarrow[\substack{h_2 + 3h_3 \to h_2 \\ h_4 + 5h_3 \to h_4}]{h_1 - h_3 \to h_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 54 \end{array}\right)$$

Chọn phần tử trội là $a_{24} = 3$

$$\xrightarrow[\substack{h_3 - (2/3)h_2 \to h_3 \\ h_4 - (4/3)h_2 \to h_4}]{h_1 - (1/3)h_2 \to h_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-17}{3} & 0 & \frac{-50}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{3} & 0 & \frac{-28}{3} \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & 0 & \frac{34}{3} \end{array}\right)$$

Chọn phần tử trội là $a_{43} = \dfrac{19}{3}$

$$\xrightarrow[h_3+(7/19)h_4 \to h_3]{\substack{h_1+(17/19)h_4 \to h_1 \\ h_2-(15/19)h_4 \to h_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-124}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dfrac{438}{19} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{-98}{19} \\ 0 & 0 & \color{red}{\dfrac{19}{3}} & 0 & \dfrac{34}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{cases} x_1 = \dfrac{-124}{19} & x_2 = \dfrac{-98}{19} \\ \\ x_3 = \dfrac{146}{19} & x_4 = \dfrac{34}{19} \end{cases}$$

3.4 Sử dụng phương pháp lặp đơn giải gần đúng hệ phương trình sau với 3 lần lặp và đánh giá sai số.

$$\begin{cases} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 & = 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 & = 19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 & = 71.4 \end{cases}$$

Lập sơ đồ khối giải gần đúng hệ phương trình trên với sai số $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy A là ma trận chéo trội hàng

$$\to \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(0.1x_1 + 0.2x_3 + 7.85) \\ x_2 = \dfrac{1}{7}(-0.1x_1 + 0.3x_3 + 19.3) \\ x_3 = \dfrac{1}{10}(-0.3x_1 + 0.2x_2 + 71.4) \end{cases}$$

$$\to B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{0.1}{3} & \dfrac{0.2}{3} \\ \dfrac{-0.1}{7} & 0 & \dfrac{0.3}{7} \\ \dfrac{-0.3}{10} & \dfrac{0.2}{10} & 0 \end{pmatrix} ; \; d = \begin{pmatrix} \dfrac{7.85}{3} \\ \dfrac{19.3}{7} \\ \dfrac{71.4}{10} \end{pmatrix}$$

Công thức lặp

$$X_{n+1} = BX_n + d$$

với $X_0 = d$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3.1845671 \\ 3.0257619 \\ 7.1166429 \end{pmatrix};\ X_2 = \begin{pmatrix} 3.1919683 \\ 3.0166480 \\ 7.1049781 \end{pmatrix};\ X_3 = \begin{pmatrix} 3.1908887 \\ 3.0160424 \\ 7.1045740 \end{pmatrix}$$

Lại có

$$||B|| = \max\{\frac{0.3}{3}, \frac{0.4}{7}, \frac{0.5}{10}\} = 0.1 < 1$$

$\rightarrow$ Thỏa mãn điều kiện hội tụ.

Đánh giá sai số

$$||X_3 - \overline{X}|| \leq \frac{||B||}{1 - ||B||}||X_3 - X_2|| = \frac{0.1}{0.9} \times 9.7196 \times 10^{-3} = 0.108 \times 10^{-2}$$

3.5 Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 15.60x_1 - 2.73x_2 + 1.89x_3 & = 6.75 \\ 2.50x_1 - 16.50x_2 + 7.40x_3 & = 2.86 \\ 3.00x_1 + 11.56x_2 + 27.90x_3 & = 9.85 \end{cases}$$

a) Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn.

b) Tính đến xấp xỉ $x^{(3)}$ bằng phương pháp lặp đơn với vector ban đầu là $x^{(0)} = (10.40\ \ 0.11\ \ 0.27)^t$ và đánh giá sai số cho $x^{(3)}$.

c) Để đạt được sai số 10^{-6} cần thực hiện bao nhiêu lần lặp nếu xuất phát từ vector $x^{(0)}$ như ở ý b).

a) Đặt

$$A = \begin{pmatrix} 15.6 & -2.73 & 1.89 \\ 2.5 & -16.50 & 7.40 \\ 3.00 & 11.56 & 27.90 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy A là ma trận chéo trội hàng.

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{15.6}(2.73x_2 - 1.89x_3 + 6.75) \\ x_2 = \dfrac{1}{16.5}(2.5x_1 + 7.40x_3 - 2.86) \\ x_3 = \dfrac{1}{27.9}(-3x_1 - 11.56x_2 + 9.85) \end{cases}$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2.73}{15.6} & \frac{1.89}{15.6} \\ \frac{2.5}{16.5} & 0 & \frac{7.4}{16.5} \\ \frac{3}{27.9} & \frac{11.56}{27.9} & 0 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} \frac{6.75}{15.6} \\ \frac{-2.86}{16.5} \\ \frac{9.85}{27.90} \end{pmatrix}$$

Kiểm tra điều kiện hội tụ

$$||B||_\infty = max\{\frac{4.62}{15.6}, \frac{9.9}{16.5}, \frac{14.56}{27.9}\} = q = 0,6 < 1$$

$\rightarrow$ Thỏa mãn điều kiện hội tụ.

b) Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

$$X_{n+1} = BX_n + d$$

với $X_0 = d$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.5057986 \\ 0.0505622 \\ 0.3277543 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 0.4635553 \\ 0.0502957 \\ 0.4283833 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 0.4757909 \\ 0.0890253 \\ 0.4237303 \end{pmatrix}$$

Đánh giá sai số

$$||X_n - X^*|| \leq \frac{q}{1-q}||X_n - X_{n-1}|| = \frac{0.6}{0.4}|0.0463122| = 0.0694683$$

c) Ta có đánh giá sai số

$$||X_n - X^*|| \leq \frac{q^m}{1-q}||X_1 - X_0|| \leq 10^{-6}$$

$$\rightarrow \frac{0,6^m}{0,4}0.3222941206 \leq 10^{-6} \rightarrow n \geq 26.62$$

Vậy cần lặp 27 lần để đạt được sai số cần tìm.

3.6 Giải hệ phương trình dưới đây bằng phương pháp lặp Jacobi với 3 lần lặp và đánh giá sai số:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0.2x_3 & = 1 \\ 0.3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 7 \\ 0.5x_1 + 0.1x_2 + 3x_3 & = 2 \end{cases}$$

Ta lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.2 \\ 0.3 & 2 & 2 \\ 0.5 & 0.1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy A là ma trận chéo trội cột.

Lại có $\begin{cases} 1 > 0.3 + 0.5 \\ 2 > 2 + 0.1 \\ 3 > 2 + 0.2 \end{cases} \quad \to q = 0.8 < 1$

Thiết lập công thức

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 0.2x_3 + 1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(-0.3x_1 - 2x_3 + 7) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(-0.5x_1 - 0.1x_2 + 2) \end{cases}$$

$$\to B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0.2 \\ -0.15 & 0 & -1 \\ \frac{-0.5}{3} & \frac{-0.1}{3} & 0 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ta xây dựng dãy lặp với công thức lặp

$$X_{n+1} = BX_n + d$$

với $X_0 = d$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2.6333333 \\ 2.6833333 \\ 0.3833333 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -1.76 \\ 3.5116667 \\ 1.0161111 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} -2.7148889 \\ 2.7478889 \\ 0.8429444 \end{pmatrix}$$

Đánh giá sai số

$$||X_3 - X^*|| \leq \frac{\max a_{ii}}{\min a_{ii}} \times \frac{q}{1-q} \times ||X_3 - X_2|| = \frac{3}{1} \times \frac{0.8}{0.2} \times 1.8918334 = 22.702$$

Chương 4

Nội suy và phương pháp bình phương tối thiểu

4.1 Cho đa thức $P(x) = 7x^6 - 8x^5 + 7x^3 + 18x^2 - 9x - 20$. Sử dụng lược đồ Horner thực hiện các nhiệm vụ sau:

a) Tính giá trị đa thức tại x = 1.

	7	-8	0	7	18	-9	-20	1
+		7	-1	-1	6	24	15	
	7	-1	-1	6	24	15	-5	

$$\rightarrow P(1) = -5$$

b) Xác định đa thức thương và số dư của phép chia đa thức P(x) cho (x-2).

+	7	-8	0	7	18	-9	-20
x=2		14	12	24	62	160	302
	7	6	12	31	80	151	282

$$\rightarrow \frac{P(x)}{x-2} = 7x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 31x^2 + 80x + 151 + \frac{282}{x-2}$$

4.2 Cho đa thức

$$P(x) = 1 + 3x + 4x(x-1) - 7x(x-1)(x-2) + 5x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Sử dụng lược đồ Horner đưa đa thức P(x) về dạng chính tắc.

$$\text{Xét } x(x-1)(x-2)(x-3)$$

-	1	0			
x=1		1	0		
	1	-1	0		
x=2		2	-2	0	
	1	-3	2	0	
x=3		3	-9	6	0
	1	-6	11	-6	0

$$x(x-1) = x^2 - x$$
$$x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$\begin{aligned}\rightarrow P(x) &= 1 + 3x + 4(x^2 - x) - 7(x^3 - 3x^2 + 2x) + 5(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) \\ &= 1 + 3x + 4x^2 - 4x - 7x^3 + 21x^2 - 14x + 5x^4 - 30x^3 + 55x^2 - 30x\end{aligned}$$

$\rightarrow P(x) = 1 - 45x + 80x^2 - 37x^3 + 5x^4$

4.3 Lập sơ đồ khối đưa đa thức $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ về dạng chính tắc.

4.4 Cho bảng giá trị hàm $y = logx$ như sau:

x	2.0	2.2	2.3	2.5
$y = \log x$	0.30103	0.34242	0.36173	0.39794

a) Xây dựng đa thức nội suy Lagrange với bảng dữ liệu trên.

Đa thức nội suy Lagrange:

b) Tính giá trị gần đúng giá trị của hàm số tại điểm $x = 2.03$. Đánh giá sai số.

4.5 Lập sơ đồ khối xây dựng đa thức nội suy Lagrange với các điểm

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ ...\ (x_n, y_n)$$

4.6 Dân số Mỹ (DS) từ năm 1920 đến năm 2000 được cho trong bảng dữ liệu dưới đây với đơn vị triệu người:

Năm	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
DS	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46	205.05

Sử dụng đa thức nội suy Lagrange dựa trên dữ liệu từ năm 1920 đến năm 1990 để dự đoán dân số năm 2000 và so sánh với kết quả thực tế.

4.7 Nồng độ oxy hòa tan trong nước biển phụ thuộc vào nhiệt độ được cho trong bảng:

T (^{0}C)	0	8	16	24	32	40
O (mg/l)	14.621	11.843	9.870	8.418	7.305	6.413

Sử dụng nội suy Newton ước tính lượng oxy trong $1m^3$ nước biển ở nhiệt độ 27^0C là bao nhiêu? So sánh với kết quả chính xác là 7.986 mg/l.

4.8 Lập sơ đồ khối cho công thức nội suy Newton tiến và lùi có mốc cách đều, áp dụng tính gần đun gs giá trị hàm số $y = sinx$ tại $x = 12^0$ và đánh giá sai số biết bảng dữ liệu sau:

x	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0
$y = sinx$	0.1736	0.2588	0.3420	0.4226	0.5

4.9 Cho bảng dữ liệu:

x	0	1	2.5	3	3.5	4
y	2	5.4375	7.3516	7.5625	8.4453	9.1875

Sử dụng đa thức nội suy Newton tính gần đúng giá trị của y tại $x = 3.2$.

4.10 Gia tốc trọng trường ở độ cao y so với mặt đất được cho trong bảng sau:

$y(m)$	0	30000	60000	90000	120000
$g(m/s^2)$	9.8100	9.7487	9.6879	9.6278	9.5682

a) Biểu diễn các điểm dữ liệu trên mặt phẳng và đưa ra lựa chọn của dạng hàm g phụ thuộc theo y.

b) Tính g ở độ cao $y = 55000m$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu với dạng hàm lựa chọn ở câu a).

4.11 Hiệu điện thế V giữa hai đầu của một điện thế phụ thuộc vào cường độ dòng điện I chạy qua điện trở với dữ liệu cho trong bảng dưới đây:

I	0.5	1.5	2.5	3.0	4.0
V	0.45	0.6	0.70	1.88	6.0

Tính điện trở bằng phương pháp bình phương tối thiểu biết rằng theo định luật Ohm, hiệu điện thế tỉ lệ thuận với cường độ dòng điện.

4.12 Dữ liệu sau cho biết mối quan hệ giữa độ nhớt y của dầu SAE70 và nhiệt độ t:

$t(^0C)$	26.67	93.33	148.89	315.56
$y(N.S/m^2)$	0.35	0.085	0.012	0.00075

Tìm hàm thực nghiệm dạng $y = ae^{bt}$.

Chương 5

Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

5.1 Tính gần đúng đạo hàm của hàm số $y = e^x$ tại $x = 1.5, 2, 2.5$ và đánh giá sai số dựa vào bảng giá trị sau:

x	1.5	2	2.5
y	4.481	7.389	12.182

5.2 Sử dụng dữ liệu sau để tìm vận tốc và gia tốc tại $t = 10s$.

$t(s)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Vị trí $x(m)$	0	0.7	1.8	3.4	5.1	6.3	7.9	8.0	8.4

5.3 Sử dụng công thức hình thang tính gần đúng tích phân

$$I = \int_1^2 \sqrt{x^2+1}dx$$

với 4 chữ số đáng tin sau dấu phẩy.

5.4 Cho tích phân $I = \int\limits_{2.1}^{3.1} \frac{x^3}{x-1}dx$

a) Tính gần đúng tích phân I bằng công thức hình thang với bước $h = 0.1$.
b) Đánh giá sai số của giá trị gần đúng tìm được.

5.5 Sử dụng công thức Simpson tính gần đúng tích phân

$$I = \int_0^2 \sqrt{e^x+2}dx$$

với 10 đoạn chia và đánh giá sai số của kết quả tính được.

5.6 Cho tích phân $I = \int_1^2 \sqrt[3]{8x+3}dx$. Dùng công thức Simpson xác định số đoaạn chia tối thiểu để sai số không vượt quá 10^{-6}. Tính xấp xỉ I với số đoạn chia tìm được.

5.7 Vận tốc của một vận động viên đua xe đạp được cho trong bảng dưới đây:

t (phút)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$v(km/h)$	0	10	11.7	12	17	20	18	16	15.3	14.1	15	16.5	0

a) Tính quãng đường vận động viên đó đi được trong khoảng thời gian trên bằng công thức Simpson.

b) Đánh giá sai số.

Chương 6

Giải gần đúng phương trình vi phân thường

6.1 Giải gần đúng phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

trong đoạn [0,4] với bước lưới $h = 0.5$ và điều kiện Cauchy $y(0) = 1$ bằng phương pháp Euler hiện.

6.2 Cho hệ phương trình vi phân và điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{y-x}{z}, \quad y(0.5) = 1 \\ \\ z' &= \dfrac{3y}{z+x}, \quad z(0.5) = 1 \end{cases}$$

Tính gần đúng giá trị hàm nghiệm tại $x = 0.6$ bằng phương pháp Euler hiện với bước lưới $h = 0.1$.

6.3 Sử dụng phương pháp Euler ẩn giải gần đúng bài toán Cauchy

$$y' = \frac{xy}{x}, y(1) = 1$$

trên đoạn [1,1.5] với bước lưới $h = 0.1$.

6.4 Cho bài toán Cauchy

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y, y(0) = 2$$

Giải gần đúng bài toán bằng phương pháp Euler cải tiến trên đoạn [0,4] với bước lưới $h = 0.5$.

6.5 Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'' = ln(ty+1) + (y'+2)^2 + 2.1t - 0.3 \\ y(1) = 0.2,\ y'(1) = 0.5 \end{cases}$$

Sử dụng công thức Euler hiện tính gần đúng y và y' tại $t = 1.2$ với bước $h = 0.2$.

6.6 Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy^3 + 3^{-x} + 1.5x - 1 \\ y(1) = 0.25 \end{cases}$$

Dùng công thức Runge - Kutta 4 nấc tính gần đúng y tại $x = 1.2$ với bước $h = 0.2$.

6.7 Trên một hòn đảo biệt lập chỉ có hai loài là hổ và hươu sinh sống. Mô hình Lotka - Volterra mô tả số lượng của hai loài theo thời gian như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 1.1xy, \ \ x(0) = 1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.9xy - y, \ \ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

trong đó x,y lần lượt là số lượng hươu, hổ trên đảo. Tìm số lượng hai loài tại thời điểm $t = 0.2$ bằng phương pháp RK4 với bước lưới $h = 0.1$.

6.8 Lập sơ đồ khối công thức RK4 giải bài toán giá trị ban đầu cho phương trình vi phân thường:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

với bước lưới h trên đoạn $[x_0, x_0 + nh]$.

6.9 Lập sơ đồ khối của công thức Euler cải tiến tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy cho phương trình vi phần thường:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

trên lưới $\{x_i = x_0 + ih\}_{i=\overline{0,n}}$.