Per facilitare la comprensione dell'argomento che segue, consiglio di rileggere le schede su "elevazione a potenza, radicali ed esponenti razionali, logaritmi" per rinfrescare le regole di calcolo con esponenti e radici e per rivedere la definizione di logaritmo, nonché le regole di calcolo con i logaritmi.

Elevazione a potenza

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ volte}$ Si dice "a elevato a n", con a: BASE; n: ESPONENTE

a^n è definito se $a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}$ (ma anche $n \in \mathbb{Q}$, se $a \geq 0$)

Ricorda: $-3^2 = -9 \Rightarrow -(3 \cdot 3) = -9$
$(-3)^2 = 9 \Rightarrow (-3) \cdot (-3) = 9$

Inoltre: $a^0 = 1$, con $a \neq 0$
$1^n = 1$
0^0 non ha significato

REGOLE DI CALCOLO (esponenti $n, m \in \mathbb{Z}$)

Potenza di un prodotto: $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Potenza di una frazione: $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Potenza di una potenza: $\boxed{\left(a^m\right)^p = a^{m \cdot p}}$

Esponente negativo: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$; $\boxed{b \cdot a^{-n} = \frac{b}{a^n}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}}$

Esponente razionale: $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

OPERAZIONI CON LE POTENZE

ADDIZIONE: è possibile solo tra termini con stessa base e stesso esponente!

$$\boxed{p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p+q) \cdot a^n}$$

MOLTIPLICAZIONE: è possibile solo tra termini con stessa base!

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

DIVISIONE: è possibile solo tra termini con stessa base!

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

ELEVAZIONE A POTENZA: $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$

Logaritmi

Definizione:
Il logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale.

$$\boxed{\log_a(b) = ?}$$

La domanda che ci poniamo è: Qual è il valore per cui dobbiamo elevare "a" per ottenere "b"? Questo valore è il risultato del logaritmo.

$a^x = b$	$10^x = b$	$e^x = b$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\boxed{\log_a(b) = x}$	$\boxed{\log(b) = x}$	$\boxed{\ln(b) = x}$
$\lg_a N = x$	$\lg_a N = x$	

Base

Argomento

Si dice:
"Il logaritmo in base $\boldsymbol{a}$ di b" "Il logaritmo in base $\mathbf{10}$ di b" "Il logaritmo **naturale** di b"

Osservazione: "e" è il numero naturale o numero di Nepero (anche numero di Eulero). Corrisponde a $e = 2{,}718281\ldots$ (Calcolatrice: $1 \to e^x$)

$$a^x = b \to x = \log_a(b) \;\; con\; a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$$

significa cercare per quale numero devo elevare la base "a" per ottenere l'argomento "b".

Attenzione,
il logaritmo è definito solo se l'argomento è positivo non nullo! $\log_a(b)$ **esiste solo se** $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$

REGOLE DI CALCOLO

- Base e argomento uguali: $\boxed{\log_a(a) = 1 \quad a^1 = a}$
- Argomento unitario: $\boxed{\log_a(1) = 0 \quad a^0 = 1}$
- Logaritmo di un prodotto: $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$
- Logaritmo di una frazione: $\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$
- Logaritmo di un'elevazione a potenza: $\boxed{\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)}$
- Neutralizzazione di una funzione tramite la sua inversa: $\boxed{a^{\log_a(x)} = x}$ $\boxed{\log_a\left(a^x\right) = x}$
- Cambiamento di base (a vecchia base, b nuova base, x argomento) $\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$

  Logaritmi con la calcolatrice: trasforma la base "a" in base 10 (o "e") $\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$

  Caso particolare di cambiamento di base:

$$\log_{a^n}(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a\left(a^n\right)} = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \qquad \log_{\sqrt[n]{a}}(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a\left(\sqrt[n]{a}\right)} = \log_a\left(x^n\right)$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

Sono innumerevoli gli ambiti in cui incontriamo fenomeni che possiamo descrivere tramite funzioni esponenziali.

- In chimica, il decadimento radioattivo e la quantità di materia che si trasforma in un certo tempo,
  per esempio la quantità di iodio 231 (^{231}I) che si trasforma in iodio man mano che passano i giorni segue la funzione
  $$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}.$$

- In archeologia, in modo analogo, si calcola l'età di un reperto organico misurando il rapporto tra quantità di carbonio 14 (^{14}C) e di carbonio 12 (^{12}C) presenti, oppure il rapporto tra uranio e piombo nel caso di minerali. Il cambiamento di questi rapporti in funzione del tempo è descritta con una funzione esponenziale.

- In economia si calcola la somma C ottenuta dopo n anni investendo un capitale C_0 ad un tasso di interessi del t%, tramite la formula dell'interesse composto:
  $$C(n) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

- In biologia si possono studiare i fenomeni di crescita (di popolazioni di batteri, di popolazioni di animali, di popolazioni umane, dell'altezza di un animale, della massa di un bambino, …) associandoli a funzioni esponenziali.

- In elettrotecnica il cambiamento nel tempo della tensione e della corrente in un circuito formato da condensatori, o bobine, e resistenze si può descrivere con funzioni esponenziali. Per esempio la tensione (inizialmente U_0) su un condensatore (capacità C) che si scarica tramite una resistenza (resistenza R) in serie, è descritta dalla funzione:
  $$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right).$$

E, ancora, si possono descrivere tramite funzioni esponenziali:
- la quantità di luce in mare a diverse profondità;
- la temperatura in funzione del tempo, di un oggetto che si sta raffreddando;
- la densità dell'atmosfera in funzione dell'altitudine;
- l'intensità di un terremoto in funzione della distanza dall'epicentro;
- l'intensità sonora in funzione della distanza dalla sorgente sonora;
- lo smorzamento dell'oscillazione di un ammortizzatore, o di un pendolo, in funzione del tempo.

E moltissimi altri fenomeni.

Ma che "faccia" ha?
Sono le funzioni che presentano la variabile ad esponente:

Esempi:

$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array}$ $\quad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}$ $\quad f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$

$f_4: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\frac{1}{10}\right)^x \end{array}$ $\quad f_5: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{array}$ $\quad f_6: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$

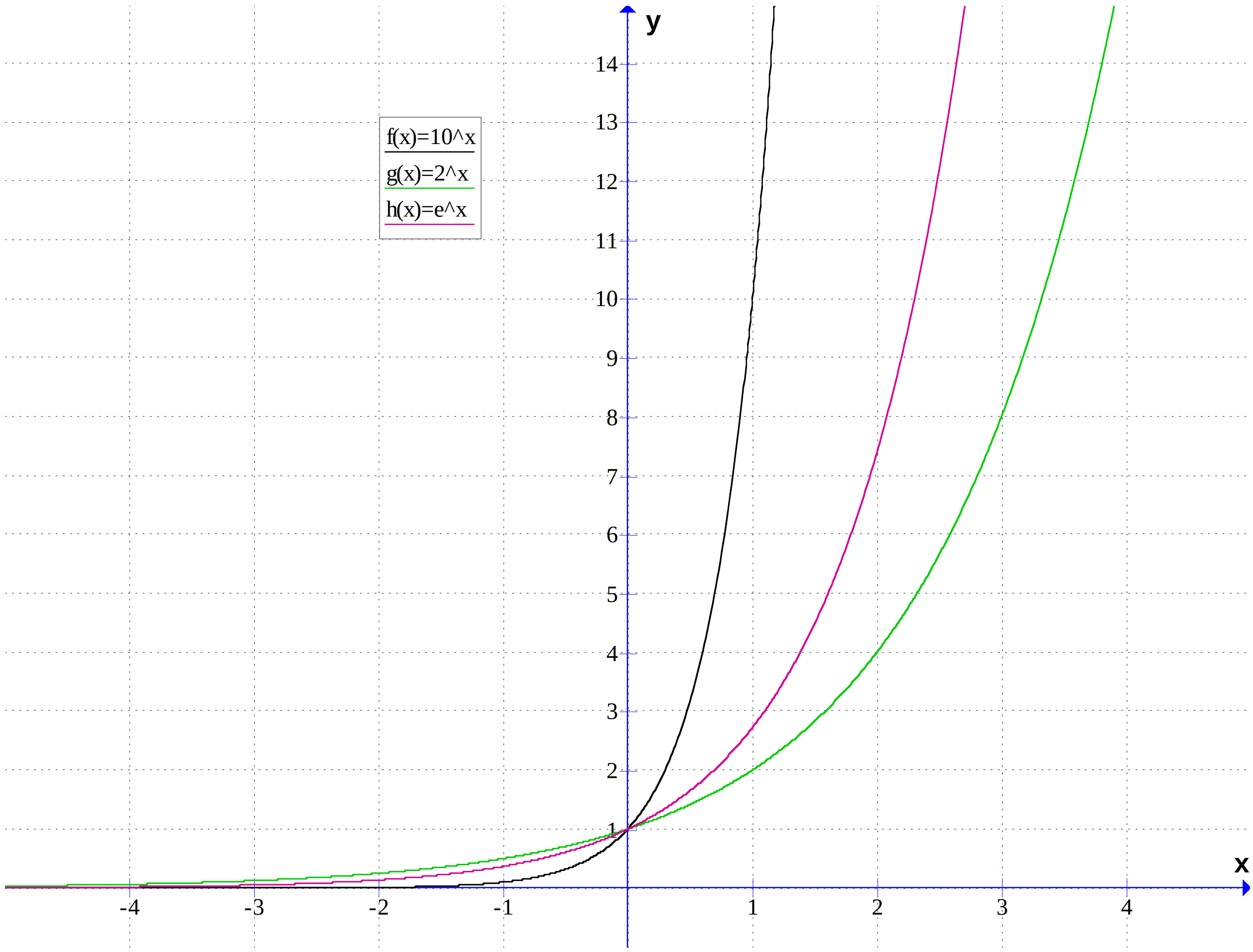
$f_7: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2^{x-1}+3 \end{array}$ $\quad f_8: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2^{x-2}-1 \end{array}$ $\quad f_9: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-8}-5 \end{array}$

In generale: $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = C\cdot a^{g(x)} + B \end{array}$ con $C \in \mathbb{R}^*; a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; B \in \mathbb{R}$

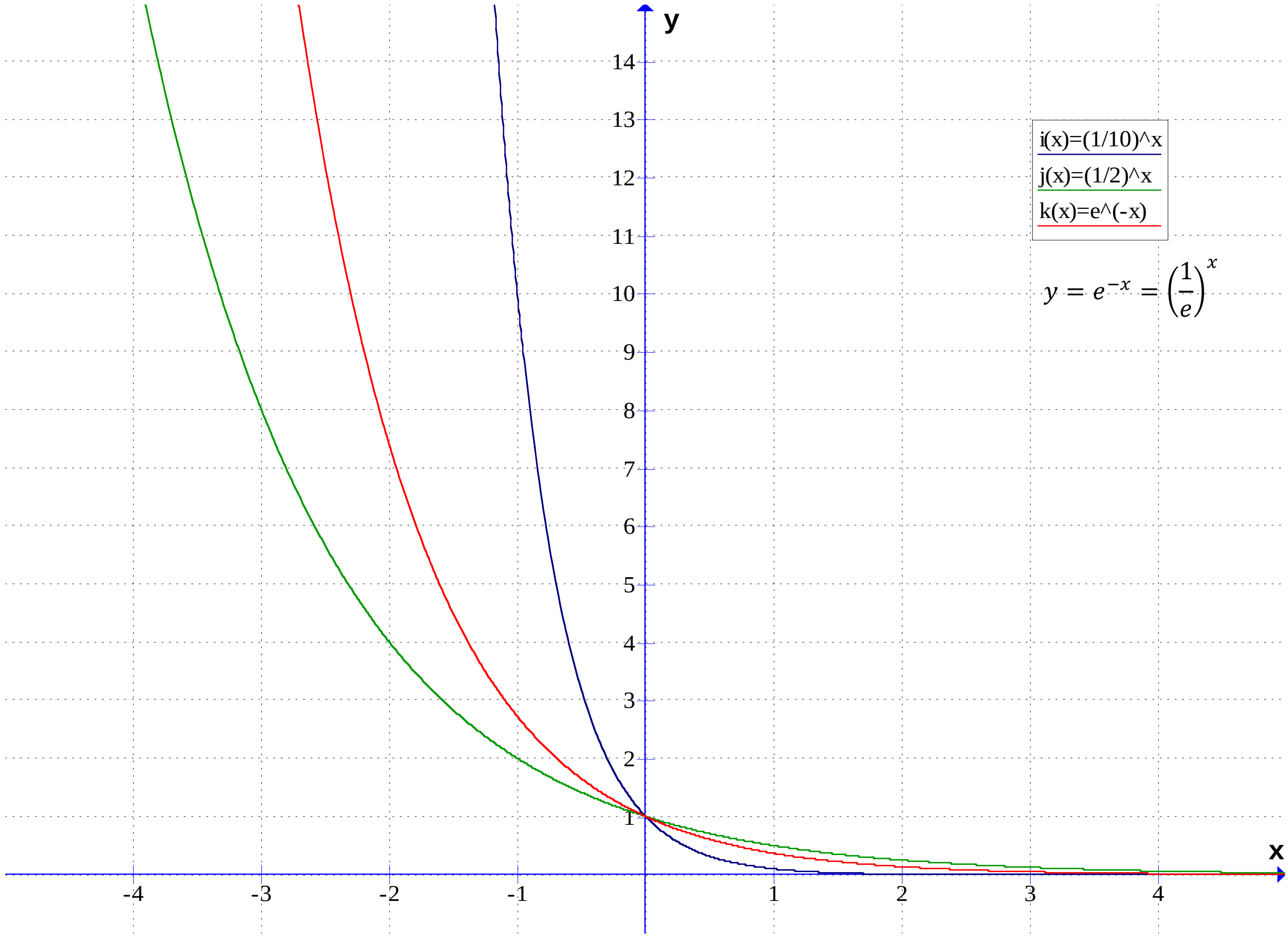
Per dire che qualcosa aumenta in modo estremamente rapido si dice che aumenta in modo esponenziale.
È proprio così? Non sempre.

Osserva quali sono le conseguenze sulla rappresentazione grafica di alcuni valori importanti:
Il valore della base a, se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$;
Il segno del coefficiente C;
Il segno del coefficiente m, nel caso sia $g(x) = mx + q$.

È vero che tra tutte le funzioni, le esponenziali sono quelle che, all'aumentare del valore della variabile x, "aumentano" più rapidamente di tutte. Ma alcune funzioni esponenziali diminuiscono rapidamente.
Vediamo alcuni esempi:



E ancora:



Analizzando il gruppo di funzioni del tipo $f(x) = a^x$, abbiamo quindi due tipologie grafiche, a dipendenza del valore della base "a".

Osservazioni:

A. con $\underline{\boldsymbol{a > 1}}$:

I. Insieme di definizione $x \in \mathbb{R}$;
II. $y > 0$, sempre! ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Insieme delle immagini $y \in \mathbb{R}_+^*$;
III. Se $x \to -\infty \Rightarrow y \to 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} (a^x) = 0 \text{ con } a > 1 \right)$;
IV. Se $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} (a^x) = +\infty \text{ con } a > 1 \right)$;
V. Passa sempre per il punto $(0\,;1)$ (perché ?)

B. con $\underline{\boldsymbol{0 < a < 1}}$:

I. Insieme di definizione $x \in \mathbb{R}$;
II. $y > 0$, sempre! ($\forall\, x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Insieme delle immagini $y \in \mathbb{R}_+^*$;
III. Se $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} (a^x) = +\infty \text{ con } 0 < a < 1 \right)$;
IV. Se $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} (a^x) = 0 \text{ con } 0 < a < 1 \right)$;
V. Passa sempre per il punto $(0\,;1)$ (perché ?)

FUNZIONE LOGARITMICA

Alla luce dell'ampio ventaglio di applicazioni della funzione esponenziale, appare ovvia l'importanza della sua funzione inversa: la funzione logaritmica.

Una funzione è chiamata logaritmica se presenta la variabile nell'argomento di un logaritmo.

Esempi:

$f_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{10}(x) \end{array}$ $\quad f_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{2}(x) \end{array}$ $\quad f_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$

$f_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{\frac{1}{10}}(x) \end{array}$ $\quad f_5\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{\frac{1}{2}}(x) \end{array}$ $\quad f_6\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(x) \end{array}$

$f_7\colon \begin{array}{ccc}]4;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{10}(x-4) \end{array}$ $\quad f_8\colon \begin{array}{ccc}]-5;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{10}(x+5)+1 \end{array}$

$f_9\colon \begin{array}{ccc} \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_{10}(2x+3)-5 \end{array}$ $\quad f_{10}\colon \begin{array}{ccc}]-\infty;3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log(3-x)+1 \end{array}$

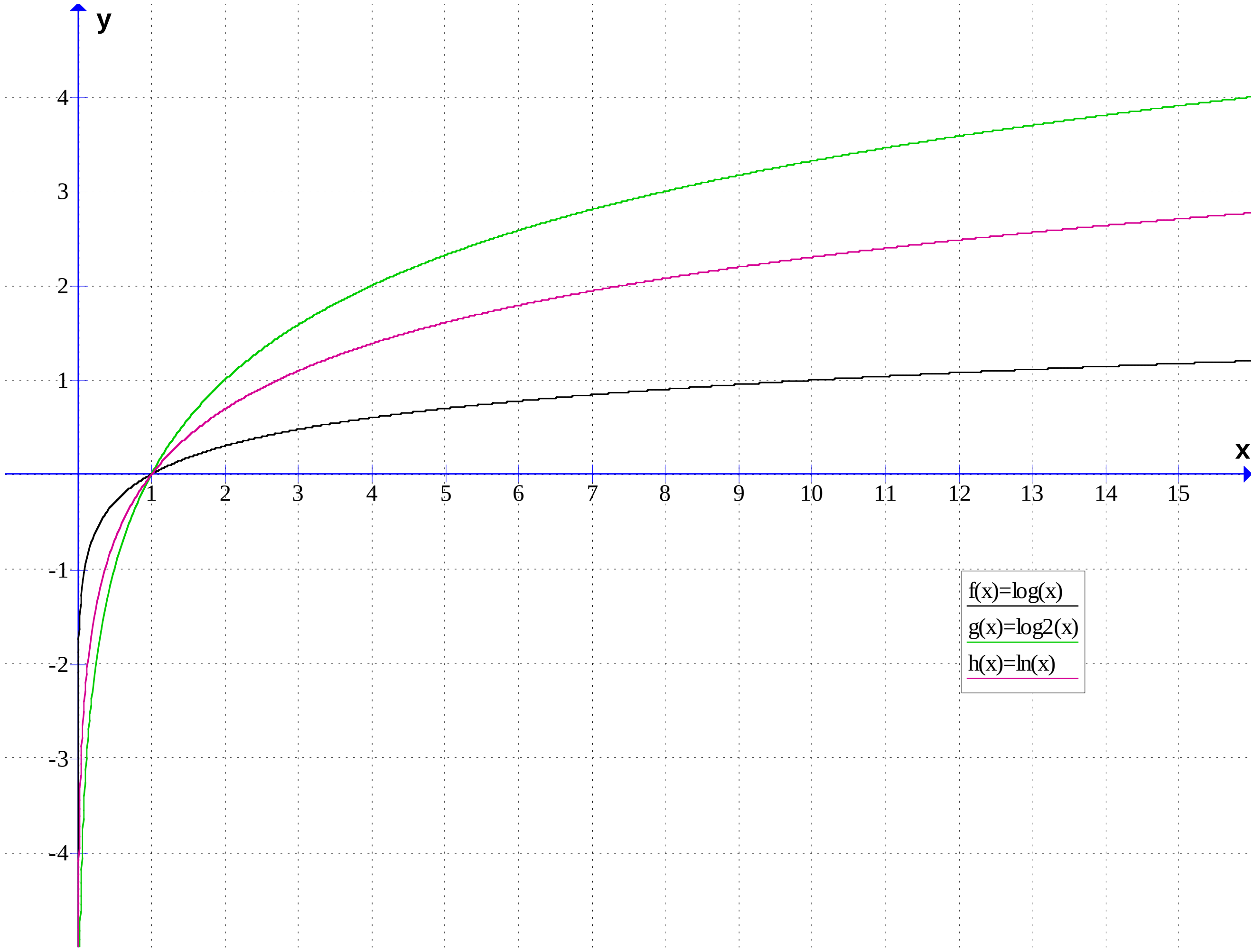
$f_{11}\colon \begin{array}{ccc} \left]\frac{10}{3};+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\ln(3x-10)+1 \end{array}$ $\quad f_{12}\colon \begin{array}{ccc} \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\log_{0,2}(2x+5)-2 \end{array}$

In generale: $f\colon \begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\cdot\log_a\big(g(x)\big)+B \end{array}$ con $C \in \mathbb{R}^*; a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; B \in \mathbb{R}$, e, soprattutto, $\boldsymbol{g(x) > 0}$ **!!!**

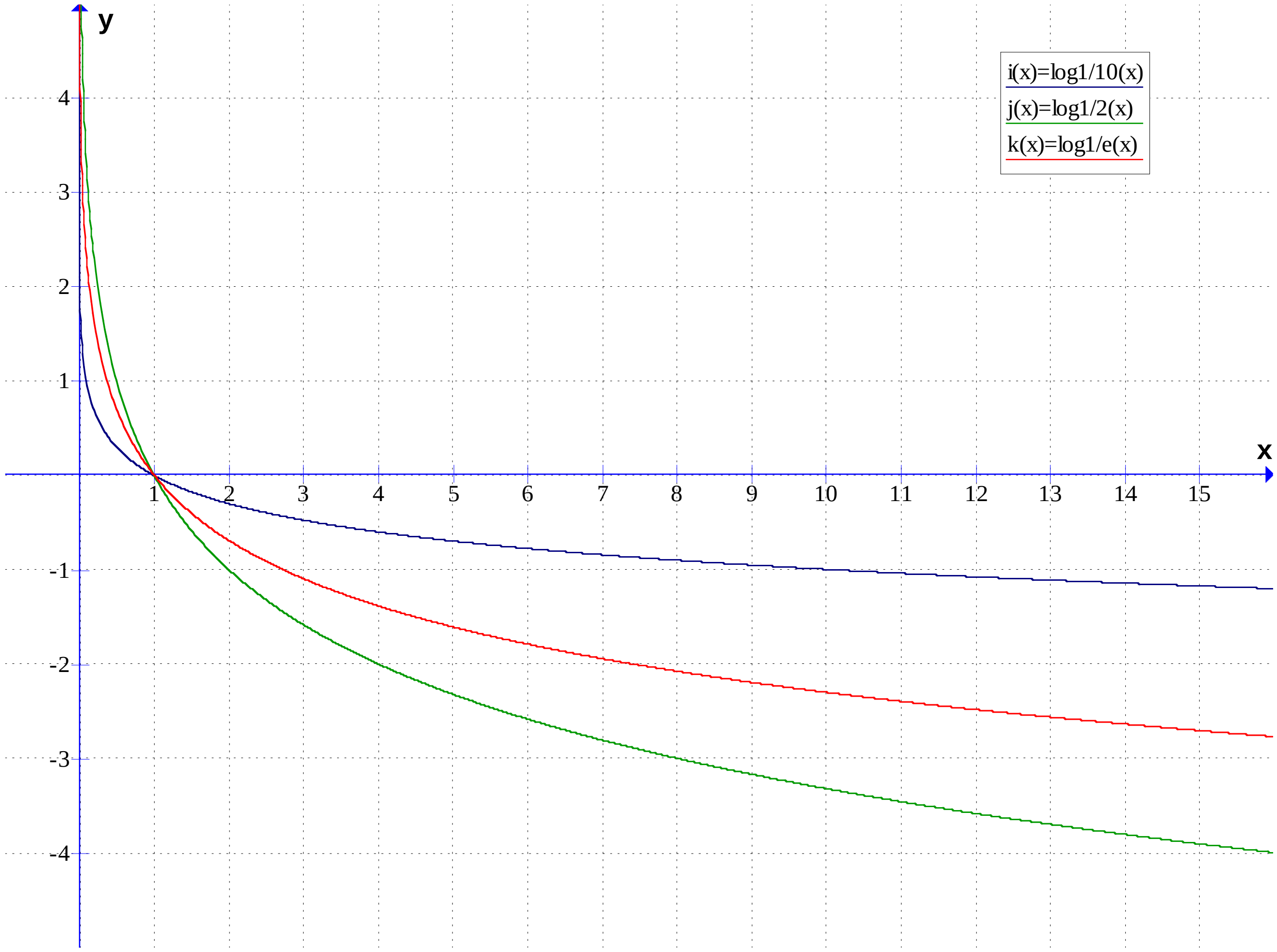
Ricorda: L'argomento di un logaritmo deve essere positivo!!!

Osserva quali sono le conseguenze sulla rappresentazione grafica di alcuni valori importanti:
Il valore della base $\boldsymbol{a}$, se $\boldsymbol{a > 1}$ oppure $\boldsymbol{0 < a < 1}$;
Il segno del coefficiente $\boldsymbol{C}$;
Il segno del coefficiente $\boldsymbol{m}$, nel caso sia $\boldsymbol{g(x) = mx + q}$.

Vediamo alcuni esempi rappresentati graficamente:



E ancora:



Analizzando il gruppo di funzioni del tipo $f(x) = \log_a(x)$, abbiamo quindi due tipologie grafiche, a dipendenza del valore della base "a".

Osservazioni:

A. con $\underline{\boldsymbol{a > 1}}$:

I. Condizione di esistenza : $x > 0 \Rightarrow$ Insieme di definizione $x \in \mathbb{R}_+^*$;
II. Insieme delle immagini $y \in \mathbb{R}$;
III. Se $x \to 0 \Rightarrow y \to -\infty$ $(\lim_{x\to 0}(\log_a(x)) = -\infty$ con $a > 1)$;
IV. Se $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$ $(\lim_{x\to +\infty}(\log_a(x)) = +\infty$ con $a > 1)$;
V. Passa sempre per il punto $(1\,;0)$ (perché ?)

B. con $\underline{\boldsymbol{0 < a < 1}}$:

I. Condizione di esistenza : $x > 0$; Insieme di definizione $x \in \mathbb{R}_+^*$;
II. Insieme delle immagini $y \in \mathbb{R}$;
III. Se $x \to 0 \Rightarrow y \to +\infty$ $(\lim_{x\to 0}(\log_a(x)) = +\infty$ con $0 < a < 1)$;
IV. Se $x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$ $(\lim_{x\to +\infty}(\log_a(x)) = -\infty$ con $0 < a < 1))$;
V. Passa sempre per il punto $(1\,;0)$ (perché ?)

La "questione" del "muro" (l'asintoto).

Solitamente si possono riconoscere i grafici di semplici funzioni esponenziali o logaritmiche in base al loro andamento e ai loro asintoti.

Nelle funzioni generiche del tipo $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = C \cdot a^{g(x)} + B \end{array}$ abbiamo potuto notare che l'andamento è crescente o decrescente a dipendenza del valore della base (con $g(x) = mx + q$, ma ricorda anche di prestare attenzione al segno dei coefficienti C e m!!).

Possiamo notare un'ulteriore dettaglio: tutte le funzioni di questo tipo hanno un "muro" ***orizzontale*** invalicabile.
Si tratta di un ***asintoto orizzontale***. E in più questo asintoto è situato in $y = B$.

Nelle funzioni generiche del tipo $f\colon \begin{array}{ccc} D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \cdot \log_a\big(g(x)\big) + B \end{array}$ abbiamo potuto notare che l'andamento è crescente o decrescente a dipendenza del valore della base (con $g(x) = mx + q$, ma ricorda anche di prestare attenzione al segno dei coefficienti C e m!!).

Possiamo notare un'ulteriore dettaglio: tutte le funzioni di questo tipo hanno un "muro" ***verticale*** invalicabile.
Si tratta di un ***asintoto verticale***. Nel caso in cui $g(x)$ sia una funzione affine $g(x) = mx + q$, questo asintoto è situato in $x = -\frac{q}{m}$.

EQUAZIONE ESPONENZIALE

Sono chiamate equazioni esponenziali quelle equazioni che presentano l'incognita a esponente.

Esempi:

1) $\mathbf{3^x = 81}$
2) $\mathbf{10^{x-5} = \frac{1}{100}}$
3) $\mathbf{3^{x^2-x} = 9^{x+2}}$
4) $\mathbf{10^x = 300}$
5) $\mathbf{4 \cdot 2^{3x-2} - 2^{3x+3} = -21}$
6) $\mathbf{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0}$
7) $\mathbf{4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 15 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-x} = 19}$
8) $\mathbf{2^{x+1} = 5^x}$
9) $\mathbf{2^{x+1} = 5 \cdot 3^{3x-2}}$
10) $\mathbf{5^{3x^2-1} = \frac{1}{3} \cdot 6^{2x+3}}$

Risoluzione:

Possiamo quindi riassumere le tipologie di equazioni e i relativi metodi risolutivi:

I) Equazioni esponenziali riducibili alla forma $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$.
Ragionando sul fatto che se la base è la stessa deve essere identico anche l'esponente otteniamo: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$.

II) Equazioni esponenziali riducibili alla forma $\boxed{a^{f(x)} = b^{f(x)}}$.
Ragionando sul fatto che se la base è diversa e l'esponente è uguale, l'esponente può solo essere nullo: $f(x) = 0$

III) Equazioni esponenziali riducibili alla forma $\boxed{C \cdot a^{f(x)} = D \cdot b^{g(x)}}$.
Sono risolvibili applicando la funzione inversa:

$$C \cdot a^{f(x)} = D \cdot b^{g(x)} \Rightarrow \log_a\left[C \cdot a^{f(x)}\right] = \log_a\left[D \cdot b^{g(x)}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_a(C) + f(x) = \log_a(D) + g(x) \cdot \log_a(b) \Rightarrow x = \ldots$$

N. B.: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono ***funzioni lineari***, allora è sempre possibile ridurre l'equazione dalla forma $\boxed{C \cdot a^{m \cdot x + q} = D \cdot b^{n \cdot x + z}}$ alla forma: $\boxed{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^x = \frac{D \cdot b^z}{C \cdot a^q}}$.

IV) Equazioni polinomiali "camuffate" (o mascherate), cioè del tipo
$a_n \cdot \left(a^{f(x)}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(a^{f(x)}\right)^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot \left(a^{f(x)}\right)^2 + a_1 \cdot \left(a^{f(x)}\right) + a_0 = 0$

Risolveremo principalmente equazioni di questo tipo riducibili al *secondo grado*.

Da $A \cdot \left(a^{f(x)}\right)^2 + B \cdot \left(a^{f(x)}\right) + C = 0$:
<u>sostituisci</u> $\boxed{a^{f(x)} = t}$ e ottieni $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$;
risolta la quale rispetto a t, dovrai eseguire la sostituzione inversa e risolvere nuovamente rispetto a x
$a^{f(x)} = t \Rightarrow \log_a\left(a^{f(x)}\right) = \log_a(t) \Rightarrow f(x) = \log_a(t) \Rightarrow x = \cdots$

N. B.: Gli indicatori importanti sono:
un ***esponente doppio dell'altro*** (o triplo o n-plo);
un ***esponente opposto all'altro*** (o una uguale potenza a denominatore).

Osservazione: Anche le equazioni dei primi due tipi si risolvono utilizzando, in modo implicito, la funzione inversa all'esponenziale, cioè la funzione logaritmica.

EQUAZIONE LOGARITMICA

Sono chiamate equazioni logaritmiche quelle equazioni che presentano l'incognita nell'argomento di un logaritmo.

Esempi:

1) $\log_3(x-4) = -2$
2) $\log_{10}(x^2 - 25x + 100) = 2$
3) $\ln(x^2) = -3$
4) $\ln(x^2 - x - 6) = \ln(6 - 2x)$
5) $\log_3(x^2 - 4) - \log_3(8 - 7x) = -1$
6) $\log_2(1 - x) + \log_2(x - 5) = 2$
7) $2 \cdot \log_5(x - 3) = \log_5(2x + 3)$
8) $\log_2(1 - x) - \log_4(x) = \frac{3}{2}$
9) $(\log_5(2x))^2 + 3 \cdot \log_5(2x) = 10$
10) $(\ln(x))^2 - \ln(x^5) + 6 = 0$
11) $\log_x(8) = -3$
12) $\log_2(\log_2(x + 2)) = 1$

Risoluzione:

Possiamo ora riassumere il procedimento risolutivo per le equazioni logaritmiche:

I) $\boldsymbol{\log_a(f(x))}$ **è definito solo se** $\boldsymbol{f(x) > 0}$

! Per cui è importante definire le ***condizioni di esistenza***, cioè quali valori di x rendono possibili i logaritmi presenti nell'equazione, prima di iniziare a manipolare le equazioni. !

II) Per "portare fuori" $f(x)$ dobbiamo neutralizzare la funzione $\boldsymbol{\log_a(f(x))}$ utilizzando la sua funzione inversa: l'esponenziale $a^{\log_a(f(x))}$. Attenzione, questa operazione va fatta dopo aver raggruppato in ***un unico logaritmo*** le espressioni dell'equazione.

III) Verifica i risultati! Puoi controllare che soddisfino le condizioni di esistenza definite al punto I), oppure verificare i risultati direttamente nell'equazione di partenza.
È necessario escludere le soluzioni estranee.

IV) Elenca le soluzioni.

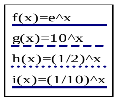
Come per molte altre equazioni, anche nel caso delle equazioni logaritmiche esiste un'ulteriore tipologia:

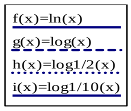
V) Equazioni polinomiali "camuffate" (o mascherate), cioè del tipo
$a_n \cdot (\log_a(f(x)))^n + a_{n-1} \cdot (\log_a(f(x)))^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot (\log_a(f(x)))^2 + a_1 \cdot (\log_a(f(x))) + a_0 = 0$

Risolveremo principalmente equazioni di questo tipo riducibili al *secondo grado*.

Da $A \cdot (\log_a(f(x)))^2 + B \cdot (\log_a(f(x))) + C = 0$:
<u>sostituisci</u> $\boxed{\log_a(f(x)) = t}$ e ottieni $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$;
risolta la quale rispetto a t, dovrai eseguire la sostituzione inversa e risolvere nuovamente rispetto a x
$\log_a(f(x)) = t \Rightarrow a^{\log_a(f(x))} = a^t \Rightarrow f(x) = a^t \Rightarrow x = \cdots$
Ricorda le C. E. !!

GRAFICI A SCALA LOGARITMICA

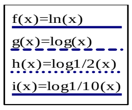


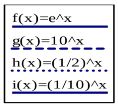


I grafici di fenomeni descritti da funzioni esponenziali o da funzioni logaritmiche presentano delle difficoltà di lettura:

- È possibile leggere in modo chiaro i valori vicini allo zero se si sceglie una scala con la quale tagliamo i valori più grandi (anche solo di una potenza di 10) avendo così una visione precisa di un intervallo molto limitato.
- È possibile leggere in modo chiaro i valori grandi (limitatamente però ad un'unica potenza di 10: solo le centinaia oppure solo le migliaia oppure solo i milioni) sacrificando però la possibilità di leggere i valori vicini allo zero o comunque più piccoli.

Per ovviare a questi inconvenienti è utile tracciare i grafici su un piano cartesiano che presenti un asse (o entrambi) graduati secondo una scala logaritmica, dove ad ogni unità corrisponde una potenza di 10.





Esempi:

- Amplificazione di un filtro passa-alto, in funzione della frequenza;
- Resistenza di un resistore PTC in funzione della temperatura;
- Pressione acustica (rispettivamente intensità relativa) in funzione della frequenza;
- La magnitudo apparente di una stella in funzione della sua intensità luminosa;
- Ma anche in chimica, in musica, in ottica, in sismologia,…

DIMOSTRAZIONI DI ALCUNE REGOLE DI CALCOLO CON LOGARITMI

N. B.: $\log_a(x)=b \Leftrightarrow x=a^b$

1) Quanto fa $\log_a(1)$?

$$\log_a(1)=x \Rightarrow a^{\log_a(1)}=a^x \Rightarrow 1=a^x \Rightarrow x=0 \Rightarrow \log_a(1)=0$$

2) Quanto fa $\log_a(a)$?

$$\log_a(a)=x \Rightarrow a^{\log_a(a)}=a^x \Rightarrow a=a^x \Rightarrow x=1 \Rightarrow \log_a(a)=1$$

3) $\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

$$\log_a(x\cdot y) \underset{\substack{sostituiamo:\ x=a^{t_1}\Rightarrow t_1=\log_a(x)\\ y=a^{t_2}\Rightarrow t_2=\log_a(y)}}{=} \log_a\left(a^{t_1}\cdot a^{t_2}\right)=\log_a\left[a^{(t_1+t_2)}\right]=t_1+t_2 \underset{risostituiamo}{=} \log_a(x)+\log_a(y)$$

4) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \underset{\substack{sostituiamo:\ x=a^{t_1}\Rightarrow t_1=\log_a(x)\\ y=a^{t_2}\Rightarrow t_2=\log_a(y)}}{=} \log_a\left(\frac{a^{t_1}}{a^{t_2}}\right)=\log_a\left[a^{(t_1-t_2)}\right]=t_1-t_2 \underset{risostituiamo}{=} \log_a(x)-\log_a(y)$$

5) $\log_a\left(x^n\right)=n\cdot\log_a(x)$

$$\log_a\left(x^n\right)=\log_a\underbrace{(x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x)}_{n\ volte}=\underbrace{\log_a(x)+\log_a(x)+\ldots+\log_a(x)}_{n\ volte}=n\cdot\log_a(x)$$

6) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a\left(x^{-1}\right)=(-1)\cdot\log_a(x)=-\log_a(x)$$

7) $\log_{a^n}(x)=\log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$

$$\log_{a^n}(x)=\frac{\log_a(x)}{\log_a(a^n)}=\frac{\log_a(x)}{n}=\frac{1}{n}\cdot\log_a(x)=\log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Oppure:

$$\log_{\sqrt[n]{a}}(x)=\frac{\log_a(x)}{\log_a(\sqrt[n]{a})}=\frac{\log_a(x)}{\log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right)}=\frac{\log_a(x)}{\frac{1}{n}}=n\cdot\log_a(x)=\log_a(x^n)$$

LA CURVA DI CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE

Sono diversi i modelli che permettono di studiare la crescita di una popolazione.
Ne possiamo riconoscere due principali:

Il modello di crescita esponenziale

$$N(t) = N_0 \cdot a^{k \cdot t}$$

$N(t)$ rappresenta il numero di individui in funzione del tempo, dove N_0 corrisponde al numero iniziale di individui, k è il tasso di crescita, a è la base di riferimento (spesso è il numero naturale e, ma può essere 2 o un qualsiasi valore reale positivo non nullo).

Se $k > 0$ (con $a > 1$), allora la funzione è crescente. (Per esempio in una coltura batterica);
Se $k < 0$ (con $a > 1$), allora la funzione è decrescente. (Per esempio nel decadimento radioattivo).

Se è abbastanza ovvio riconoscere in N_0 il numero iniziale di individui (l'esponente nullo dato da t=0 porta a uno l'esponenziale), è interessante analizzare più in dettaglio i ruoli di k e della base a.

Prendiamo ad esempio la formula $N(t) = N_0 \cdot 3^{\left(\frac{t}{5}\right)}$. Possiamo facilmente ricavare che il numero di individui triplicherà ogni 5 ore.
Ragionando in modo analogo possiamo descrivere la curva di crescita di una coltura di 300 batteri che raddoppia ogni tre ore: $N(t) = 300 \cdot 2^{\left(\frac{t}{3}\right)}$.
Spesso al valore $\frac{1}{k}$ viene assegnato il simbolo τ e la formula la ritrovate scritta in questo modo

$$N(t) = N_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$$

dove è ancora più facile intuire il ruolo di τ nel definire "ogni quanto (tempo) il numero di individui diventa a-volte".
In modo analogo possiamo ragionare nei casi di funzione decrescente.

Esempio:
Il numero di isotopi radioattivi ^{14}C di un composto organico non vivente, dimezza in 5760 anni.
La funzione che ne regola l'andamento è possibile costruirla così: (con t in anni).

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5760}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5760}}$$

È poi possibile limitare nel valore massimo o nel valore minimo la funzione:

Nel caso del raffreddamento di un oggetto (120°C) fino a temperatura ambiente (20°C)
$T(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} + 20$;

Oppure nel caso della tensione su un condensatore durante la carica da 0V a 5V
$U(t) = 5 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot t})$.

Il modello di crescita logistica

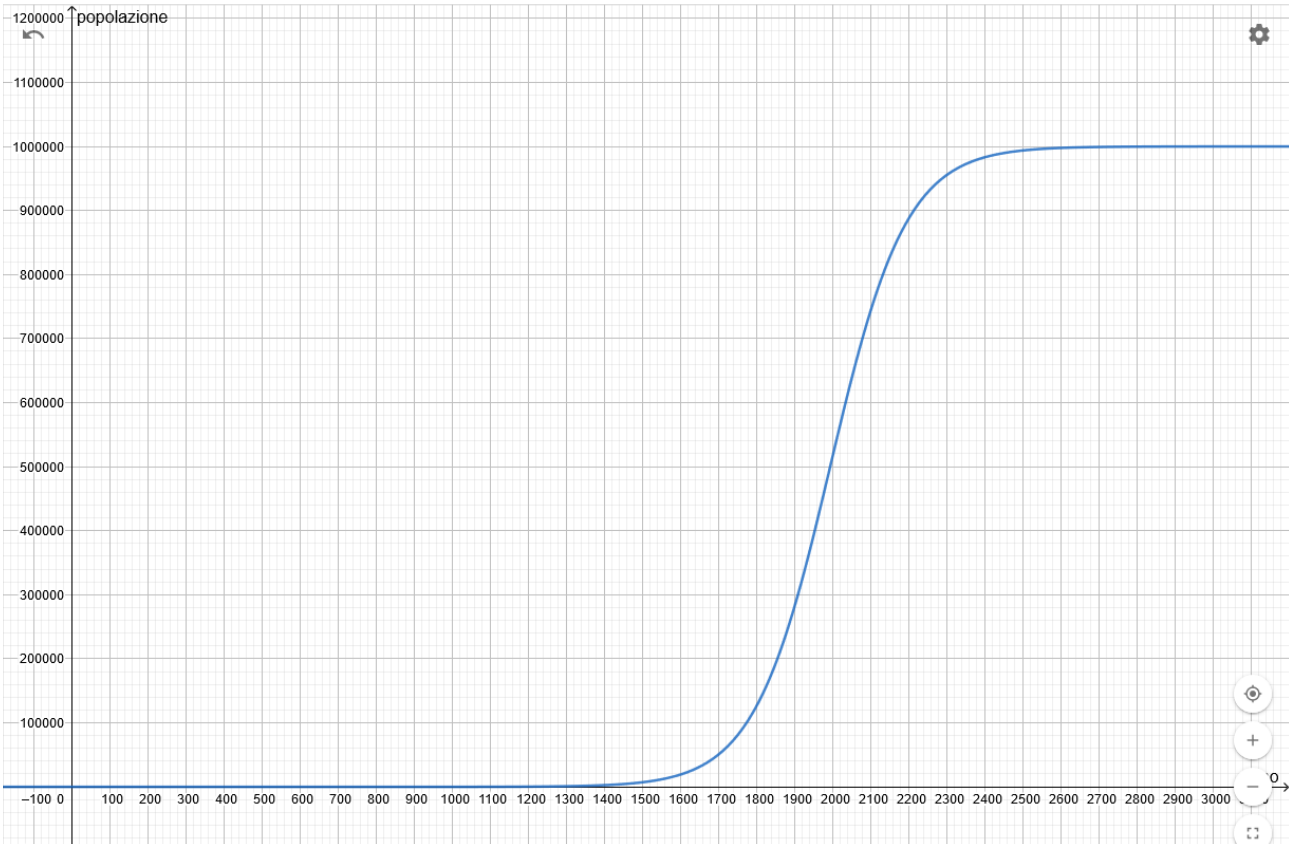
Questo modello si applica in situazioni in cui le risorse disponibili possano nutrire al massimo un numero N_{max} di individui. Possiamo facilmente intuire che la crescita non possa essere infinita.

$$N(t) = \frac{N_{max} \cdot N_0 \cdot e^{at}}{N_{max} - N_0 \cdot (1 - e^{at})}$$

Esempio:

$$N(t) = \frac{1'000'000 \cdot 50'000 \cdot e^{0,1*(t-1700)}}{1'000'000 - 50'000 \cdot (1 - e^{0,1*(t-1700)})}$$

È la funzione che descrive la crescita di una popolazione che nel 1700 conta 50'000 individui e che vive in un ambiente che dispone di risorse per un milione di individui.



Alla base di questa funzione abbiamo

$$N(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

LA FUNZIONE INVERSA

Per determinare la funzione inversa è necessario, come per ogni funzione, controllare i criteri per la ***biiettività*** della funzione adeguando il dominio e il codominio.

Nel caso delle funzioni "di base"

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = C \cdot a^{g(x)} + B \end{array} \quad \text{o} \quad f\colon \begin{array}{ccc} D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \cdot \log_a\big(g(x)\big) + B \end{array}$$

è facile ricostruire quali sono gli insiemi che permettono di renderle iniettive e suriettive.

Nelle esponenziali il dominio resta $\mathbb{R}$, mentre per il codominio è importante determinare se la funzione è crescente o decrescente e dov'è situato l'asintoto verticale.

Nelle logaritmiche il dominio equivale all'insieme di definizione D_f, mentre il codominio è tutto $\mathbb{R}$.

Nel caso in cui il dominio sia già dato ristretto ($[x_1; x_2]$), è necessario recuperare l'insieme delle immagini ragionando sugli estremi del dominio ($f(x_1)$ e $f(x_2)$).

Ma quando le funzioni non sono più quelle "di base", è più difficile intuire quali sono le condizioni da porre per renderle biiettive. Potrà essere di grande aiuto la loro rappresentazione grafica.