DAPE2000: Matematikk 2000 med statistikk Eksamen 2020 Høst

Kandidatnr: 574
Antall sider: 7

10. Desember 2020

Oppgave 1)

Siden summen av alle sannsynlighetene må bli 1 så er det enkelt å se her at $P(X=2)=0.2$.

a)

$$P(0<X<2)=P(X=1)=0.07$$

b)

Per definisjon på betinget sannsynlighet så har vi at

$$P(X\leq 2|X>1)=\frac{P(X\leq 2\cap X>1)}{P(X>1)}$$

Siden $P(X\leq 2\cap X>1) = P(X>1) = P(X=2)$. Så gir det oss at $P(X\leq 2|X>1)=1$.

c)

Per definisjon av forventningsverdi

$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}x_iP(X=x_i)=1\cdot 0.07+2\cdot 0.2=0.47$$

d)

Per definisjon av standardavviket har vi at

$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu_X^2$$

Hvor

$$E\left(X^2\right)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i^2P(X=x_i)=1\cdot 0.07+4\cdot 0.2=0.87$$

Dette gir at $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2=0.4$ som gir igjen at standardavviket til X er $\sigma\approx 0.63$.

e)

Fra definisjon av forventningsverdi så har vi at

$$E\left(g\left(X\right)\right) = \sum_{x \in X} g(x) P\left(X = x\right)$$

La $g\left(X\right) = a + bX + cX^2$ vi har fra lineæriteten til summen at

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \left(a + bx + cx^2\right) P\left(X = x\right) &= \sum_{x \in X} aP\left(X = x\right) + \sum_{x \in X} bxP\left(X = x\right) + \sum_{x \in X} cx^2 P\left(X = x\right) \\ &= a \sum_{x \in X} P\left(X = x\right) + b \sum_{x \in X}^{\infty} xP\left(X = x\right) + c \sum_{x \in X} x^2 P\left(X = x\right) \end{aligned}$$

Videre har vi også at $\sum_{x \in X} P\left(X = x\right) = 1$. Itillegg til at $E\left(X\right) = \sum_{x \in X} xP\left(X = x\right)$ og $E\left(X^2\right) = \sum_{x \in X} x^2 P\left(X = x\right)$ som tilslutt gir oss:

$$E\left(a + bX + cX^2\right) = a + bE\left(X\right) + cE\left(X^2\right)$$

Oppgave 2)

a)

La X være antall fotoner som blir produsert. Vi har at $X \sim Poisson(\lambda)$ hvor $\lambda = 0.2$. Siden X er poissonfordelt har vi også at sannsynlighetstettheten til X er gitt ved

$$P\left(X = x\right) = \frac{\left(\lambda t\right)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Vi skal finne $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12)$. Slår vi opp i tabellen[1] får vi at $P(X \leq 12) = 0.7916$. Dette gir oss $P(X > 12) = 0.2084$.

b)

For en poissonfordeling har vi at $E\left(X\right) = \mathrm{Var}\left(X\right)$. Dette gir at $\sigma = \sqrt{\lambda t}$ der $t = 50$. Så, standardavviket til X iløpet av 50ns er $\sigma \approx 3.2$.

[1] Institutt for matematiske fag NTNU, "Tabeller og formler i statistikk", 6. opplag 2011, side 20.

c)

Ventetiden T er eksponentialfordelt og har derfor sannsynlighetstettheten

$$P(T = t) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Vi skal nå finne $P(T > 10) = 1 - P(T \leq 10)$. Vi har da at

$$P(T \leq 10) = \lambda \int_0^{10} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = -e^{-\lambda t}\Big|_0^{10} = 1 - e^{-2}$$

Slik at $P(T > 10) = e^{-2} \approx 0.1353$.

d)

Vi har at siden λ er ukjent så vil også både forventningsverdien og variansen av en poissonfordeling også være ukjent. Siden $n \geq 30$ kan vi per sentralgrenseteoremet anta at målingene er normalfordelt. Vi bruker derfor en T-interval med de oppgitte verdiene for $\bar{x} = 8.94$, $s = 3.27$ og $n = 30$. Videre har vi $\alpha = 0.05$ og derfor fra tabellen[2] at $t_{\alpha/2}^{n-1} = 2.045$ at konfidensintervallet vårt er:

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [7.7191, 10.1609]$$

Videre har vi at estimatet $\hat{\lambda} = X/t$ må være forventningsrett. Vi vet også at for en poissonfordeling så er $E(X) = \lambda t$ slik at $\lambda = E(X)\, t$. Siden vi har gjennomsnittet $\bar{x}$ så kan vi estimere $\hat{lambda}$ til å være $\hat{\lambda} = \bar{x}/t = 0.1788$ $(t = 50)$.

e)

Vi gjennomfører hypotese-testen med en T-test med følgende hypoteser:

$$H_0\colon \mu \geq 10 \tag{1}$$
$$H_1\colon \mu < 10 \tag{2}$$

Vi har fra resultatene av $\bar{x}$ og s at

$$t = \frac{\bar{x} - 10}{s/\sqrt{30}} = -1.775$$

[2]Institutt for matematiske fag NTNU, "Tabeller og formler i statistikk", 6. opplag 2011, side 4.

Fra tabellen[3] har vi at $t_\alpha^{n-1} = 2.462$. Siden $t > -t_\alpha^{n-1}$ så har vi ikke tilstrekkelig med grunnlag for å forkaste H_0. Altså, forskeren har ikke tilstrekkelig bevis for at forventet antall fotoner μ som apparatet produserer i løpet av 50 nanosekunder er mindre enn 10.

Oppgave 3)

a)

Egenverdiene til matrisen A er løsningene til den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0$. Egenverdiene til A er derfor $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorene til A finner vi ved å løse $A - \lambda I = 0$ for $\lambda = \lambda_1$ og $\lambda = \lambda_2$.

La $\lambda = \lambda_1$ da har vi at

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir oss egenvektoren $\vec{v}_1 = (1, 2)$.

Tilsvarende for $\lambda = \lambda_2$ har vi at

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir oss egenvektoren $\vec{v}_2 = (-2, 1)$

b)

Med resultatene vi har fra forrige oppgave har vi at matrisen D er gitt ved

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

og matrisen P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan derfor uttrykke A som $A = PDP^{-1}$.

[3] Institutt for matematiske fag NTNU, "Tabeller og formler i statistikk", 6. opplag 2011, side 4.

c)

La $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$. Da har vi at systemet av differensiallikninger oppgitt i oppgaven kan uttrykkes som $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Dette har da den generelle løsningen

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Ved initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (0, 1)$ har vi at den partikulære løsningen $\vec{x}_p(t)$ er $\vec{x}(t)$ gitt ovenfor der c_1 og c_2 er

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen for differensiallikningen som tilfredstiller initialbetingelsen er derfor

$$\vec{x}_p(t) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Oppgave 4)

a)

Siden $\ln(1) = 0$ så kan vi se bort ifra første leddet i taylor-rekken. Det vil si at vi evaluerer summen mellom 1 og ∞ for denne rekken. Videre har vi at

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} \implies f^{(1)}(1) = 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x^2} \implies f^{(2)}(1) = -1 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} \implies f^{(3)}(1) = 2 \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \implies f^{(4)}(1) = -6 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{1}{x^n} \implies f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!
\end{aligned}$$

Dette gir at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

b)

Konvergensradien R for an potensrekke gitt som $\sum b_n(x-c)^n$ er gitt ved

$$R \equiv \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

Konvergensradien R til rekken oppgitt er derfor

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{n+1}{(-1)(-1)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Siden $R = 1$ så vet vi at rekken konvergerer absolutt når $|x - c| < R$ med andre ord $c - R < x < c + R$. Med $c = 1$. Så da har vi at rekken oppgitt konvergerer absolutt når $0 < x < 2$.

c)

Hvis vi nå lar $x = 2$ så har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Her kan vi sjekke konvergens til rekken ved å bruke Dirichlet's test. La $b_n = (-1)^{n+1}$ Da har vi at $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq 1$ for alle N. La videre $a_n = 1/n$ da har vi at $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi har også at $a_{n+1} \leq a_n$ og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Siden alle kravene er tilfredstilt så sier Dirichlet's test så konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ konvergerer. Altså rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

konvergerer når $x = 2$.

d)

Vi har fra den geometriske rekken at

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

når $|r| < 1$. La nå $r = 1 - x$ da har vi at

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$$

Integrerer vi på begge sider får vi

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$$

Videre har vi at $(1-x)^{n+1} = (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}$ slik at vi får

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

Lar vi nå summen gå fra $n = 1$ istedenfor $n = 0$ så har vi at

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

Oppgave 5)

La $\vec{r} = (x, y)$ da vil tangenten til nivåkurven $g(\vec{r}) = 9$ i punktet $\vec{r}_0 = (2, 1)$ være gitt ved

$$\nabla g(\vec{r}_0) \cdot \vec{r} = \nabla g(\vec{r}) \cdot \vec{r}_0$$

Med

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

Så har vi at $\nabla g(\vec{r}_0) = (8, 2)$. Dette gir oss tangenten $8x + 2y = 18$ som kan forenkles til $4x + y = 9$.