OsloMet

Ingeniørfag - Data

DAPE2000 - Matematikk 2000

Samling av løsninger til tidligere eksamener

Løst av:
Uy Quoc Nguyen (s341864)

Innhold

Eksamen 2019 (Kont)

Oppgave 1)

a)

For at $f(x)$ skal være en sannsynlighetsstetthet må den oppfylle følgende kritere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

med den oppgitte $f(x)$ fra oppgaven har vi at:

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x + c\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 + cx\Big|_0^2 = 1 + 2c = 1$$

løser vi for c får vi at $c = 0$.

b)

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

c)

Per derfinisjon har vi at $P(X < 3/2|X < 1) = P(X < 3/2 \cap X < 1)/P(X < 1)$. Siden $3/2 > 1$ så må $P(X < 3/2 \cap X < 1) = P(X < 1)$. Altså har vi at $P(X < 3/2|X < 1) = 1$.

d)

Per definisjon på forventningsverdi $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Oppgave 2)

a)

Sannsynligheten $P(XY \geq 1)$ blir oppfylt for $X = 1$ og $Y = 1$ eller $Y = 2$. Dette gir derfor $P(XYgeq1) = P(1,1) + P(1,2) = 0.35$.

b)

Bruker definisjon av forventningsverdi:

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6 \\ \mu_Y &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1 \end{aligned}$$

c)

Korrelasjonen er definert ved:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

og kovariansen mellom X og Y er gitt ved:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

og igjen har vi at

$$E(XY) = \sum_i \sum_j ijP(x_i, y_i) = 1 \cdot 1 \cdot P(1,1) + 1 \cdot 2 \cdot P(1,2) = 0.6$$

Med verdiene som vi fant tidligere har vi at $\rho(X,Y) = 0$.

d)

Variablene X og Y er ikke uavhengige fordi $P(0,0) = 0.5$ mens $P(X=0)P(Y=0) = 0.12$ (i.e. $P(X,Y) \neq P(X)P(Y)$).

Oppgave 3)

a)

Dersom $\lambda = 10$ (ms^{-1}) så kan vi forvente å motta $1.5\lambda = 15$ på 1.5 ms. Siden X er poisson fordelt så kan vi finne $P(X = 20)$ ved:

$$P(X = 20) = \frac{15^2 0}{20!} e^{-15} \approx 0.04181$$

b)

La T være ventetiden før neste datapakke ankommer svitsjen. Det vi nå ønsker å finne er $P(T > t)$ hvor $t = 0.3$. Ved komplement regelen har vi at $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$. Fra forelesning fant vi ut at T i en poissonprosess er eksponentialtfordelt, så vi har at $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dette gir oss $P(T > t) = e^{-\lambda t} \approx 0.0498$.

Oppgave 4)

Siden vi skal finne en 99% konfidensinterval trenger vi først å finne $z_{\alpha/2}$. Her må $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005$. Slår vi opp i tabellen får vi at $z_{0.005} = 2.576$. Konfidensintervallen for μ blir derfor

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Med $\bar{X} = 17.5$, $\sigma = 3.45$ og $n = 5$ så har vi at det er 99% sikkert at $\mu \in [13.526, 21.474]$

Oppgave 5)

Oppgaven tyder på at den stokatistiske variabelen X er binomisk fordelt med sannsynligheten $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$. Men, siden vi trenger bare å finne første gangen vedkommende inntreffer et vellykket knekket passord så blir det naturlig å at $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. En geometrisk sannsynlighetsfordeling har en sannsynlighetstetthet oppgitt ved $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$. Forventningsverdien $E(X)$ til en geometrisk distribusjon er oppgitt som $E(X) = 1/p$. Dette kan vi bevise ved å bruke definisjonen for forventningsverdi:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$$

Siden p er en konstant kan vi faktorisere den ut av summasjonen:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$$

Siden $1 - p < 1$ så kan vi betrakte følgende geoemtrisk delsum:

$$\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} - 1$$

Vi utfører en variabel bytte og la $\omega = 1 - p$ da har vi at

$$\sum_{x=1}^{\infty}\omega^x = \frac{1}{1-\omega} - 1$$

Vi deriverer begge sider med hensyn på ω og får:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\omega^{x-1} = \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

Siden vi har $\omega = 1 - p$ så har vi derfor at

$$\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2}$$

Forventningsverdien $E(X)$ er derfor

$$E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Bruker vi verdien $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$ får vi at $E(X) = 352112676.1$

Oppgave 6)

a)

Siden B har to distinkte egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så vet vi at B kan diagonaliseres og kan skrive som $B = PDP^{-1}$ hvor matrisen D er gitt som:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dette gir igjen da at

$$B^2 - 3B + 2I = PD^2P^{-1} - 3PDP^{-1} + 2I = 0$$

slik at

$$\begin{aligned} D^2P^{-1} - 3DP^{-1} + 2P^{-1}I &= P^{-1}0 \\ D^2 - 3D + 2P^{-1}IP &= 0P \\ D^2 - 3D + 2I &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - 3\lambda_2 + 2 = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 1) = 0 \\ \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 = (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Egenverdiene for B er derfor $\lambda_1 = 2 \implies \lambda_2 = 1$ eller $\lambda_1 = 1 \implies \lambda_2 = 2$.

b)

Her har vi to måter å løse på. Enten så kan vi prøve å finne egenverdiene til A og sammenligne de med de påståtte egenverdiene til A eller så kan vi bruke at $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = 4$ og $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = -8$.

Dersom man skal finne egenverdiene til A så kan vi starte med å løse $\det(A - \lambda I) = 0$ som gir oss:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)^2 - 12 \\ &= (2 - \lambda)^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ &= (2 - \lambda - 2\sqrt{3})(2 - \lambda + 2\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Herifra er det enkelt å se at $\lambda = 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$. Som stemmer overens med det som har blitt oppgitt i oppgaven.

Dersom vi skulle gå for den andre metoden har vi at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} = 4$$

og

$$\lambda_1\lambda_2 = (2 - 2\sqrt{3})(2 + 2\sqrt{3}) = 2^2 - 12 = -8$$

Som også stemmer overens med det vi har fått oppgitt.

c)

Nå som vi har egenverdiene for A så kan vi finne egenvektorene ved å løse $A-\lambda I$.

La $\lambda_1 = 2(1-\sqrt{3})$ da har vi

$$\begin{pmatrix} 2-2(1-\sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2-2(1-\sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss egenvektoren $\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}, 1)$.

For $\lambda_2 = 2(1+\sqrt{3})$ kan vi følge de samme stegene:

$$\begin{pmatrix} 2-2(1+\sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2-2(1+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som gir oss $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, 1)$.

d)

La $\vec{x}' = (x', y')$. Da kan vi uttrykke systemet som $\vec{x}' = A\vec{x}$ hvor A er matrisen oppgitt over. Den generelle løsningen for et slikt system av differensiallikninger er $\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$ der c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Her er λ egenverdiene til A og $\vec{v}$ er egenvektorene til A. Dette gir oss løsningen:

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Gitt initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1, 1)$ så har vi at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Som gir oss den partikulære løsningen:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Oppgave 7)

a)

For denne rekken kan vi bare bruke en enkel divergenstest:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{8n + 3n^{2/3}} = \frac{5}{8}$$

Dette tilsier at rekken divergerer.

b)

For denne rekken er det lett å tenke seg å bruke integral-testen. Problemet her er at det ikke er så enkel å integrere funksjonen $1/\ln x$. Vi velger derfor å bruke sammenligningstesten. Betrakt nå $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$. La nå $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$. Her er det tydelig at $a_n \le b_n$ fordi $n\ln n \ge \ln n$ for alle verdier $n \ge 1$. Ved å bruke integraltesten på a_n finner vi ut at den divergerer:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln x|_2^\infty \to \infty$$

Siden $a_n \le b_n$ og $\sum a_n$ divergerer så må også $\sum b_n$ divergere, i.e. rekken oppgitt i oppgaven divergerer.

c)

Betrakt først den geometriske rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \qquad |x| < 1$$

Deriverer vi begge sider får vi da

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Oppgave 8)

a)

Ett kritisk punkt $\vec{x}_0$ oppfyller $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Spesifikt for den oppgitte $f(x, y)$ har vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{5}x - 10xe^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}x\left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{5}y - 10ye^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}y\left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right)
\end{aligned}$$

Vi har derfor at $\nabla f(0, 0) = 0$, så $(0, 0)$ er et kritisk punkt. Videre har vi også at for alle punkter som (x, y) som oppfyller $x^2 + y^2 = \ln 50$ så vil $1 - 50e^{-\ln 50} = 0$. Dette betyr også at $\nabla f(x, y) = 0$ som betyr at disse også er kritiske punkter.

b)

For å unngå rot, så lar vi $\theta(0, 0) = x^2 + y^2$. De kritiske punktene vi skal sjekke for nå er når $(x, y) = (0, 0)$ og $\theta(x, y) = \ln 50$. Betrakt først:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{5} - 10e^{-\theta}\left(1 + 2x^2\right)$$

For punktet $(0,0)$ har vi at $\partial^2 f/\partial x^2 = -49/5$. Siden $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$ så ser vi på et potensielt maksimumspunkt. Vi finner også andre derivasjonen av de andre variablene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 20xye^{-\theta}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{5} - 10e^{-\theta}(1+2y^2)\end{aligned}$$

Dette gir følgende Hessian matrise $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49/5 & 0 \\ 0 & -49/5 \end{pmatrix}$$

for punktet $(0,0)$ og dermed det $\mathcal{H} > 0$. Vi har derfor et maksimumspunkt for punktet $(0,0)$.

For $\theta = \ln 50$. Har vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{5}x^2$$

Her er det helt klart at $\partial^2 f/\partial x^2 > 0$ for alle $x \neq 0$. Hessian matrisen her $\mathcal{H}$ blir dermed:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Herifra er det enkelt å se at diskriminanten det $\mathcal{H} = 0$. Det vil si at for $\theta = \ln 50$ så har vi ingen konklusjon via denne testen.

Vi får heller sammenligne verdiene. Vi har $f(0,0) = 5$ mens for $\theta = \ln 50$ har vi

$$f(x_\theta, y_\theta) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\ln 50 = \frac{1}{10}(1 + \ln 50)$$

Herifra har vi at $f(0,0) > f(x_\theta, y_\theta)$. Siden punktet $(0,0)$ var funnet til å være en maksimumspunkt så må (x_θ, y_θ) være minimumspunktene.

Siden funksjonen er definert for alle punkter $x^2 + y^2 \leq 100$. Vi sjekker derfor for randpunktene som oppfyller $x^2 + y^2 = 100$. Når $x^2 + y^2 = 100$ har vi at

$$f(x_{100}, y_{100}) = \frac{5}{e^{100}} + 10 \approx 10$$

Vi har derfor at $(0,0)$ er et lokalt maksimumspunkt, (x_θ, y_θ) er et globalt og lokalt minimumspunkt. Mens, (x_{100}, y_{100}) er et globalt maksimumspunkt.

Eksamen 2019

Oppgave 1)

Legg merke til at

$$P\left(X=0\right)+\ P\left(X=1\right)+\ P\left(X=2\right)=1\qquad\Longrightarrow\qquad P\left(X=2\right)=0.200$$

a)

Sannsynligheten $P\left(X<1\right)=\ P\left(X=0\right)=0.250$.

b)

Her har vi fra betinget sannynlighet:

$$P\left(X>0|X>1\right)=\frac{P\left(X>0\cap X\geq 1\right)}{P\left(X\geq 1\right)}$$

Siden $\{1,2\}\cap\{1,2\}=\{1,2\}$ så har vi

$$P\left(X>0|X>1\right)=\frac{P\left(X\geq 1\right)}{P\left(X\geq 1\right)}=1$$

c)

Per definisjon av forventningsverdi:

$$\mu_X=1\cdot\ P\left(X=1\right)+2\,P\left(X=2\right)=0.950$$

d)

Per definisjon av variasjon $\operatorname{Var}\left(X\right)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(X\right)&=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2\\&=1\cdot P(X=1)+4\cdot P(X=2)-0.950^2=0.4475\end{aligned}$$

Dette gir $\sigma_X=\sqrt{\operatorname{Var}\left(X\right)}=0.6690$

e)

Vi skal nå finne forventningsverdien $E\left((Y-X)^2\right)$:

$$\begin{aligned} E\left((Y-X)^2\right) &= E\left(X^2+Y^2-2XY\right) \\ &= E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)-2E\left(XY\right) \end{aligned}$$

Vi har også fått oppgitt at $\mu_Y = 1.80$ og $\sigma_Y = 1.20$. Siden

$$\begin{aligned} \because \operatorname{Var}(Y) &= E(Y^2)-\mu_Y^2 \\ \therefore E\left(Y^2\right) &= \sigma_Y^2+\mu_Y^2 \end{aligned}$$

Dette gir

$$E\left(\left(Y-X\right)^2\right) = \sigma_X^2+\mu_X^2+\sigma_Y^2+\mu_Y^2-2\,E\left(XY\right)$$

Videre har vi

$$\begin{aligned} \because \rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\ \therefore \operatorname{Cov}(X,Y) &= \sigma_X\sigma_Y\,\rho(X,Y) \end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned} \because \operatorname{Cov}(X,Y) &= E\left(XY\right)-\mu_X\mu_Y \\ \therefore E\left(XY\right) &= \sigma_X\sigma_Y\,\rho(X,Y)+\mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

Dette gir oss:

$$\begin{aligned} E\left((Y-X)^2\right) &= \sigma_X^2+\mu_X^2+\sigma_Y^2+\mu_Y^2-2\sigma_X\sigma_Y\,\rho(X,Y)-2\mu_X\mu_Y \\ &= (\mu_Y-\mu_X)^2+(\sigma_Y-\sigma_X)^2+2\sigma_X\sigma_Y\left(1-\ \rho(X,Y)\right) \approx 1.722 \end{aligned}$$

Oppgave 2)

a)

Siden $X \sim \operatorname{bin}(n,p)$ så er $E\left(X\right)=np$. Dette gir at

$$E\left(\hat{p}\right) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\,E\left(X\right) = p$$

b)

For en binomisk distribusjon så har vi at $\operatorname{Var}\left(X\right)=np(1-p)$. Dette gir at

$$\operatorname{Var}\left(\hat{p}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(X\right) = \frac{p}{n}(1-p)$$

c)

For at en estimator skal kunne bli klassifisert som en god estimator så krever vi at estimatoren er forventningsrett. Siden $E(\hat{p}) = p$ så er dette kravet oppfylt. Videre ønsker vi at variansen skal være så lite som mulig. Dette kravet handler mer om sammenligningen mellom to foreslåtte estimatorer og er ikke noe vi kan undersøke her. Tilslutt ønsker vi at variansen til estimatoren skal gå mot null når $n \to \infty$. Per utregning vist i forrige oppgave så ser vi at dette er tilfellet. Den oppgitte $\hat{p}$ er derfor en god estimator for p.

d)

Gitt $X = 354$ så har vi at $\hat{p} = 354/500$. En 95% ($\alpha = 0.05$) konfidensinterval for p er derfor:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}}{n}(1-\hat{p})}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}}{n}(1-\hat{p})}\right] = [0.6681, 0.7479]$$

e)

Grunnen til at konfidensintervallet oppgitt ovenfor er gyldig er på grunn av sentral grenseteoremet. I henhold til sentral grenseteoremet er forutsetningene at $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 5$. I vårt tilfellet så er $n\hat{p}(1-\hat{p}) = 103.368$ som er mer enn tilstrekkelig for å oppfylle det kravet.

Oppgave 3)

For denne spesifikke problemstillingen velger vi å utføre en T-test fordi σ er ukjent. La

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu \leq 15 \\ H_1: &\quad \mu > 15 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 18.52$$

og

$$s^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = 18.177$$

Dette gir oss en

$$t = \frac{\bar{x} - 15}{s/\sqrt{5}} = 1.846$$

Med en signifikansnivå $\alpha = 0.10$ så har vi

$$t_\alpha^4 = 1.533$$

Siden $t > t_\alpha^4$ så forkaster vi H_0.

Oppgave 4)

a)

Siden matrisen A er en 2×2-matrise så gjelder det at den karakteristiske likningen er

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0\end{aligned}$$

Ved *abc*-formellen får vi at

$$\lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Egenverdiene til A er derfor $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$ og $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$.

For λ_1 så kan vi dedusere egenvektoren $\vec{v}_1$ til A:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

som gir egenvektoren $\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}, 1)$. Ved samme resonnement får vi $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, 1)$. A kan derfor diagonaliseres:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

b)

La D og P være henholdsvis

$$\begin{aligned}D &= \begin{pmatrix}1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da har vi at

$$B = P\left(D^2 + 3D + 2I\right)P^{-1}$$

Vi ser fra uttrykket ovenfor at egenverdiene til B er

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (1-\sqrt{3})^2 + 3(1-\sqrt{3}) + 2 = 9 - 5\sqrt{3} \\ \lambda_2 &= (1+\sqrt{3})^2 + 3(1+\sqrt{3}) + 2 = 9 + 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Dette gir diagonalisering av B:

$$B = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9-5\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 9+5\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

c)

Observer at vi kan uttrykke systemet som $\vec{x}' = A\vec{x}$. Dette gir den generelle løsningen

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

der λ og $\vec{v}$ er henholdsvis egenverdiene og egenvektorene til A. Vi har derfor

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{3})t}$$

Gitt initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (0, 1)$ så har vi at

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løser vi systemet får vi

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dette gir oss den partikulære løsningen:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{3})t}$$

Oppgave 5)

a)

Vi kan uttrykke den oppgitte rekken som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Fra geometriske rekker vet vi at disse rekkene konvergerer til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n} = \frac{1}{1 - 4/5} - \frac{1}{1 - 3/5} = \frac{5}{2}$$

b)

i) Ved divergenstesten så har vi at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2 + (8/9)^n} = 1$$

så konkluderer vi med at rekken vil divergere.

ii) Vi bruker sammenligningstesten: La $b_n = n^{3/2}$ og a_n være den oppgitte følgen. Da har vi at $0 \leq a_n \leq b_n$. Dersom $\sum b_n$ konvergerer så konvergerer $\sum a_n$. Vi kjenner igjen at b_n er en p-rekke med $p < 1$ som tilsier at b_n konvergerer. Dette vil si at den oppgitte rekken vil konvergere.

c)

La $u = t^2$. Da har vi at

$$
\begin{aligned}
\sin u &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\sin t^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{t^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{t^{4n} t^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Dette gir at

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin t^2}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{t^{4n} t^2}{t\,(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{t^{4n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Dette vil si at

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} \, \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n+1} \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{t^{4n+2}}{4n+2} \right]_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2(2n+1)}}{2(2n+1)}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6)

Tangentplanet til en funksjonen $g(x)$ er gitt ved $\langle \nabla g(x,y,z), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = 0$ der $\vec{x} = (x,y,z)$ og i dette tilfellet $\vec{x}_0 = (1,1,5)$.

$$
\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla g(x,y,z), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle &= \frac{\partial g}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(z - z_0) \\
&= 4(x-1) + 4(y-1) + 10(z-5) \\
&= 4x + 4y + 10z - 58 \implies 2x + 2y + 5z = 29
\end{aligned}
$$

Eksamen 2018

Oppgave 1)

Når $T \sim \exp(\mu)$ så er sannsynlighetstettheten gitt ved $f(t) = e^{-t/\mu}/\mu$. Det vil si at generelt

$$P(a < T < b) = \frac{1}{\mu}\int_a^b e^{-t/\mu}\,\mathrm{d}t = e^{-a/\mu} - e^{-b/\mu}$$

Slik at

a)

$$P(T > 90) = P(90 < T < \infty) = e^{-6/5} \approx 0.3012$$

b)

$$P(50 < T < 90) = e^{-2/3} - e^{-6/5} \approx 0.2122$$

c)

$$P(T \geq 150 | T > 90) = \frac{P(T \geq 150 \cap T > 90)}{P(T > 90)} = \frac{P(T \geq 150)}{P(T > 90)} = \frac{e^{-2}}{e^{-6/5}} \approx 0.4493$$

d)

Vi har allerede fått oppgitt forventningen til populasjonen $\mu = 75$. Vi har da at

$$\bar{T} = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} T_n$$

Og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20}E\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right)$$

Siden T_n er uavhengige og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} E(T_n)$$

Siden hver av de målingene $T_n \sim \exp(\mu)$ så har vi at $E(T_n) = \mu$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{21} \setminus 0$. Dette gir

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20} \cdot 20\mu = \mu$$

e)

Per definisjon av $\mathrm{SD}^2(\bar{T})$ så har vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{SD}^2(\bar{T}) &= \mathrm{SD}^2\left(\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2\sum_{n=1}^{20} \mathrm{SD}^2\left(\bar{T}\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2\sum_{n=1}^{20} \sigma^2 \\
&= \frac{1}{400} \cdot 20\mu^2 = \frac{\mu^2}{20}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{SD}(\bar{T}) = \sqrt{\mathrm{SD}^2(\bar{T})} = 16.77$.

f)

Siden $n = 20$ er betraktlig stor nok kan vi utnytte sentral grenseteoremet og anta at $\bar{T} \sim N\big(E(\bar{T}), \mathrm{SD}(\bar{T})\big)$. Med dette, kan vi derfor finne $P(\bar{T} > 90) = 1 - P(\bar{T} \leq 90)$, hvor

$$P(\bar{T} \leq 90) = P\left(\frac{\bar{T} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{90 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(Z \leq 0.8944\right) = 0.8133$$

Dette gir $P\left(\bar{T} > 90\right) = 0.1867$.

g)

Dersom $\bar{T} \sim \exp(\mu)$ så må $E(\bar{T}) = \mathrm{SD}(\bar{T})$. Siden vi fant ut at den ikke var det (i.e. $\bar{T}$ er ikke eksponentialfordelt) så kan vi desverre ikke regne ut en eksakt verdi for $P\left(\bar{T} > 90\right)$ ved å bruke eksponentialfordelingen.

h)

Null-hypotesen formuleres først ut ifra mistanken til problemstillingen som har blitt presentert. Siden mistanken her er at $\mu > 60$ så blir dette formuleringen for H_1. Det naturlige blir da å formulere H_0 som en komplement av H_1 altså $H_0 = \mu \leq 60$.

i)

Her utfører vi en T-test fordi σ er ukjent. Gitt $\bar{t} = 75.3$ og $s = 50.7$ for $n = 30$ målinger så har vi

$$T = \frac{\bar{t} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 1.653$$

Vi har også fra tabellen at $T_\alpha^{n-1} = 1.311$. Siden $T > T_\alpha^{n-1}$ så må ingeniørene konkludere med en $\alpha = 0.1$ signifikant-nivå at det tilstrekkelig med grunnlag å forkaste H_0.

j)

For en 90% konfidensintervall av en T-test er vi ute etter å finne $T_{\alpha/2}^{n-1} = 1.699$. Vi har derfor at konfidensintervallen til μ er

$$\left[\bar{t} - T_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{t} + T_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [59.57, 91.03]$$

Oppgave 2)

a)

Egenvierdiene λ til en matrise A er gitt ved å løse den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Siden A er en 2×2-matrise kan vi benytte oss av at $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$ og at $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$. Dette gir oss følgende:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Løser vi likningen oppgitt ovenfor får vi at $\lambda_1 = \pm 1$. Dette medfølger at $\lambda_2 = \mp 1$.

La $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ til A får vi av å løse likningen:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Med $\lambda_1 = -1$ får vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss $\vec{v}_1 = (1, -1)$. Ved samme argumentasjon for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi at $\vec{v}_2 = (1, 1)$.

Med egenverdiene og egenvektorene funnet over kan vi danne matrisen P og matrisen D slik at vi kan uttrykke A som $A = PDP^{-1}$. Hvor

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nå diagonalisere $B = A^7 + A^5 + I$ som følger:

$$B = P\left(D^7 + D^5 + I\right)P^{-1}$$

egenverdiene til B blir her $\lambda_1 = (-1)^7 + (-1)^5 + 1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Dette gir diagonaliseringen av B:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Omskriver vi systemet får vi

$$\begin{aligned} x' &= 0x + 1y \\ y' &= 1x + 0y \end{aligned}$$

Her ser vi helt klart at vi kan uttrykke likningssystemet som

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

der A er matrisen oppgitt i oppgaven.

Vi identifiserer at vi har et tilfelle av en homogent likning. For å løse dette må vi finne egenverdiene λ og egenvektorene $\vec{v}$ til A. Dette har vi gjort tidligere. Systemet vil derfor ha en generell løsning gitt ved

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$$

hvor c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Med egenverdiene for λ_1 og λ_2 og henholdsvis egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som vi tidligere fant for matrise A har vi derfor at løsningen for systemet av differensiallikninger er gitt ved

$$\vec{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$$

Ved initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1,1)$ har vi derfor at

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Den partikulære løsningen er derfor

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Oppgave 3)

a)

i) Rekken er en geometrisk rekke med felles forholdet $1/e < 1$. Dette tyder på at rekken vil konvergere mot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-1/e} - 1 = \frac{1}{e-1}$$

ii) Her kan vi benytte oss av forholdstesten: La $a_n = (-3)^n/n$ da har vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-3)^n} = -\frac{3n}{n+1}$$

Vi får herifra at $\lim_{n\to\infty} |-3n/(n+1)| = 3 > 1$. Vi konkluderer derfor at rekken divergerer.

b)

Vi vet at Maclaurin rekken til e^t er gitt ved:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Dette gir oss at

$$\begin{aligned} f(x) = 2xe^{x^2} &= 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Konvergensradien til følgende rekke er

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2} \right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| \to \infty$$

Oppgave 4)

a)

Tangentplanet er gitt ved $\langle \nabla f, \Delta\vec{x}\rangle$. La $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - z^2 = 0$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \Delta\vec{x}\rangle &= 2x_0(x-x_0) + 3y_0^2(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) \\
&= 2(x-1) + 3(y-1) - 4(z-2) \\
&= 2x + 3y - 4z = -3
\end{aligned}$$

b)

Retningsvektoren måler hvor mye g øker når vi beveger oss i retningen $\vec{u}$. Retningsvektoren er gitt ved:

$$D_{\vec{u}} = \left\langle \nabla g, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Spesifikt for indreproduktet av et vektorrom så har du også at

$$D_{\vec{u}} = \|\nabla g\| \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \cos\theta = \|\nabla g\| \cos\theta$$

Siden ∇g alltid peker mot der g vokser fortest, la $\nabla g \parallel \vec{u}$. Da vil $\|\nabla g\|$ være den største verdien av den retningsderiverte. Videre har vi også at

$$\|\nabla g\|^2 = \langle \nabla g, \nabla g\rangle$$

Med

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= -2xe^{-(x^2+y^2)} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= -2ye^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

så har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4x^2e^{-2(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-2(x^2+y^2)} = 4(x^2+y^2)e^{-2(x^2+y^2)}$$

La $\theta = x^2 + y^2$ da har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4\theta e^{-2\theta}$$

som gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} 4\theta e^{-2\theta} = 4\left(1 - 2\theta^2\right) e^{-2\theta}$$

Vi har at $\theta^2 = 1/2$ er et kritisk punkt for funksjonen over. Andre derivasjonstesten

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} 4\theta e^{-2\theta} = 16(\theta - 1)e^{-2\theta}$$

er negativ for $\theta = 1/\sqrt{2}$ som tyder på at $\theta^2 = 1/2$ er et topp punkt for $4\theta e^{-2\theta}$. Det vil si at alle punktene (x,y) som $x^2 + y^2 = 1/2$ danner en sirkel om origo med radius $\sqrt{2}/2$ gir størst mulig verdi for den retningsderiverte av $g(x,y)$.

Eksamen 2016

Oppgave 1)

a)

Siden

$$P\left(X=0\right)+\,P\left(X=1\right)+\,P\left(X=2\right)=1$$

Så må $P\left(X=2\right)=0.23$.

b)

$$P\left(X<2\right)=\,P\left(X=0\right)+\,P\left(X=1\right)=0.77$$

c)

$$P\left(X<2|X\geq 1\right)=\frac{P\left(X<2\cap X\geq 1\right)}{P\left(X\geq 1\right)}=\frac{P\left(X=1\right)}{P\left(X=1\right)+\,P\left(X=2\right)}=0.66$$

d)

Per definisjon på variansen av Y:

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\,\mathrm{Var}\left(2X+5\right)=4\,\mathrm{Var}\left(X\right)$$

Siden

$$\mathrm{Var}\left(X\right)=\,E\left(X^2\right)-\left[\,E\left(X\right)\right]^2$$

Hvor

$$E\left(X\right)=\sum_{x=0}^{2}x\,P\left(X=x\right)=0.9$$

og

$$E\left(X^2\right)=\sum_{x=0}^{2}x^2\,P\left(X=x\right)=1.36$$

Dette gir $\mathrm{Var}\left(X\right)=0.55$. Dette gir $\sigma=2\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}=1.483$.

Oppgave 2)

a)

Gitt at $T \sim \exp\mu$ så har vi at sannsynlighetstettheten $f(t) = e^{-x/\mu}/\mu$. Slikt at

$$P(T > 13) = \frac{1}{\mu}\int_{13}^{\infty} e^{-x/\mu}\,\mathrm{d}x = -e^{-x/\mu}\Big|_{13}^{\infty} = e^{-13/\mu} \approx 0.2167$$

b)

Ved å bruke den samme utregningen fra oppgaven ovenfor så har vi

$$P(T > a) = e^{-a/\mu} = 0.7$$

løser vi for a får vi $a = -\mu \ln 0.7 \approx 3.032$.

Oppgave 3)

a)

Det man må merke seg her er at det har ikke blitt oppgitt at målingene er normalfordelt eller ikke. Vanligvis må dette være et krav for at vi kan gjennomføre en T-test eller at antall målinger er tilstrekkelig for å benytte seg av sentralgrenseteoremet. Men, ihenhold til den informasjonen så gjennomfører vi avlikevel testen. La hypotese-testen vår være formulert ved:

$$\begin{aligned} H_0: &\qquad \mu \leq 15 \\ H_1: &\qquad \mu > 15 \end{aligned}$$

Her har vi at

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 18.04 \\ s^2 &= \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = 23.133 \end{aligned}$$

Dette gir oss

$$t = \frac{\bar{x} - 15}{s/\sqrt{5}} = 1.4133$$

Ved et signifikants-nivå $\alpha = 0.1$ har vi at $t_{0.1}^{4} = 1.533$. Siden $t < t_{\alpha}^{n-1}$ så må vi konkludere med å behold null-hypotesen H_0.

b)

Som nevnt tidligere; ingen steder i oppgaveteksten ble det avklart at målingene var normalfordelte. Dersom målingene ikke er normalfordelte krever vi at $n \geq 30$ for at hypotese-testen skal være gyldig. Uten noen antagelser så er ikke hypotesetesten utført i denne oppgaven gyldig.

Oppgave 4)

a)

Vi finner først egenverdiene til A. Vi har at den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

har løsningene $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Med følgende egenverdier har vi henholdsvis egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ gitt ved

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektoren $\vec{v}_1 = (-1, 2)$ og tilsvarende $\vec{v}_2 = (1, 2)$ ved samme resonnement. Vi har derfor at $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

Følgende system av differensiallikninger kan uttrykkes som $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$ der A er matrisen oppgitt i oppgaven og $\vec{b} = (1, 2)$. Generelle løsningen av følgende system er gitt ved

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} - A^{-1}\vec{b}$$

eller i verdi

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Med initialbetingelsen $\vec{x}(0) = \vec{0}$ så har vi at

$$P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}$$

Legg merke til at $\vec{b} = \vec{v}_2$. Dette betyr at $A^{-1}\vec{b} = \vec{b}/\det(A)$. Så

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} P^{-1}\vec{b} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen blir derfor

$$\vec{x}_p = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Oppgave 5)

a)

i) Her er det enkelt å se at rekken ikke konvergerer: Siden $n!$ vokser fortere enn e^n så vil følgen $n!e^{-n} \to \infty$ når $n \to \infty$. Men om man skal bruke en test her ville forholdstesten gjøre jobben. La $a_n = n!e^{-n}$. Da har vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!(n+1)e^{-n-1}}{n!e^{-n}} = \frac{n+1}{e}$$

Dette gir $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$ når $n \to \infty$. Altså rekken konvergerer ikke.

ii) Bruker vi forholdstesten her også med $a_n = n^2e^{-n}$ ser vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2e^{-n-1}}{n^2e^{-n}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2e}$$

Dette gir at $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = e^{-1} < 1$. Per forholdstesten så konvergerer rekken.

iii) Her bruker vi Dirichlets test for å avgjøre konvergens. La $b_n = (-1)^n$ da har vi at $|\sum b_n| \leq 1$ for alle n. Videre lar vi $a_n = 1/(n+1)$. Her oppfyller vi også kravet om at $a_n \geq 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ og $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Per Dirichlets test så konvergerer rekken.

b)

Maclaurin rekken er gitt ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Vi har vet at

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

så

$$\frac{2x}{1-x^2} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+1}$$

Her er det enkelt å se at konvergensradien er $R = 1$ siden $b_n = 2$ for alle n.

Oppgave 6)

Den retningsderiverte til g i punktet $(1, 2, 1)$ i retning $\vec{u} = (1, 1, 1)$ er gitt ved

$$D_{\vec{u}}g(1,2,1) = \left\langle \nabla g(1,2,1), \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Med

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{2}y \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2z \end{aligned}$$

Så har vi at $\nabla g(1, 2, 1) = (2, 1, 2)$. Videre har vi at

$$\frac{\vec{u}}{\|+vecu\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$$

slik at

$$D_{\vec{u}}g(1,2,1) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Videre har vi tangentplanet til $g(x, y, z) = 3$ i punktet $(1, 2, 1)$ er gitt ved planet:

$$2x + y + 2z = 6$$