

OSLOMET

INGENIØRFAG - DATA

DAPE2000 - MATEMATIKK 2000

Samling av løsninger til tidligere eksamener

Løst av:

Uy Quoc NGUYEN (s341864)

Innhold

Eksamen 2019 (Kont)	2
Eksamen 2019	9
Eksamen 2018 (Kont)	15
Eksamen 2018	20
Eksamen 2017 (Kont)	26
Eksamen 2016	31
I Diagonalisering og Systemer av differensiallikninger	39

Eksamen 2019 (Kont)

Oppgave 1)

a)

For at $f(x)$ skal være en sannsynlighetsstetthet må den oppfylle følgende kriterie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

med den oppgitte $f(x)$ fra oppgaven har vi at:

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x + c dx = \left. \frac{1}{4}x^2 + cx \right|_0^2 = 1 + 2c = 1$$

løser vi for c får vi at $c = 0$.

b)

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x dx = \left. \frac{1}{4}x^2 \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

c)

Per derfinisjon har vi at $P(X < 3/2 | X < 1) = P(X < 3/2 \cap X < 1) / P(X < 1)$. Siden $3/2 > 1$ så må $P(X < 3/2 \cap X < 1) = P(X < 1)$. Altså har vi at $P(X < 3/2 | X < 1) = 1$.

d)

Per definisjon på forventningsverdi $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \left. \frac{1}{6}x^3 \right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Oppgave 2)

a)

Sannsynligheten $P(XY \geq 1)$ blir oppfylt for $X = 1$ og $Y = 1$ eller $Y = 2$. Dette gir derfor $P(XY \geq 1) = P(1, 1) + P(1, 2) = 0.35$.

b)

Bruker definisjon av forventningsverdi:

$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6 \\ \mu_Y &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1\end{aligned}$$

c)

Korrelasjonen er definert ved:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

og kovariansen mellom X og Y er gitt ved:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

og igjen har vi at

$$E(XY) = \sum_i \sum_j ij P(x_i, y_j) = 1 \cdot 1 \cdot P(1, 1) + 1 \cdot 2 \cdot P(1, 2) = 0.6$$

Med verdiene som vi fant tidligere har vi at $\rho(X, Y) = 0$.

d)

Variablene X og Y er ikke uavhengige fordi $P(0, 0) = 0.5$ mens $P(X = 0)P(Y = 0) = 0.12$ (i.e. $P(X, Y) \neq P(X)P(Y)$).

Oppgave 3)

a)

Dersom $\lambda = 10 \text{ (ms}^{-1}\text{)}$ så kan vi forvente å motta $1.5\lambda = 15$ på 1.5 ms. Siden X er poisson fordelt så kan vi finne $P(X = 20)$ ved:

$$P(X = 20) = \frac{15^{20}}{20!} e^{-15} \approx 0.04181$$

b)

La T være ventetiden før neste datapakke ankommer svitsjen. Det vi nå ønsker å finne er $P(T > t)$ hvor $t = 0.3$. Ved komplement regelen har vi at $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$. Fra forelesning fant vi ut at T i en poissonprosess er eksponentialtfordelt, så vi har at $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dette gir oss $P(T > t) = e^{-\lambda t} \approx 0.0498$.

Oppgave 4)

Siden vi skal finne en 99% konfidensinterval trenger vi først å finne $z_{\alpha/2}$. Her må $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005$. Slår vi opp i tabellen får vi at $z_{0.005} = 2.576$. Konfidensintervallen for μ blir derfor

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Med $\bar{X} = 17.5$, $\sigma = 3.45$ og $n = 5$ så har vi at det er 99% sikkert at $\mu \in [13.526, 21.474]$

Oppgave 5)

Oppgaven tyder på at den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med sannsynligheten $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$. Men, siden vi trenger bare å finne første gangen vedkommende inntreffer et vellykket knekket passord så blir det naturlig å at $X \sim \text{Geom}(p)$. En geometrisk sannsynlighetsfordeling har en sannsynlighetstetthet oppgitt ved $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$. Forventningsverdien $E(X)$ til en geometrisk distribusjon er oppgitt som $E(X) = 1/p$. Dette kan vi bevise ved å bruke definisjonen for forventningsverdi:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1 - p)^{x-1}$$

Siden p er en konstant kan vi faktorisere den ut av summasjonen:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp(1 - p)^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x(1 - p)^{x-1}$$

Siden $1 - p < 1$ så kan vi betrakte følgende geometrisk delsum:

$$\sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^x = \frac{1}{1 - (1 - p)} - 1$$

Vi utfører en variabel bytte og la $\omega = 1 - p$ da har vi at

$$\sum_{x=1}^{\infty} \omega^x = \frac{1}{1 - \omega} - 1$$

Vi deriverer begge sider med hensyn på ω og får:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\omega^{x-1} = \frac{1}{(1 - \omega)^2}$$

Siden vi har $\omega = 1 - p$ så har vi derfor at

$$\sum_{x=1}^{\infty} x(1 - p)^{x-1} = \frac{1}{p^2}$$

Forventningsverdien $E(X)$ er derfor

$$E(X) = p \sum_{x=1}^{\infty} x(1 - p)^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Bruker vi verdien $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$ får vi at $E(X) = 352112676.1$

Oppgave 6)

a)

Siden B har to distinkte egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så vet vi at B kan diagonaliseres og kan skrive som $B = PDP^{-1}$ hvor matrisen D er gitt som:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dette gir igjen da at

$$B^2 - 3B + 2I = PD^2P^{-1} - 3PDP^{-1} + 2I = 0$$

slik at

$$\begin{aligned} D^2P^{-1} - 3DP^{-1} + 2P^{-1}I &= P^{-1}0 \\ D^2 - 3D + 2P^{-1}IP &= 0P \\ D^2 - 3D + 2I &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 2 &= (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 1) = 0 \\ \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 &= (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Egenverdiene for B er derfor $\lambda_1 = 2 \implies \lambda_2 = 1$ eller $\lambda_1 = 1 \implies \lambda_2 = 2$.

b)

Her har vi to måter å løse på. Enten så kan vi prøve å finne egenverdiene til A og sammenligne de med de påståtte egenverdiene til A eller så kan vi bruke at $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) = 4$ og $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = -8$.

Dersom man skal finne egenverdiene til A så kan vi starte med å løse $\det(A - \lambda I) = 0$ som gir oss:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)^2 - 12 \\ &= (2 - \lambda)^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ &= (2 - \lambda - 2\sqrt{3})(2 - \lambda + 2\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Herifra er det enkelt å se at $\lambda = 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$. Som stemmer overens med det som har blitt oppgitt i oppgaven.

Dersom vi skulle gå for den andre metoden har vi at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} = 4$$

og

$$\lambda_1\lambda_2 = (2 - 2\sqrt{3})(2 + 2\sqrt{3}) = 2^2 - 12 = -8$$

Som også stemmer overens med det vi har fått oppgitt.

c)

Nå som vi har egenverdiene for A så kan vi finne egenvektorene ved å løse $A - \lambda I$.

La $\lambda_1 = 2(1 - \sqrt{3})$ da har vi

$$\begin{pmatrix} 2 - 2(1 - \sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2 - 2(1 - \sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss egenvektoren $\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}, 1)$.

For $\lambda_2 = 2(1 + \sqrt{3})$ kan vi følge de samme stegene:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2(1 + \sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2 - 2(1 + \sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som gir oss $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, 1)$.

d)

La $\vec{x}' = (x', y')$. Da kan vi uttrykke systemet som $\vec{x}' = A\vec{x}$ hvor A er matrisen oppgitt over. Den generelle løsningen for et slikt system av differensiallikninger er $\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$ der c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

Her er λ egenverdiene til A og \vec{v} er egenvektorene til A . Dette gir oss løsningen:

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Gitt initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1, 1)$ så har vi at

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Som gir oss den partikulære løsningen:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Oppgave 7)

a)

For denne rekken kan vi bare bruke en enkel divergenstest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{8n + 3n^{2/3}} = \frac{5}{8}$$

Dette tilsier at rekken divergerer.

b)

For denne rekken er det lett å tenke seg å bruke integral-testen. Problemet her er at det ikke er så enkel å integrere funksjonen $1/\ln x$. Vi velger derfor å bruke sammenligningstesten. Betrakt nå $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. La nå $b_n = \frac{1}{\ln n}$. Her er det tydelig at $a_n \leq b_n$ fordi $n \ln n \geq \ln n$ for alle verdier $n \geq 1$. Ved å bruke integraltesten på a_n finner vi ut at den divergerer:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \ln x \Big|_2^\infty \rightarrow \infty$$

Siden $a_n \leq b_n$ og $\sum a_n$ divergerer så må også $\sum b_n$ divergere, i.e. rekken oppgitt i oppgaven divergerer.

c)

Betrakt først den geometriske rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \quad |x| < 1$$

Deriverer vi begge sider får vi da

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Oppgave 8)

a)

Ett kritisk punkt \vec{x}_0 oppfyller $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Spesifikt for den oppgitte $f(x, y)$ har vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{5}x - 10xe^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}x \left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{5}y - 10ye^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}y \left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right) \end{aligned}$$

Vi har derfor at $\nabla f(0, 0) = 0$, så $(0, 0)$ er et kritisk punkt. Videre har vi også at for alle punkter som (x, y) som oppfyller $x^2 + y^2 = \ln 50$ så vil $1 - 50e^{-\ln 50} = 0$. Dette betyr også at $\nabla f(x, y) = 0$ som betyr at disse også er kritiske punkter.

b)

For å unngå rot, så lar vi $\theta(0, 0) = x^2 + y^2$. De kritiske punktene vi skal sjekke for nå er når $(x, y) = (0, 0)$ og $\theta(x, y) = \ln 50$. Betrakt først:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{5} - 10e^{-\theta} (1 + 2x^2)$$

For punktet $(0,0)$ har vi at $\partial^2 f / \partial x^2 = -49/5$. Siden $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$ så ser vi på et potensielt maksimumspunkt. Vi finner også andre derivasjonen av de andre variablene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 20xye^{-\theta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{5} - 10e^{-\theta}(1 + 2y^2)\end{aligned}$$

Dette gir følgende Hessian matrise \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49/5 & 0 \\ 0 & -49/5 \end{pmatrix}$$

for punktet $(0,0)$ og dermed $\det \mathcal{H} > 0$. Vi har derfor et maksimumspunkt for punktet $(0,0)$.

For $\theta = \ln 50$. Har vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{5}x^2$$

Her er det helt klart at $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$ for alle $x \neq 0$. Hessian matrisen her \mathcal{H} blir dermed:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Herifra er det enkelt å se at diskriminanten $\det \mathcal{H} = 0$. Det vil si at for $\theta = \ln 50$ så har vi ingen konklusjon via denne testen.

Vi får heller sammenligne verdiene. Vi har $f(0,0) = 5$ mens for $\theta = \ln 50$ har vi

$$f(x_\theta, y_\theta) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \ln 50 = \frac{1}{10} (1 + \ln 50)$$

Herifra har vi at $f(0,0) > f(x_\theta, y_\theta)$. Siden punktet $(0,0)$ var funnet til å være en maksimumspunkt så må (x_θ, y_θ) være minimumspunktene.

Siden funksjonen er definert for alle punkter $x^2 + y^2 \leq 100$. Vi sjekker derfor for randpunktene som oppfyller $x^2 + y^2 = 100$. Når $x^2 + y^2 = 100$ har vi at

$$f(x_{100}, y_{100}) = \frac{5}{e^{100}} + 10 \approx 10$$

Vi har derfor at $(0,0)$ er et lokalt maksimumspunkt, (x_θ, y_θ) er et globalt og lokalt minimumspunkt. Mens, (x_{100}, y_{100}) er et globalt maksimumspunkt.

Eksamen 2019

Oppgave 1)

Legg merke til at

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 \implies P(X = 2) = 0.200$$

a)

Sannsynligheten $P(X < 1) = P(X = 0) = 0.250$.

b)

Her har vi fra betinget sannynlighet:

$$P(X > 0 | X > 1) = \frac{P(X > 0 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$

Siden $\{1, 2\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$ så har vi

$$P(X > 0 | X > 1) = \frac{P(X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = 1$$

c)

Per definisjon av forventningsverdi:

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = 0.950$$

d)

Per definisjon av variasjon $\text{Var}(X)$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 1 \cdot P(X = 1) + 4 \cdot P(X = 2) - 0.950^2 = 0.4475 \end{aligned}$$

Dette gir $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0.6690$

e)

Vi skal nå finne forventningsverdien $E((Y - X)^2)$:

$$\begin{aligned} E((Y - X)^2) &= E(X^2 + Y^2 - 2XY) \\ &= E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) \end{aligned}$$

Vi har også fått oppgitt at $\mu_Y = 1.80$ og $\sigma_Y = 1.20$. Siden

$$\begin{aligned} \because \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 \\ \therefore E(Y^2) &= \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \end{aligned}$$

Dette gir

$$E((Y - X)^2) = \sigma_X^2 + \mu_X^2 + \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 - 2E(XY)$$

Videre har vi

$$\begin{aligned} \because \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \therefore \text{Cov}(X, Y) &= \sigma_X \sigma_Y \rho(X, Y) \end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned} \because \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \\ \therefore E(XY) &= \sigma_X \sigma_Y \rho(X, Y) + \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

Dette gir oss:

$$\begin{aligned} E((Y - X)^2) &= \sigma_X^2 + \mu_X^2 + \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 - 2\sigma_X \sigma_Y \rho(X, Y) - 2\mu_X \mu_Y \\ &= (\mu_Y - \mu_X)^2 + (\sigma_Y - \sigma_X)^2 + 2\sigma_X \sigma_Y (1 - \rho(X, Y)) \approx 1.722 \end{aligned}$$

Oppgave 2)

a)

Siden $X \sim \text{bin}(n, p)$ så er $E(X) = np$. Dette gir at

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = p$$

b)

For en binomisk distribusjon så har vi at $\text{Var}(X) = np(1 - p)$. Dette gir at

$$\text{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X) = \frac{p}{n}(1 - p)$$

c)

For at en estimator skal kunne bli klassifisert som en god estimator så krever vi at estimatoren er forventningsrett. Siden $E(\hat{p}) = p$ så er dette kravet oppfylt. Videre ønsker vi at variansen skal være så lite som mulig. Dette kravet handler mer om sammenligningen mellom to foreslåtte estimatorene og er ikke noe vi kan undersøke her. Tilslutt ønsker vi at variansen til estimatoren skal gå mot null når $n \rightarrow \infty$. Per utregning vist i forrige oppgave så ser vi at dette er tilfellet. Den oppgitte \hat{p} er derfor en god estimator for p .

d)

Gitt $X = 354$ så har vi at $\hat{p} = 354/500$. En 95% ($\alpha = 0.05$) konfidensinterval for p er derfor:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}}{n}(1 - \hat{p})}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}}{n}(1 - \hat{p})} \right] = [0.6681, 0.7479]$$

e)

Grunnen til at konfidensintervallet oppgitt ovenfor er gyldig er på grunn av sentral grenseteoremet. I henhold til sentral grenseteoremet er forutsetningene at $n\hat{p}(1 - \hat{p}) > 5$. I vårt tilfellet så er $n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 103.368$ som er mer enn tilstrekkelig for å oppfylle det kravet.

Oppgave 3)

For denne spesifikke problemstillingen velger vi å utføre en T -test fordi σ er ukjent. La

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \mu \leq 15 \\ H_1: & \quad \mu > 15 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 18.52$$

og

$$s^2 = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 18.177$$

Dette gir oss en

$$t = \frac{\bar{x} - 15}{s/\sqrt{5}} = 1.846$$

Med en signifikansnivå $\alpha = 0.10$ så har vi

$$t_{\alpha}^4 = 1.533$$

Siden $t > t_{\alpha}^4$ så forkaster vi H_0 .

Oppgave 4)

a)

Siden matrisen A er en 2×2 -matrise så gjelder det at den karakteristiske likningen er

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0\end{aligned}$$

Ved abc -formellen får vi at

$$\lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Eigenverdiene til A er derfor $\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}$ og $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$.

For λ_1 så kan vi dedusere egenvektoren \vec{v}_1 til A :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir egenvektoren $\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}, 1)$. Ved samme resonnement får vi $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, 1)$. A kan derfor diagonaliseres:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b)

La D og P være henholdsvis

$$\begin{aligned}D &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da har vi at

$$B = P(D^2 + 3D + 2I)P^{-1}$$

Vi ser fra uttrykket ovenfor at eigenverdiene til B er

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (1 - \sqrt{3})^2 + 3(1 - \sqrt{3}) + 2 = 9 - 5\sqrt{3} \\ \lambda_2 &= (1 + \sqrt{3})^2 + 3(1 + \sqrt{3}) + 2 = 9 + 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Dette gir diagonalisering av B :

$$B = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 - 5\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 9 + 5\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c)

Observer at vi kan uttrykke systemet som $\vec{x}' = A\vec{x}$. Dette gir den generelle løsningen

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

der λ og \vec{v} er henholdsvis egenverdiene og egenvektorene til A . Vi har derfor

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{3})t}$$

Gitt initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (0, 1)$ så har vi at

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løser vi systemet får vi

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dette gir oss den partikulære løsningen:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{3})t}$$

Oppgave 5)

a)

Vi kan uttrykke den oppgitte rekken som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Fra geometriske rekker vet vi at disse rekkene konvergerer til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n} = \frac{1}{1 - 4/5} - \frac{1}{1 - 3/5} = \frac{5}{2}$$

b)

i) Ved divergenstesten så har vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + (8/9)^n} = 1$$

så konkluderer vi med at rekken vil divergere.

ii) Vi bruker sammenligningstesten: La $b_n = n^{3/2}$ og a_n være den oppgitte følgen. Da har vi at $0 \leq a_n \leq b_n$. Dersom $\sum b_n$ konvergerer så konvergerer $\sum a_n$. Vi kjenner igjen at b_n er en p -rekke med $p < 1$ som tilsier at b_n konvergerer. Dette vil si at den oppgitte rekken vil konvergere.

c)

La $u = t^2$. Da har vi at

$$\begin{aligned}\sin u &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sin t^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n} t^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned}\frac{\sin t^2}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n} t^2}{t(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Dette vil si at

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n+1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{t^{4n+2}}{4n+2} \right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2(2n+1)}}{2(2n+1)}\end{aligned}$$

Oppgave 6)

Tangentplanet til en funksjonen $g(x)$ er gitt ved $\langle \nabla g(x, y, z), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle = 0$ der $\vec{x} = (x, y, z)$ og i dette tilfellet $\vec{x}_0 = (1, 1, 5)$.

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\langle \nabla g(x, y, z), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle &= \frac{\partial g}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(z - z_0) \\ &= 4(x - 1) + 4(y - 1) + 10(z - 5) \\ &= 4x + 4y + 10z - 58 \implies 2x + 2y + 5z = 29\end{aligned}$$

Eksamen 2018 (Kont)

Oppgave 1)

a)

Gitt at $X \sim \text{bin}(n, p)$ så er $P(X = x)$ gitt ved

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

for $p = 0.2$, $x = 5$ og $n = 10$ har vi at $P(X = 5) \approx 0.0264$.

b)

Ved komplementregelen har vi at $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$. Der $P(X \leq 4) = 0.9672$ som gir $P(X > 4) = 0.0328$.

c)

Ved betinget sannsynlighet har vi at

$$P(X > 4 | X \geq 4) = \frac{P(X > 4 \cap X \geq 4)}{P(X \geq 4)} = \frac{P(X > 4)}{P(X \geq 4)} = 1$$

Videre har vi at

$$P(X \geq 4) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0.1209$$

Dette gir at $P(X > 4 | X \geq 4) = 0.2713$

d)

Ved sentralgrenseteoremet har vi for store $n \geq 30$ at X blir tilnærmet normalfordelt. Dette gir $\mu = np = 67.2$ og $\sigma^2 = 53.76$ eller $\sigma = 7.33$.

e)

Her har vi at

$$P(X < 55) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{55 - 67.2}{7.33}\right) = \Phi(Z < -1.66) = 0.0465$$

f)

Vi finner først $\text{Var}(Z)$:

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = 1$$

Det også si at $\text{SD}(Z) = 1$.

g)

Vi velger estimatoren $\hat{p} = X/n = 0.134$. Videre har vi signifikansnivået $\alpha = 0.05$ slikt at $z_{\alpha/2} = 1.960$. Slikt at konfidensintervallet blir $[0.098, 0.170]$.

h)

Lengden L er gitt ved

$$L^2 = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

Løser vi for n når $L^2 = 0.04^2$ får vi

$$n = 4z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{L^2}$$

som gir oss $n \geq 1115$.

i)

Oppsettet av hypotesetesten vår blir følgende:

$$H_0: p \leq 0.1$$

$$H_1: p > 0.1$$

For en P -test har vi at

$$z = \frac{0.134 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{336}}} = 2.0774$$

For en signifikansnivå $\alpha = 0.1$ har vi $z_{\alpha} = 1.282$. Siden $z > z_{\alpha}$ så konkluderer vi med at H_0 skal forkastes. Altså det er grunnlag for å påstå at $p > 0.1$.

Oppgave 2)

Siden det ble oppgitt at X og Y er uavhengige så har vi at $\rho(X, Y) = 0$. Per definisjon av korrelasjon har vi

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

hvor

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$$

og $\rho(X, Y) = 0 \implies \text{Cov}(X, Y) = 0$. Løser vi likningen over for $E(XY)$ får vi derfor at $E(XY) = E(X) E(Y)$.

Oppgave 3)

a)

Vi finner først egenverdiene λ til A . Dette gjør vi ved å løse følgende karakteristiske likning:

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - 4 = 0$$

Dette gir $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 2$. Egenvektorene \vec{v} er derfor henholdsvis for $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som gir egenvektoren $\vec{v}_1 = (-1, 2)$. Ved samme argument får vi derfor også $\vec{v}_1 = (1, 2)$ for egenverdien $\lambda_2 = 2$. Vi kan derfor diagonalisere matrisen A som $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gitt $B = A^3 + 2A + I$ så kan vi diagonalisere B som $B = P(D^3 + 2D + I)P^{-1}$ der

$$(D^3 + 2D + I) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

b)

Systemet av differensiallikninger kan vi uttrykke som $\vec{x}' = A\vec{x}$ der $\vec{x} = (x, y)$ og A er matrisen gitt i forrige oppgave. Den generelle løsningen er for slike homogene systemer gitt ved

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

For vårt tilfelle har vi derfor den generelle løsningen

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Den partikulære løsningen \vec{x}_p finner vi ved å løse for c_1 og c_2 av den homogene løsningen over når vi oppfyller initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1, 1)$. Løsningene c_1 og c_2 er her

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen vår er derfor:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Oppgave 4)

a)

i) Vi kjenner igjen her at vi har en geometrisk rekke som konvergerer mot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2}{e^2 - 1}$$

ii) Vi bruker Dirichlets test her for å avgjøre konvergens fordi den oppfyller for $b_n = 1/3n$ at $b_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ og $b_{n+1} \leq b_n$. Vi har derfor at den oppgitte rekken konvergerer.

b)

Vi vet allerede at Maclaurin rekken til e^t er gitt ved

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

For $t = x^2 - 1$ har vi at

$$2x^2 e^{x^2-1} = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2 - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^2 (x^2 - 1)^n$$

Her er det enkelt å se at konvergensradien $R \rightarrow \infty$.

Oppgave 5)

a)

Tangentplanet til flaten $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - z^2 = 0$ i punktet $(1, 1, 2)$. Er gitt ved

$$\langle \nabla f, \Delta \vec{x} \rangle = 2(x - 1) + 4(y - 1) - 4(z - 2) = 0$$

eller

$$x + 2y - 2z = -1$$

b)

Retningsvektoren måler hvor mye g øker når vi beveger oss i retningen \vec{u} . Retningsvektoren er gitt ved:

$$D_{\vec{u}} = \left\langle \nabla g, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Spesifikt for indreproduktet av et vektorrom så har du også at

$$D_{\vec{u}} = \|\nabla g\| \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \cos \theta = \|\nabla g\| \cos \theta$$

Siden ∇g alltid peker mot der g vokser fortest, la $\nabla g \parallel \vec{u}$. Da vil $\|\nabla g\|$ være den største verdien av den retningsderiverte. Videre har vi også at

$$\|\nabla g\|^2 = \langle \nabla g, \nabla g \rangle$$

Med

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= -2xe^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2ye^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

så har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4x^2e^{-2(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-2(x^2+y^2)} = 4(x^2 + y^2)e^{-2(x^2+y^2)}$$

La $\theta = x^2 + y^2$ da har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4\theta e^{-2\theta}$$

som gir

$$\frac{d}{d\theta} 4\theta e^{-2\theta} = 4(1 - 2\theta^2) e^{-2\theta}$$

Vi har at $\theta^2 = 1/2$ er et kritisk punkt for funksjonen over. Andre derivasjonstesten

$$\frac{d^2}{d\theta^2} 4\theta e^{-2\theta} = 16(\theta - 1)e^{-2\theta}$$

er negativ for $\theta = 1/\sqrt{2}$ som tyder på at $\theta^2 = 1/2$ er et topp punkt for $4\theta e^{-2\theta}$. Det vil si at alle punktene (x, y) som $x^2 + y^2 = 1/2$ danner en sirkel om origo med radius $\sqrt{2}/2$ gir størst mulig verdi for den retningsderiverte av $g(x, y)$.

Eksamen 2018

Oppgave 1)

Når $T \sim \exp(\mu)$ så er sannsynlighetstettheten gitt ved $f(t) = e^{-t/\mu}/\mu$. Det vil si at generelt

$$P(a < T < b) = \frac{1}{\mu} \int_a^b e^{-t/\mu} dt = e^{-a/\mu} - e^{-b/\mu}$$

Slik at

a)

$$P(T > 90) = P(90 < T < \infty) = e^{-6/5} \approx 0.3012$$

b)

$$P(50 < T < 90) = e^{-2/3} - e^{-6/5} \approx 0.2122$$

c)

$$P(T \geq 150 | T > 90) = \frac{P(T \geq 150 \cap T > 90)}{P(T > 90)} = \frac{P(T \geq 150)}{P(T > 90)} = \frac{e^{-2}}{e^{-6/5}} \approx 0.4493$$

d)

Vi har allerede fått oppgitt forventningen til populasjonen $\mu = 75$. Vi har da at

$$\bar{T} = \frac{1}{20} \sum_{n=1}^{20} T_n$$

Og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20} E\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right)$$

Siden T_n er uavhengige og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20} \sum_{n=1}^{20} E(T_n)$$

Siden hver av de målingene $T_n \sim \exp(\mu)$ så har vi at $E(T_n) = \mu$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{21} \setminus 0$. Dette gir

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20} \cdot 20\mu = \mu$$

e)

Per definisjon av $SD^2(\bar{T})$ så har vi

$$\begin{aligned} SD^2(\bar{T}) &= SD^2\left(\frac{1}{20} \sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\ &= \frac{1}{400} SD^2\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\ &= \frac{1}{400} SD^2 \sum_{n=1}^{20} SD^2(\bar{T}) \\ &= \frac{1}{400} SD^2 \sum_{n=1}^{20} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{400} \cdot 20\mu^2 = \frac{\mu^2}{20} \end{aligned}$$

Dette gir $SD(\bar{T}) = \sqrt{SD^2(\bar{T})} = 16.77$.

f)

Siden $n = 20$ er betraktlig stor nok kan vi utnytte sentral grenseteoremet og anta at $\bar{T} \sim N(E(\bar{T}), SD(\bar{T}))$. Med dette, kan vi derfor finne $P(\bar{T} > 90) = 1 - P(\bar{T} \leq 90)$, hvor

$$P(\bar{T} \leq 90) = P\left(\frac{\bar{T} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{90 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi(Z \leq 0.8944) = 0.8133$$

Dette gir $P(\bar{T} > 90) = 0.1867$.

g)

Dersom $\bar{T} \sim \exp(\mu)$ så må $E(\bar{T}) = SD(\bar{T})$. Siden vi fant ut at den ikke var det (i.e. \bar{T} er ikke eksponentialfordelt) så kan vi desverre ikke regne ut en eksakt verdi for $P(\bar{T} > 90)$ ved å bruke eksponentialfordelingen.

h)

Null-hypotesen formuleres først ut ifra mistanken til problemstillingen som har blitt presentert. Siden mistanken her er at $\mu > 60$ så blir dette formuleringen for H_1 . Det naturlige blir da å formulere H_0 som en komplement av H_1 altså $H_0 = \mu \leq 60$.

i)

Her utfører vi en T -test fordi σ er ukjent. Gitt $\bar{t} = 75.3$ og $s = 50.7$ for $n = 30$ målinger så har vi

$$T = \frac{\bar{t} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 1.653$$

Vi har også fra tabellen at $T_{\alpha}^{n-1} = 1.311$. Siden $T > T_{\alpha}^{n-1}$ så må ingeniørene konkludere med en $\alpha = 0.1$ signifikant-nivå at det tilstrekkelig med grunnlag å forkaste H_0 .

j)

For en 90% konfidensintervall av en T -test er vi ute etter å finne $T_{\alpha/2}^{n-1} = 1.699$. Vi har derfor at konfidensintervallen til μ er

$$\left[\bar{t} - T_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{t} + T_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = [59.57, 91.03]$$

Oppgave 2)

a)

Egenverdiene λ til en matrise A er gitt ved å løse den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Siden A er en 2×2 -matrise kan vi benytte oss av at $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ og at $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$. Dette gir oss følgende:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Løser vi likningen oppgitt ovenfor får vi at $\lambda_1 = \pm 1$. Dette medfører at $\lambda_2 = \mp 1$.

La $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Egenvektorene \vec{v}_1 og \vec{v}_2 til A får vi av å løse likningen:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Med $\lambda_1 = -1$ får vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss $\vec{v}_1 = (1, -1)$. Ved samme argumentasjon for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi at $\vec{v}_2 = (1, 1)$.

Med egenverdiene og egenvektorene funnet over kan vi danne matrisen P og matrisen D slik at vi kan uttrykke A som $A = PDP^{-1}$. Hvor

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nå diagonalisere $B = A^7 + A^5 + I$ som følger:

$$B = P(D^7 + D^5 + I)P^{-1}$$

egenverdiene til B blir her $\lambda_1 = (-1)^7 + (-1)^5 + 1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Dette gir diagonaliseringen av B :

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Omskriver vi systemet får vi

$$\begin{aligned} x' &= 0x + 1y \\ y' &= 1x + 0y \end{aligned}$$

Her ser vi helt klart at vi kan uttrykke likningssystemet som

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

der A er matrisen oppgitt i oppgaven.

Vi identifiserer at vi har et tilfelle av en homogen likning. For å løse dette må vi finne egenverdiene λ og egenvektorene \vec{v} til A . Dette har vi gjort tidligere. Systemet vil derfor ha en generell løsning gitt ved

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$$

hvor c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Med egenverdiene for λ_1 og λ_2 og henholdsvis egenvektorene \vec{v}_1 og \vec{v}_2 som vi tidligere fant for matrise A har vi derfor at løsningen for systemet av differensiallikninger er gitt ved

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Ved initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1, 1)$ har vi derfor at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen er derfor

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Oppgave 3)

a)

- i) Rekken er en geometrisk rekke med felles forholdet $1/e < 1$. Dette tyder på at rekken vil konvergere mot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/e} - 1 = \frac{1}{e - 1}$$

- ii) Her kan vi benytte oss av forholdstesten: La $a_n = (-3)^n/n$ da har vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-3)^n} = -\frac{3n}{n+1}$$

Vi får herifra at $\lim_{n \rightarrow \infty} |-3n/(n+1)| = 3 > 1$. Vi konkluderer derfor at rekken divergerer.

b)

Vi vet at Maclaurin rekken til e^t er gitt ved:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Dette gir oss at

$$\begin{aligned} f(x) = 2xe^{x^2} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Konvergensradien til følgende rekke er

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| \rightarrow \infty$$

Oppgave 4)

a)

Tangentplanet er gitt ved $\langle \nabla f, \Delta \vec{x} \rangle$. La $f(x, y, z) = x^2 + y^3 - z^2 = 0$. Da har vi at

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, \Delta \vec{x} \rangle &= 2x_0(x - x_0) + 3y_0^2(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) \\ &= 2(x - 1) + 3(y - 1) - 4(z - 2) \\ &= 2x + 3y - 4z = -3\end{aligned}$$

b)

Retningsvektoren måler hvor mye g øker når vi beveger oss i retningen \vec{u} . Retningsvektoren er gitt ved:

$$D_{\vec{u}} = \left\langle \nabla g, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Spesifikt for indreproduktet av et vektorrom så har du også at

$$D_{\vec{u}} = \|\nabla g\| \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \cos \theta = \|\nabla g\| \cos \theta$$

Siden ∇g alltid peker mot der g vokser forst, la $\nabla g \parallel \vec{u}$. Da vil $\|\nabla g\|$ være den største verdien av den retningsderiverte. Videre har vi også at

$$\|\nabla g\|^2 = \langle \nabla g, \nabla g \rangle$$

Med

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= -2xe^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2ye^{-(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

så har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4x^2e^{-2(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-2(x^2+y^2)} = 4(x^2 + y^2)e^{-2(x^2+y^2)}$$

La $\theta = x^2 + y^2$ da har vi

$$\|\nabla g\|^2 = 4\theta e^{-2\theta}$$

som gir

$$\frac{d}{d\theta} 4\theta e^{-2\theta} = 4(1 - 2\theta^2) e^{-2\theta}$$

Vi har at $\theta^2 = 1/2$ er et kritisk punkt for funksjonen over. Andre derivasjonstesten

$$\frac{d^2}{d\theta^2} 4\theta e^{-2\theta} = 16(\theta - 1)e^{-2\theta}$$

er negativ for $\theta = 1/\sqrt{2}$ som tyder på at $\theta^2 = 1/2$ er et topp punkt for $4\theta e^{-2\theta}$. Det vil si at alle punktene (x, y) som $x^2 + y^2 = 1/2$ danner en sirkel om origo med radius $\sqrt{2}/2$ gir størst mulig verdi for den retningsderiverte av $g(x, y)$.

Eksamen 2017 (Kont)

Oppgave 1)

Siden $X \sim \text{Bin}(11, 0.4)$ så er $\sigma^2 = np(1-p) = 2.64 \implies \sigma = 1.624$

Oppgave 2)

Gitt sannsynlighetene i oppgaven så kan man dedusere at $P(X = 2) = 0.23$. Per definisjon på forventningsverdi har vi at

$$E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = 0.9$$

Oppgave 3)

a)

Vi har at $X \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$. Derfor har vi at

$$P(X > 34) = P\left(\frac{X - \mu_A}{\sigma_A} > \frac{34 - \mu_A}{\sigma_A}\right) = 1 - \Phi(Z \leq 0.67)$$

Per tabell får vi at $\Phi(Z \leq 0.67) = 0.7486$ som gir $P(X > 34) = 0.2514$.

b)

Bruker vi definisjonen på betinget sannsynlighet har vi at

$$P(Y > 47 | Y \geq 42) = \frac{P(Y > 47 \cap Y \geq 42)}{P(Y \geq 42)}$$

Her ser vi fort at $P(Y > 47 \cap Y \geq 42) = P(Y > 47)$. Bruker vi komplement regelen får vi at

$$P(Y > 47 | Y \geq 42) = \frac{1 - P(Y \leq 47)}{1 - P(Y \leq 42)}$$

Videre har vi at siden $Y \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ så lar vi

$$Z = \frac{Y - \mu_B}{\sigma_B}$$

Og bruker verdiene vi finner i tabellen for standardnormalfordelingene:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 47) &= \Phi(Z \leq 0.22) = 0.5871 \\ P(Y \leq 42) &= \Phi(Z \leq -0.32) = 0.3745 \end{aligned}$$

Dette gir oss $P(Y > 47 | Y \geq 42) = 0.6601$

c)

Vi skal finne $P(Y > X) = P(Y - X > 0) = 1 - P(Y - X \leq 0)$. La nå $W = Y - X$ da har vi at $E(W) = \mu_W = \mu_B - \mu_A = 15$. Itillegg til $\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = \sigma_B^2 + \sigma_A^2 = 122.49 \implies \sigma_W = 11.07$. Vi har nå at $W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$. La nå

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}$$

Da har vi at

$$P(Y - X \leq 0) = P(W \leq 0) = \Phi(Z \leq -1.36) = 0.0869$$

som gir $P(Y > X) = 0.9131$.

d)

Vi bytter om og lar $W = X + Y$ som gir $\mu_W = \mu_A + \mu_B = 75$ videre har vi siden $\rho(X, Y) = 0.7$ så har vi at $\text{Var}(W) = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2 \text{Cov}(X, Y)$. Hvor per definisjon $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_A \sigma_B \rho(X, Y)$. Dette gir $\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = 200.61 \implies \sigma_W = 14.2$. La nå

$$Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}$$

Da har vi at $P(W > 80) = 1 - P(W \leq 80)$ der

$$P(W \leq 80) = \Phi(Z \leq 0.35) = 0.6368$$

Dette gir $P(W > 80) = 0.3632$.

e)

Her ønsker vi å finne t -intervallet siden det antas at μ_A og σ_A er ukjent. Videre har vi fortsatt at $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$. For et t -intervallet med $\alpha = 0.1$ og 9 grader av frihet gir oss:

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}^9 \frac{s}{\sqrt{10}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}^9 \frac{s}{\sqrt{10}} \right] = [29.27, 37.73]$$

f)

Hypotese-test oppsettet blir som følger:

$$H_0: \mu_A \leq 30$$

$$H_1: \mu_A > 30$$

Med en signifikans-nivå på $\alpha = 0.10$ så har vi

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 1.52$$

Tabellen viser at $t_{0.1}^9 = 1.383$. Siden $t > t_{\alpha}^{n-1}$ så er det tilstrekkelig med grunnlag for å påstå at $\mu_A > 30$.

Oppgave 4)

Gitt at en 3×3 -matrise A har 3 distinkte egenverdier så vet vi at A kan diagonaliseres og derfor uttrykkes som $A = PDP^{-1}$. Dette tilsier at $A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \implies P(D^3 - 3D^2 + 2D)P^{-1} = 0$. Dette betyr at løsningene til $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$ er egenverdiene til A . Vi ser at

$$\begin{aligned}\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0\end{aligned}$$

Dermed er egenverdiene til A gitt ved $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 2$. Siden vi bare skulle finne en eller annen matrise med tre distinkte egenverdier så blir den enkleste matrisen være diagonal-matrisen

$$A = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Siden $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(A)$ så vil ingen matriser hvor en av eller flere egenverdier lik 0 være invertibel.

a)

Vi har at systemet av differensiallikninger kan uttrykkes som

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da vil A ha egenverdiene gitt av løsningen til $\lambda^2 - 4 = 0$. La $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 2$. Da vil vi få følgende egenvektorer: Siden

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Derfor har vi for λ_1 tilsvarende egenvektor $\vec{v}_1 = (-2, 1)$. Ved samme resonnement får vi at for λ_2 har vi tilsvarende egenvektor $\vec{v}_2 = (2, 1)$. Den generelle løsningen for systemet av differensiallikninger er derfor:

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Gitt initialbetingelsen har vi at $\vec{x}(0) = (1, 1)$. Vi får her da at c_1 og c_2 er

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen \vec{x}_p gitt av initialbetingelsen er derfor:

$$\vec{x} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Oppgave 5)

a)

Rekken $\sum n5^{-n}$ kan også uttrykkes som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

La $x = 1/5$ da vet vi at den geometriske rekken $\sum x^n$ konvergerer mot

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Deriverer vi på begge sider får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Siden $x = 1/5$ så har vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5n5^{-n} = \frac{25}{16}$$

Dette vil si at

$$\sum_{n=0}^{\infty} n5^{-n} = \frac{5}{16}$$

i) Denne rekken kan uttrykkes som

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$

Dette er altså en p -rekke. Siden $p > 1$ så konvergerer rekken.

ii) Denne rekken oppfyller kravene for en Dirichlets test. La $b_n = 1/\ln(\ln n)$ da har vi at $b_n \geq 0$ for alle $n \geq 3$. Itillegg har vi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ og $b_{n+1} \leq b_n$. Per Dirichlet's test så vil denne rekken konvergere.

b)

Vi vet at Taylor rekken til e^x om et punkt $x = a$ er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n$$

Det betyr at Taylor rekken om $x = 3$ av $1 + e^x$ er

$$1 + e^x = 1 + e^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n$$

Her er det enkelt å se at konvergensradien $R \rightarrow \infty$.

Oppgave 6)

Tangentplanet til g til nivåflaten $g(x, y, z) = 11$ i punktet $(2, 1, 3)$ er gitt ved

$$\langle \nabla g, \Delta \vec{x} \rangle = (x - 2) + 2(y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

eller etter en opprydning $x + 2y + 6z = 22$.

Eksamen 2016

Oppgave 1)

a)

Siden

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

Så må $P(X = 2) = 0.23$.

b)

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.77$$

c)

$$P(X < 2 | X \geq 1) = \frac{P(X < 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = 0.66$$

d)

Per definisjon på variansen av Y :

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2X + 5) = 4 \text{Var}(X)$$

Siden

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Hvor

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 x P(X = x) = 0.9$$

og

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^2 x^2 P(X = x) = 1.36$$

Dette gir $\text{Var}(X) = 0.55$. Dette gir $\sigma = 2\sqrt{\text{Var}(X)} = 1.483$.

Oppgave 2)

a)

Gitt at $T \sim \exp \mu$ så har vi at sannsynlighetstettheten $f(t) = e^{-x/\mu}/\mu$. Slikt at

$$P(T > 13) = \frac{1}{\mu} \int_{13}^{\infty} e^{-x/\mu} dx = -e^{-x/\mu} \Big|_{13}^{\infty} = e^{-13/\mu} \approx 0.2167$$

b)

Ved å bruke den samme utregningen fra oppgaven ovenfor så har vi

$$P(T > a) = e^{-a/\mu} = 0.7$$

løser vi for a får vi $a = -\mu \ln 0.7 \approx 3.032$.

Oppgave 3)

a)

Det man må merke seg her er at det har ikke blitt oppgitt at målingene er normalfordelt eller ikke. Vanligvis må dette være et krav for at vi kan gjennomføre en T -test eller at antall målinger er tilstrekkelig for å benytte seg av sentralgrenseteoremet. Men, ihenhold til den informasjonen så gjennomfører vi avlikevel testen. La hypotese-testen vår være formulert ved:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \mu \leq 15 \\ H_1: & \quad \mu > 15 \end{aligned}$$

Her har vi at

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 18.04 \\ s^2 &= \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 23.133 \end{aligned}$$

Dette gir oss

$$t = \frac{\bar{x} - 15}{s/\sqrt{5}} = 1.4133$$

Ved et signifikants-nivå $\alpha = 0.1$ har vi at $t_{0.1}^4 = 1.533$. Siden $t < t_{\alpha}^{n-1}$ så må vi konkludere med å behold null-hypotesen H_0 .

b)

Som nevnt tidligere; ingen steder i oppgaveteksten ble det avklart at målingene var normalfordelte. Dersom målingene ikke er normalfordelte krever vi at $n \geq 30$ for at hypotese-testen skal være gyldig. Uten noen antagelser så er ikke hypotesetesten utført i denne oppgaven gyldig.

Oppgave 4)

a)

Vi finner først egenverdiene til A . Vi har at den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

har løsningene $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Med følgende egenverdier har vi henholdsvis egenvektorene \vec{v}_1 og \vec{v}_2 gitt ved

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gir egenvektoren $\vec{v}_1 = (-1, 2)$ og tilsvarende $\vec{v}_2 = (1, 2)$ ved samme resonnering. Vi har derfor at $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

Følgende system av differensiallikninger kan uttrykkes som $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$ der A er matrisen oppgitt i oppgaven og $\vec{b} = (1, 2)$. Generelle løsningen av følgende system er gitt ved

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} - A^{-1} \vec{b}$$

eller i verdi

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Med initialbetingelsen $\vec{x}(0) = \vec{0}$ så har vi at

$$P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -A^{-1} \vec{b}$$

Legg merke til at $\vec{b} = \vec{v}_2$. Dette betyr at $A^{-1} \vec{b} = \vec{b} / \det(A)$. Så

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} P^{-1} \vec{b} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den partikulære løsningen blir derfor

$$\vec{x}_p = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5)

a)

- i) Her er det enkelt å se at rekken ikke konvergerer: Siden $n!$ vokser fortere enn e^n så vil følgen $n!e^{-n} \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$. Men om man skal bruke en test her ville forholdstesten gjøre jobben. La $a_n = n!e^{-n}$. Da har vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!(n+1)e^{-n-1}}{n!e^{-n}} = \frac{n+1}{e}$$

Dette gir $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow \infty$ når $n \rightarrow \infty$. Altså rekken konvergerer ikke.

- ii) Bruker vi forholdstesten her også med $a_n = n^2e^{-n}$ ser vi at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2e^{-n-1}}{n^2e^{-n}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2e}$$

Dette gir at $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = e^{-1} < 1$. Per forholdstesten så konvergerer rekken.

- iii) Her bruker vi Dirichlets test for å avgjøre konvergens. La $b_n = (-1)^n$ da har vi at $|\sum b_n| \leq 1$ for alle n . Videre lar vi $a_n = 1/(n+1)$. Her oppfyller vi også kravet om at $a_n \geq 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Per Dirichlets test så konvergerer rekken.

b)

Maclaurin rekken er gitt ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Vi har vet at

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

så

$$\frac{2x}{1-x^2} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+1}$$

Her er det enkelt å se at konvergensradien er $R = 1$ siden $b_n = 2$ for alle n .

Oppgave 6)

Den retningsderiverte til g i punktet $(1, 2, 1)$ i retning $\vec{u} = (1, 1, 1)$ er gitt ved

$$D_{\vec{u}}g(1, 2, 1) = \left\langle \nabla g(1, 2, 1), \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Med

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{1}{2}y \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2z\end{aligned}$$

Så har vi at $\nabla g(1, 2, 1) = (2, 1, 2)$. Videre har vi at

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$$

slik at

$$D_{\vec{u}}g(1, 2, 1) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Videre har vi tangentplanet til $g(x, y, z) = 3$ i punktet $(1, 2, 1)$ er gitt ved planet:

$$2x + y + 2z = 6$$

Oppgave 7)

a)

i) Følgende rekke kan uttrykkes som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Her kan vi bruke sammenligningstesten: La $b_n = \frac{1}{n^2}$ og la derfor $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Vi har nå at $b_n \geq 0$ og $a_n \geq 0$. Videre har vi også at $b_n \geq a_n$ for alle $n \geq 1$. Vi kjenner igjen at b_n er en p -rekke og konvergerer siden $p \geq 1$. Per sammenligningstesten så konvergerer også a_n , altså, rekken konvergerer.

ii) Her kan vi bruke forholdstesten: Med den gitte rekken har vi følgende:

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n} \implies a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Det er enkelt å se at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)^2}{2(n+3)(n+1)} \right| = \frac{1}{2}$$

Vi har derfor per forholdstesten at rekken konvergerer absolutt.

iii) Her har vi en altererende følge. Dette tyder fort på at det er Dirichlets test vi må bruke. La $b_n = (-1)^n$ da har vi at $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq 1$ for alle N . La $a_n = 1/n$. Da har vi at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$, $a_i \geq a_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Da sier Dirichlets test at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ konvergerer. Så, den oppgitte rekken konvergerer.

b)

For en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ så er konvergensradien R definert som

$$R \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

For den oppgitte rekken i oppgaven har vi at $b_n = (n+1)^2$ og $c = 0$. Dette gir

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right|^2 = 1$$

Konvergensradien R for den oppgitte rekken er derfor $R = 1$.

c)

Vi skal finne Maclaurin rekken til $f(x) = x^2 e^x + x$. Vi vet tidligere at Maclaurin rekken til e^x er gitt ved:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Det vil si at vi kan uttrykke $f(x)$ som

$$f(x) = x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

Oppgave 8)

a)

La $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ og la \vec{u} være en vektor. Da er den retningsderiverte $D_{\vec{u}}f(\vec{r})$ av f på punktet $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ i retningen til \vec{u} gitt ved

$$D_{\vec{u}}f(\vec{r}) = \left\langle \nabla f(\vec{r}), \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Gitt $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ så har vi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2z \end{aligned}$$

med $\vec{r} = (1, 1, 1)$ så har vi $\nabla f(\vec{r}) = (2, 2, 2)$. Videre har vi at

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$D_{\vec{u}}g(\vec{r}) = 2\sqrt{2}$$

b)

La $\vec{x} = (x, y, z)$ og la $\vec{r} = (1, 1, 1)$. Vi fant tidligere at $\nabla g(\vec{r}) = (2, 2, 2)$. Dette gir oss tangentplanet for nivåkurven $g(x, y, z) = 3$ gitt ved

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(\vec{r}), \vec{x} - \vec{r} \rangle &= 0 \\ 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

c)

Dersom et vilkårlig punkt \vec{p} er et kritisk punkt for en funksjon $f(x, y, z)$ så må det være slikt at $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$. Dette ser vi tydelig fra tidligere beregnelse av $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Det er klart her at $(0, 0, 0)$ er et kritisk punkt fordi $\nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Det er også enkelt å se at dette er den eneste kritiske punktet siden det ikke er noen andre punkter som oppfyller kriteriet.

Så, den eneste kritiske punktet vi har er $(0, 0, 0)$ for å identifisere hva slags kritisk punkt dette er bruker vi den 2. partielle derivative testen: Vi finner først Hessian matrisen \mathcal{H} av g :

$$\mathcal{H}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diskriminanten er her $D \equiv \det(\mathcal{H}(x, y, z)) = 8$. Vi ser også ifra matrisen at $\partial^2 g / \partial x^2 > 0$. Dette tilsier per andre partialle derivasjons testen at dette er et lokalt minimum.