OsloMet

Ingeniørfag - Data

DAPE2000 - Matematikk 2000

Samling av løsninger til tidligere eksamener

Løst av:
Uy Quoc Nguyen (s341864)

Innhold

Eksamen 2019 (Kont)

Statistikk

Oppgave 1)

a)

For at $f(x)$ skal være en sannsynlighetsstetthet må den oppfylle følgende kritere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

med den oppgitte $f(x)$ fra oppgaven har vi at:

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x + c\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 + cx\Big|_0^2 = 1 + 2c = 1$$

løser vi for c får vi at $c = 0$.

b)

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

c)

Per derfinisjon har vi at $P(X < 3/2|X < 1) = P(X < 3/2 \cap X < 1)/P(X < 1)$. Siden $3/2 > 1$ så må $P(X < 3/2 \cap X < 1) = P(X < 1)$. Altså har vi at $P(X < 3/2|X < 1) = 1$.

d)

Per definisjon på forventningsverdi $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Oppgave 2)

a)

Sannsynligheten $P(XY \geq 1)$ blir oppfylt for $X = 1$ og $Y = 1$ eller $Y = 2$. Dette gir derfor $P(XY geq 1) = P(1,1) + P(1,2) = 0.35$.

b)

Bruker definisjon av forventningsverdi:

$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6 \\ \mu_Y &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1\end{aligned}$$

c)

Korrelasjonen er definert ved:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

og kovariansen mellom X og Y er gitt ved:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

og igjen har vi at

$$E(XY) = \sum_i \sum_j ij P(x_i, y_i) = 1 \cdot 1 \cdot P(1, 1) + 1 \cdot 2 \cdot P(1, 2) = 0.6$$

Med verdiene som vi fant tidligere har vi at $\rho(X, Y) = 0$.

d)

Variablene X og Y er ikke uavhengige fordi $P(0, 0) = 0.5$ mens $P(X = 0)P(Y = 0) = 0.12$ (i.e. $P(X, Y) \neq P(X)P(Y)$).

Oppgave 3)

a)

Dersom $\lambda = 10$ (ms^{-1}) så kan vi forvente å motta $1.5\lambda = 15$ på 1.5 ms. Siden X er poisson fordelt så kan vi finne $P(X = 20)$ ved:

$$P(X = 20) = \frac{15^2 0}{20!} e^{-15} \approx 0.04181$$

b)

La T være ventetiden før neste datapakke ankommer svitsjen. Det vi nå ønsker å finne er $P(T > t)$ hvor $t = 0.3$. Ved komplement regelen har vi at $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$. Fra forelesning fant vi ut at T i en poissonprosess er eksponentialtfordelt, så vi har at $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dette gir oss $P(T > t) = e^{-\lambda t} \approx 0.0498$.

Oppgave 4)

Siden vi skal finne en 99% konfidensinterval trenger vi først å finne $z_{\alpha/2}$. Her må $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005$. Slår vi opp i tabellen får vi at $z_{0.005} = 2.576$. Konfidensintervallen for μ blir derfor

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Med $\bar{X} = 17.5$, $\sigma = 3.45$ og $n = 5$ så har vi at det er 99% sikkert at $\mu \in [13.526, 21.474]$

Oppgave 5)

Oppgaven tyder på at den stokatistiske variabelen X er binomisk fordelt med sannsynligheten $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$. Men, siden vi trenger bare å finne første gangen vedkommende inntreffer et vellykket knekket passord så blir det naturlig å at $X \sim \text{Geom}(p)$. En geometrisk sannsynlighetsfordeling har en sannsynlighetstetthet oppgitt ved $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$. Forventningsverdien $E(X)$ til en geometrisk distribusjon er oppgitt som $E(X) = 1/p$. Dette kan vi bevise ved å bruke definisjonen for forventningsverdi:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$$

Siden p er en konstant kan vi faktorisere den ut av summasjonen:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$$

Siden $1 - p < 1$ så kan vi betrakte følgende geoemtrisk delsum:

$$\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} - 1$$

Vi utfører en variabel bytte og la $\omega = 1 - p$ da har vi at

$$\sum_{x=1}^{\infty}\omega^x = \frac{1}{1-\omega} - 1$$

Vi deriverer begge sider med hensyn på ω og får:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\omega^{x-1} = \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

Siden vi har $\omega = 1 - p$ så har vi derfor at

$$\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2}$$

Forventningsverdien $E(X)$ er derfor

$$E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Bruker vi verdien $p = 2.84 \cdot 10^{-9}$ får vi at $E(X) = 352112676.1$

Matematikk

Oppgave 6)

a)

Siden B har to distinkte egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så vet vi at B kan diagonaliseres og kan skrive som $B = PDP^{-1}$ hvor matrisen D er gitt som:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dette gir igjen da at

$$B^2 - 3B + 2I = PD^2P^{-1} - 3PDP^{-1} + 2I = 0$$

slik at

$$\begin{aligned} D^2P^{-1} - 3DP^{-1} + 2P^{-1}I &= P^{-1}0 \\ D^2 - 3D + 2P^{-1}IP &= 0P \\ D^2 - 3D + 2I &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss følgende likningssystem:

$$\lambda_1^2 - 3\lambda_2 + 2 = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 1) = 0$$
$$\lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 = (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 1) = 0$$

Egenverdiene for B er derfor $\lambda_1 = 2 \implies \lambda_2 = 1$ eller $\lambda_1 = 1 \implies \lambda_2 = 2$.

b)

Her har vi to måter å løse på. Enten så kan vi prøve å finne egenverdiene til A og sammenligne de med de påståtte egenverdiene til A eller så kan vi bruke at $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = 4$ og $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = -8$.

Dersom man skal finne egenverdiene til A så kan vi starte med å løse $\det(A - \lambda I) = 0$ som gir oss:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2-\lambda)^2 - 12 \\ &= (2-\lambda)^2 - (2\sqrt{3})^2 \\ &= (2 - \lambda - 2\sqrt{3})(2 - \lambda + 2\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Herifra er det enkelt å se at $\lambda = 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$. Som stemmer overens med det som har blitt oppgitt i oppgaven.

Dersom vi skulle gå for den andre metoden har vi at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} = 4$$

og

$$\lambda_1\lambda_2 = (2 - 2\sqrt{3})(2 + 2\sqrt{3}) = 2^2 - 12 = -8$$

Som også stemmer overens med det vi har fått oppgitt.

c)

Nå som vi har egenverdiene for A så kan vi finne egenvektorene ved å løse $A - \lambda I$.

La $\lambda_1 = 2(1-\sqrt{3})$ da har vi

$$\begin{pmatrix} 2-2(1-\sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2-2(1-\sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss egenvektoren $\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}, 1)$.

For $\lambda_2 = 2(1+\sqrt{3})$ kan vi følge de samme stegene:

$$\begin{pmatrix} 2-2(1+\sqrt{3}) & 6 \\ 2 & 2-2(1+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som gir oss $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, 1)$.

d)

La $\vec{x}' = (x', y')$. Da kan vi uttrykke systemet som $\vec{x}' = A\vec{x}$ hvor A er matrisen oppgitt over. Den generelle løsningen for et slikt system av differensiallikninger er $\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$ der c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Her er λ egenverdiene til A og $\vec{v}$ er egenvektorene til A. Dette gir oss løsningen:

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Gitt initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1, 1)$ så har vi at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Som gir oss den partikulære løsningen:

$$\vec{x}_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1-\sqrt{3})t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(1+\sqrt{3})t}$$

Oppgave 7)

a)

For denne rekken kan vi bare bruke en enkel divergenstest:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{8n + 3n^{2/3}} = \frac{5}{8}$$

Dette tilsier at rekken divergerer.

b)

For denne rekken er det lett å tenke seg å bruke integral-testen. Problemet her er at det ikke er så enkel å integrere funksjonen $1/\ln x$. Vi velger derfor å bruke sammenligningstesten. Betrakt nå $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$. La nå $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$. Her er det tydelig at $a_n \leq b_n$ fordi $n \ln n \geq \ln n$ for alle verdier $n \geq 1$. Ved å bruke integraltesten på a_n finner vi ut at den divergerer:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \ln x|_2^\infty \to \infty$$

Siden $a_n \leq b_n$ og $\sum a_n$ divergerer så må også $\sum b_n$ divergere, i.e. rekken oppgitt i oppgaven divergerer.

c)

Betrakt først den geometriske rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \qquad |x| < 1$$

Deriverer vi begge sider får vi da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Oppgave 8)

a)

Ett kritisk punkt $\vec{x}_0$ oppfyller $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Spesifikt for den oppgitte $f(x, y)$ har vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{5}x - 10xe^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}x\left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{5}y - 10ye^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}y\left(1 - 50e^{-(x^2+y^2)}\right)
\end{aligned}$$

Vi har derfor at $\nabla f(0,0) = 0$, så $(0,0)$ er et kritisk punkt. Videre har vi også at for alle punkter som (x, y) som oppfyller $x^2 + y^2 = \ln 50$ så vil $1 - 50e^{-\ln 50} = 0$. Dette betyr også at $\nabla f(x, y) = 0$ som betyr at disse også er kritiske punkter.

b)

For å unngå rot, så lar vi $\theta(0,0) = x^2 + y^2$. De kritiske punktene vi skal sjekke for nå er når $(x, y) = (0,0)$ og $\theta(x, y) = \ln 50$. Betrakt først:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{5} - 10e^{-\theta}\left(1 + 2x^2\right)$$

For punktet $(0,0)$ har vi at $\partial^2 f/\partial x^2 = -49/5$. Siden $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$ så ser vi på et potensielt maksimumspunkt. Vi finner også andre derivasjonen av de andre variablene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 20xye^{-\theta} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{5} - 10e^{-\theta}(1+2y^2)
\end{aligned}$$

Dette gir følgende Hessian matrise $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49/5 & 0 \\ 0 & -49/5 \end{pmatrix}$$

for punktet $(0,0)$ og dermed $\det \mathcal{H} > 0$. Vi har derfor et maksimumspunkt for punktet $(0,0)$.

For $\theta = \ln 50$. Har vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{5}x^2$$

Her er det helt klart at $\partial^2 f/\partial x^2 > 0$ for alle $x \neq 0$. Hessian matrisen her $\mathcal{H}$ blir dermed:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Herifra er det enkelt å se at diskriminanten $\det \mathcal{H} = 0$. Det vil si at for $\theta = \ln 50$ så har vi ingen konklusjon via denne testen.

Vi får heller sammenligne verdiene. Vi har $f(0,0) = 5$ mens for $\theta = \ln 50$ har vi

$$f(x_\theta, y_\theta) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\ln 50 = \frac{1}{10}(1 + \ln 50)$$

Herifra har vi at $f(0,0) > f(x_\theta, y_\theta)$. Siden punktet $(0,0)$ var funnet til å være en maksimumspunkt så må (x_θ, y_θ) være minimumspunktene.

Siden funksjonen er definert for alle punkter $x^2 + y^2 \leq 100$. Vi sjekker derfor for randpunktene som oppfyller $x^2 + y^2 = 100$. Når $x^2 + y^2 = 100$ har vi at

$$f(x_{100}, y_{100}) = \frac{5}{e^1 00} + 10 \approx 10$$

Vi har derfor at $(0,0)$ er et lokalt maksimumspunkt, (x_θ, y_θ) er et globalt og lokalt minimumspunkt. Mens, (x_{100}, y_{100}) er et globalt maksimumspunkt.

Eksamen 2018

Statistikk

Oppgave 1)

Når $T \sim \exp(\mu)$ så er sannsynlighetstettheten gitt ved $f(t) = e^{-t/\mu}/\mu$. Det vil si at generelt

$$P(a < T < b) = \frac{1}{\mu}\int_a^b e^{-t/\mu}\,\mathrm{d}t = e^{-a/\mu} - e^{-b/\mu}$$

Slik at

a)

$$P(T > 90) = P(90 < T < \infty) = e^{-6/5} \approx 0.3012$$

b)

$$P(50 < T < 90) = e^{-2/3} - e^{-6/5} \approx 0.2122$$

c)

$$P(T \geq 150 | T > 90) = \frac{P(T \geq 150 \cap T > 90)}{P(T > 90)} = \frac{P(T \geq 150)}{P(T > 90)} = \frac{e^{-2}}{e^{-6/5}} \approx 0.4493$$

d)

Vi har allerede fått oppgitt forventningen til populasjonen $\mu = 75$. Vi har da at

$$\bar{T} = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} T_n$$

Og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20}E\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right)$$

Siden T_n er uavhengige og derfor

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} E(T_n)$$

Siden hver av de målingene $T_n \sim \exp(\mu)$ så har vi at $E(T_n) = \mu$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{21} \setminus 0$. Dette gir

$$E(\bar{T}) = \frac{1}{20} \cdot 20\mu = \mu$$

e)

Per definisjon av $\mathrm{SD}^2(\bar{T})$ så har vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{SD}^2(\bar{T}) &= \mathrm{SD}^2\left(\frac{1}{20}\sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2\left(\sum_{n=1}^{20} T_n\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2 \sum_{n=1}^{20} \mathrm{SD}^2\left(\bar{T}\right) \\
&= \frac{1}{400}\,\mathrm{SD}^2 \sum_{n=1}^{20} \sigma^2 \\
&= \frac{1}{400} \cdot 20\mu^2 = \frac{\mu^2}{20}
\end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{SD}(\bar{T}) = \sqrt{\mathrm{SD}^2(\bar{T})} = 16.77$.

f)

Siden $n = 20$ er betraktlig stor nok kan vi utnytte sentral grenseteoremet og anta at $\bar{T} \sim N\left(E(\bar{T}), \mathrm{SD}(\bar{T})\right)$. Med dette, kan vi derfor finne $P(\bar{T} > 90) = 1 - P(\bar{T} \leq 90)$, hvor

$$P(\bar{T} \leq 90) = P\left(\frac{\bar{T} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{90 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(Z \leq 0.8944\right) = 0.8133$$

Dette gir $P\left(\bar{T} > 90\right) = 0.1867$.

g)

Dersom $\bar{T} \sim \exp(\mu)$ så må $E(\bar{T}) = \mathrm{SD}(\bar{T})$. Siden vi fant ut at den ikke var det (i.e. $\bar{T}$ er ikke eksponentialfordelt) så kan vi desverre ikke regne ut en eksakt verdi for $P\left(\bar{T} > 90\right)$ ved å bruke eksponentialfordelingen.

h)

Null-hypotesen formuleres først ut ifra mistanken til problemstillingen som har blitt presentert. Siden mistanken her er at $\mu > 60$ så blir dette formuleringen for H_1. Det naturlige blir da å formulere H_0 som en komplement av H_1 altså $H_0 = \mu \leq 60$.

i)

Her utfører vi en T-test fordi σ er ukjent. Gitt $\bar{t} = 75.3$ og $s = 50.7$ for $n = 30$ målinger så har vi

$$T = \frac{\bar{t} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 1.653$$

Vi har også fra tabellen at $T_\alpha^{n-1} = 1.311$. Siden $T > T_\alpha^{n-1}$ så må ingeniørene konkludere med en $\alpha = 0.1$ signifikant-nivå at det tilstrekkelig med grunnlag å forkaste H_0.

j)

For en 90% konfidensintervall av en T-test er vi ute etter å finne $T_{\alpha/2}^{n-1} = 1.699$. Vi har derfor at konfidensintervallen til μ er

$$\left[\bar{t} - T_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{t} + T_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [59.57, 91.03]$$

Matematikk

Oppgave 2)

a)

Egenvierdiene λ til en matrise A er gitt ved å løse den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Siden A er en 2×2-matrise kan vi benytte oss av at $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$ og at $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$. Dette gir oss følgende:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1\lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Løser vi likningen oppgitt ovenfor får vi at $\lambda_1 = \pm 1$. Dette medfølger at $\lambda_2 = \mp 1$.

La $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ til A får vi av å løse likningen:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Med $\lambda_1 = -1$ får vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss $\vec{v}_1 = (1, -1)$. Ved samme argumentasjon for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi at $\vec{v}_2 = (1, 1)$.

b)

Med egenverdiene og egenvektorene funnet i forrige oppgave kan vi danne matrisen P og matrisen D slik at vi kan uttrykke A som $A = PDP^{-1}$. Hvor

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

Omskriver vi systemet får vi

$$\begin{aligned} x' &= 0x + 1y \\ y' &= 1x + 0y \end{aligned}$$

Her ser vi helt klart at vi kan uttrykke likningssystemet som

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

der A er matrisen oppgitt i oppgaven.

Vi identifiserer at vi har et tilfelle av en homogent likning. For å løse dette må vi finne egenverdiene λ og egenvektorene $\vec{v}$ til A. Dette har vi gjort tidligere. Systemet vil derfor ha en generell løsning gitt ved

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2$$

hvor c_1 og c_2 er skalarer og

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vec{x}_2 &= \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Med egenverdiene for λ_1 og λ_2 og henholdsvis egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som vi tidligere fant for matrise A har vi derfor at løsningen for systemet av differensiallikninger er gitt ved

$$\vec{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Ved initialbetingelsen $\vec{x}(0) = (1,1)$ har vi derfor at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Den partikulære løsningen er derfor

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Oppgave 3)

a)

i) Følgende rekke kan uttrykkes som

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Her kan vi bruke sammenligningstesten: La $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ og la derfor $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Vi har nå at $b_n \geq 0$ og $a_n \geq 0$. Videre har vi også at $b_n \geq a_n$ for alle $n \geq 1$. Vi kjenner igjen at b_n er en p-rekke og konvergerer siden $p \geq 1$. Per sammenligningstesten så konvergerer også a_n, altså, rekken konvergerer.

ii) Her kan vi bruke forholdstesten: Med den gitte rekken har vi følgende:

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n} \implies a_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}\frac{1}{2^{n+1}}$$

Det er enkelt å se at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^2}{2(n+3)(n+1)}\right| = \frac{1}{2}$$

Vi har derfor per forholdstesten at rekken konvergerer absolutt.

iii) Her har vi en altererende følge. Dette tyder fort på at det er Dirichlets test vi må bruke. La $b_n = (-1)^n$ da har vi at $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq 1$ for alle N. La $a_n = 1/n$. Da har vi at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$, $a_i \geq a_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ og $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Da sier Dirichlets test at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ konvergerer. Så, den oppgitte rekken konvergerer.

b)

For en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ så er konvergensradien R definert som

$$R \equiv \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$$

For den oppgitte rekken i oppgaven har vi at $b_n = (n+1)^2$ og $c = 0$. Dette gir

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|^2 = 1$$

Konvergensradien R for den oppgitte rekken er derfor $R = 1$.

c)

Vi skal finne Maclaurin rekken til $f(x) = x^2e^x + x$. Vi vet tidligere at Maclaurin rekken til e^x er gitt ved:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Det vil si at vi kan uttrykke $f(x)$ som

$$f(x) = x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

Oppgave 4)

a)

La $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og la $\vec{u}$ være en vektor. Da er den retningsderiverte $D_{\vec{u}} f(\vec{r})$ av f på punktet $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ i retningen til $\vec{u}$ gitt ved

$$D_{\vec{u}} f(\vec{r}) = \left\langle \nabla f(\vec{r}), \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle$$

Gitt $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ så har vi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 2z \end{aligned}$$

med $\vec{r} = (1, 1, 1)$ så har vi $\nabla f(\vec{r}) = (2, 2, 2)$. Videre har vi at

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$D_{\vec{u}} g(\vec{r}) = 2\sqrt{2}$$

b)

La $\vec{x} = (x, y, z)$ og la $\vec{r} = (1, 1, 1)$. Vi fant tidligere at $\nabla g(\vec{r}) = (2, 2, 2)$. Dette gir oss tangentplanet for nivåkurven $g(x, y, z) = 3$ gitt ved

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(\vec{r}), \vec{x} - \vec{r} \rangle &= 0 \\ 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

c)

Dersom et vilkårlig punkt $\vec{p}$ er et kritisk punkt for en funksjon $f(x, yz)$ så må det være slikt at $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$. Dette ser vi tydelig fra tidligere beregnelse av $\nabla g(x, yz) = (2x, 2y, 2x)$. Det er klart her at $(0, 0, 0)$ er et kritisk punkt fordi $\nabla g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Det er også enkelt å se at dette er den eneste kritiske punktet siden det ikke er noen andre punkter som oppfyller kriteriet.

Så, den eneste kritiske punktet vi har er $(0, 0, 0)$ for å identifisere hva slags kritisk punkt dette er bruker vi den 2. partielle derivative testen: Vi finner først Hessian matrisen $\mathcal{H}$ av g:

$$\mathcal{H}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diskriminanten er her $D \equiv \det(\mathcal{H}(x, y, z)) = 8$. Vi ser også ifra matrisen at $\partial^2 g / \partial x^2 > 0$. Dette tilsier per andre partialle derivasjons testen at dette er et lokalt minimum.