

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

УТВЕРЖДАЮ

Зав.кафедрой,

к. ф.-м. н., доцент

_____ С. В. Миронов

ОТЧЕТ О ПРАКТИКЕ

студента 1 курса 173 группы факультета КНиИТ
Козырева Юрия Дмитриевича

вид практики: производственная

кафедра: математической кибернетики и компьютерных наук

курс: 1

семестр: 1

продолжительность: 18 нед., с 01.09.2023 г. по 14.01.2024 г.

Руководитель практики от университета,

зав. каф., к. ф.-м. н., доцент _____

С. В. Миронов

Руководитель практики от организации (учреждения, предприятия),

доцент, к. ф.-м. н. _____

С. В. Миронов

Тема практики: «Научно-исследовательская работа»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Литературный обзор	6
1.1 Случайные графы	6
1.1.1 Модель Эрдеша—Ренье	6
1.1.2 Модель Барабаши—Альберт	7
1.1.3 Модель Боллобаша—Риордана	7
1.1.4 Модель Чунг-Лу	8
1.1.5 Модель триадного замыкания	9
1.1.6 Модель ETN-gen	9
1.2 Метрики	9
1.2.1 NBNC	11
1.2.2 ANND	12
1.2.3 Индекс дружбы	12
1.3 Масштабируемые метрики	13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	17
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	18

ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни для решения многих задач часто используются случайные графы. Случайные графы нашли практическое применение во всех областях, где нужно смоделировать сложные сети. Имеется большое число моделей случайных графов, отражающих разнообразные типы сложных сетей в различных областях. Случайные графы применяются при моделировании и анализе биологических и социальных систем, сетей, а также при решении многих задач класса NP.

Случайные графы впервые определены венгерскими математиками П. Эрдёшем и А. Реньи в книге 1959 года «On Random Graphs» [1] и независимо американским математиком, Э. Гильбертом, в его статье «Random graphs» [2].

Случайный граф — общий термин для обозначения вероятностного распределения графов [3]. Их можно описать просто распределением вероятности или случайным процессом, создающим эти графы.

Теория случайных графов находится на стыке комбинаторики, теории графов и теории вероятностей. В основе ее лежит глубокая идея о том, что мощные инструменты современной теории вероятностей должны поспособствовать более верному осознанию природы графа, призваны помочь решению многих комбинаторных и теоретико-графовых задач [4].

С математической точки зрения случайные графы необходимы для ответа на вопрос о свойствах типичных графов. Для этого используются модели Эрдёша—Реньи, Барабаши—Альберт, модель триадного замыкания, модель Бьянкони-Барабаши и другие. Все модели основываются на различных свойствах социальных сетей.

В магистерской работе рассматриваются несколько активно используемых и хорошо изученных моделей.

Для изучения и анализа моделей случайных графов, анализе социальных явлений и сетей, сообществ и их взаимодействий широко применяется индекс дружбы. Индекс дружбы — один из показателей, используемых в социологии, определяется как отношение средней степени соседей к степени самого объекта.

Целью настоящей работы является актуализация темы магистерской работы и анализ предметной области. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- развитие практических навыков самостоятельной научно-исследовательской

работы;

- получение необходимого информационного материала для написания выпускной квалификационной работы магистра;
- рассмотрение набора технологий который может пригодиться в дальнейшей работе;
- рассмотрение существующих работ в данной сфере.

1 Литературный обзор

1.1 Случайные графы

Случайные графы широко применяются во многих сферах человеческой деятельности.

Некоторые протоколы передачи данных в компьютерных сетях основаны на различных свойствах случайных графов и в данный момент активно ведутся исследования по усовершенствованию этих алгоритмов. Например, Алессандро Больоло и Кристель Сирокки в своей статье «Topological network features determine convergence rate of distributed average algorithms» [5] изучают топологию и различные метрики графов в компьютерных сетях и Gossip-алгоритмах для разработки более эффективной замены для Gossip-протоколов. Gossip — это группа протоколов в одноранговой компьютерной коммуникации, в которых распространение информации идёт способом, схожим с образом распространения эпидемий, и сводящимся к тому, что каждый или некоторые из узлов могут передавать обновляемые данные известным этому узлу соседям. Основными преимуществами данных алгоритмов являются их надёжность и отказоустойчивость, однако передача большого количества избыточных данных приводит к с лишком высокой нагрузке на оборудование.

Существует множество различных моделей построения случайных графов. Рассмотрим некоторые из них.

1.1.1 Модель Эрдеша—Ренье

Модель Эрдеша—Ренье является одной из первых моделей случайного графа. Граф построенный по этой модели представляет собой совокупность множества вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множества рёбер E , состоящего из рёбер полного графа K_n построенного на множестве V , выбранных по схеме Бернулли. Таким образом образуется случайный граф $G = (V, E)$. Формально выражаясь, мы имеем вероятностное пространство

$$G(n, p) = (\Omega_n, F_n, P_{n,p}),$$

в котором: n — количество вершин, p — вероятность появления нового ребра, F_n — сигма-множество, Ω_n — множество возможных рёбер ($|\Omega_n| = 2^n$), $P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}$ — вероятностная мера. Таким образом, в модели Эрдеша—Реньи каждое ребро независимо от других ребер входит в случайный

граф с вероятностью p . Модель Эрдеша—Реньи на данный момент является самой изученной моделью случайных графов [6].

1.1.2 Модель Барабаши—Альберт

Модель Барабаши—Альберт является одной из первых моделей веб-графов. Веб-граф представляет собой ориентированный мульти-граф, вершинами в котором являются какие-либо конкретные структурные единицы в Интернете: речь может идти о страницах, сайтах, хостах, владельцах и пр. Для определенности будем считать, что вершинами веб-графа служат именно сайты. А рёбрами соединяются вершины, между которыми имеются ссылки.

В своей модели А.-Л. Барабаши и Р. Альберт предложили стратегию предпочтительного присоединения [7]. Её основная идея заключается в том, что вероятность присоединения конкретной вершины ребром к новой вершине пропорциональна степени данной вершины. Здесь и далее степенью вершины $v_i \in V$ графа $G = (V, E)$ называется количество вершин, напрямую связанных с данной, т.е.

$$\deg(v_i) = |\{v \in V : (v, v_i) \in E\}|.$$

Алгоритм формирования сети по модели Барабаши—Альберт заключается в следующем.

1. Первоначально берется полный граф из m вершин, где m — параметр модели.
2. На каждой итерации роста сети добавляется одна новая вершина, которая соединяется m ребрами с уже имеющимися в соответствии с принципом предпочтительного присоединения.

1.1.3 Модель Боллобаша—Риордана

Одной из наиболее удачных и часто используемых моделей предпочтительного присоединения является модель Боллобаша—Риордана. Существуют две основных и, по сути, совпадающих модификации этой модели. В одной дается динамическое, а в другой статическое описание случайности [8].

В динамической модификации при добавлении n -ной вершины проводятся n новых рёбер, при этом рёбра могут быть кратными, а также петлями. При создании графа с единственной вершиной проводится петля в этой точке [6]. Таким образом вероятность появления ребра (n, i) , $i \in [0, n - 1]$ равна $\frac{\deg_i}{2n-1}$,

где \deg_i — степень вершины i .

Статическая модель (LCD-модель) основывается на объекте называемом линейной хордовой диаграммой (LCD). Для построения данного объекта требуется зафиксировать на оси абсцисс $2n$ точек $1, \dots, 2n$, разбить их на пары и соединить элементы каждой пары дугой, лежащей в верхней полуплоскости. Количество различных диаграмм равно

$$l_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

По каждой диаграмме строится граф с n вершинами и n ребрами по следующему алгоритму:

- Идти слева направо по оси абсцисс пока не встретится правый конец какой-либо дуги, пусть позиция этой точки равна i_k
- Последовательность $i_{k-1} + 1, i_k$ объявляется списком смежности для k -той вершины, $i_0 = 0$
- Если $k < n$, k увеличивается на 1, переход на шаг (1).

При построении модели LCD случайно выбирается одна из возможных LCD и вероятность каждой диаграммы равной $\frac{1}{l_n}$, где l_n — общее число диаграмм. Графы построенные по такой модели имеют те же свойства, что и графы построенные по динамической модификации схемы Боллобаша—Риордана.

1.1.4 Модель Чунг-Лу

Пусть нам задано некоторое конечное множество вершин $V = v_1, \dots, v_n$ и степень каждой вершины $d_i, i = \overline{1, n}$. Генерация графа $G = (V, E)$ происходит следующим образом:

- формируем множество L , состоящее из $i \cdot d$ копий $i \cdot v$ для каждого i от 1 до n ;
- задаем случайные паросочетания на множестве L ;
- для вершин u и v из V количество ребер в графе G , соединяющее их, равно числу паросочетаний между копиями u и v в L [9].

Сгенерированный таким образом граф соответствует степенной модели $P(a, b)$, описывающей графы, для которых:

$$|\{v | \deg_v = x\}| = \frac{e^\alpha}{e^\beta}.$$

1.1.5 Модель триадного замыкания

Помимо стратегии предпочтительного присоединения, модель триадного замыкания использует стратегию формирования триад. Триадное замыкание — свойство социальных систем заключающееся в том, что если между вершинами (А, В) и (А, С), в некоторой социальной сети существует взаимосвязь, то велика вероятность формирования триады из этих трёх вершин, т.е., велика вероятность связи (В, С) [10]. В модели триадного замыкания рост сети происходит следующим образом.

1. Первоначально берется полный граф из m вершин, где m — параметр модели.
2. На каждой итерации роста сети добавляется одна новая вершина, которая соединяется m ребрами с уже имеющимися по следующим правилам:
 - в соответствии с принципом предпочтительного присоединения выбирается вершина, к которой проводится первое ребро;
 - с вероятностью p , где p — параметр модели, выбирается стратегия формирования триады с произвольным соседом вершины, присоединенной первым ребром, или, с вероятностью $(1 - p)$, стратегия предпочтительного присоединения к произвольной вершине графа.

1.1.6 Модель ETN-gen

В работе учёных из Университета Тренто (Италия), Датского технического университета и Университета Экс-Марселя (Франция) [11] рассматривается применение звездообразных структур для построения случайных графов, превосходящих другие модели в топологическом и динамическом сходстве с реальными сетями. Для этого используется эгоцентрическая временная окрестность (ETN) $\epsilon_i^{(t-k, \dots, t)}$ — поведение непосредственной окрестности некой вершины графа ϵ_i на протяжении короткого промежутка времени $(t - k, \dots, t)$. Затем, с помощью методов машинного обучения, высчитывается распределение вероятностей для следующего состояния окрестности. На Рис. 1 схематично изображены различные этапы построения случайного графа, при помощи модели ETN-gen.

1.2 Метрики

С популяризацией темы графов, графовой аналитики и их визуализации, возрастает необходимость измерять, сравнивать, выявлять зависимости и раз-

Egocentric Temporal Neighborhood GENERator (ETN-GEN)

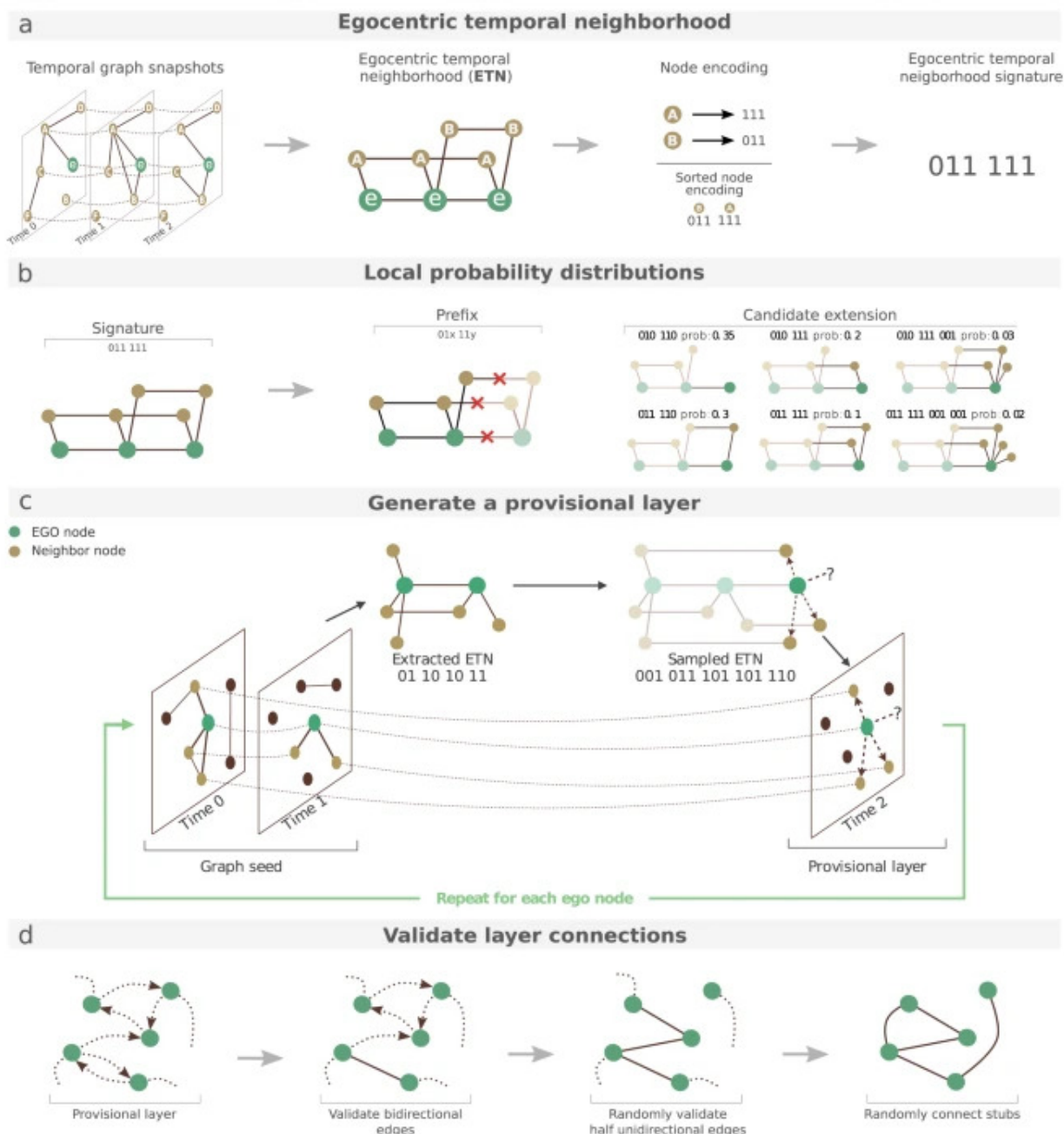


Рисунок 1 – Процесс построения случайного графа при помощи модели ETN-gen

личные иерархии.

Для этого необходимы некие численные характеристики графов. Графовая метрика – это функция, которая возвращает действительное число, характеризующее граф согласно применяемым мерам.

Метрики на графах часто применяются в различных областях включая медицину.

Группа исследователей из Университета Гонконга провели серию экспериментов [12], в ходе которых они проанализировали данные магнитно-резонансной

спектроскопической визуализации мозга 84 испытуемых при помощи различных метрик теории графов, включая: метрику тесноты мира, коэффициент узловой кластеризации, длину узловой характеристики пути и λ -связность, для того чтобы определить связь между поведением аллели $\epsilon 4$ апополипротеина E (ApoE4) и синдромом Альцгеймера. Результаты исследования позволили узнать больше о процессе появления и развития болезни.

Метрики делятся на:

- глобальные - принимают на вход данные о всех вершинах графа и описывают весь граф целиком;
- локальные - характеризуют некую окрестность заданной вершины.

В магистерской работе рассматриваются локальные метрики графа, в силу того что они позволяют более точно описать внутреннюю структуру графа и позволяют ускорить процесс анализа, так как могут вычисляться параллельно.

К ним относятся:

- сумма степеней соседей $s_i(t)$;
- средняя степень соседей α_i ;
- ANND $\Phi(k)$;
- neighborhood-based bridge node centrality tuple;
- индекс дружбы $\beta_i(t)$.

Так же существует множество других локальных метрик графа, они представлены в статьях [13] и [14].

1.2.1 NBNC

В исследовании Натараджан Меганатан из Государственного университета Джексона (США) «Neighborhood-based bridge node centrality tuple for complex network analysis» [15] рассматривается локальная метрика основанная на поиске мостов в графе. Мостом называется вершина, при удалении которой количество компонент связности в графе увеличивается, т.е. мост соединяет 2 или более кластеров. NBNC (Neighborhood-based bridge node centrality) - локальная метрика графа, представляющая собой триплет:

- количества компонент в графе окрестности данной вершины;
- значения алгебраической связности графе окрестности вершины (Алгебраическая связность графа G — это второе из минимальных собственных значений матрицы Кирхгофа графа G . Величина этого значения отражает насколько хорошо связан граф.);

— количества соседей вершины.

По результатам исследований было обнаружено, что данная метрика позволяет с высокой точностью и эффективностью определять структуру графа, а также выделять различные структуры и кластеры в нём.

1.2.2 ANND

Еще одно свойство, присутствующее в сложных социальных сетях — ассортативность. Оно выражается в предпочтении узлов выбирать себе подобные. Степенная ассортативность — наиболее изученный случай ассортативности. Например, сеть будет считаться ассортативной, если узлы с высокими степенями присоединяются к другим узлам с высокими степенями, а низкие — к низким. Средняя степень ближайших соседей (average nearest neighbor degree, ANND) — одна из наиболее часто используемых способов измерения ассортативности. Если имеется хотя бы один узел со степенью k , то ANND узлов со степенью k определяется как:

$$\Phi(k) \sim \frac{1}{|E_k|} \sum_{i:d_i=k} \alpha_i$$

где $|E_k|$ — количество таких узлов со степенью k в сети.

1.2.3 Индекс дружбы

С момента появления социальных сетей — Facebook, Vkontakte, LiveJournal, Instagram, LinkedIn, MySpace и т. д. прошло не так много времени, но они уже плотно вошли в повседневную жизнь многих людей.

Опросы показывают, что 76% пользователей Интернета в России (по данным агентства PRT на январь 2014) и примерно 73% жителей Соединенных Штатов являются активными пользователями социальных сетей, и эта цифра растет [16].

В современном обществе социальные сети становятся огромной базой информации, которую ученые и работодатели все чаще привлекают для решения конкретных задач, будь то научное исследование или оценка кандидата на определенную должность.

Научный интерес к изучению пользователей социальных сетей стремительно растет. На данный момент накоплено большое количество эмпирического материала в отношении характеристик пользователей социальных сетей,

который требует систематизации и осмысления.

В социальных сетях часто можно встретить явление именуемое парадоксом дружбы: в среднем друзья любого человека имеют больше друзей, чем он сам. Оно было обнаружено в 1991 году социологом из государственного университета Нью-Йорка Скоттом Фельдом [17].

Для изучения парадокса дружбы следует ввести несколько обозначений. В момент времени t для вершины v_i в графе $G(t) = (V(t), E(t))$ сумма степеней всех соседей v_i равна:

$$s_i(t) = \sum_{j:(v_i, v_j) \in E(t)} \deg_j(t),$$

средняя степень соседей вершины v_i :

$$\alpha_i(t) = \frac{s_i(t)}{\deg_i(t)},$$

а индекс дружбы $\beta_i(t)$ определяется как отношение средней степени соседей v_i к степени самой v_i :

$$\beta_i(t) = \frac{\alpha_i(t)}{\deg_i(t)} = \frac{s_i(t)}{\deg_i^2(t)} = \frac{\sum_{j:(v_i, v_j) \in E(t)} \deg_j(t)}{\deg_i^2(t)}.$$

Таким образом, если средняя степень соседей больше степени v_i и парадокс дружбы выполняется, то $\beta_i(t) > 1$ [18].

Для примера, социальные сети Facebook и Github подтверждают парадокс дружбы, что показано на Рис. 2 [19]. Здесь на оси Oy отложено количество узлов сети, для которых индекс дружбы β_i попадает в диапазон, отложенный на оси Ox . Как видим, значительное большинство вершин графов имеют значение индекса дружбы большее единицы.

Как показано в работе [19] индекс дружбы и ANND масштабируются при росте сети, что делает не возможным сравнение графов разного размера.

1.3 Масштабируемые метрики

Существует несколько подходов к построению масштабируемых метрик.

Учёные из Бостона, Хосе Бенту и Стратис Иоаннидис, в одной из своих работ [20] выделили семейство масштабируемых метрик основанных на химическом расстоянии и расстоянии Шартрана-Кубики-Шульца. В работе рассматривается проблема невозможности сравнения и анализа графов разных раз-

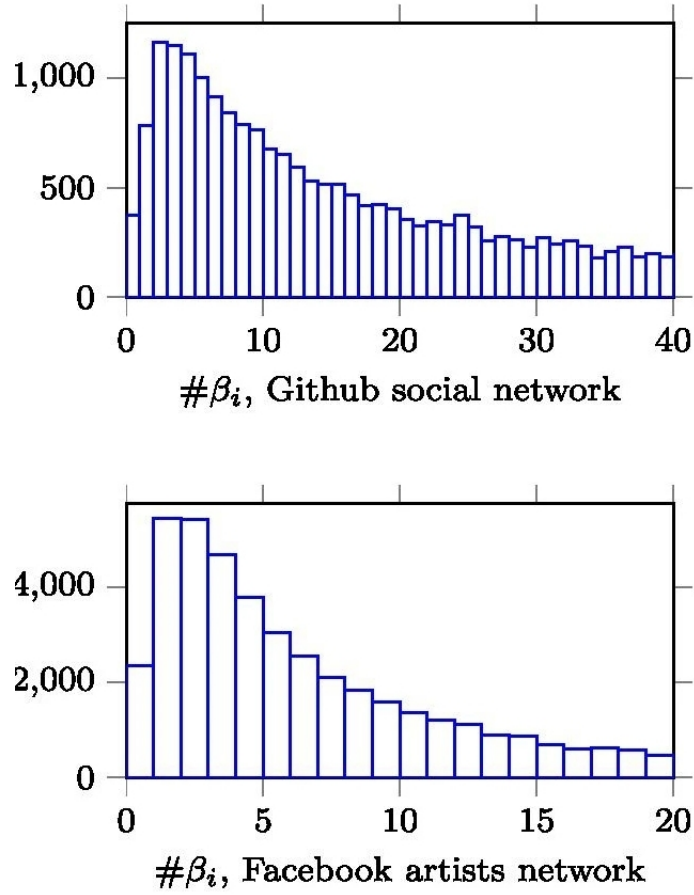


Рисунок 2 – Распределения индекса дружбы в сети телефонных звонков и сети доставки Amazon

мерностей при помощи более часто применимых, немасштабируемых, метрик графов. Данная проблема возникает при решении задач классификации и кластеризации графов, а так же во многих других задачах дата майнинга на графах. Однако авторы статьи смогли выделить две масштабируемых метрики. Первая из них — достаточно хорошо изученная метрика, химическое расстояние. Химическое расстояние $d_{P^n}(A, B)$ между графами G_A и G_B определяется как

$$d_{P^n}(A, B) = \min_{P \in P^n} \|AP - PB\|_F,$$

где A и B - матрицы смежности соответствующих графов $A, B \in \{0, 1\}^{n \times n}$. А вторая — расстояние Шартран-Кубики-Шульца, которое также описывается формулой (1.3), однако, отличие заключается в том, что в данном случае A и B отображают матрицы кратчайших путей между вершинами графа. Основным недостатком данного семейства метрик является их высокая вычислительная сложность.

Также существует локально-глобальный подход к сравнению графов разного размера.

Так авторы работы «Motif-Based Visual Analysis of Dynamic Networks» [21] предлагают использовать визуальный анализ графов и их подграфов для определения их схожести. В статье рассматриваются сетевые мотивы - это повторяющиеся и статистически значимые подграфы или шаблоны более крупного графика. Сетевые мотивы повторяются в определенной сети или даже среди различных сетей. Каждый из этих подграфов, определяемый определенным шаблоном взаимодействий между вершинами, может отражать структуру, в которой эффективно выполняются определенные функции. Однако обычно мотивы используются только для анализа статических, а не динамических сетей. В данной работе предлагается использовать визуальный анализ сетевых мотивов для сравнения структуры и динамики изменения графов, на Рис. 3 и 4 изображён процесс анализа графов в соответствии с данным методом. В результате работы была показана возможность выделять временные состояния, тенденции и выбросы в динамических сетях. Но у данного метода также имеется ряд недостатков связанных с тем, что данные анализируются человеком вручную, среди них высокая трудоёмкость процесса и определённая субъективность результатов.



Рисунок 3 – Процесс визуализации сетевых мотивов

В статье «DeepSIM: a novel deep learning method for graph similarity computation» [22] была осуществлена попытка решить эти проблемы путём создания модели глубокого обучения, способной определить степень схожести двух графов. Предыдущие попытки применять машинное обучение для визуального анализа графов сталкивались с проблемой неспособности выделить локальные свойства. Для её преодоления была разработана модель DeepSIM, с применением механизма глобально-локального внимания для улучшения работы CNN-модели, оба механизма применяются параллельно и независимо. На Рис. 5 представлена схема устройства модели.

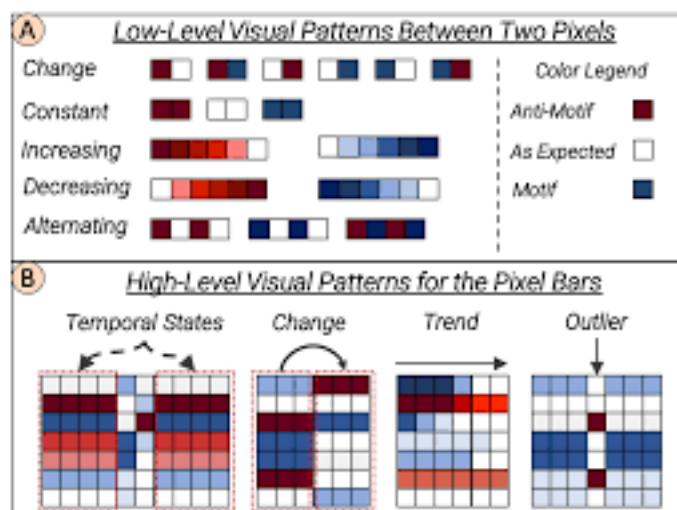


Рисунок 4 – Возможные паттерны среди мотивов

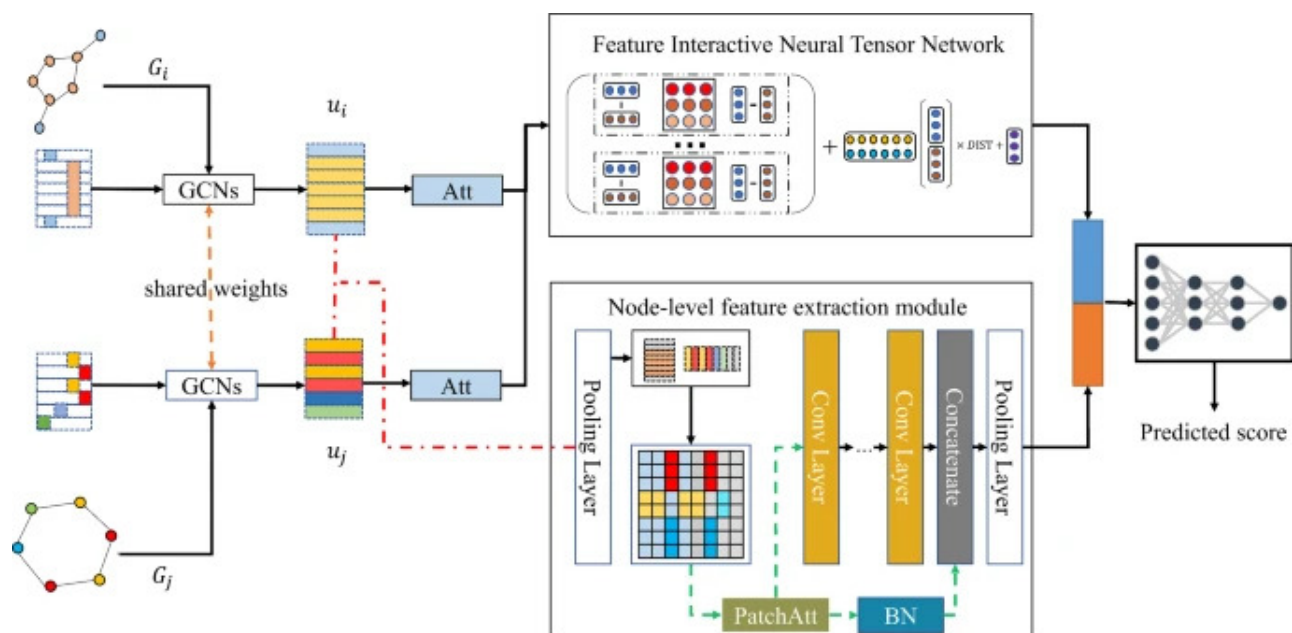


Рисунок 5 – Модель DeepSIM

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были изучены различные подходы и способы построения и анализа случайных графов. А также выполнены следующие задачи:

- развитие практических навыков самостоятельной научно-исследовательской работы;
- получение необходимого информационного материала для написания выпускной квалификационной работы магистра;
- рассмотрение набора технологий который может пригодиться в дальнейшей работе;
- рассмотрение существующих работ в данной сфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Erdős, P. On random graphs i / P. Erdős, A. Rényi // *Publicationes Mathematicae Debrecen*. — 1959. — Vol. 6. — Pp. 290–297.
- 2 Gilbert, E. N. Random graphs / E. N. Gilbert // *Annals of Mathematical Statistics*. — 1959. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 1141–1144.
- 3 Blum, A. Foundations of data science. — 2020. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123439379>.
- 4 Bollobas, B. Random Graphs / B. Bollobas. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. — 2 edition. — Cambridge University Press, 2001.
- 5 Sirocchi, C. Topological network features determine convergence rate of distributed average algorithms / C. Sirocchi, A. Bogliolo // *Scientific Reports*. — Dec 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 21831. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-25974-w>.
- 6 Райгородский, А. М. Модели случайных графов / А. М. Райгородский // *Труды МФТИ*. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 130 – 140.
- 7 Albert, R. Statistical mechanics of complex networks / R. Albert, A.-L. Barabasi // *Reviews of Modern Physics*. — 2002. — Vol. 74, no. 1. — Pp. 47 – 98.
- 8 Райгородский, А. М. Модели случайных графов и их применения / А. М. Райгородский. — Москва, М.: Издательство МЦНМО, 2011.
- 9 Берновски, М. Случайные графы, модели и генераторы безмасштабных графов. / М. Берновски, Н. Кузюрин // *Труды Института системного программирования РАН*. — 2012. — Т. 22, № 4. — С. 419 – 432.
- 10 David, E. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World / E. David, K. Jon. — USA: Cambridge University Press, 2010.
- 11 Longa, A. Neighbourhood matching creates realistic surrogate temporal networks / A. Longa, G. Cencetti, S. Lehmann, A. Passerini, B. Lepri // *arXiv preprint arXiv:2205.08820*. — 2022.
- 12 Small-world networks and their relationship with hippocampal glutamine/glutamate concentration in healthy adults with varying genetic risk for alzheimer’s disease / H. Zhang, P. W. Chiu, I. Ip, T. Liu, G. H. Wong, Y.-Q. Song, S. W. Wong et al. // *Journal of Magnetic Resonance Imaging*. — 2021. — Vol. 54,

- no. 3. — Pp. 952–961. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jmri.27632>.
- 13 *Morrison, D.* Exploring the raison d'être behind metric selection in network analysis: a systematic review / D. Morrison, M. Bedinger, L. Beevers, K. McClymont // *Applied Network Science*. — Jul 2022. — Vol. 7, no. 1. — P. 50. <https://doi.org/10.1007/s41109-022-00476-w>.
- 14 *Oehlers, M.* Graph Metrics for Network Robustness—A Survey / M. Oehlers, B. Fabian // *Mathematics*. — April 2021. — Vol. 9, no. 8. — Pp. 1–48. <https://ideas.repec.org/a/gam/jmathe/v9y2021i8p895-d538084.html>.
- 15 *Meghanathan, N.* Neighborhood-based bridge node centrality tuple for complex network analysis / N. Meghanathan // *Applied Network Science*. — Jun 2021. — Vol. 6, no. 1. — P. 47. <https://doi.org/10.1007/s41109-021-00388-1>.
- 16 Пользователи социальных сетей: современные исследования [Электронный ресурс]. — URL: <https://psychojournal.ru/article/887-polzovateli-socialnyh-setey-sovremennye-issledovaniya.html> (Дата обращения 10.03.2023). Загл. с экр. Яз. рус.
- 17 *Feld, S. L.* Why your friends have more friends than you do / S. L. Feld // *American Journal of Sociology*. — 1991. — Vol. 96. — Pp. 1464 – 1477.
- 18 *Pal, S.* A study on the friendship paradox quantitative analysis and relationship with assortative mixing / S. Pal, F. Yu, Y. Novick, A. Swami, A. Bar-Noy // *Applied Network Science*. — 09 2019. — Vol. 4. — Pp. 71 – 118.
- 19 *Sidorov, S.* Friendship paradox in growth networks: analytical and empirical analysis / S. Sidorov, S. Mironov, A. Grigoriev // *Appl Netw Sci*. — 2023. — Vol. 74, no. 6. — Pp. 47 – 51.
- 20 *Bento, J.* A family of tractable graph metrics / J. Bento, S. Ioannidis // *Applied Network Science*. — Nov 2019. — Vol. 4, no. 1. — P. 107. <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0219-z>.
- 21 *Cakmak, E.* Motif-based visual analysis of dynamic networks // 2022 IEEE Visualization in Data Science (VDS). — 2022. — Pp. 17–26.
- 22 *Liu, B.* Deepsim: a novel deep learning method for graph similarity computation / B. Liu, Z. Wang, J. Zhang, J. Wu, G. Qu // *Soft Computing*. —

Jan 2024. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 61–76. <https://doi.org/10.1007/s00500-023-09288-1>.