Tutorium 42, #3

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

Aussagen

Was sind sind sinnvolle Aussagen?

- "Abgabe der Übungsblätter ist Donnerstags."
- $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ist surjektiv.
- Wenn es regnet wird die Straße nass.
- Grün ist toll.
- Regnet es?

Aussagen

Was sind sind sinnvolle Aussagen?

- "Abgabe der Übungsblätter ist Donnerstags." **Wahr**
- $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ist surjektiv. **Falsch**
- Wenn es regnet wird die Straße nass. **Wahr**
- Grün ist toll *Keine Ahnung*
- Regnet es? *Wo?*

Aussagen: Grundlagen

Aussagen sind entweder objektiv wahr oder falsch, nichts dazwischen.
Man kann sie mit Ja oder Nein beantworten.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Aussagen: Verknüpfung

Wir können die Grundaussagen miteinander verknüpfen. Seien A, B zwei Aussagen so gibt es folgende Verknüpfungen:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w	w

Aussagen: Verknüpfung

- Die Verknüpfung $A \rightarrow B$ entspricht der Verknüpfung $\neg A \vee B$

- Die Verknüpfung $A \leftrightarrow B$ entspricht der Verknüpfung $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

- Die Reihenfolge der Verknüpfungen ist: (,) vor $\neg$ vor $\vee$ vor $\wedge$ vor $\rightarrow$ vor $\leftrightarrow$

Aufgabe

Wertet die komplexe Aussage mittels Tabelle aus:

- $\neg A \land (B \to A) \leftrightarrow \neg(A \lor \neg B)$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Aufgabe

$\neg A \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow \neg(A \vee \neg B)$

		1	9	2	6	3	10	8	4	7	5
A	B	$\neg A$	$\wedge$	$(B$	$\rightarrow$	$A)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(A$	$\vee$	$\neg B)$
f	f	w	w	f	w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f	f	w	f	f	f
w	f	f	f	f	w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w	f	w	w	f

Quantoren

es gibt 2 Quantoren:

- $\forall$: Für alle/jedes ... gilt, dass...
- $\exists$: Es gibt (min.) ein..., sodass...

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Aufgabe

Formulert die Aussagen mittels Prädikatenlogik (d.h. mit Quantoren und Konnektiven):

Sei V die Menge aller Vögel, Eltern(v) die Menge der Eltern des Vogels v, Farbe(v) die Farbe von v

- Jeder Vogel kann fliegen, wenn alle Eltern fliegen können
- Alle schwarzen Vögel können fliegen

Aufgabe

Formulert die Aussagen mittels Prädikatenlogik (d.h. mit Quantoren und Konnektiven):

Sei V die Menge aller Vögel, Eltern(v) die Menge der Eltern des Vogels v, Farbe(v) die Farbe von v

- Jeder Vogel kann fliegen, wenn alle Eltern fliegen können
  - $\forall v \in V$: Eltern(v) können fliegen $\rightarrow$ v kann fliegen.
- Alle schwarzen Vögel können fliegen
  - $\forall v \in V$: Farbe(v)$=$schwarz $\rightarrow$ v kann fliegen.

Interpretationen

Definition

- eine Interpretation I ist eine Belegung der Variablen in der Formel z.B. I(A)=w und I(B)=f

$val_I(F)$ gibt den Wahrheitswert der Formel F zur Belegung I an.
z.B. $val_I(A \rightarrow B) = f$ mit obigem I

eine aussagenlogische Formel ist entweder

- **Nicht erfüllbar**, wenn es keine Interpretation gibt für die sie wahr ist.
- **Erfüllbar**, wenn es eine Interpretation gibt für die sie erfüllbar ist.
- **Nicht Allgemeingültig**, wenn sie für nicht jede Interpration wahr ist (also für min. 1 Interpretation falsch)
- **Allgemeingültig**, wenn sie für jede Interpretation wahr ist.

Aussagen beweisen

In sonstigen Naturwissenschaften (Biologie, Chemie, ...): Versuch oft genug durchführen, wenn sich das Ergebnis sich währedn des Versuches nicht ändert ist es wohl richtig.
Lösung: Ein Experiment mehrfach und in verschiedenen Zuständen durchführen

In der Mathematik und Informatik: Beweis von Aussagen für unendlich viele Zustände (am besten: *alle.*)
Aber wie?

Vollständige Induktion

Lösung für das Problem ist die *vollständige Induktion.*

z.B.: Zeige dass $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists m \in \mathbb{N}_0 : m < n$.
Möglich, da n durchzählbar sind (1, 2, 3,..)

Überlegung

- An n=0 n anfangen, Behauptung zeigen, weiterzählen, somit Behauptung für alle n zeigen.

Induktion: Vorgehen

Drei Schritte:

1. Induktionsanfang (IA): Den kleinsten Wert nehmen und die Behauptung für diesen zeigen. Manchmal noch die Behauptung für den ersten Schritt zeigen.
2. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung <Behauptung> gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ (oder worüber man die Indution anwendet).
3. Induktionsschritt (IS): wenn die Behauptung für n gilt, soll sie auch für n+1 gelten. Das zeigen wir jetzt.

Induktionsschritt: Vorgehen

Der Induktionsschritt soll zeigen, dass unsere Behauptung für n+1 gilt, wenn sie für n gilt.

1. n+1 in die Behauptung einsetzen.
2. Neue Behauptung so umformen, dass Behauptung mit n wieder "auftaucht"...
3. Nach der IV gilt die Aussage für unser n welches gerade "aufgetaucht" ist...
4. Die aufgelöste Aussage in den Induktionsschritt einsetzen...
5. noch etwas umformen und den "n+1"-Fall zeigen.
6. Freuen :)

Induktion: Aufgaben

- ZZ dass $n^2 + n \forall n \geq 0$ gerade ist
- ZZ (1+2+3+...+n)= $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

Formale Sprachen

...again? **Ja, und auch nicht zum letzten Mal.**

Wiederholung:

- Formale Sprache L ist Teil der Wörter die mit Alphabet A gebildet werden können ($L \subseteq A$)
- Formale Sprachen sind auch wieder Mengen (*Teil*mengen)
- Nützlich um sinnvolle Konstrukte (Wörter) von unsinnvollen zu trennen

Definition

- Eine formale Sprache F über einem Alphabet A ist eine Teilmenge der Kleenschen Hülle A^*

Formale Sprachen: Aufgaben

Wie sehen Wörter aus den Sprachen aus?

- $L_1 = \{w_1 abw_2 | w_1, w_2 \in \{ a, b\}^*\}$
- $L_2 = \{ w_1 w_2 | w_1 \in \{a\}^* \wedge w_2 \in \{b\}^* \}$
- $L_3 = \{w_1 w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\} * |w_1| = 0 \wedge |w_2| < |w_1|\}$

Formale Sprachen: Aufgaben

Wie sehen Wörter aus den Sprachen aus?

- $L_1 = \{w_1 abw_2 | w_1, w_2 \in \{ a, b\}^*\}$
  - Alle Wörter aus A die Das Teilwort ab enthalten (z.B. ab, aaaab, babababab, aaaaabbb)
- $L_2 = \{ w_1 w_2 | w_1 \in \{a\}^* \wedge w_2 \in \{b\}^* \}$
  - Beliebige Anzahl an a's gefolgt von einer beliebigen Zahl an b's (z.B. aaaab, abb, aaaaaabbbbb)
- $L_3 = \{w_1 w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\} * |w_1| = 0 \wedge |w_2| < |w_1|\}$
  - Nichts, da $|w_2| < 0$ nicht möglich ist

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Formale Sprachen: Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

- Seien F_1, F_2 formale Sprachen über A, so ist das Produkt $L_1 * L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

Zum Beispiel mit $L_1 = \{a, aa, ab\}$, $L_2 = \{b, ba, bb\}$:

- $L_1 * L_2 = \{ab, aab, ab, aaba, aabb, abb, abba, abbb\}$
- $L_2 * L_1 = \{ba, baa, bab, baa, baaa, baab, bba, bbab\}$

Formale Sprachen: Potenz

Definition

- Sei F_1 formale Sprache über A, so ist die Potenz L_1^n die n-fache Verkettung von L_1 mit sich selbst

Zum Beispiel mit $L_1 = \{a, b\}$

- $L_1^0 = \{\epsilon\}$
- $L_1^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

Formale Sprachen: Konkatenationsabschluss

Definition

- Sei F formale Sprache über A, so ist $F^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ der Konkatenationsabschluss

Jede unendlich häufige Konkatenation von Wörtern aus F liegt in F^*.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Formale Sprachen: ϵ-freier Konkatenationsabschluss

Definition

- Sei F formale Sprache über A, so ist $F^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$ der ϵ-freie Konkatenationsabschluss

Selbes wie L^*, nur ohne $L^0 = \{\epsilon\}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik