Karlsruher Institut für Technologie

Tutorium 17, #8

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

Prädikatenlogik: Grundlagen

Mit der Prädikatenlogik kann man mehr Aussagen formulieren als mit der Aussagenlogik. Wir können damit auch Aussagen in prädikatenlogische Formeln *("Mathesprache")* umformulieren.

Die Prädikatenlogik (PL) 1. Stufe benutzt die folgenden Zeichen:

- $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$ aus der Aussagenlogik
- $\forall$ (Allquantor für Variablen) und $\exists$ (Existenzquantor für Variablen)
- $\doteq$ (Objektgleichheit/ Gleichheit 1. Stufe)
- Variablen (zum Beispiel x, y, z)
- Funktionen (zum Beispiel f, g, h)
- Relationen (früher Prädikate) (zum Beispiel p, q, r)

Prädikatenlogik: Relationen

Relationen sind Funktionen, die für eine Eingabe (eine oder mehr Variablen) einen Wahrheitswert zurückgeben.
Ähnlich wie zum Beispiel `public boolean p (Var x, Var y)` in Java, die für Var x und y einen Boolean-Wahrheitswert zurückgibt.

Relationen in PL sehen zum Besipiel so aus:

- Vater(x,y): Wahr, wenn x Vater von y ist
- Mann(x): Wahr wenn x Männlich ist, sonst falsch
- Verheiratet(x,y): wahr wenn x und y verheiratet sind

Prädikatenlogik: Aufgaben

Die folgenden Relationen sind gegeben:

- Vater(x,y): Wahr, wenn x Vater von y ist
- Mann(x): Wahr wenn x Männlich ist, sonst falsch
- Verheiratet(x,y): wahr wenn x und y verheiratet sind

Drücke die Aussagen in PL aus

- Jede männliche Person hat mindestens einen Vater
- Jeder Mann hat mehrere Kinder
- Jede Frau ist mit *höchstens* einem Mann verheiratet

Prädikatenlogik: Lösung

Drücke die Aussagen in PL aus

- Jede männliche Person hat mindestens einen Vater
  - $\forall x \exists y (Mann(x) \wedge Vater(y, x))$
  - "Für jede Person x exist. min. 1 Person y wo gilt: x ist ein Mann und y ist Vater von x"
- Jeder Mann hat mehrere Kinder
  - $\forall x \exists y \exists z (Mann(x) \wedge Vater(x, y) \wedge Vater(x, z) \wedge \neg(y \doteq z))$
  - "Für jede Person x existiert min. 1 Person y und 1 Person z wo gilt: x ist männlich und Vater von y und z wobei y $\neq$ z ist"
- Jede Frau ist mit *höchstens* einer Person verheiratet
  - $\forall x \forall y \forall z (\neg Mann(x) \wedge \neg(y \doteq z) \wedge Verheiratet(x, y)) \rightarrow \neg Verheiratet(x, z))$
  - Für jede Person x,y, z gilt: Ist x nicht männlich und y,z männlich und y $\neq$ z und x mit y verheiratet so folgt: x ist nicht mit z verheiratet

Prädikatenlogik: Aufbau

- Jede Variable ist ein Term (Bsp.: x)
- Eine Funktion f mit Termen als Eingabe ist wieder ein Term (Bsp: $f(x, y, g(z))$)

- Atomare Formeln sind die "kleinsten" PL-Formeln die wir bilden können
- Objektgleichheit $(x \doteq y)$ ist eine atomare Formel
- Eine Relation mit Termen als Eingabe ist eine atomare Formel
- Aus atomaren Formeln bilden wir mittels Konnektiven und Quantoren größere PL-Formeln

Natürlich gibt es auch bei PL Regeln für (syntaktisch) korrekte Formeln.

Prädikatenlogik: Aufgabe

p,q einstellige Relationen, *r* zweistelliges Relation, *c,d* Konstanten (nullstellige Funktionen), *x,y,z* Variablen

Sind die folgenden PL-Formeln syntaktisch korrekt gebildet?

- $\forall x(\forall y(\forall z(r(x,y) \land r(y,z) \rightarrow r(x,z))))$
- $\forall x \forall y(p(x) \rightarrow r(y))$
- $\forall x \exists p : p(x)$
- $\forall x(q(x)) \land \exists x(\neg q(x))$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Prädikatenlogik: Aufgabe

Sind die folgenden PL-Formeln syntaktisch korrekt gebildet?

- $\forall x(\forall y(\forall z(r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z))))$ - Ja
- $\forall x \forall y(p(x) \rightarrow r(y))$ - Nein, r ist zweistellig
- $\forall x \exists p : p(x)$ - Nein, $\exists$ gilt nur für Variablen, nicht für Relationen
- $\forall x(q(x)) \wedge \exists x(\neg q(x))$ - Ja

Max Göckel:
Tutorium 17, #8

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Prädikatenlogik: Quantoren-Wirkungsbereich

$\forall$ und $\exists$ haben einen begrenzten "Wirkungsbereich" auf die Variablen hinter ihnen.
Der Wirkungsbereich eines Quantors ist eine Teilformel und die Var. muss die Bindung in der Teilformel befolgen.

Bspe.:

- $\forall x(p(x) \land q(x, y)) \to r(x)$ - beide Relationen sind gebunden
- $\forall x(p(x) \land \exists x(\neg r(x)))$ - Überschattung, also ein x umbenennen

Die Bindung von Variablen wird später noch sehr wichtig.

Prädikatenlogik: Aufgabe

Kennzeichne die Bindung von Variablen in der Formel mit Pfeilen zu ihren Quantoren

- $p(x) \rightarrow \forall x \exists y (p(x) \wedge q(y, z) \leftrightarrow \forall z (q(x, z)))$

Prädikatenlogik: Substitution

In PL-Formeln kann man Variablen gegen andere Variablen oder Terme ersetzen.
Wichtig dabei: Es werden nur freie Variablen ersetzt (also solche die nicht an einen Quantor gebunden sind)

Eine Substitution schreibt man so: $\epsilon[x/y](A)$, sie ersetzt alle x durch y in Formel A.

Beispielsubstitutionen:

- $\beta_1[x/5](p(x) \vee q(x,y)) = (p(5) \vee q(5,y))$
- $\beta_2[x/f(x)](p(x) \vee \forall x(q(x,y))) = p(f(x)) \vee \forall x(q(x,y)))$

Prädikatenlogik: Substitutionskollisionen

Eine Substitution enthält eine Kollision falls in der Substitution eine freie Variable gegen eine gebundene Variable (also eine Variable im Wirkungsbereich eine Quantors) getauscht wird.
Eine Substitution, die keine Kollision enthält heißt "Kollisionsfrei" und ist zu bevorzugen.

Bsp.:

- $\beta_1[y/x](\forall x : x \leftrightarrow y) = (\forall x : x \leftrightarrow x)$

Prädikatenlogik: Aufgabe

Führe die Substitutionen aus:

- $\sigma_1[x/f(y,z), y/9](q(x, f(y,z)) \wedge \forall x(p(x)))$
- $\sigma_2[x/g(y), y/x](\beta_1[x/y, y/f(x,y)](\exists z(r(x,y,z))))$

Prädikatenlogik: Lösung

Führe die Substitutionen aus:

- $\sigma_1[x/f(y,z), y/9](q(x, f(y,z)) \wedge \forall x(p(x)))$
  - $q(f(y,z), f(9,z) \wedge \forall x(p(x))$
- $\sigma_2[x/g(y), y/x](\beta_1[x/y, y/f(x,y)](\exists z(r(x,y,z))))$
  - $\sigma_2[x/g(y), y/x](\exists z(r(y, f(x,y), z)))$
  - $\exists z(r(x, f(g(y), x), z))$

Prädikatenlogik: Semantik

Neben dem syntaktisch korrekten Aufbau von Prädikatenlogik-Formeln kann man diesen auch eine Bedeutung (Semantik) zuordnen und sie auswerten.

Ähnlich der Aussagenlogik gibt es *Val* und *I*. *I* weist einer Konstanten, Funktion, Abbildung oder Relation je eine Bedeutung zu, wobei *Val* einen ganzen Term auswertet.

Prädikatenlogik: Semantik II

Zusätzlich gibt es in der PL noch 2 weitere Dinge, die sich von der Aussagenlogik unterscheiden:

- Die Zielmenge, auf die I abbildet (Ein Universum $D \cup \{w, f\}$)
- Belegung ungebundener bzw. freier Variablen (i.d.R. β)

Das Tupel (D, I) ist damit eine Interpretation und mit $val_{D,I,\beta}$ kann bestimmt werden ob eine Formel wahr ist.

Prädikatenlogik: Aufgabe

p einstellige Relation, q zweistellige Relation, f zweistellige Funktion, c Konstante, x, y Variablen.

D = $\mathbb{N}_0$
$\beta(x) = 7$
$I(p(x)) = w \leftrightarrow x \geq 5$
$I(q(x, y)) = w \leftrightarrow x > y$
$I(c) = 10$
$I(f(x, y)) = (x - y)$

- $p(x) \rightarrow \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$
- $p(x) \rightarrow \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$

Prädikatenlogik: Lösung

Karlsruher Institut für Technologie

- $p(x) \rightarrow \exists y(q(y, x) \wedge p(y))$
  - $Val_{D,I,\beta}(p(x)) = I(p(7)) = w$
  - $\exists y$ bel. wählbar also $y = 8 \Rightarrow I(q(8, 7)) = w$ und $I(p(8)) = w \Rightarrow Val_{D,I,\beta}(\exists y ...) = w \Rightarrow Val_{D,I,\beta}(p(x) \rightarrow ...) = w$
- $p(x) \rightarrow \exists y(q(f(c, y), x) \wedge p(y))$
  - $Val_{D,I,\beta}(p(x)) = w$ (s.o.)
  - $Val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = Val_{D,I,\beta}(q(f(c, y), x)) = Val_{D,I,\beta}(q(10 - y, 7)) \rightarrow w$ für $y \in \{0, 1, 2\}$
  - $Val_{D,I,\beta}(p(y)) = w$ für $y \geq 5$
  - Keine Lösung da $y \in \{0, 1, 2\}$ und $y \geq 5$ nicht beide gelten können