

Num_k und $Repr_k$

Tutorium 42, #4

Nach dem Tutorium wurde ich darauf hingewiesen, dass ich bei den Beispielen zu Num_k und $Repr_k$ einen Fehler gemacht habe. Dieses PDF soll die beiden Vorgehensweisen noch einmal richtig und mit den selben Beispielen erklären.

1 Num_k

Ist w ein Wort, welches eine Zahl zur Basis k darstellt (z.B. FFF_{16} oder 1001_2), so ist $Num_k(w)$ die Darstellung des Wortes / der Zahl im Dezimalsystem (Basis 10).

1.1 Definition

Sei $w = w' \cdot x$.

- $Num_k(\epsilon) = 0$
- $Num_k(w' \cdot x) = k \cdot Num_k(w') + num_k(x)$,
(!) " + " steht hier für die Addition, nicht für irgendeine Konkatenation.
- $num_k(x) = x$

1.2 Beispiel

Sei $w_1 = 5_8$ (5 zur Basis 8).

$$\begin{aligned} &Num_8(5) \\ &= 8 \cdot Num_8(\epsilon) + num_8(5) \\ &= 8 \cdot 0 + 5 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Sei $w_2 = 234_9$ (234 zur Basis 9).

$$\begin{aligned} &Num_9(234) \\ &= 9 \cdot Num_9(23) + num_9(4) \\ &= 9 \cdot ((9 \cdot Num_9(\epsilon 2)) + num_9(3)) + num_9(4) \\ &= 9 \cdot (9 \cdot (9 \cdot Num_9(\epsilon)) + num_9(2)) + num_9(3) + num_9(4) \\ &= 9 \cdot ((9 \cdot 2) + 3) + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (9 \cdot 9 \cdot 2) + (9 \cdot 3) + 4 \\
&= 162 + 27 + 4 \\
&= 193.
\end{aligned}$$

Sei $w_3 = B66_{16}$ (In Hexadezimal gilt $B = 11$, also $w = 11 \cdot 6 \cdot 6$ in der Basis 16).

$$\begin{aligned}
&Num_{16}(B66) \\
&= 16 \cdot Num_{16}(B6) + num_{16}(6) \\
&= 16 \cdot (16 \cdot Num_{16}(\epsilon B) + num_{16}(6)) + num_{16}(6) \\
&= 16 \cdot (16 \cdot (16 \cdot Num_{16}(\epsilon) num_{16}(B)) + num_{16}(6)) + num_{16}(6) \\
&= 16 \cdot (16 \cdot 11 + 6) + 6 \\
&= (16 \cdot 16 \cdot 11) + (16 \cdot 6) + 6 \\
&= 2816 + 96 + 6 \\
&= 2918
\end{aligned}$$

2 $Repr_k$

Während Num_k von anderen Systemen in Dezimal umwandelt, ist $Repr_k$ dafür da, eine ein Wort w welches eine Zahl in dezimal darstellt in eine Zahl vom System k umzuwandeln. Um also von Hexadezimal auf binär zu kommen ist $Repr_2(Num_{16}(w))$, die Hintereinanderausführung von Num_{k_1} und $Repr_{k_2}$, nötig.

2.1 Definition

Sei $w = x_{10}$ eine Dezimalzahl die in Basis k umgerechnet werden soll.

- Fall $x < k : repr_k(x) = x$
- Fall $x \geq k : Repr_k(x \text{ div } k) \cdot repr_k(x \text{ mod } k)$

(!) ”.” steht hier wieder für die Konkatenation

(!) In den Beispielen wird anstelle von ” $x \text{ div } k$ ” die Darstellung $\frac{x}{k}$ genutzt. Hier soll es das selbe beschreiben, nämlich das Teilen mit Rest ($\frac{74}{10} = 7, \frac{36}{7} = 5$), in der Klausur und auf den ÜBs bitte nicht so verwenden.

2.2 Beispiele

$w = 29$ und $k = 3$.

$$\begin{aligned}
&Repr_3(29) \\
&= Repr_3\left(\frac{29}{3}\right) \cdot repr_3(29 \text{ mod } 3) \\
&= Repr_3(9) \cdot 2 \\
&= Repr_3\left(\frac{9}{3}\right) \cdot repr_3(9 \text{ mod } 3) \cdot 2 \\
&= Repr_3(3) \cdot 0 \cdot 2 \\
&= Repr_3(1) \cdot repr_3(0) \cdot 0 \cdot 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{repr}_3(1) \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 \\
&= 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 = 1002_3
\end{aligned}$$

$w = 53$ und $k = 5$.

$$\begin{aligned}
&\text{Repr}_5(53) \\
&= \text{Repr}_5\left(\frac{53}{5}\right) \cdot \text{repr}_5(53 \bmod 5) \\
&= \text{Repr}_5(10) \cdot \text{repr}_5(3) \\
&= \text{Repr}_5\left(\frac{10}{5}\right) \cdot \text{repr}_5(10 \bmod 5) \cdot 3 \\
&= \text{Repr}_5(2) \cdot 0 \cdot 3 \\
&= 2 \cdot 0 \cdot 3 = 203_5
\end{aligned}$$