# Aufgaben zur vollständige Induktion

Max Göckel, Tutorium 17

Grundbegriffe der Informatik

In Aufgabe 1 wird die Induktion an einem einfach Beispiel gezeigt, Aufgaben 2 und 3 zeigen die Induktion über Summen und Produkte, Aufgabe 4 die Induktion mit einer Fließtextaufgabe und 5 mit einer Folge. Die Aufgaben sind entweder aus dem Tutorium, alten Klausuren oder dem Internet.

## 1 Einfache Aufgabe aus dem Tutorium

Zz $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^2 + n$ ist gerade.

*Induktionsanfang:* Für $i = 0$: $0^2 + 0 = 0$.

*Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \geq 0$.

*Induktionsschritt:* $(n \to n + 1)$
$(n + 1)^2 + (n + 1) \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n + 1 \Leftrightarrow (n^2 + n) + 2n + 2$

Mit der Induktionsvoraussetzung $(n^2 + 1)$ ist gerade und $(2n + 2)$ auch gerade ist die Behauptung wahr.

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \geq 0$ bewiesen.

## 2 Aufgabe aus dem Tutorium, Induktion über Summen

Zz $(1 + 2 + 3 + ... + n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

*Induktionsanfang:* Für $i = 1$: $\sum\limits_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$.

*Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \geq 0$.

*Induktionsschritt:* $(n \to n + 1)$

$\sum\limits_{i=1}^{n} i \Leftrightarrow (n+1) + \sum\limits_{i=1}^{n} i \overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \geq 1$ bewiesen.

## 3 WS15/16, Induktion über Produkte

Z: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \backslash \{1\} : \prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i}) = \frac{1}{n}$

*Induktionsanfang:* $\prod_{i=2}^{2} (1 - \frac{1}{i}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

*Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+ \backslash \{1\}$.

*Induktionsschritt:* $(n \to n+1)$
$\prod_{i=2}^{n} +1(1 - \frac{1}{i}) \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i}) \overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow} (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}$

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_+ \backslash \{1\}$ bewiesen.

## 4 Induktion mit einer Fließtextaufgabe

Z: Dass man jeden glatten Betrag >7\$ mit (imaginären) Scheinen im Wert von 3\$ und 5\$ ohne Rückgeld zahlen kann.
Formal heißt das: $\forall x \in \mathbb{N}_{>7} : \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : x = 3m + 5n$. ($m, n$ Anzahl der Scheine)

*Induktionsanfang mit dreifacher Verkettung:*
$x = 8 : 8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$
$x = 9 : 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$
$x = 10 : 10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

*Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{N}_{>7}$.

*Induktionsschritt:* $(x \to x+3)$
$x + 3 \overset{\text{I.V. für x}}{\Longleftrightarrow} (3m + 5n) + 3 \Leftrightarrow 3(m+1) + 5n$.

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall x \in \mathbb{N}_{>7}$ bewiesen.

## 5 WS08/09: Induktion mit einer Folge

Die Zahlenfolge F sei wie folgt rekursiv definiert:
$F_0 = 0$

$F_1 = 2$
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_{n+2} = 4F_{n+1} - 4F_n$.

Z$\!\!$Z dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ die Zahl $F_n$ durch $2^n$ teilbar ist.
Mit anderen Worten: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{Z} : F_n - k \cdot 2^n$

*Induktionsanfang mit doppelter Verkettung:*
$F_0 = 0 = 0 \cdot 2^0$ und $F_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$

*Induktionsvoraussetzung:*
Die Behauptung ist umformuliert gleich $F_{n+1} = k_1 \cdot 2^{n+1}$ und $F_n = k_0 \cdot 2^n$
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

*Induktionsschritt ($F_n \rightarrow F_{n+2}$):*
$F_{n+2} \Leftrightarrow 4F_{n+1} - 4F_n \overset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow} 4(k_1 \cdot 2^{n+1}) - (k_0 \cdot 2^n) \Leftrightarrow 2k_1 \cdot 2^{n+2} - k_0 \cdot 2^{n+2} \Leftrightarrow (2k_1 - k_0) \cdot 2^{n+2}$.
Mit $k_0$ und $k_1$ ist auch $2k_1 - k_0$ in $\mathbb{Z}$.

Die Aussage wurde mit dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.