Tutorium 17, #3

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

Aussagen beweisen

Karlsruher Institut für Technologie

In sonstigen Naturwissenschaften (Biologie, Chemie, ...): Versuch oft genug durchführen, wenn sich das Ergebnis sich während des Versuches nicht ändert ist es wohl richtig.
Lösung: Ein Experiment mehrfach und in verschiedenen Zuständen durchführen

In der Mathematik und Informatik: Beweis von Aussagen für unendlich viele Zustände (am besten: *alle.*)
Aber wie?

Vollständige Induktion

Lösung für das Problem ist die *vollständige Induktion.*

z.B.: Zeige dass $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists m \in \mathbb{N}_0 : m < n$.
Möglich, da *n* durchzählbar sind (1, 2, 3,..)

Überlegung

- An n=0 n anfangen, Behauptung zeigen, weiterzählen, somit Behauptung für alle n zeigen.

Induktion: Vorgehen

Drei Schritte:

1. Induktionsanfang (IA): Den kleinsten Wert nehmen und die Behauptung für diesen zeigen. Manchmal noch die Behauptung für den ersten Schritt zeigen.
2. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung <Behauptung> gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ (oder worüber man die Induktion anwendet).
3. Induktionsschritt (IS): wenn die Behauptung für n gilt, soll sie auch für $n + 1$ gelten. Das zeigen wir jetzt.

Induktionsschritt: Vorgehen

Der Induktionsschritt soll zeigen, dass unsere Behauptung für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt.

1. $n+1$ in die Behauptung einsetzen.
2. Neue Behauptung so umformen, dass Behauptung mit n wieder "auftaucht"...
3. Nach der IV gilt die Aussage für unser n welches gerade "aufgetaucht" ist...
4. Die aufgelöste Aussage in den Induktionsschritt einsetzen...
5. noch etwas umformen und den "$n+1$"-Fall zeigen.
6. Freuen :)

Induktion: Aufgaben

- Zz dass $n^2 + n \forall n \geq 0$ gerade ist
- Zz (1+2+3+...+n)= $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

Die Lösungen und weitere Aufgaben sind im ILIAS.

Formale Sprachen

Sprache: Aussprache, Stil, Satzbau, Wortwahl

In der Informatik: Aufbau vom Befehlen, Compiler, WWW-Seiten

Problem

- Woher weiß der Computer ob das (Sprach-)Gebilde korrekt ist?

Formale Sprachen

Sprache: Aussprache, Stil, Satzbau, Wortwahl

In der Informatik: Aufbau vom Befehlen, Compiler, WWW-Seiten

Lösung

- Eine formale Sprache als Teilmenge von A^* definiert was richtig ist und was nicht

Formale Sprachen: Beispiel

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{., -, +\}$, $F \subseteq A^*$ Formalsprache der Dezimaldarstellung aller Zahlen $\in \mathbb{Q}$

Formale Sprachen: Beispiel

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{., -, +\}$, F $\subseteq A^*$ Formalsprache der Dezimaldarstellung aller Zahlen $\in \mathbb{Q}$

- +1234567890.0
- +236.1
- -310.25

- +-5
- 3+
- 31..
- -.+.-.+.-.+.-.+.-

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Formale Sprachen: Beispiel

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{., -, +\}$, $F \subseteq A^*$ Formalsprache der Dezimaldarstellung aller Zahlen $\in \mathbb{Q}$

1. Plus oder Minus (+/-)
2. Mindestens eine Ziffer (0..9)
3. Dezimalpunkt (.)
4. Mindestens eine Ziffer (0..9)

- +1234567890.0
- +236.1
- -310.25

Formale Sprachen: Beispiel

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{., -, +\}$, $F \subseteq A^*$ Formalsprache der Dezimaldarstellung aller Zahlen $\in \mathbb{Q}$

1. Plus oder Minus (+/-)
2. Mindestens eine Ziffer (0..9)
3. Dezimalpunkt (.)
4. Mindestens eine Ziffer (0..9)

$A_{num} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset A$

$$F = \{+ \cdot w_1 \cdot . \cdot w_2 | w_1, w_2 \in A_{num}^* \wedge |w_1|, |w_2| \geq 1\} \cup \\ \{- \cdot w_1 \cdot . \cdot w_2 | w_1, w_2 \in A_{num}^* \wedge |w_1|, |w_2| \geq 1\}$$

Formale Sprachen: Aufgaben

Wie sehen Wörter aus den Sprachen aus?

- $L_1 = \{w_1 ab w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$
  -
- $L_2 = \{ w_1 w_2 | w_1 \in \{a\}^* \wedge w_2 \in \{b\}^* \}$
  -
- $L_3 = \{w_1 w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^* |w_1| = 0 \wedge |w_2| < |w_1|\}$
  -

Formale Sprachen: Aufgaben

Wie sehen Wörter aus den Sprachen aus?

- $L_1 = \{w_1 abw_2 | w_1, w_2 \in \{ a, b\}^*\}$
  - Alle Wörter aus A die Das Teilwort ab enthalten (z.B. ab, aaaab, bababab, aaaaabbb)
- $L_2 = \{ w_1 w_2 | w_1 \in \{a\}^* \wedge w_2 \in \{b\}^* \}$
  - Beliebige Anzahl an a's gefolgt von einer beliebigen Zahl an b's (z.B. aaaab, abb, aaaaaabbbbb)
- $L_3 = \{w_1 w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^* |w_1| = 0 \wedge |w_2| < |w_1|\}$
  - Nichts, da $|w_2| < 0$ nicht möglich ist

Formale Sprachen: Produkt

Definition

- Seien L_1, L_2 formale Sprachen über A, so ist das Produkt $L_1 * L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

Zum Beispiel mit L_1 = {a, aa, ab}, L_2 = {b, ba, bb}:

- $L_1 * L_2$ = {ab, aab, ab, aaba, aabb, abb, abba, abbb}
- $L_2 * L_1$ = {ba, baa, bab, baa, baaa, baab, bba, bbab}

Formale Sprachen: Potenz

Definition

- Sei L_1 formale Sprache über A, so ist die Potenz L_1^n die n-fache Verkettung von L_1 mit sich selbst

Zum Beispiel mit $L_1 = \{a, b\}$

- $L_1^0 = \{\epsilon\}$
- $L_1^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

Formale Sprachen: Konkatenationsabschluss

Definition

- Sei F formale Sprache über A, so ist $F^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^i$ der Konkatenationsabschluss von F

Jede unendlich häufige Konkatenation von Wörtern aus F liegt in F^*.

Formale Sprachen: ϵ-freier Konkatenationsabschluss

Definition

- Sei F formale Sprache über A, so ist $F^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} F^i$ der ϵ-freie Konkatenationsabschluss von F

Selbes wie F^*, nur ohne $F^0 = \{\epsilon\}$