Aufgaben und Lösungen zum O-Kalkül

Max Göckel, Tutorium 17

1 Aufgabe 1

Vergleiche das Laufzeitverhalten von $f(n) = 5n^2 + 3$ und $g(n) = \frac{1}{2}n^2$.
Finde passende c, n_0 und begründe mittels Umformungen und Abschätzungen.

1.1 Lösung

$f(n) = 5n^2 + 3 \leq 5n^2 + 3n^2 = 8n^2 = 16(\frac{1}{2}n^2) = 16 \cdot g(n)$.

Damit ist $c = 16$ und somit $n_0 = 1$.

2 Aufgabe 2

Vergleiche das Laufzeitverhalten von $f(n) = 3^n$ und $g(n) = 5^n$
Finde passende c, n_0 und begründe mittels Umformungen und Abschätzungen.

2.1 Lösung

$f(n) \leq c \cdot g(n)$ gilt trivialerweise für alle $c \in \mathbb{N}$.

Für $g(n) \leq c \cdot f(n)$ muss $\frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ für ein beliebiges und festes $c \in \mathbb{R}_+$ gelten.

$\frac{g(n)}{f(n)} = \frac{5^n}{3^n} = \frac{5}{3}^n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$
Damit gibt es kein passendes $c \in \mathbb{R}_+$.

Damit ist $f(n) \in O(g(n))$ und auch $g(n) \in \Omega(f(n))$, aber nicht $f(n) \in O(g(n))$.

3 Aufgabe 3

Vergleiche das Laufzeitverhalten von $f(n) = 3n^7 + 4n^6 - n^3 + n$ und $g(n) = 2n^7 - n^5 + 3n^2$
Finde passende c, n_0 und begründe mittels Umformungen und Abschätzungen.

3.1 Lösung

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 3n^7 + 4n^6 - n^3 + n \\
&\leq 3n^7 + 4n^6 + n \\
&\leq 3n^7 + 4n^7 + n^7 \\
&= 8n^7 \\
&\leq 8n^7 + 24n^2 \\
&= 8(2n^7 - n^7 + 3n^2) \\
&\leq 8(2n^7 - n^5 + 3n^2) \\
&= 8 \cdot g(n) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

für $n_0 \geq 1$, also gilt $f(n) \in O(g(n))$.

$$
\begin{aligned}
g(n) &= 2n^7 - n^5 + 3n^2 \\
&\leq 2n^7 + 3n^2 \\
&\leq 32n^7 + 4n^6 + n \\
&= 3n^7 - n^7 + 4n^6 + n \\
&\leq 3n^7 - n^3 + 4n^6 + n \\
&= 1 \cdot f(n) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

für $c = n_0 = 1$ also gilt $g(n) \in O(f(n))$.

Mit (1) und (2) gilt damit auch $g(n) \in \Theta(f(n))$.