Karlsruher Institut für Technologie

Tutorium 42, #7

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatiken sind ein Viertupel G = (N, T, S, P) mit:

- N: Das Alphabet der Nonterminalsymbole
- T: Das Alphabet der Terminalsymbole
- S: dem Startsymbol (mit $S \in N$)
- P: einer (endlichen) Menge an Produktionen

Kontextfreie Grammatiken: Beispiel

Beispiel-Viertupel:

- $G = (\{X, Y\}, \{a, b, c\}, X, P_1)$
- $P_1 = (X \rightarrow aX|bY, Y \rightarrow c)$

Kontextfreie Grammatiken: Beispiel

Beispiel-Viertupel:

- $G = (\{X, Y\}, \{a, b, c\}, X, P_1)$
- $P_1 = (X \to aX|bY, Y \to c)$

Eine mögliche Ableitung ist dann:
$X \Rightarrow aX \Rightarrow aaX \Rightarrow aabY \Rightarrow aabc$
oder:
$X \Rightarrow bY \Rightarrow bc$

Kontextfreie Grammatiken: Pfeile

Einzelne Ableitung:

- $\Rightarrow$

Ableitung mit n Schritten:

- $\Rightarrow^n$

Ableitung mit bel. Schritten:

- $\Rightarrow^*$

Kontextfreie Grammatiken: Sprachen

Die Spache L(G) der Grammatik G ist die Menge aller Wörter die mit G abgeleitet werden können und die nur Terminalsybole enthalten.

Kontextfreie Grammatiken: Sprachen

Die Spache L(G) der Grammatik G ist die Menge aller Wörter die mit G abgeleitet werden können und die nur Terminalsybole enthalten.

Im vorigen Beispiel ist $L(G) = \{\{a\}^+\{b\}^+c\}$

Kontextfreie Grammatiken: Aufgabe

Gibt es eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = \emptyset$? Wie sieht sie aus?

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Kontextfreie Grammatiken: Lösung

Gibt es eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = \emptyset$? Wie sieht sie aus?

Ja, und zwar $G_\emptyset = (\{X\}, \{q\}, X, \{X \to X\})$.
$G_\emptyset$ produziert nie ein Wort ohne Nonterminalsymbole.

Kontextfreie Grammatiken: Ableitungsbäume

Zu einer Grammatik G kann man die Ableitungen zu einem Wort $w \in L(G)$ auch als einen Ableitungsbaum schreiben.
Dieser stellt die Schritte grafisch dar und hilft bei der Darstellung einer Grammatik.

Kontextfreie Grammatiken: Aufgaben

Sei $G_1 = \{\{X, Y\}, \{a, b, c\}, X, P_2\}$
$P_2 = \{X \rightarrow aXa|bXb|Y, Y \rightarrow cY|\epsilon\}$

Ist $abccba \in L(G)$? Zeige es mit den Ableitungen und dem Ableitungsbaum.

Sei $G_2 = \{\{S, U, X, Q\}, \{a\}, S, P_3\}$
$P_3 = \{$
$S \rightarrow aU|aXa|Qaa,$
$U \rightarrow aaU|\epsilon,$
$X \rightarrow Qaaa|a,$
$Q \rightarrow aXa|a\}$

Leitet a^7 ab.

Kontextfreie Grammatiken: Lösung

Sei $G = \{\{X, Y\}, \{a, b, c\}, X, P_2\}$
$P_2 = \{X \rightarrow aXa|bXb|Y, Y \rightarrow cY|c\}$
Ist $abccba \in L(G)$? Zeige es mit den Ableitungen und dem Ableitungsbaum.

abcba ist in L(G), da es durch
$X \Rightarrow aXa \Rightarrow abXba \Rightarrow abYba \Rightarrow abcYba \Rightarrow abccba$ abgeleitet werden kann.

Sei $G_2 = \{\{S, U, X, Q\}, \{a\}, S, P_3\}$
$P_3 = \{\ S \rightarrow aU|aXa|Qaa,\ U \rightarrow aaU|\epsilon,\ X \rightarrow Qaaa|a,\ Q \rightarrow aXa|a\}$
Leitet a^7 ab.

$S \Rightarrow aU \Rightarrow aaaU \Rightarrow aaaaaU \Rightarrow aaaaaaaU \Rightarrow aaaaaaa$

Relationen: Rückblick

Wir kennen bereits:

Relation $R \subseteq A \times B$, also enthält R Tupel aus der Menge $A \times B$.
Im Fall $R \subseteq A \times A$ heißt R *"Relation auf A"*.

Relationen haben 4 Eigenschaften:

- Linkstotal
- Rechtstotal
- Linkseindeutig
- Rechtseindeutig

Relationen: Identität

Die Identität über einer Menge M ist die Relation I_M oder auch die Identität.
Die Identität ist die Abbildung $f(x) = x$ als Relation formuliert, sie ändert nichts an der Menge, dazu ist sie das neutrale element der Verkettung ($\circ$)

Formal: $I_M = \{(x, x) | x \in M\}$

Relationen: Definitionen

Karlsruher Institut für Technologie

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2, S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen.

Produkt von Relationen:
$S \circ R = \{(x, z) \in M_2 \times M_3 | \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \land (y, z) \in S\}$

Potenz einer Relation:
$R^n = R \circ R \circ ... \circ R$, n $\in \mathbb{N}_0$-mal
$R^0 = I_M$, die Identität
R^* ist die reflexiv-transitive Hülle von R

Relationen: Eigenschaften

Zu den schon bekannten Eigenschaften gibt es noch 3 neue Eigenschaften von Relationen:

- reflexiv: R ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq R$
- symmetrisch: R ist symm. $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$
- transitiv: R ist transitiv $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in R \land (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Relationen: Aufgabe

Karlsruher Institut für Technologie

Welche Eigenschaften haben die Relationen?

	$x = y$	$x \leq y$	$x < y$	$x \neq y$
reflexiv				
symmetrisch				
transitiv				

Relationen: Lösung

Welche Eigenschaften haben die Relationen?

	$x = y$	$x \leq y$	$x < y$	$x \neq y$
reflexiv	$\checkmark$	$\checkmark$	x	x
symmetrisch	$\checkmark$	x	x	$\checkmark$
transitiv	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	x