

Aufgaben zur vollständige Induktion

Max Göckel, Tutorium 42

Grundbegriffe der Informatik, 10/11/2017

In Aufgabe 1 wird die Induktion an einem einfach Beispiel gezeigt, Aufgaben 2 und 3 zeigen die Induktion über Summen und Produkte, Aufgabe 4 die Induktion mit einer Fließtextaufgabe und 5 mit einer Folge. Die Aufgaben sind entweder aus dem Tutorium, alten Klausuren oder dem Internet.

1 Einfache Aufgabe aus dem Tutorium

$\mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}_0 : n^2 + n$ ist gerade.

Induktionsanfang: Für $i = 0$: $0^2 + 0 = 0$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \geq 0$.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n + 1)$

$$(n + 1)^2 + (n + 1) \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n + 1 \Leftrightarrow (n^2 + n) + 2n + 2$$

Mit der Induktionsvoraussetzung $(n^2 + 1)$ ist gerade und $(2n + 2)$ auch gerade ist die Behauptung wahr.

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \geq 0$ bewiesen.

2 Aufgabe aus dem Tutorium, Induktion über Summen

$$\mathbb{Z}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$$

$$\textit{Induktionsanfang: Für } i = 1: \sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \geq 0$.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n + 1)$

$$\sum_{i=1}^n i \Leftrightarrow (n+1) + \sum_{i=1}^n i \xrightarrow{\text{I.V.}} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \geq 1$ bewiesen.

3 WS15/16, Induktion über Produkte

$$\mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} : \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i}) = \frac{1}{n}$$

$$\text{Induktionsanfang: } \prod_{i=2}^2 (1 - \frac{1}{i}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n+1)$

$$\prod_{i=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{i}) \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i}) \xrightarrow{\text{I.V.}} (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}$$

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$ bewiesen.

4 Induktion mit einer Fließtextaufgabe

\mathbb{Z} Dass man jeden glatten Betrag $>7\$$ mit (imaginären) Scheinen im Wert von 3\$ und 5\$ ohne Rückgeld zahlen kann.

Formal heißt das: $\forall x \in \mathbb{N}_{>7} : \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : x = 3m + 5n$. (m, n Anzahl der Scheine)

Induktionsanfang mit dreifacher Verkettung:

$$x = 8 : 8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$$

$$x = 9 : 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$$

$$x = 10 : 10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{N}_{>7}$.

Induktionsschritt: $(x \rightarrow x+3)$

$$x+3 \xrightarrow{\text{I.V. für x}} (3m+5n)+3 \Leftrightarrow 3(m+1)+5n.$$

Die Behauptung wurde nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall x \in \mathbb{N}_{>7}$ bewiesen.

5 WS08/09: Induktion mit einer Folge

Die Zahlenfolge F sei wie folgt rekursiv definiert:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_{n+2} = 4F_{n+1} - 4F_n.$$

\mathbb{Z} dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ die Zahl F_n durch 2^n teilbar ist.

Mit anderen Worten: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{Z} : F_n = k \cdot 2^n$

Induktionsanfang mit doppelter Verkettung:

$$F_0 = 0 = 0 \cdot 2^0 \text{ und } F_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$$

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung ist umformuliert gleich $F_{n+1} = k_1 \cdot 2^{n+1}$ und $F_n = k_0 \cdot 2^n$

Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsschritt ($F_n \rightarrow F_{n+2}$):

$$F_{n+2} \Leftrightarrow 4F_{n+1} - 4F_n \stackrel{\text{IV}}{\Leftrightarrow} 4(k_1 \cdot 2^{n+1}) - (k_0 \cdot 2^n) \Leftrightarrow 2k_1 \cdot 2^{n+2} - k_0 \cdot 2^{n+2} \Leftrightarrow (2k_1 - k_0) \cdot 2^{n+2}.$$

Mit k_0 und k_1 ist auch $2k_1 - k_0$ in \mathbb{Z} .

Die Aussage wurde mit dem Prinzip der vollständigen Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.