Tutorium 42, #1,5

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

Kartesisches Produkt

Karlsruher Institut für Technologie

M = {1, 2}, N = {A, B}
M $\times$ N = $\{(m, n) | m \in M, n \in N\}$ ergibt eine Menge aus Tupeln aus M und N

Konkret:

- M $\times$ N = { (1, A), (2, A), (1, B), (2, B) }

Relation

Relation $R \subseteq A \times B$, also enthält R Tupel aus der Menge $A \times B$.
Im Fall $R \subseteq A \times A$ heißt R *"Relation auf A"*.

Aufgaben

Relation 1, "größer-gleich-Relation": A = {1,2,4}, R = $\{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A : a_1 \geq a_2\}$

Relation 2, "Ungleich-Relation": A = {1,2}, B = {2,3,4}, R = $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B : a \neq b\}$

Welche Tupel sind in der Relation drin?

{(2,1), (4,1), (4,2)} bzw. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)}

Eigenschaften von Relationen

- linkstotal: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$
- rechtseindeutig:
  $\nexists a \in A : (\exists b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2 : (a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R)$
- rechtstotal: $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$
- linkseindeutig: $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$

Linkstotal

linkstotal: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$

- In Worten: Jedes Element a aus A hat *mindestens* ein Element b aus B als Partner.
- Eselsbrücke: Die "totale" (also komplette) linke Menge (A) wird in R verwendet.
- Voraussetzung für eine Funktion

Linkstotal

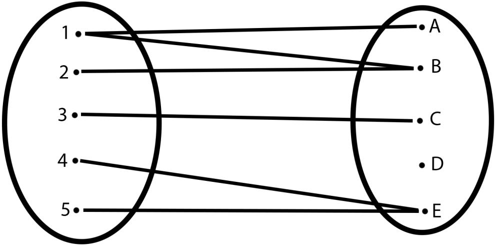

Figure: Linkstotal, Jedes linke Element hat min. ein rechtes Element

Rechtstotal

$\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$

- In Worten: Jedes Element b aus B hat *mindestens* ein Element a aus A als Partner.
- Eselsbrücke: Die "totale" (also komplette) rechte Menge (B) wird in R verwendet.
- Auch surjektiv genannt

Rechtstotal

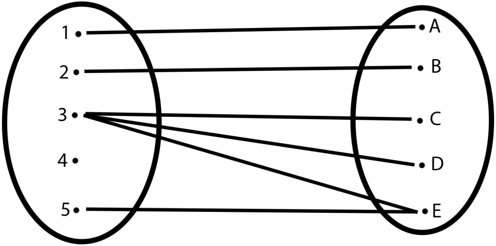

Figure: Rechtstotal, Jedes rechte Element hat min. ein linkes Element

Linkseindeutig

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$$

- In Worten: Wenn ich zwei a aus A angucke und $a_1 \neq a_2$ so ist auch $b_1 \neq b_2$
- Einfacher: Jedes Element b aus B hat *höchstens* ein Element a aus A als Partner.
- Eselsbrücke: Das linke Element ist zum rechten Element eindeutig.
- Auch injektiv genannt

Linkseindeutig

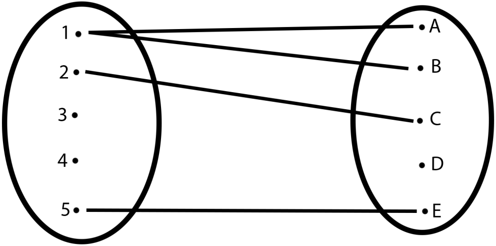

Figure: Linkseindeutig, Jedes rechte Element hat höchtens ein linkes Element

Rechtseindeutig

Karlsruher Institut für Technologie

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$$

- In Worten: Wenn ich zwei b aus B angucke und $b_1 \neq b_2$ so ist auch $a_1 \neq a_2$
- Einfacher: Jedes Element a aus A hat *höchstens* ein Element b aus B als Partner.
- Eselsbrücke: Das rechte Element ist zum linken Element eindeutig.
- Voraussetzung für eine Funktion

Rechtseindeutig

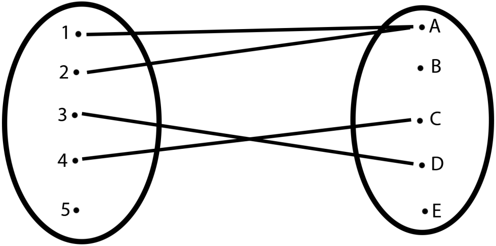

Figure: Rechtseindeutig, Jedes linke Element hat höchtens ein rechtes Element

Funktionen

Karlsruher Institut für Technologie

Funktionen sind Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind

- Jedes Element der Urmenge ("linke" Menge) wird abgebildet (linkstotal)
- Für jedes Element gibt es nur (max.) einen Partner in der Zielmenge (rechtseind.)
- Auch Funktionen können injektiv und surjektiv sein (Sie sind ja Relationen)

Funktionen

Injektive Funktionen sind zum Beispiel

- $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2x$
- $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2$

aber nicht

- $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

Funktionen

Karlsruher Institut für Technologie

Surjektive Funktionen sind zum Beispiel

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
- $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$

aber nicht

- $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

Aufgabe

Ist die Funktion
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
surjektiv bzw. injektiv?

Und wieso ist
$f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$
weder injektiv noch surjektiv? Beweise mit je einem Gegenbeispiel.

Lösung

Ist die Funktion
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
surjektiv bzw. injektiv?
Surjektiv, da mit x^3 jede reelle Zahl getroffen werden kann.
Injektiv, da kein x in der Zielmenge doppelt getroffen wird (x^3 ist für positive x positiv und für negative x negativ)

Und wieso ist
$f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$
weder injektiv noch surjektiv? Beweise mit je einem Gegenbeispiel.
Nicht injektiv, da $f_3(2) = f_3(-2) = 4$. Nicht surjektiv, da -1 nicht getroffen wird.