

# Tutorium 42, #1,5

Max Göckel– *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Grundbegriffe der Informatik

$$M = \{1, 2\}, N = \{A, B\}$$

$M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N\}$  ergibt eine Menge aus Tupeln aus  $M$  und  $N$

Konkret:

■  $M \times N = \{(1, A), (2, A), (1, B), (2, B)\}$

Relation  $R \subseteq A \times B$ , also enthält  $R$  Tupel aus der Menge  $A \times B$ .  
Im Fall  $R \subseteq A \times A$  heißt  $R$  "*Relation auf  $A$* ".

Relation 1, "größer-gleich-Relation":  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  $R = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A : a_1 \geq a_2\}$

Relation 2, "Ungleich-Relation":  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B : a \neq b\}$

Welche Tupel sind in der Relation drin?

$\{(2, 1), (4, 1), (4, 2)\}$  bzw.  $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

- linkstotal:  $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$
- rechtseindeutig:  
 $\nexists a \in A : (\exists b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2 : (a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R)$
- rechtstotal:  $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$
- linkseindeutig:  $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$

linkstotal:  $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$

- In Worten: Jedes Element  $a$  aus  $A$  hat *mindestens* ein Element  $b$  aus  $B$  als Partner.
- Eselsbrücke: Die "totale" (also komplette) linke Menge ( $A$ ) wird in  $R$  verwendet.
- Voraussetzung für eine Funktion

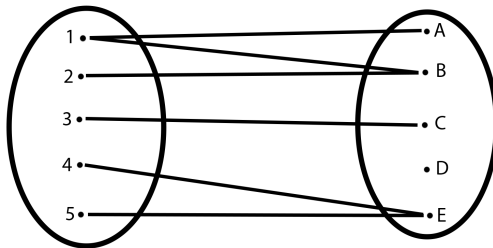


Figure: Linkstotal, Jedes linke Element hat min. ein rechtes Element

$$\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$$

- In Worten: Jedes Element  $b$  aus  $B$  hat *mindestens* ein Element  $a$  aus  $A$  als Partner.
- Eselsbrücke: Die "totale" (also komplette) rechte Menge ( $B$ ) wird in  $R$  verwendet.
- Auch surjektiv genannt



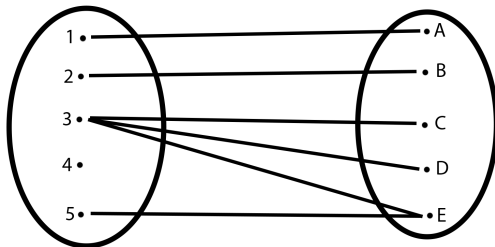


Figure: Rechtstotal, Jedes rechte Element hat min. ein linkes Element

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$$

- In Worten: Wenn ich zwei  $a$  aus  $A$  angucke und  $a_1 \neq a_2$  so ist auch  $b_1 \neq b_2$
- Einfacher: Jedes Element  $b$  aus  $B$  hat *höchstens* ein Element  $a$  aus  $A$  als Partner.
- Eselsbrücke: Das linke Element ist zum rechten Element eindeutig.
- Auch injektiv genannt

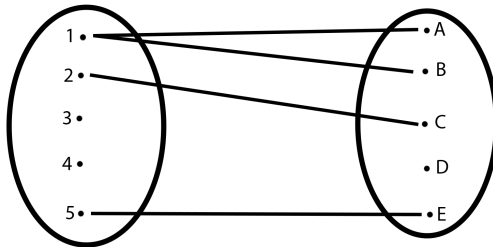


Figure: Linkseindeutig, Jedes rechte Element hat höchstens ein linkes Element

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$$

- In Worten: Wenn ich zwei  $b$  aus  $B$  angucke und  $b_1 \neq b_2$  so ist auch  $a_1 \neq a_2$
- Einfacher: Jedes Element  $a$  aus  $A$  hat *höchstens* ein Element  $b$  aus  $B$  als Partner.
- Eselsbrücke: Das rechte Element ist zum linken Element eindeutig.
- Voraussetzung für eine Funktion

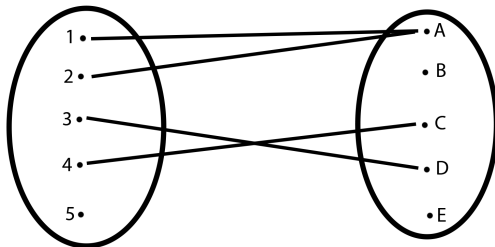


Figure: Rechtseindeutig, Jedes linke Element hat höchstens ein rechtes Element

Funktionen sind Relationen, die linkstotal und rechtseindeutig sind

- Jedes Element der Urmenge ("linke" Menge) wird abgebildet (linkstotal)
- Für jedes Element gibt es nur einen oder keinen Partner in der Zielmenge (rechtseind.)
- Auch Funktionen können injektiv und surjektiv sein (Sie sind ja Relationen)

Injektive Funktionen sind zum Beispiel

■  $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x$

■  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$

aber nicht

■  $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

Surjektive Funktionen sind zum Beispiel

■  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$

■  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$

aber nicht

■  $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$



Ist die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$$

surjektiv bzw. injektiv?

*Surjektiv, da mit  $x^3$  jede reelle Zahl getroffen werden kann.*

*Injektiv, da kein  $x$  in der Zielmenge doppelt getroffen wird ( $x^3$  ist für positive  $x$  positiv und für negative  $x$  negativ)*

Und wieso ist

$$f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$$

weder injektiv noch surjektiv? Beweise mit je einem Gegenbeispiel.

*Nicht injektiv, da  $f_3(2) = f_3(-2) = 4$ . Nicht surjektiv, da  $-1$  nicht getroffen wird.*