A Linear-Time Algorithm For Finding Tree-Decompositions Of Small Treewidth

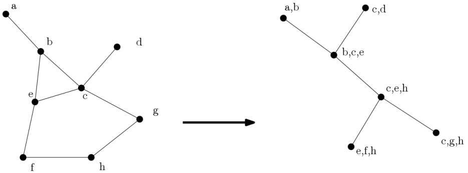
Autor: Hans L. Bodlaender – *h.l.bodlaender@uu.nl*
Vortrag: Maximilian F. Göckel – *uzkns@student.kit.edu*

Institut für Theoretische Informatik - Proseminar Algorithmen für NP-schwere Probleme

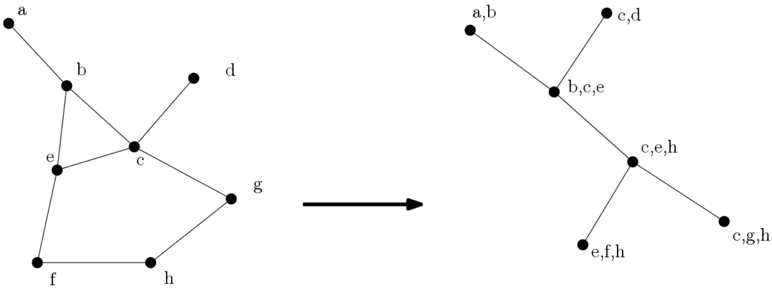
Tree-decomposition
Definition

Eine Baumzerteilung eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Tupel (X, T) wo $T = (I, F)$ ein Baum ist und $X = \{X_i | i \in I\}$ eine Familie von Teilmengen von V wobei jedes X_i einen Knoten in T darstellt. Es muss gelten:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = V$
2. $\forall (v, w) \in E : \exists i \in I : v, w \in X_i$
3. $\forall w \in X_i, X_j$: Jedes X_k im Pfad zwischen X_i, X_j enthält w



Tree-decomposition
Veranschaulichung



1. $\bigcup_{i \in I} X_i = V$
2. $\forall (v, w) \in E : \exists i \in I : v, w \in X_i$
3. $\forall w \in X_i, X_j$: Jedes X_k im Pfad zwischen X_i, X_j enthält w

Treewidth
Definition

Jede Baumzerteilung hat eine "Baumweite" (treewidth).

- Baumweite einer Zerteilung: $\max(|X_i|_{i \in I} - 1)$ ("Zerteilungsweite")
- Baumweite eines Graphen: Minimale Zerteilungsweite aller Zerteilungen

Eine Baumzerteilung der Weite max. k heißt auch k-Baumzerteilung oder k-Zerteilung.

k-Trees
Definition

Ein k-Tree $G = (V, E)$ ist ...

- induktiv konstruiert aus einem k-Tree mit $|V| - 1$ Knoten indem man einen Knoten zu einer k-Clique hinzufügt oder
- Ein Graph der ausschließlich aus einer Clique der Größe k besteht

k-Trees sind maximale Graphen mit Baumweite k.

Graph $G = (V, E)$ ist partieller k-Tree $\Leftrightarrow$

- G ist Teilgraph eines k-Trees oder
- G hat Baumweite max. k

k-Trees
Definition

Ein k-Tree $G = (V, E)$ ist ...

- induktiv konstruiert aus einem k-Tree mit $|V| - 1$ Knoten indem man einen Knoten zu einer k-Clique hinzufügt oder
- Ein Graph der ausschließlich aus einer Clique der Größe k besteht

k-Trees sind maximale Graphen mit Baumweite k.

Graph $G = (V, E)$ ist partieller k-Tree $\Leftrightarrow$

- G ist Teilgraph eines k-Trees oder
- G hat Baumweite max. k

Baumzerteilung

Anwendungen

- Viele NP-schwere Probleme in Linearzeit lösbar
  - Maximum Weight Indepedent Set
- Hohe Baumweite $\Leftrightarrow$ Hohe Komplexität in der Systemanalyse
- Erkennungsalgorithmen von Graphen
  - Graphen mit geb. Pfadweite
  - Partielle k-Trees

Algorithmus

Allgemeines

Eingabe: Graph $G = (V, E)$ und Konstante $k \in \mathbb{N}$.
Der Graph wird als Adjazenzliste übergeben.
Ausgabe in $O(n)$:

- "Baumweite von G ist größer als k" oder
- "Baumweite von G ist maximal k"
  - Baumzerteilung von G mit Baumweite k

Ist k Teil der Eingabe so ist das Problem NP-vollständig.

Knotentypen

Simplizial, freundlich, low- und highdegree

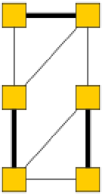
Ein Knoten v ist ...

- ... *von niedrigem Grad* wenn $\deg(v) \leq d$
  - $d := 2k^3 \cdot (k+1) \cdot (4k^2 + 12k + 16)$
  - Analog: Hoher Grad $\Leftrightarrow \deg(v) > d$
  - Auch "low-deg.-" und "high-deg.-Knoten" genannt
- ... *Friendly* wenn er low-deg. und adjazent zu einem weiteren low-deg.-Knoten ist
- ... *Simplizial* wenn alle Nachbarn eine Clique formen

Maximal Matching $M \subseteq E$

$M \subseteq E$ ist *Matching* in $G = (V, E) \Leftrightarrow$ Keine 2 Kanten aus M haben gemeinsamen Endknoten
$M \subseteq E$ ist *Maximal Matching* wenn keine Kante mehr zu M hinzugefügt werden kann, sodass M Matching bleibt.

Ein Maximal Matching kann in $O(|V|)$ gefunden werden, wenn die Baumweite durch ein k beschränkt ist.



Lemma 4.2.

G hat Baumweite max. $k \Rightarrow$ Es gilt mindestens:

1. G hat min. $\frac{|V|}{4k^2+12k+16} =: \lambda$ Friendly-Knoten, oder
2. Der Improved-Graph von G hat min. $\frac{\lambda}{2}|V|$ I-simp.-Knoten

Die Anzahl Friendly-Knoten in G wird mit n_f notiert.

Algorithmus

Fall: Min. λ Friendly-Knoten

1. Finde Maximal Matching $M \subseteq E$
2. Jede Kante in M kontrahieren $\rightarrow \widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ entsteht
3. Kompletten Algorithmus auf $\widetilde{G}$ ausführen um Baumzerteilung (Y, T) von $\widetilde{G}$ zu berechnen
   $\rightarrow$ Wenn Baumweite von $\widetilde{G} > k \Rightarrow$ STOP (LEMMA 3.4.)
4. Mit LEMMA 3.3. $(2k + 1)$-Zerteilung (X, T) von G aus (Y, T) erstellen
5. Mit THEOREM 2.4. prüfen ob Baumweite von $G > k$ ist, falls nein:
   $\rightarrow$ k-Baumzerteilung von G ausgeben

Laufzeitanalyse

Fall 1

1. Maximal Matching $M \subseteq E$ finden

Ein Maximal Matching kann greedy in $O(|V| + |E|)$ gefunden werden.

Lemma 2.3.

$\mathrm{tw}(G) \leq k \Rightarrow |E| \leq k|V| - \frac{1}{2}k(k+1)$

$\Rightarrow |E| \in O(|V|)$
$\Rightarrow$ Max. Matching kann in $O(|V|)$ gefunden werden

Laufzeitanalyse

Fall 1

2. Jede Kante in M kontrahieren um Graphen $\widetilde{G}$ zu erhalten

Eine Kante kann in $O(1)$ kontrahiert werden, liegt der Graph als Adjazenzliste vor.

Lemma 2.3.

$\text{tw}(G) \leq k \Rightarrow |E| \leq k|V| - \frac{1}{2}k(k+1)$

$|M| \subseteq E$ und $E \in O(|V|)$
$\Rightarrow$ Alle Kanten können in $O(|V|)$ kontrahiert werden.

Laufzeitanalyse

Fall 1

3. Kompletten Algorithmus auf $\widetilde{G}$ ausführen um Baumzerteilung (Y, T) von $\widetilde{G}$ auszugeben

Ein Maximal Matching hat min. $\frac{n_f}{2d}$ Kanten.

Für jeden Friendly-Knoten gilt:

- Er ist Endpunkt von einem $m \in M$, oder
- Er ist adjazent zu einem Friendly-Knoten, der Endpunkt ist

$\Rightarrow \forall m \in M$ werden max. $2d$ Friendly-Knoten assoziiert, die Endpunkt sind oder adjazent zu einem Friendly-Endpunkt sind.

Ist ein Friendly-Knoten nicht assoziiert so ist M nicht maximal
$\Rightarrow |M| \geq \frac{n_f}{2d}$

Laufzeitanalyse
Fall 1

3. Kompletten Algorithmus auf $\widetilde{G}$ ausführen um Baumzerteilung (Y, T) von $\widetilde{G}$ auszugeben

Ein Maximum Matching hat min. $\frac{n_f}{2d}$ Kanten.
$\Rightarrow |\widetilde{V}| = (1 - \frac{1}{2d(4k^2+12k+16)}) \cdot |V|$

Laufzeitanalyse

Fall 1

4. Mit LEMMA 3.3. Zerteilung (X, T) von G aus (Y, T) erstellen

$$f_M : V \mapsto \widetilde{V} : \begin{cases} f_M(v) = v & \text{Wenn } v \text{ nicht Endpunkt in } M \text{ ist} \\ f_M(v) = f_M(w) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $f_m(w)$ der Knoten der bei der Kontraktion von $(v, w) \in M$ bleibt.

Ist (Y, T) Zerteilung von $\widetilde{G}$, so ist (X, T) mit $X_i = \{v \in V | f_M(v) \in Y_i\}$ Zerteilung von G mit Weite max. $2k + 1$

Laufzeitanalyse

Fall 1

5. prüfen ob Baumweite von $G > k$ ist $\Rightarrow$ STOP

5.1. k-Zerteilung von G errechnen

Lemma 2.4.

$\forall k, l \in \mathbb{N}\ \exists$ Linearzeitalgorithmus, welcher aus einem Graph $G = (V, E)$ und einer l-Zerteilung prüft ob die Baumweite von G max. k ist und eine k-Zerteilung errechnet

Laufzeit: $O(l^{l-2} \cdot ((2l+3)^{2l+3} \cdot (\frac{8}{3}2^{2k+2})^{2l+3})^{2l-1})) \in O(2^{k^3})$ bei $l \in O(k)$

Lemma 4.2.

G hat Baumweite max. $k \Rightarrow$ Es gilt mindestens:

1. G hat min. $\frac{|V|}{4k^2+12k+16} =: \lambda$ Friendly-Knoten, oder
2. Der Improved-Graph von G hat min. $\frac{\lambda}{2}|V|$ I.simp.-Knoten

Die Anzahl Friendly-Knoten in G wird mit n_f notiert.

Improved-Graph G'

Erstellung und Eigenschaften

$G' = (V, E')$ ist $G = (V, E)$ mit Kanten $(v, w) \in E' \forall v, w \in V$ sodass v, w min. $k + 1$ gem. Nachbarn mit Grad max. k haben.

Lemma 4.1.

tw(G)$\leq k \Leftrightarrow$ tw(G')$\leq k$.
Jede k-Zerteilung von G ist auch eine k-Zerteilung von G' und umgekehrt.

Algorithmus

Fall: Max. $\lambda - 1$ Friendly-Knoten

1. Improved-Graph G' berechnen
   $\rightarrow \exists$ I.simp.-Knoten v mit deg(v) = $k + 1 \Rightarrow$ STOP
2. Alle I.simp.-Knoten in Menge SL und von G entfernen $\Rightarrow \widehat{G}$ entsteht
   $\rightarrow |SL| < c_2 \cdot |V| \Rightarrow$ STOP (THEOREM 4.2.)
3. Algorithmus rekursiv auf $\widehat{G}$ ausführen $\Rightarrow$ Ausgabe von Zerteilung (Y, T) von $\widehat{G}$
   $\rightarrow$ tw($\widehat{G}$) $> k \Rightarrow$ STOP ($\widehat{G}$ Teilgraph von $G \Rightarrow$ tw(G) $> k$)
4. Füge SL wieder in die Zerteilung (Y, T) ein
   $\Rightarrow$ Baumzerteilung (X, T) von G mit Baumweite max. k

Laufzeitanalyse

Fall 2

1. Den Improved-Graph G' berechnen

1.1. Alle I-simp.-Knoten von G in Menge SL zusammenfassen

$$\text{Wir definieren } Q = \{((v_i, v_j), -) | (v_i, v_j) \in E, i < j\}$$
$$\cup \{((v_i, v_j), v) | v_i, v_j \in N_G(v), i < j \wedge deg(v) \leq k\}$$

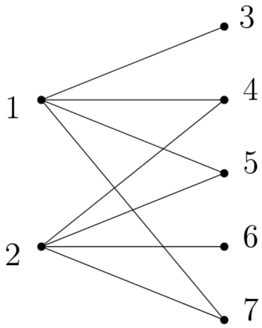
$$\text{und } Q_{v_i,v_j} = \{((v_i, v_j), v) | v_i, v_j \text{ fest}, v \in V\} \subseteq Q$$

Laufzeitanalyse

Fall 2

Q für $k = 2$:

- $((1,3),-)$
- $((1,4),-)$
- $((1,5),-)$
- $((1,7),-)$
- $((2,4),-)$
- $((2,5),-)$
- $((2,6),-)$
- $((2,7),-)$

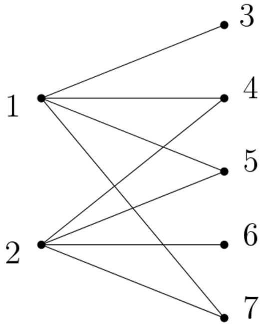


Laufzeitanalyse

Fall 2

Q:

- $((1,3),-)$
- $((1,4),-)$
- $((1,5),-)$
- $((1,7),-)$
- $((2,4),-)$
- $((2,5),-)$
- $((2,6),-)$
- $((2,7),-)$
- $((1,2),4)$
- $((1,2),5)$
- $((1,2),7)$

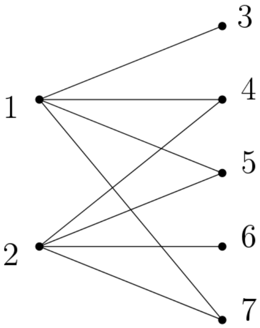


Laufzeitanalyse

Fall 2

Q, erster BucketSort:

- $((1,3),-)$
- $((1,4),-)$
- $((1,5),-)$
- $((1,7),-)$
- $((1,2),4)$
- $((1,2),5)$
- $((1,2),7)$
- $((2,4),-)$
- $((2,5),-)$
- $((2,6),-)$
- $((2,7),-)$

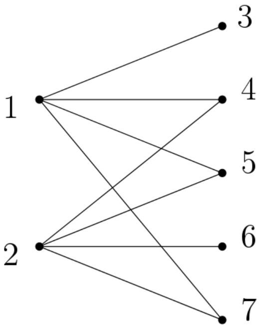


Laufzeitanalyse

Fall 2

Q, zweiter BucketSort:

- $((1,2),4)$
- $((1,2),5)$
- $((1,2),7)$
- $((1,3),-)$
- $((2,4),-)$
- $((1,4),-)$
- $((1,5),-)$
- $((2,5),-)$
- $((2,6),-)$
- $((1,7),-)$
- $((2,7),-)$



Laufzeitanalyse
Fall 2

$Q_{v_i,v_j} = \{((v_i, v_j), v) | v_i, v_j \text{ fest}, v \in V\} \subseteq Q$

Falls $|Q_{v_i,v_j}| \geq k \rightarrow (v_i, v_j) \in E'$, da v_i und v_j nun min. $(k+1)$ gemeinsame Nachbarn haben.

Für jedes Element aus der oberen Menge und wenn $((v_i, v_j), -) \in Q$: Füge (v_i, v_j) für jedes $v \in V$ zu einer Menge S_v hinzu, sodass S_v alle Kanten von Nachbarn von v enthält.

Laufzeitanalyse

Fall 2

Der Graph $G' = (V, E')$ kann also aus den verschiedenen Q_{v_i, v_j} ausgelesen werden.

Das finden von I-simp.-Knoten ist durch S_v nun auch möglich: Da alle Nachbarn von v in S_v sind, kann schnell geprüft werden ob $N_{G'}(v)$ eine Clique formt.

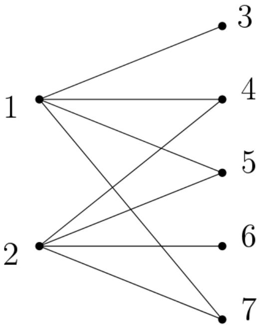
Laufzeitanalyse

Fall 2

Q, zweiter BucketSort:

1 $((1,2),4)$
2 $((1,2),5)$
3 $((1,2),7)$
- $((1,3),-)$
- $((2,4),-)$

$\vdots$



S:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
leer	leer	leer	leer	leer	leer	leer

Laufzeitanalyse

Fall 2

Queue Q für Menge Q, Array S aus Listen für die S_v's.

1. Knoten ordnen $(v_1, v_2 \dots v_n)$
2. $\forall (v_i, v_j) \in E, i < j$: Lege $((v_i, v_j), -)$ auf Q
3. $\forall v \in V$: Lege alle $((v_i, v_j), v)$ mit $v_i, v_j \in N_G(v)$ und $i < j$ auf Q
4. Bucket-sortiere Q zwei mal: Ein mal nach dem ersten, dann nach zweiten Eintrag

Laufzeitanalyse
Fall 2

Sind nach dem Sortieren von Q $(k+1)$ Einträge für gleiches (v_i, v_j) in Q untereinander $\rightarrow (v_i, v_j) \in E'$

Ist für solche v_i, v_j auch $((v_i, v_j), -)$ in Q: Füge für jedes $((v_i, v_j), v)$ das Tupel (v_i, v_j) in alle $S[v]$ ein.

Ist in $S[v]$ jedes v_i mit jedem v_j verbunden: $N'_G(v)$ bildet Clique $\Rightarrow v$ ist I-simp. $\Rightarrow v \in SL$

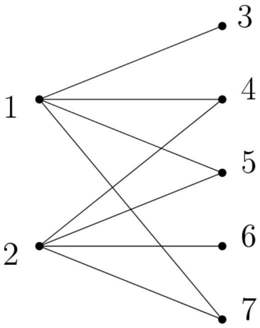
Laufzeitanalyse

Fall 2

Q, zweiter BucketSort:

1 $((1,2),4)$
2 $((1,2),5)$
3 $((1,2),7)$
- $((1,3),-)$
- $((2,4),-)$

$\vdots$



S:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
leer	leer	leer	leer	leer	leer	leer

Laufzeitanalyse

Fall 2

2. *SL* von *G* entfernen $\rightarrow \widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ entsteht
3. Algorithmus rekursiv auf $\widehat{G}$ ausführen

Graph $\widehat{G}$ hat nach Entfernung von *SL* $(1 - c_2) \cdot |V|$ Knoten.

Wie in Fall 1 sind alle rekursiven Aufrufe in $O(|V|)$ möglich.

Laufzeitanalyse

Fall 2

4. Füge SL wieder in die Zerteilung (Y, T) ein

1. $\forall v \in SL$: Finde ein $Y_{i_v} \in Y$ in dem alle Nachbarn von v sind $(N_G(v) \subseteq Y_{i_v})$
2. Füge $Y_{j_v} = \{\{v\} \cup N_G(v)\}$ zu Y hinzu und mache es adjazent zu Y_{i_v}
   $\Rightarrow$ Baumzerteilung von G mit Baumweite max. k

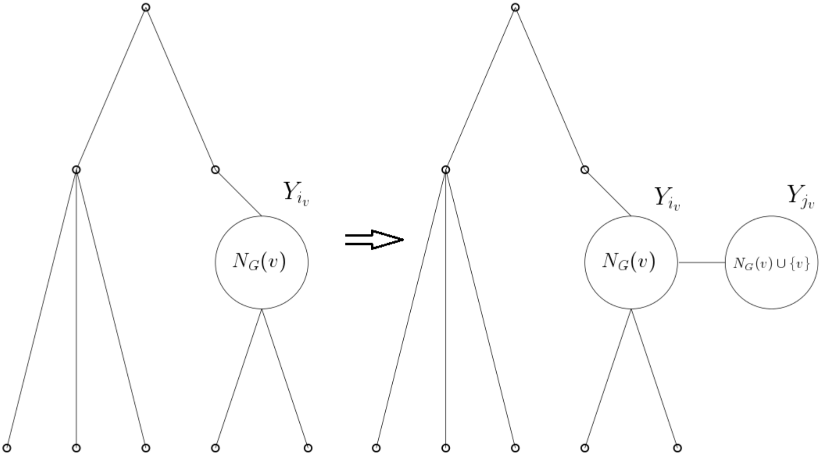
Y_{i_v} existiert für jedes v, da I-simp.-Knoten in G nicht adjazent sind und $N_G(v)$ eine Clique formt.

Lemma 2.1.i)

Ist (X, T) Zerteilung von $G = (V, E)$ und $W \subseteq V$ formt Clique in $G \Rightarrow \exists i \in I : W \subseteq X_i$

Laufzeitanalyse

Fall 2



Laufzeitanalyse

Fall 2

- Wir haben: (Y, T) k-Zerteilung von $\widetilde{G}$
  - $Y = \{Y_i | i \in I\}$
- Wir erstellen: $\forall l \in \{1 \ldots k\}$: Queue Q_l
  - Also k verschiedene Queues $(Q_1, Q_2 \ldots Q_k)$

Laufzeitanalyse

Fall 2

1. Queue Q_I: Füge alle Paare $((v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_l},), i)$ für alle $i \in I$ zu dieser Queue hinzu
   - $v_{i_x} \in Y_i$
2. Füge zu Q_I noch alle Paare $((v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_l},), v)$ mit $v \in SL$ und $v_{i_x} \in N_G(v)$ hinzu

Laufzeitanalyse

Fall 2

Q_1:

- $((u_1), Y_1)$
- $((v_1), Y_2)$
- $((w_1), Y_3)$
- $((x_1), Y_4)$

Q_2:

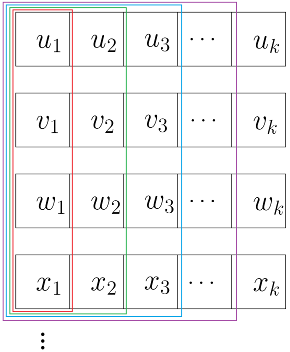
- $((u_1, u_2), Y_1)$
- $((v_1, v_2), Y_2)$
- $((w_1, w_2), Y_3)$
- $((x_1, x_2), Y_4)$

Q_3:

- $((u_1, u_2, u_3), Y_1)$
- $((v_1, v_2, v_3), Y_2)$
- $((w_1, w_2, w_3), Y_3)$
- $((x_1, x_2, x_3), Y_4)$

Q_4:

- $((u_1, u_2, u_3, u_4), Y_1)$
- $((v_1, u_2, v_3, v_4), Y_2)$
- $((w_1, u_2, w_3, w_4), Y_3)$
- $((x_1, u_2, x_3, x_4), Y_4)$



Laufzeitanalyse
Fall 2

Jedes Q_l enthält nun die ersten l Knoten jedes $Y_i \in Y$ und l Nachbarn jedes $v \in SL$.

Bucket-sortiere jedes Q_l l-mal, einmal für jeden Knoten v_{i_x} $\rightarrow$ Für jedes $((v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_l},), v)$ das passende Tupel $((v_{i_1}, v_{i_2} \dots v_{i_l},), i)$ adjazent in Q.

So kann man den neuen Node direkt richtig erstellen und zu dem Y_i adjazent machen.

Abschluss

Sämtliche Operationen sind in $O(n)$ wenn k Konstant ist.

Ist k nicht konstant, sondern als Variable Teil der Eingabe, so ist der Algorithmus nicht mehr linear und das Problem wird NP-schwer.

Der konstante Faktor ist allerdings deutlich zu hoch für praktische Anwendung, selbst schon für $k = 4$.
Allerdings wurde bei vielen Operationen grob geschätzt. Es ist zu erwarten, dass die Konstante noch sinken wird.