

# Анализ мощности

Математические методы в зоологии - на R, осень 2013

Марина Варфоломеева

Каф. Зоологии беспозвоночных, СПбГУ

## Экономим силы с помощью анализа мощности

- Статистические ошибки при проверке гипотез
- Мощность статистического теста
- *A priori* анализ мощности
- Оценка величины эффекта
- *Post hoc* анализ мощности

## Вы сможете

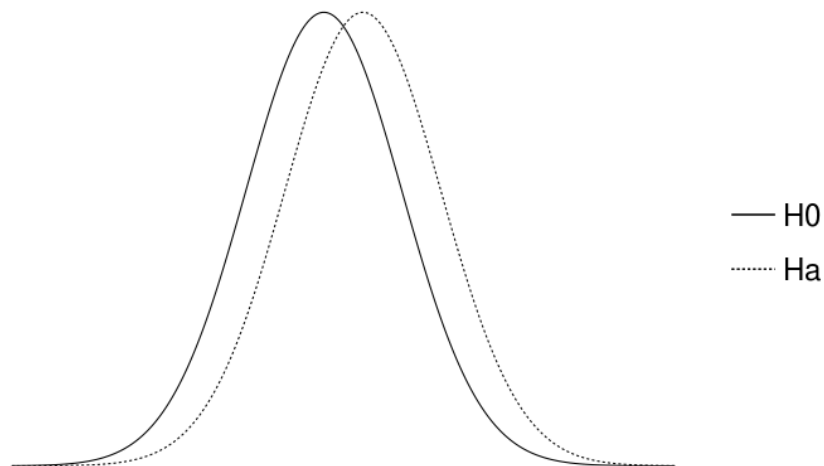
- дать определение ошибок I и II рода, и графически изобразить их отношение к мощности теста
- оценивать величину эффекта и необходимый объем выборки по данным пилотного исследования
- загружать данные из .xls в R
- строить гистограммы и боксплоты с помощью ggplot2
- сравнивать средние значения при помощи t-критерия, интерпретировать и описывать результаты
- рассчитывать фактическую мощность теста

# Статистические ошибки при проверке гипотез

## Типы ошибок при проверке гипотез

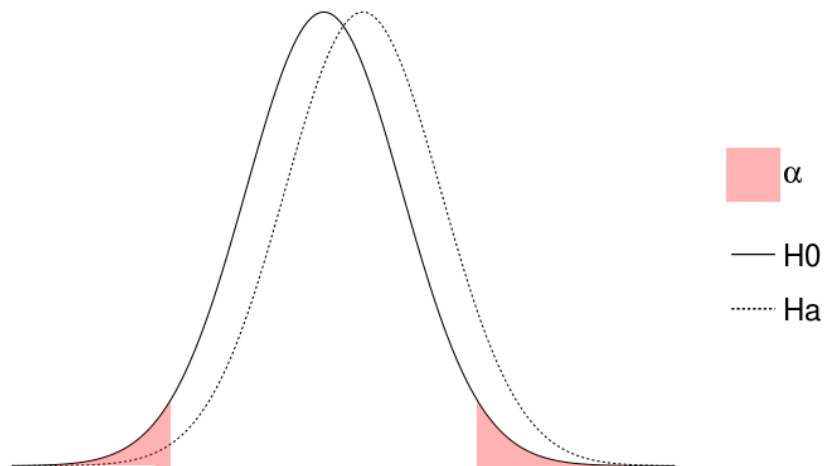
	$H_0 == \text{TRUE}$	$H_0 == \text{FALSE}$
<b>Отклонить</b>	Ошибка I рода	Верно
<b><math>H_0</math></b>	Ложно-положительный результат	Положительный результат
<b>Сохранить</b>	Верно	Ошибка II рода
<b><math>H_0</math></b>	Отрицательный результат	Ложно-отрицательный результат

## Вероятности гипотез



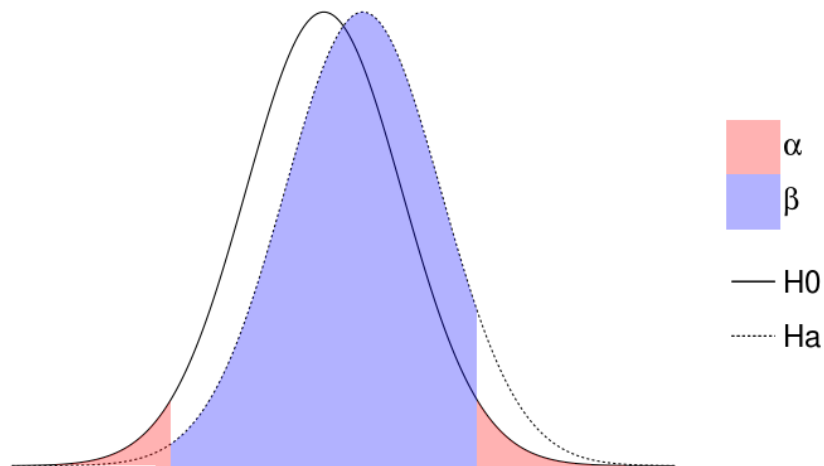
## Ошибки I рода

$H_0$  верна, но отвергнута, найдены различия - ложно-положительный результат



## Ошибки II рода

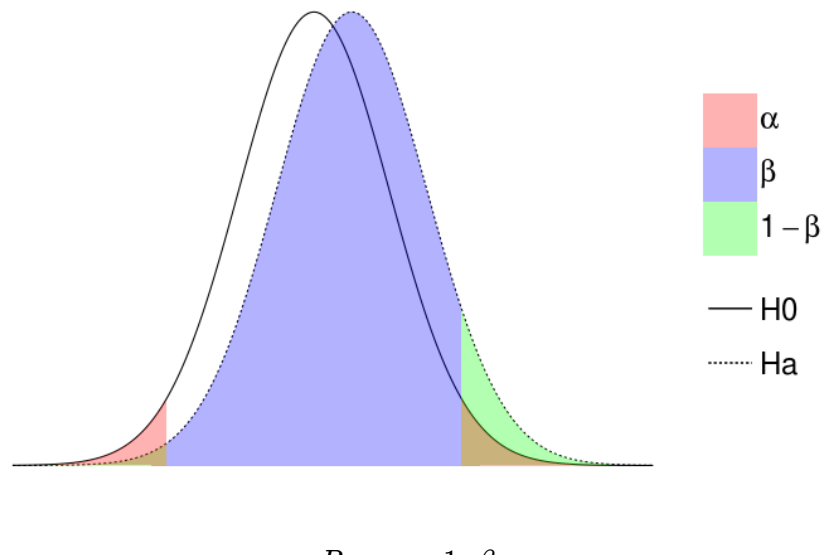
$H_0$  не верна и сохранена, не найдены различия - ложно-отрицательный результат





## Мощность теста

способность выявлять различия



## Анализ мощности

### *A priori*

- какой нужен объем выборки, чтобы найти различия с разумной долей уверенности?
- различия какой величины мы можем найти, если известен объем выборки?

### *Post hoc*

- смогли бы мы найти различия при помощи нашего эксперимента ( $\alpha$ ,  $n$ ), если бы величина эффекта была  $X$ ?

# A priory анализ мощности

## Для a priori анализа нужно знать

- тест
- уровень значимости
- желаемая мощность теста—80%
- ожидаемая величина эффекта

## Пример: Заповедник спасает халиотисов \*

Лов халиотисов (коммерческий и любительский) запретили, организовав заповедник.

Стало ли больше моллюсков через несколько лет? (Keough, King, 1991)

\* - Данные из Quinn, Keough, 2002, Box 9-5, Fig 9-7

## Что мы знаем для a priori анализа?

- тест
- уровень значимости
- желаемая мощность теста
- ожидаемая величина эффекта

## Что мы знаем для a priori анализа?

- тест —  $t$ -критерий
- уровень значимости —  $alpha = 0.05$
- желаемая мощность теста — 80%
- ожидаемая величина эффекта — ?

## Величина эффекта



## Величина эффекта

$d$  Коэна (Cohen's  $d$ )

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

## Как оценить стандартное отклонение для расчета величины эффекта?

$$d = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\sigma}$$

- как среднеквадратичное стандартное отклонение ( $d$  Коэна)

$$d = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$

- как обобщенное стандартное отклонение ( $g$  Хеджа)

$$g = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

## Как оценить ожидаемую величину эффекта?

- Пилотные исследования
- Литература
- Общебиологические знания
- Технические требования

## Величина эффекта из общих соображений

Яков Коэн (1982)

сильные, умеренные и слабые эффекты

```
library(pwr)  
cohen.ES(test = "t", size = "large")
```

```
##  
##      Conventional effect size from Cohen (1982)  
##  
##           test = t  
##           size = large  
##      effect.size = 0.8
```

## Рассчитайте

величину умеренных и слабых эффектов для t-критерия

```
library()  
cohen.ES()
```

Подсказка: обозначения можно посмотреть в файлах справки

```
help(cohen.ES)  
?cohen.ES  
cohen.ES # курсор на слове, нажать F1
```

## Величина эффекта из пилотных данных

$\sigma$  - стандартное отклонение плотности халиотисов:

Плотность крупных халиотисов на  $50\text{м}^2$

$$\bar{x} = 47.5$$

$$SD = 27.7$$

## Величина эффекта из пилотных данных

$\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$  - средний вылов халиотисов в год:

- Масса выловленных -> размер -> численность -> плотность
- Коммерческий лов ~ любительский лов

Коммерческий лов = 11.6 экз. м<sup>-2</sup>

Коммерческий + любительский лов = 23.2 экз. м<sup>-2</sup>

## Данные для анализа мощности собраны

```
alpha <- 0.05  
power <- 0.80  
sigma <- 27.7 # варьирование плотности халиотисов  
diff <- 23.2 # ожидаемые различия плотности халиотисов  
effect <- diff/sigma # величина эффекта  
effect
```

```
## [1] 0.838
```



## Считаем объем выборки

```
pwr.t.test(n = NULL, d = effect, power = power, sig.level = alpha,  
           type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##  
##      Two-sample t test power calculation  
##  
##              n = 23.4  
##              d = 0.838  
##      sig.level = 0.05  
##              power = 0.8  
##      alternative = two.sided  
##  
## NOTE: n is number in *each* group
```

- Чтобы с вероятностью 0.8 выявить различия плотности халиотисов в местах, где лов разрешен и запрещен, нужно обследовать **по 24 места каждого типа**, если мы верно оценили величину эффекта.

## Рассчитайте

сколько нужно обследовать мест, чтобы обнаружить слабый эффект с вероятностью 0.8, при уровне значимости 0.01

```
cohen.ES()  
pwr.t.test()
```

```
cohen.ES(test = "t", size = "small")
```

```
##  
##      Conventional effect size from Cohen (1982)  
##  
##          test = t  
##          size = small  
##      effect.size = 0.2
```

```
pwr.t.test(n = NULL, d = 0.2, power = 0.8, sig.level = 0.01,  
           type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##  
##      Two-sample t test power calculation  
##  
##              n = 586  
##              d = 0.2  
##      sig.level = 0.01  
##              power = 0.8  
##      alternative = two.sided  
##  
## NOTE: n is number in *each* group
```

## Пример: Улитки на устрицах в мангровых зарослях \*

В каких зонах мангровых зарослей на устрицах предпочитают обитать улитки?

Minchinton, Ross, 1999

- Зона зарослей - 4 (по 5 проб - число улиток на раковинах устриц)
  - LZ - ближе к земле, без деревьев,
  - MZ - средняя часть без деревьев,
  - SZ(-TR) - ближе к морю, без деревьев
  - SZ(+TR) - ближе к морю, с деревьями
- Сайт - 2
  - A
  - B

\* - Данные из Quinn, Keough, 2002, Box 9-5, Fig 9-7

## Читаем данные из файла

Не забудьте войти в вашу директорию для матметодов, например, так

```
# setwd("C:\\Мои\ документы\\mathmethR\\") # в Windows  
# setwd(/home/yourusername/mathmethR/) # в Linux
```

```
library(gdata)  
minch <- read.xls(xls = "./data/minch.xls", sheet = 1)
```

```
# можете попробовать, что получится  
minch  
head(minch)
```

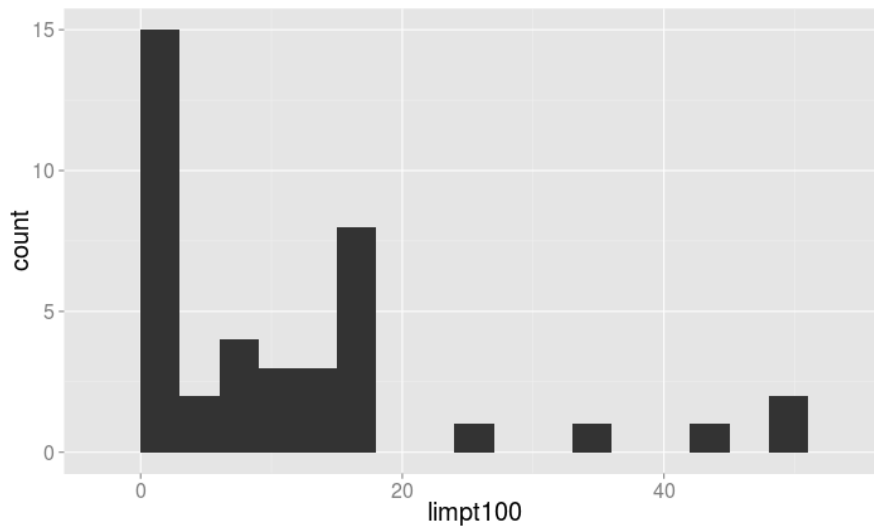
## Структура данных

```
str(minch)
```

```
## 'data.frame':   40 obs. of  6 variables:
## $ X           : int  1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
## $ site        : Factor w/ 2 levels "A","B": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
## $ zone        : Factor w/ 4 levels "LZ","MZ","SZ(-TR)",...: 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 ...
## $ limpt       : num  0.16 0.11 0.1 0.16 0.15 0.12 0 0.03 0.05 0.43 ...
## $ limpt100    : int   16 11 10 16 15 12 0 3 5 43 ...
## $ sqlim100    : num   4 3.32 3.16 4 3.87 ...
```

## Гистограмма числа улиток

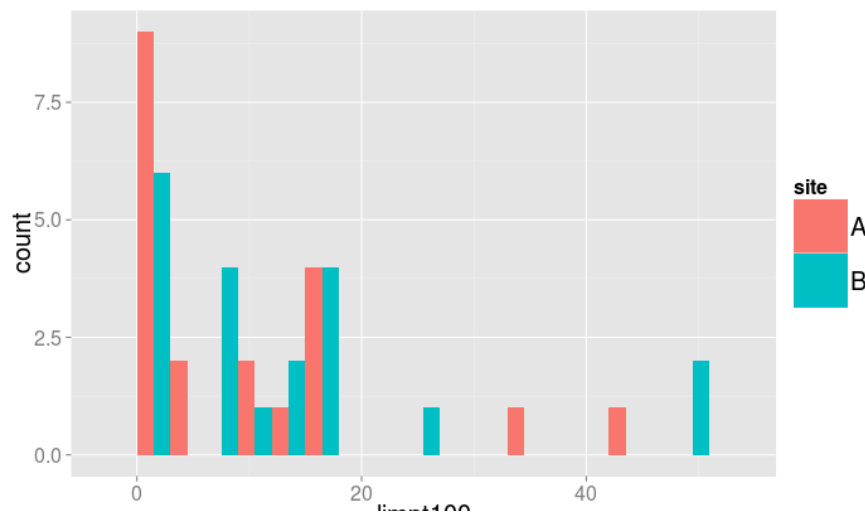
```
library(ggplot2)  
ggplot(data = minch, aes(x = limpt100)) + geom_histogram(stat = "bin", binwidth = 3)
```





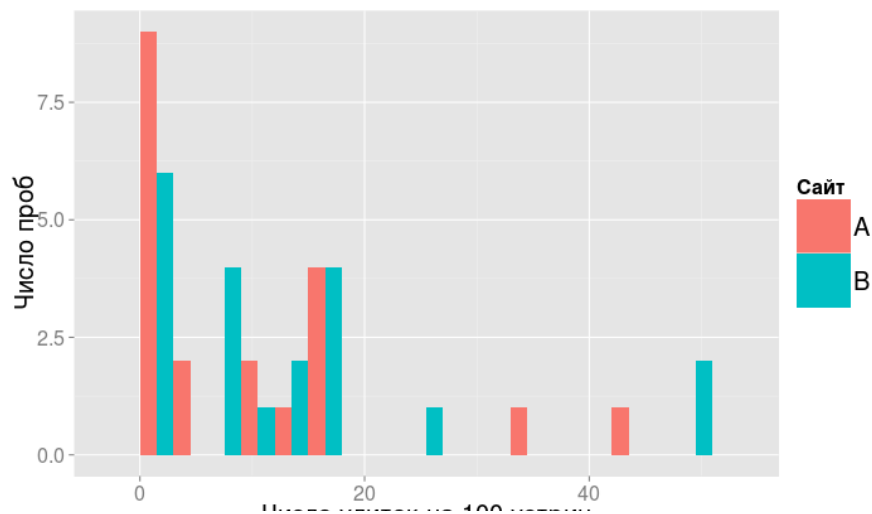
## Раскрашиваем гистограмму

```
hp <- ggplot(data = minch, aes(x = limpt100, fill = site)) +  
  geom_histogram(stat = "bin", binwidth = 3, position = "dodge")  
hp
```



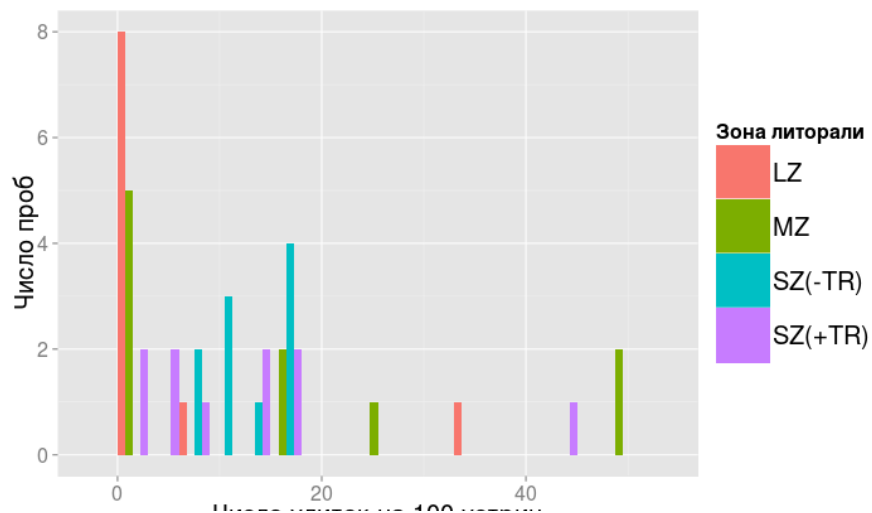
## Называем оси, если нужно

```
hp <- hp +
  labs(x = "Число улиток на 100 устриц", y = "Число проб", fill = "Сайт")
hp
```



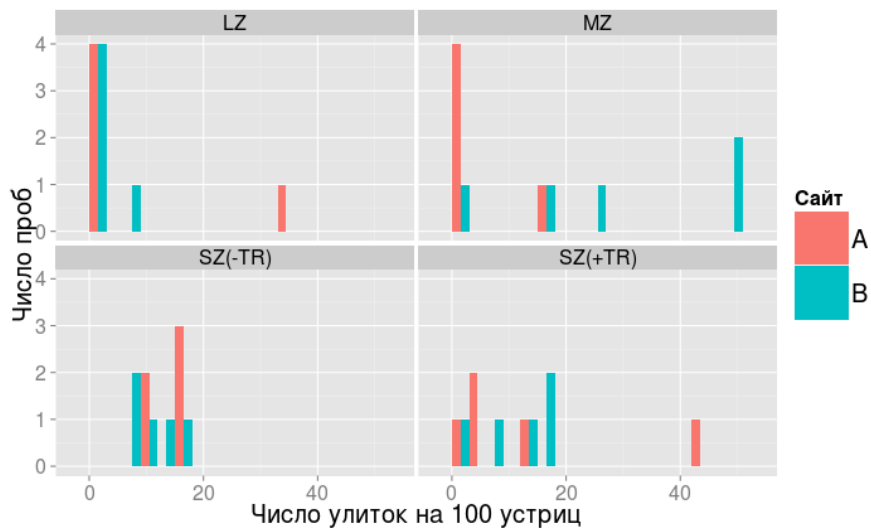
## Чтобы не переписывать все

```
# меняем только эстетику  
hp + aes(fill = zone) +  
  labs(fill = "Зона литорали")
```



## График с панелями

```
hp + facet_wrap(~ zone)
```



## Поэкспериментируйте

с панелями

Что происходит, если мы выбираем другие переменные? Почему?

Какие еще бывают варианты разбивки на панели?

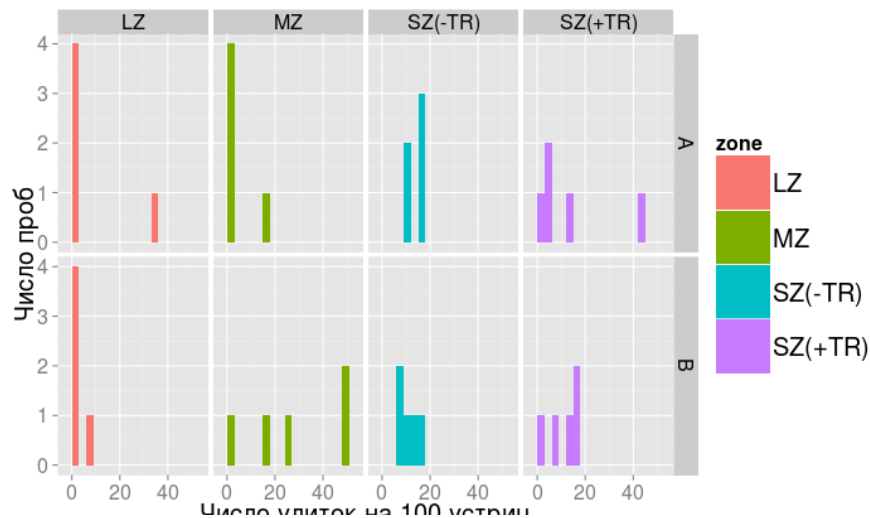
Подсказка: напишите `facet` и нажмите `Ctrl+Space`

Что будет если менять `fill` и `facet` одновременно?

```
ggplot()  
aes()  
geom_histogram()  
facet_wrap()
```

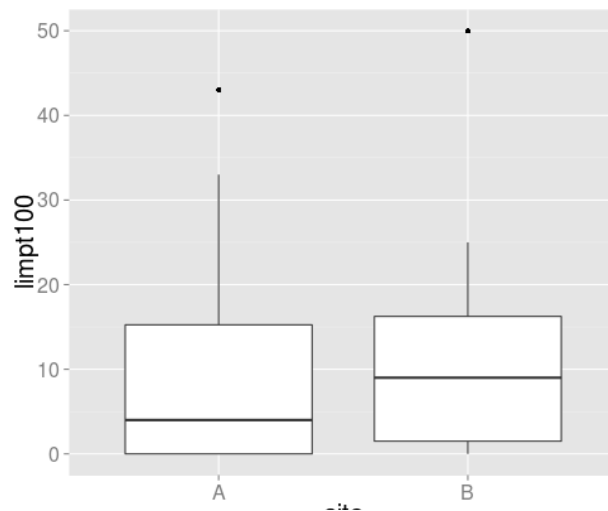
```
# hp + aes(fill = limpt100) # ошибка, т.к. непрерывная шкала, вместо дискретной
# у эстетики должна быть дискретная шкала
```

```
# одновременно панели и раскрашивание
hp + facet_grid(site~zone) + aes(fill = zone)
```



## Боксплоты числа улиток

```
bp <- ggplot(data = minch, aes(x = site, y = limpt100)) +  
  geom_boxplot()  
bp
```



## Поэкспериментируйте

с панелями `facet` и с эстетиками `fill` и `colour`

Что будет, если мы выберем другие переменные?

Опишите форму и разброс распределения улиток в двух сайтах

Симметрично? Похоже ли на нормальное?

```
ggplot()  
aes()  
geom_boxplot()  
facet_wrap()
```



```
bp + aes(colour = zone)
bp + aes(fill = site)
bp + aes(fill = site) + facet_wrap(~zone)
bp + facet_grid(site~zone)
```

## Постройте

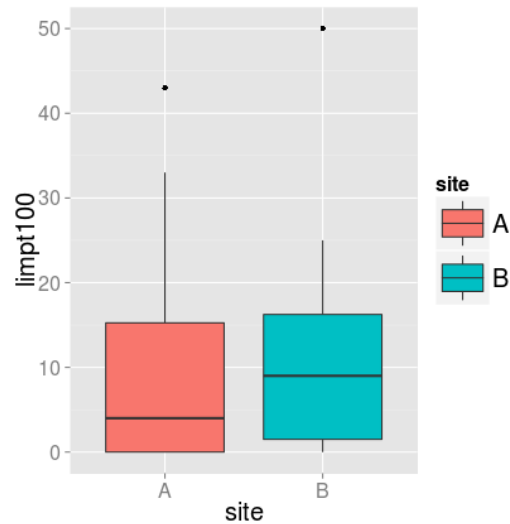
боксплот и гистограмму переменной **sqlim100** (квадратный корень из численности улиток) для двух сайтов

Подсказка: x и y это тоже эстетики, поэтому можно использовать предыдущие графики

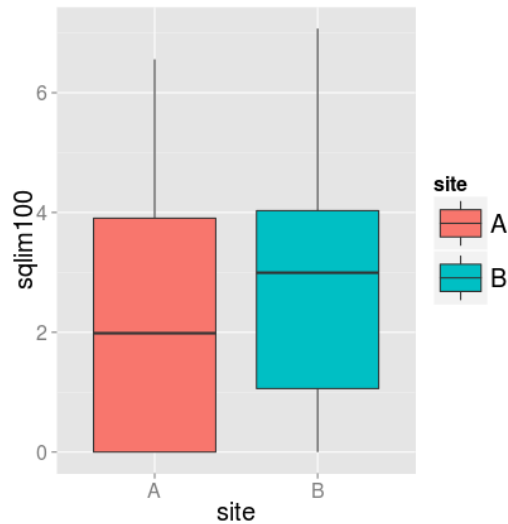
Стало ли распределение больше походить на нормальное?

```
ggplot()  
geom_histogram()  
geom_boxplot()  
aes()
```

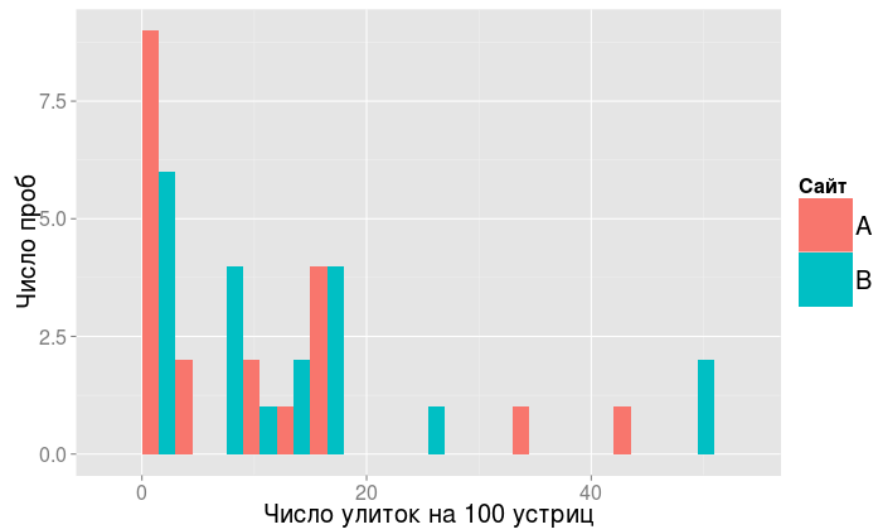
```
bp + aes(fill = site)
```



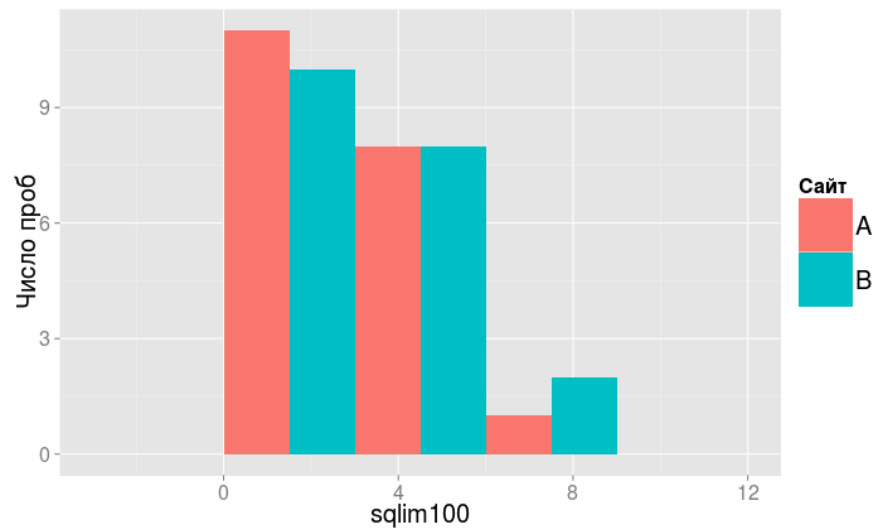
```
bp + aes(y = sqlim100, fill = site)
```



```
hp + aes(fill = site) + labs(fill = "Сайт")
```



```
hp + aes(x = sqlim100, fill = site) + labs(fill = "Сайт")
```



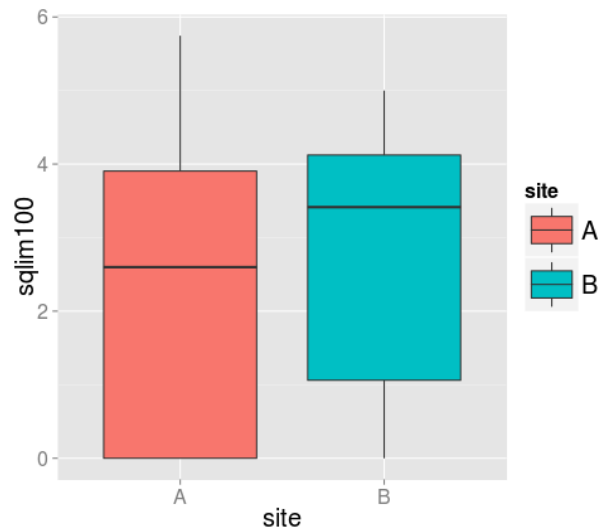
## A priory анализ мощности

Представим, что было пилотное исследование:  
2 сайта, 4 зоны, по 2 пробы

```
minch_smpl <- read.xls(xls = "../data/minch_smpl.xls", sheet = 1)
```

## Мы хотим сравнить сайты

```
ggplot(data = minch_smpl, aes(x = site, y = sqlim100)) +  
  geom_boxplot(aes(fill = site))
```





## Величина эффекта по исходным данным

```
library(effsize)
effect <- cohen.d(minch_smpl$sqlim100, minch_smpl$site)
effect
```

```
##
## Cohen's d
##
## d estimate: -0.159 (negligible)
## 95 percent confidence interval:
##      A      A
## -1.31  0.99
```

- дальше нам понадобится строка "d estimate: -0.159 (negligible)" как добыть из нее значение?

## Величина эффекта по исходным данным

```
str(effect)
```

```
## List of 7
## $ method      : chr "Cohen's d"
## $ name        : chr "d"
## $ estimate     : Named num -0.159
## ..- attr(*, "names")= chr "A"
## $ conf.int     : Named num [1:2] -1.31 0.99
## ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "A" "A"
## $ var         : Named num 0.535
## ..- attr(*, "names")= chr "A"
## $ conf.level   : num 0.95
## $ magnitude    : chr "negligible"
## - attr(*, "class")= chr "effsize"
```

## Величина эффекта по исходным данным

\$ - для обращения к переменным по именам (для обращения к элементам сложного объекта)

```
str(effect)
```

```
## List of 7
## $ method      : chr "Cohen's d"
## $ name        : chr "d"
## $ estimate     : Named num -0.159
## ..- attr(*, "names")= chr "A"
## $ conf.int     : Named num [1:2] -1.31 0.99
## ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "A" "A"
## $ var         : Named num 0.535
## ..- attr(*, "names")= chr "A"
## $ conf.level   : num 0.95
## $ magnitude    : chr "negligible"
## - attr(*, "class")= chr "effsize"
```

```
effect$estimate
```

```
##      A
## -0.159
```

## Для `pwr.t.test()` эффект должен быть положительным

Вычислим модуль, чтобы потом использовать `effect`

```
effect <- abs(effect$estimate) # абсолютная величина (модуль)  
effect
```

```
##      A  
## 0.159
```

- Очень слабый эффект...

## Рассчитайте

объем выборки, чтобы показать различия плотности улиток между сайтами с вероятностью 0.8?

```
pwr.t.test()
```

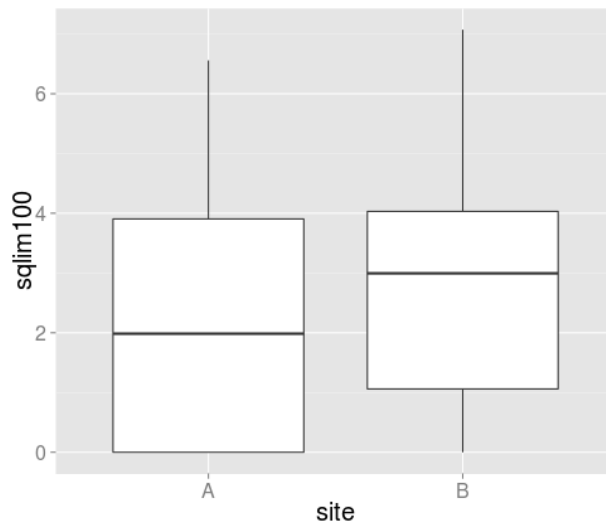
```
pwr.t.test(n = NULL, d = effect, power = 0.8, sig.level = 0.05,  
           type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##  
##      Two-sample t test power calculation  
##  
##              n = 624  
##              d = 0.159  
##      sig.level = 0.05  
##      power = 0.8  
##      alternative = two.sided  
##  
## NOTE: n is number in *each* group
```

- Нужна выборка **624 площадки с каждого сайта**, чтобы с вероятностью 0.8 обнаружить различия плотности улиток между сайтами.

## Что получилось на самом деле?

```
# bp <- ggplot(data = minch, aes(x = site, y = limpt100)) + geom_boxplot()  
bp + aes(y = sqlim100)
```



## t-критерий

по умолчанию Модификация Велча - для неравных дисперсий

```
t.test(sqlim100 ~ site, data = minch, var.equal = FALSE)
```

```
##  
## Welch Two Sample t-test  
##  
## data:  sqlim100 by site  
## t = -1.15, df = 38, p-value = 0.2556  
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0  
## 95 percent confidence interval:  
##  -2.198  0.602  
## sample estimates:  
## mean in group A mean in group B  
##           2.11           2.91
```

- Достоверных различий плотности улиток между локациями не обнаружено (t-критерий,  $p < 0.01$ )



## Post hoc анализ мощности

## Для post hoc анализа нужно знать

- тест ( $H_0$  отвергнута!)
- уровень значимости
- фактический объем выборки
- фактическая величина эффекта

## Пример: Улитки на устрицах в мангровых зарослях \*

Какова была реальная величина эффекта?

Хватило ли нам мощности, чтобы выявлять такие незначительные различия?

\* - Данные из Quinn, Keough, 2002, Box 7-1, Fig 7-4

## Что мы знаем для post hoc анализа?

- тест
- уровень значимости
- фактический объем выборки
- фактическая величина эффекта

## Что мы знаем для post hoc анализа?

- тест — t-критерий
- уровень значимости —  $\alpha = 0.05$
- фактический объем выборки — 20
- фактическая величина эффекта — ?

## Рассчитайте

- фактическую величину эффекта
- реальную мощность теста

```
$  
cohen.d()  
abs()  
pwr.t.test()  
help()
```

```
effect_real <- cohen.d(minch$sqlim100, minch$site)
effect_real <- abs(effect_real$estimate)
pwr.t.test(n = 20, d = effect_real, power = NULL, sig.level = 5.05,
           type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
## Error: 'sig.level' must be numeric in [0, 1]
```

## Минимальные выявляемые различия

$$d = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$

$$MDES = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = d \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$$



## Найдем Коэновскую величину эффекта

```
d <- pwr.t.test(n = 20, d = NULL, power = 0.8, sig.level = 0.05,  
               type = "two.sample", alternative = "two.sided")  
str(d)
```

```
## List of 7  
## $ n      : num 20  
## $ d      : num 0.909  
## $ sig.level : num 0.05  
## $ power    : num 0.8  
## $ alternative: chr "two.sided"  
## $ note     : chr "n is number in *each* group"  
## $ method    : chr "Two-sample t test power calculation"  
## - attr(*, "class")= chr "power.htest"
```

```
d$d
```

```
## [1] 0.909
```

## Минимальные выявляемые различия

$$MDES = d\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$$

```
library(plyr) # пакет, чтобы делать статистику по группам
(summary_by_site <- ddply(minch, ~ site, summarize,
  mean = mean(sqlim100),
  var = var(sqlim100)))
```

```
##   site mean  var
## 1    A 2.11 4.84
## 2    B 2.91 4.73
```

```
(MDES <- d$d * sqrt(sum(summary_by_site$var)/2))
```

```
## [1] 1.99
```

```
(diff <- summary_by_site$mean[2] - summary_by_site$mean[1])
```

## Мощность при разных объемах групп

## А что если бы было не по 20 проб на каждом сайте?

Улитки на устрицах в мангровых зарослях

- сайт А - 20 проб
- сайт В - 40 проб

```
pwr.t2n.test()
```

## Мощность при разных объемах групп

```
# effect_real <- cohen.d(minch$sqlim100, minch$site)
# effect_real <- abs(effect_real$estimate)
pwr.t2n.test(n1 = 20, n2 = 40, d = effect_real, power = NULL,
             sig.level = .05, alternative = "two.sided")
```

```
##
##      t test power calculation
##
##              n1 = 20
##              n2 = 40
##              d = 0.365
##      sig.level = 0.05
##      power = 0.259
##      alternative = two.sided
```

- Все равно мощность маленькая! Важен ли такой эффект? Стоит ли за ним гоняться?

## Рассчитайте

Выборка в первой группе  $n = 200$

Какой объем выборки понадобится во второй группе, чтобы выявлять малые различия в плотности улиток между двумя сайтами (слабые эффекты) с вероятностью 0.8 при уровне значимости 0.05?

```
cohen.ES()  
pwr.t2n.test()
```

```
small_effect <- cohen.ES(test = "t", size = "small")
small_effect <- small_effect$effect.size
pwr.t2n.test(d = 0.2, n1 = 200, n2 = NULL, power = 0.8, sig.level = 0.05,
             alternative = "two.sided")
```

```
##
##      t test power calculation
##
##           n1 = 200
##           n2 = 10486
##           d = 0.2
##      sig.level = 0.05
##           power = 0.8
##      alternative = two.sided
```

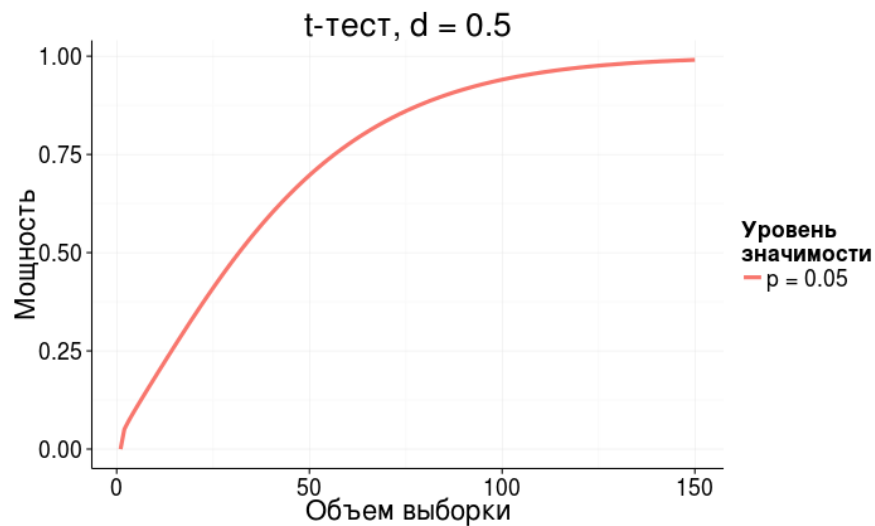
**Как влиять на мощность теста?**



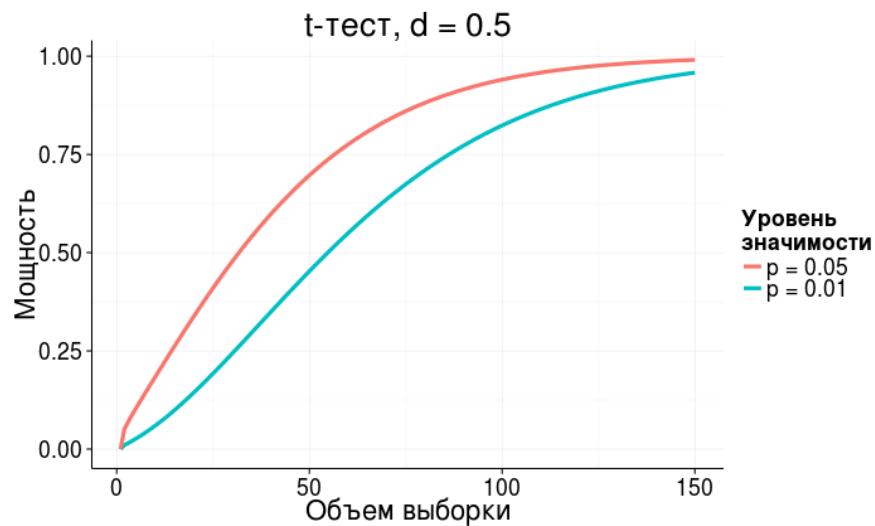
## Мощность зависит

- от объема выборки
- от величины эффекта
- от уровня значимости

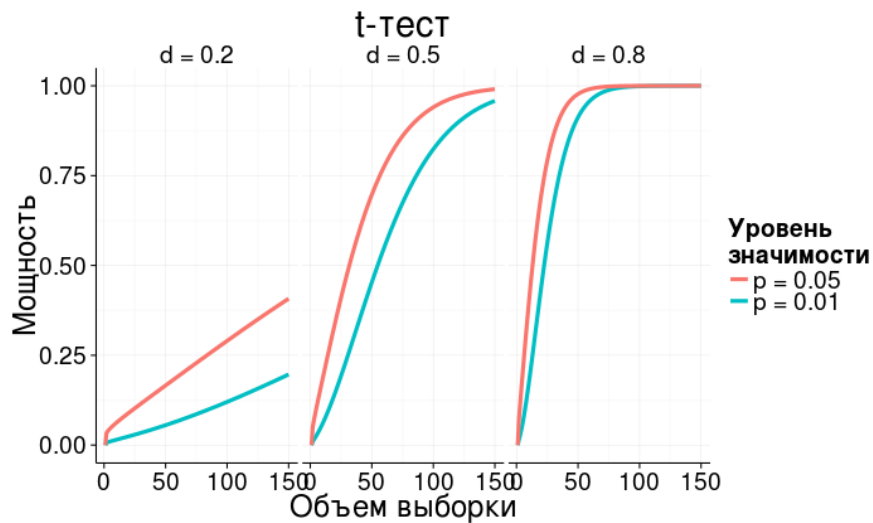
## Чем больше объем выборки—тем больше мощность



## Чем больше уровень значимости—тем больше мощность



**Чем больше величина различий—тем больше мощность**



**Назовите,**

какие из факторов, влияющих на мощность теста,  
мы **не можем** контролировать?

## Мы не можем контролировать внешние факторы

- величину эффекта ( $ES$ )
- фоновую изменчивость ( $\sigma^2$ )

**Скажите,**

каким образом можно повлиять на мощность теста?

## Мощность теста можно регулировать, если

- изменить число повторностей
- выбрать другой уровень значимости ( $\alpha$ )
- определиться, какие эффекты действительно важны ( $ES$ )



## Take home messages

- Контролируем статистические ошибки:
  - чтобы не находить несуществующих эффектов, фиксируем уровень значимости
  - чтобы не пропустить значимое, рассчитываем величину эффекта, объем выборки и мощность теста
  - когда не обнаружили достоверных эффектов, оцениваем величину эффекта и мощность теста
- Способность выявлять различия зависит
  - от объема выборки,
  - от уровня значимости
  - от величины эффекта

## Дополнительные ресурсы

- Quinn, Keough, 2002, pp. 164-170
- Open Intro to Statistics: [4.6 Sample Size and Power](#), pp. 193-197
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 167-169.
- Zar, 1999, p. 83.
- [R Data Analysis Examples - Power Analysis for Two-group Independent sample t-test. UCLA: Statistical Consulting Group.](#)
- [R Data Analysis Examples - Power Analysis for One-sample t-test. UCLA: Statistical Consulting Group.](#)
- [FAQ - How is effect size used in power analysis? UCLA: Statistical Consulting Group.](#)