Регрессионный анализ, часть 1

Математические методы в зоологии - на R, осень 2013

Марина Варфоломеева
Каф. Зоологии беспозвоночных, СПбГУ

Знакомимся с линейными моделями

- Модель простой линейной регрессии
- Проверка валидности модели (t- и F-критерии)
- Условия применимости
- Мощность линейной регрессии

Вы сможете

- подобрать модель линейной регрессии
- проверить валидность модели при помощи t- или F-теста
- проверить выполнение условий применимости линейной регрессии
- расчитать мощность линейной регрессии

Модель простой линейной регрессии

Линейная регрессия

- простая

$$Y_i = \beta_0 + \beta x_i + \epsilon_i$$

- множественная

$$Y_i = \beta_0 + \beta x_{1i} + +\beta x_{2i} + \ldots + \epsilon_i$$

Запись моделей в R

```
зависимая_переменная ~ модель
```

$\hat{y}_i = b_0 + bx_i$ (простая линейная регрессия со свободным членом (intercept))

- Y ~ X
- Y ~ 1 + X
- Y ~ X + 1

$\hat{y}_i = bx_i$ (простая линейная регрессия без свободного члена)

- Y ~ X - 1
- Y ~ -1 + X

$\hat{y}_i = b_0$ (уменьшенная модель, линейная регрессия у от свободного члена)

- Y ~ 1
- Y ~ 1 - X

Запишите в нотации R

эти модели линейных регрессий

- $\hat{y}_i = b_0 + bx_{1i} + bx_{2i} + bx_{3i}$ (множественная линейная регрессия со свободным членом)
- $\hat{y}_i = b_0 + bx_{1i} + bx_{3i}$ (уменьшенная модель множественной линейной регрессии, без $X2$)

Минимизируем остаточную изменчивость

$Y_i = \beta_0 + \beta x_i + \epsilon_i$ - модель регрессии

$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ - оценка модели

нужно оценить β_0, β_1 и σ^2

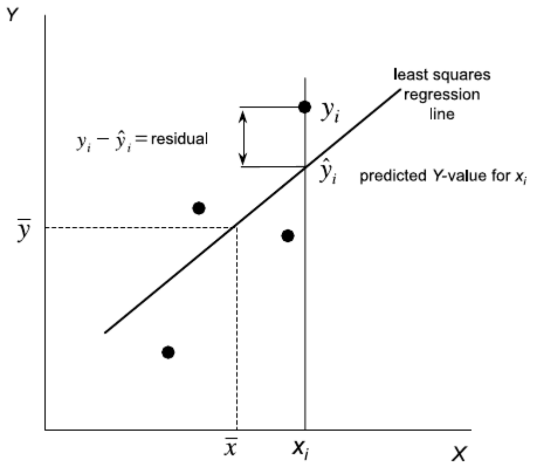


Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 85, рис. 5.6 а

- Метод наименьших квадратов (Ordinary Least Squares, см. рис.)

Еще есть методы максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, REstricted Maximum Likelihood)

Оценки параметров линейной регрессии

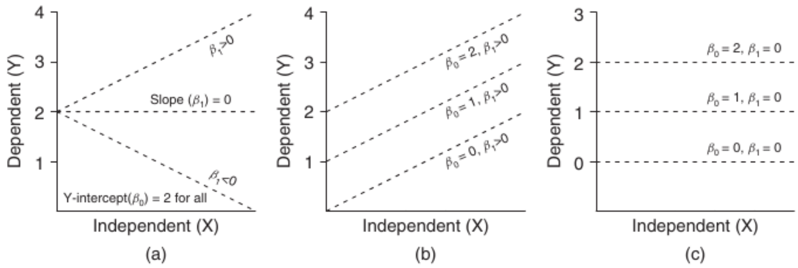
минимизируют $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$, т.е. остатки.

ПАРАМЕТРЫ	ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ	СТАНДАРТНЫЕ ОШИБКИ ОЦЕНОК
β_1	$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$	$SE_{b_1} = \sqrt{\frac{MS_e}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$
β_0	$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$	$SE_{b_0} = \sqrt{MS_e[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}]}$
ϵ_i	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$\approx \sqrt{MS_e}$

- Стандартные ошибки коэффициентов нужны
  - для построения доверительных интервалов
  - для статистических тестов

Таблица из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 86, табл. 5.2

Коэффициенты регрессии



- Если нужно сравнивать - лучше стандартизованные (= "бета коэффициенты") коэффициенты (на след.лекции про сравнение моделей)
  - $b_1^* = \frac{b_1 \sigma_x}{\sigma_y}$
  - не зависят от масштаба

Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 170, рис. 8.2

Пример: усыхающие личинки мучных хрущаков

Как зависит потеря влаги личинками малого мучного хрущака *Tribolium confusum* от влажности воздуха? (Nelson, 1964)

9 экспериментов, продолжительность 6 дней

- разная относительная влажность воздуха, % (`humidity`)
- измерена потеря влаги, мг (`weightloss`)

Данные в файлах `nelson.xlsx` и `nelson.csv`

Данные из Sokal, Rohlf, 1997, табл. 14.1 по Logan, 2010. глава 8, пример 8c

Читаем данные из файла и знакомимся с ними

Внимание, установите рабочую директорию, или используйте полный путь к файлу

```
setwd("C:\\mathmethr\week2")
## из .xlsx
library(XLConnect)
wb <- loadWorkbook(".\data\nelson.xlsx")
nelson <- readWorksheet(wb, sheet = 1)
## или из .csv
# nelson <- read.table(file=".\data\nelson.xlsx", header = TRUE, sep = "\t", dec = ".")
```

```
str(nelson)
```

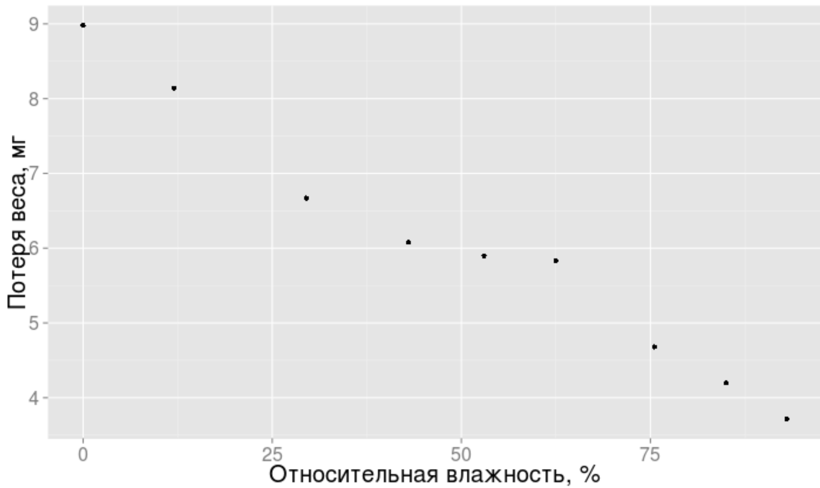
```
## 'data.frame':    9 obs. of  2 variables:
##  $ humidity  : num  0 12 29.5 43 53 62.5 75.5 85 93
##  $ weightloss: num  8.98 8.14 6.67 6.08 5.9 5.83 4.68 4.2 3.72
```

```
head(nelson)
```

```
##   humidity weightloss
## 1      0.0       8.98
## 2     12.0       8.14
## 3     29.5       6.67
## 4     43.0       6.08
## 5     53.0       5.90
```

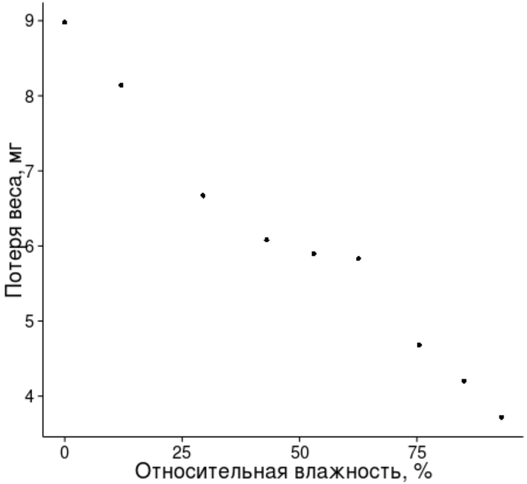
Как зависит потеря веса от влажности? График рассеяния.

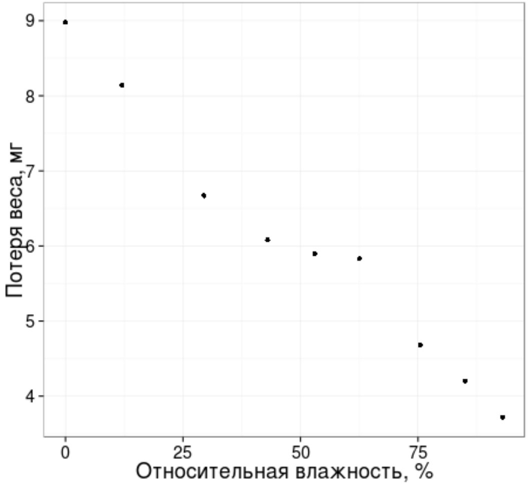
```
library(ggplot2)
p_nelson <- ggplot(data=nelson, aes(x = humidity, y = weightloss)) +
  geom_point() +
  labs(x = "Относительная влажность, %", y = "Потеря веса, мг")
p_nelson
```



Внешний вид графиков можно менять при помощи тем

```
p_nelson + theme_classic()
p_nelson + theme_bw()
theme_set(theme_classic()) # устанавливаем понравившуюся тему до конца сессии
```





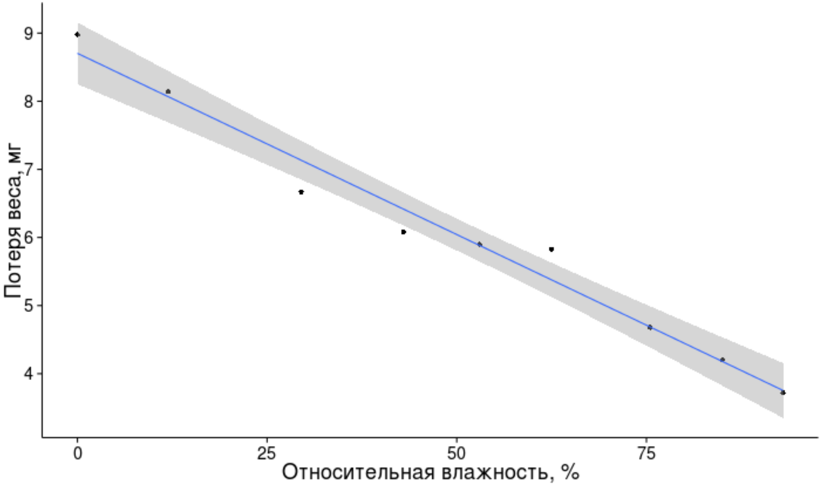
Подбираем параметры линейной модели

```
nelson_lm <- lm(weightloss ~ humidity, nelson)
summary(nelson_lm)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
## (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
## humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.974,  Adjusted R-squared:  0.971
## F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Добавим линию регрессии на график

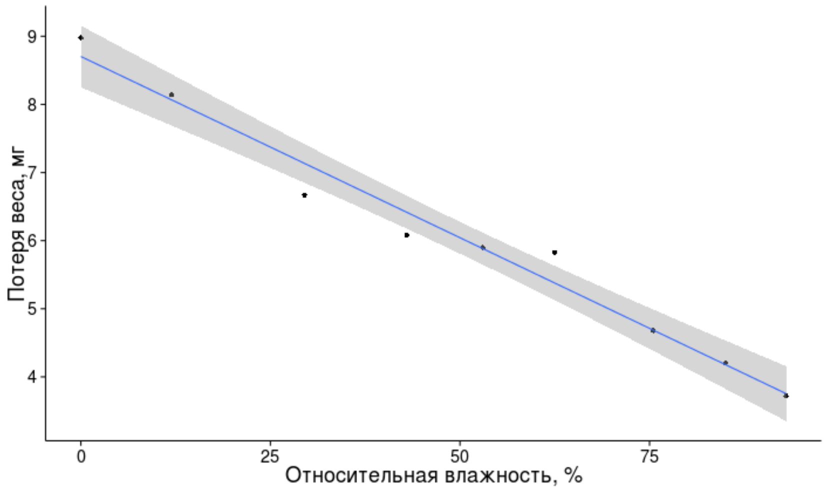
```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm")
```



Как вы думаете,

что это за серая область вокруг линии регрессии?

```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm")
```



Неопределенность оценок коэффициентов и предсказанных значений

Неопределенность оценок коэффициентов

- **Доверительный интервал коэффициента**
  - зона, в которой с $(1-\alpha)\cdot 100\%$ вероятностью содержится среднее значение коэффициента
  - $b_1 \pm t_{\alpha,df=n-2} SE_{b_1}$
  - $\alpha = 0.05$ => $(1-0.05)\cdot 100\% = 95\%$ интервал

- **Доверительная зона регрессии**
  - зона, в которой с $(1-\alpha)\cdot 100\%$ вероятностью лежит регрессионная прямая

Находим доверительные интервалы коэффициентов

```
# Вспомните, в выдаче summary(nelson_lm) были только оценки коэффициентов
# и стандартные ошибки

# оценки коэффициентов отдельно
coef(nelson_lm)
```

```
## (Intercept)    humidity
##      8.7040     -0.0532
```

```
# доверительные интервалы коэффициентов
confint(nelson_lm)
```

```
##                2.5 %  97.5 %
## (Intercept)  8.2510  9.1570
## humidity    -0.0609 -0.0455
```

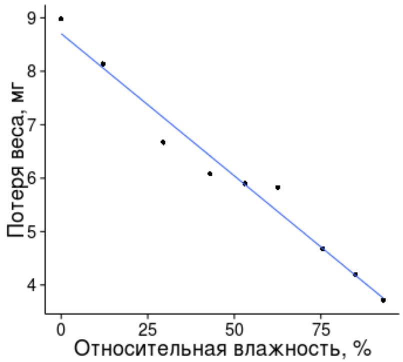
Оценим, какова средняя потеря веса при заданной влажности

Нельзя давать оценки вне интервала значений X!

```
# новые данные для предсказания значений
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100))
predict(nelson_lm, newdata,
        interval = "confidence", se = TRUE)
```

```
## $fit
##    fit  lwr  upr
## 1 6.04 5.81 6.28
## 2 3.38 2.93 3.83
##
## $se.fit
##      1      2
## 0.0989 0.1894
##
## $df
## [1] 7
##
## $residual.scale
## [1] 0.297
```

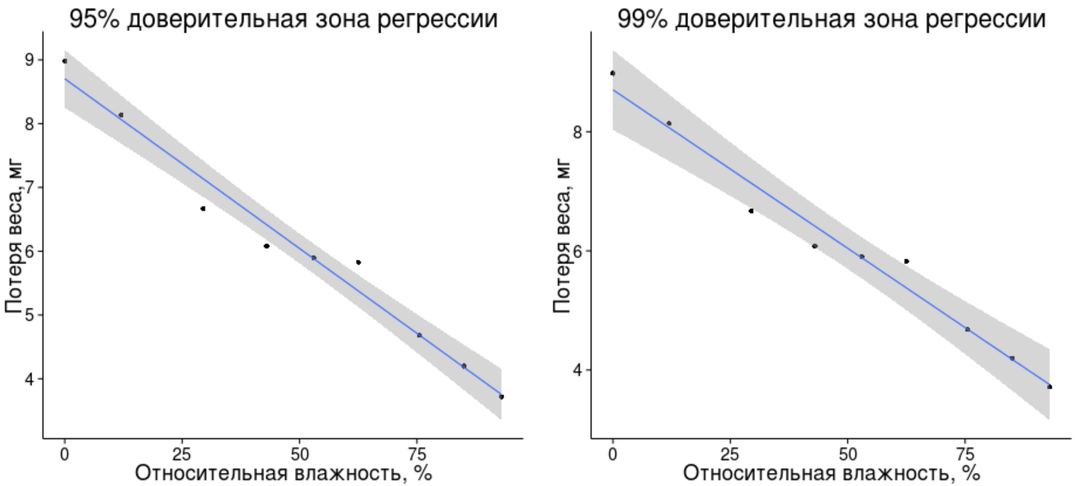
```
# доверительный интервал к среднему значению
```



- При 50 и 100% относительной влажности ожидаемая средняя потеря веса жуков будет 6 ± 0.2 и 3.4 ± 0.4, соответственно.

Строим доверительную зону регрессии

```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm") +
  ggtitle ("95% доверительная зона регрессии")
p_nelson + geom_smooth(method = "lm", level = 0.99) +
  ggtitle ("99% доверительная зона регрессии")
```



Неопределенность оценок предсказанных значений

- **Доверительный интервал к предсказанному значению**
  - зона в которую попадают $(1-\alpha)\cdot 100\%$ значений $\hat{y}_i$ при данном x_i
  - $\hat{y}_i \pm t_{0.05,n-2} SE_{\hat{y}_i}$
  - $SE_{\hat{y}} = \sqrt{MS_e[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{prediction} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}]}$

- **Доверительная область значений регрессии**
  - зона, в которую попадает $(1-\alpha)\cdot 100\%$ всех предсказанных значений

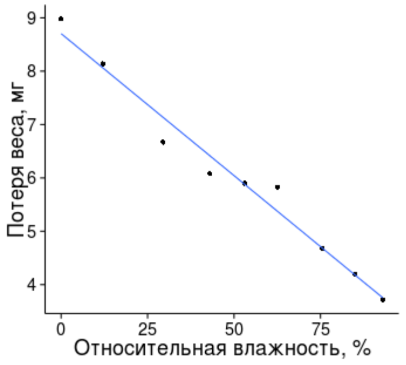
Предсказываем для новых значений

Нельзя использовать для предсказаний вне интервала значений X!

```
# новые данные для предсказания значений
newdata <- data.frame(humidity = c(50, 100))
predict(nelson_lm, newdata,
        interval = "prediction", se = TRUE)
```

```
## $fit
##    fit  lwr  upr
## 1 6.04 5.30 6.78
## 2 3.38 2.55 4.21
##
## $se.fit
##      1      2
## 0.0989 0.1894
##
## $df
## [1] 7
##
## $residual.scale
## [1] 0.297
```

```
# зона, в которой будут лежать 95% всех значений
```



- У 95% жуков при 50 и 100% относительной влажности будет потеря веса будет в пределах 6 $\pm$ 0.7 и 3.4 $\pm$ 0.8, соответственно.

Данные для доверительной области значений

```
# предсказанные значения для исходных данных
predict(nelson_lm, interval = "prediction")
```

```
## Warning: predictions on current data refer to _future_ responses
```

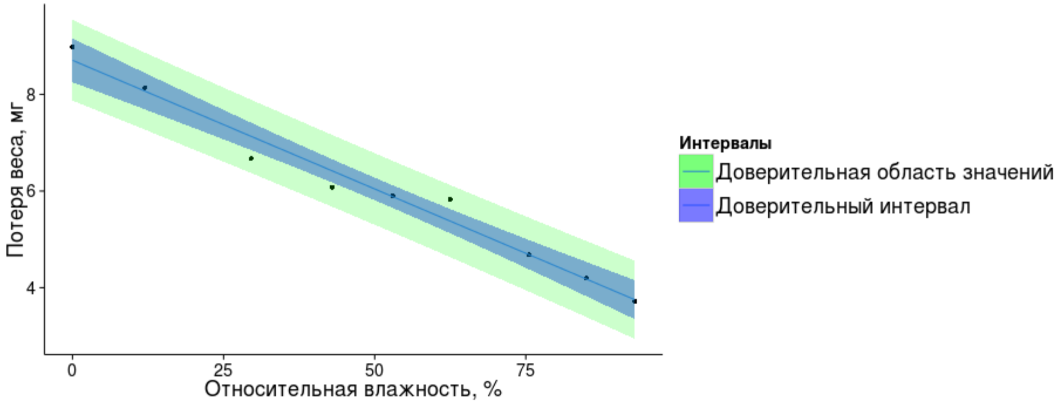
```
##    fit  lwr  upr
## 1 8.70 7.87 9.54
## 2 8.07 7.27 8.86
## 3 7.13 6.38 7.89
## 4 6.42 5.67 7.16
## 5 5.88 5.14 6.62
## 6 5.38 4.63 6.12
## 7 4.69 3.92 5.45
## 8 4.18 3.39 4.97
## 9 3.75 2.95 4.56
```

```
# объединим с исходными данными в новом датафрейме - для графиков
nelson_with_pred <- data.frame(nelson, predict(nelson_lm, interval = "prediction"))
```

```
## Warning: predictions on current data refer to _future_ responses
```

Строим доверительную область значений и доверительный интервал

```
p_nelson + geom_smooth(method = "lm", aes(fill = "Доверительный интервал"), alpha = 0.4) +
  geom_ribbon(data = nelson_with_pred,
              aes(y = fit, ymin = lwr, ymax = upr, fill = "Доверительная область значений"),
              alpha = 0.2) +
  scale_fill_manual('Интервалы', values = c('green', 'blue'))
```



$H_0 : \beta_1 = 0$

или t-, или F-тест

Проверка валидности модели

Проверка при помощи t-критерия

$H_0 : b_1 = \theta, \theta = 0$

$$t = \frac{b_1 - \theta}{SE_{b_1}}$$

$df = n - 2$

Проверка коэффициентов с помощью t-критерия есть в сводке модели

```
summary(nelson_lm)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
## (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
## humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.974,  Adjusted R-squared:  0.971
## F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

- Увеличение относительной влажности привело к достоверному замедлению потери веса жуками ($b_1 = -0.053, t = -16.35, p < 0.01$)

Проверка при помощи F-критерия

$H_0 : \beta_1 = 0$

- Та же самая нулевая гипотеза. Как так получается?

Общая изменчивость - отклонения от общего среднего значения

SS_{total}

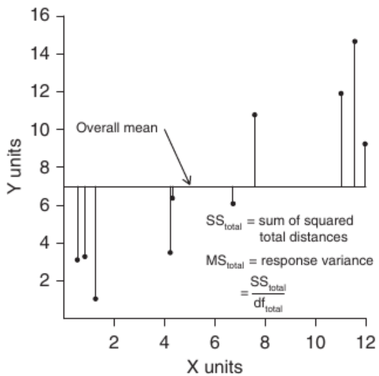


Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 а

$$SS_{total} = SS_{regression} + SS_{error}$$

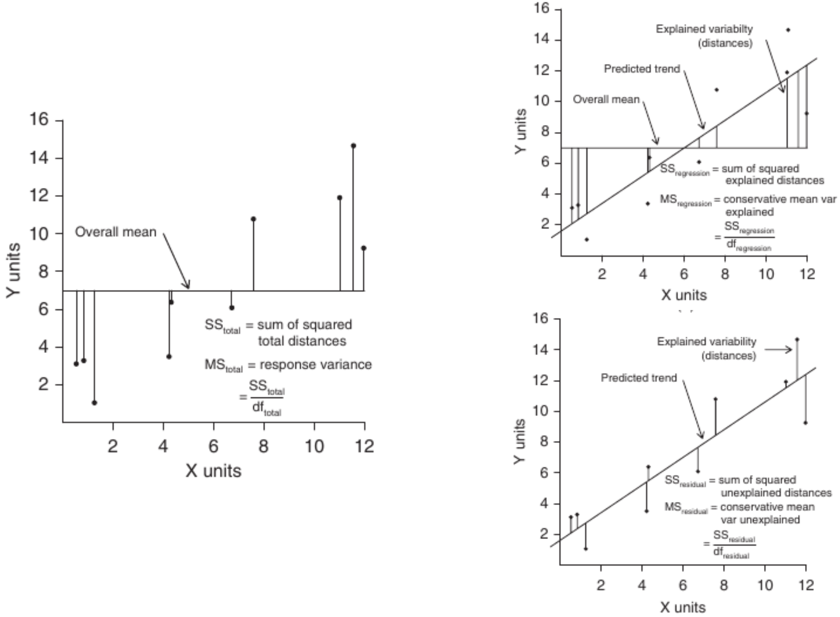
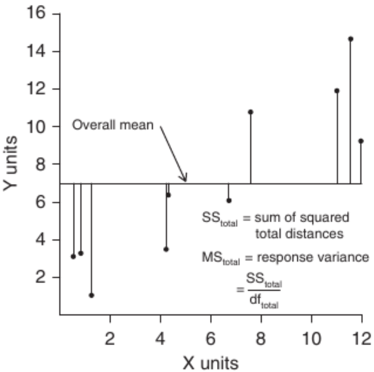


Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 a-c

Если зависимости нет, $b_1 = 0$

Тогда $\hat{y}_i = \bar{y}_i$

и $MS_{regression} \approx MS_{error}$



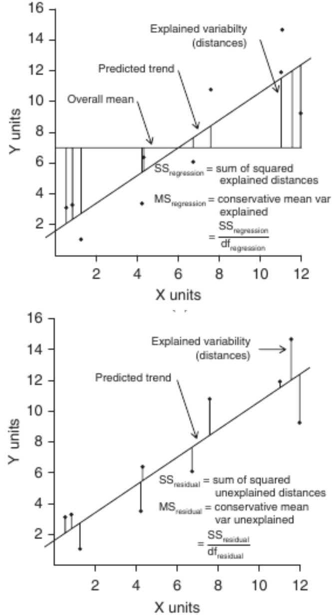
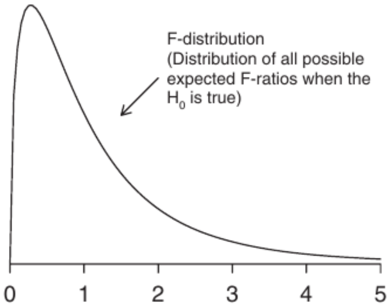


Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 a-c

F-критерий и распределение F-статистики

$$F = \frac{\text{Объясненная изменчивость}}{\text{Необъясненная изменчивость}} = \frac{MS_{regression}}{MS_{error}}$$



F-распределение при $H_0 : b_1 = 0$

Зависит от

- α
- $df_{regression}$
- df_{error}

Рисунок с изменениями из кн. Logan, 2010, стр. 172, рис. 8.3 d

Таблица результатов дисперсионного анализа

ИСТОЧНИК ИЗМЕНЧИВОСТИ	СУММЫ КВАДРАТОВ ОТКЛОНЕНИЙ, SS	ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ, DF	СРЕДНИЙ КВАДРАТ ОТКЛОНЕНИЙ, MS	F
Регрессия	$SS_r = \sum(\bar{y} - \hat{y}_i)^2$	$df_r = 1$	$MS_r = \frac{SS_r}{df_r}$	$F_{df_r, df_e} = \frac{MS_r}{MS_e}$
Остаточная	$SS_e = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	$df_e = n - 2$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	
Общая	$SS_t = \sum(\bar{y} - y_i)^2$	$df_t = n - 1$		

- Минимальное упоминание в тексте - F_{df_r, df_e}, p

Проверяем валидность модели при помощи F-критерия

```
nelson_aov <- aov(nelson_lm)
summary(nelson_aov)
```

```
##              Df Sum Sq Mean Sq F value     Pr(>F)
## humidity      1  23.51   23.51     267 0.00000078 ***
## Residuals     7   0.62    0.09
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Количество влаги, потерянной жуками в период эксперимента, достоверно зависело от уровня относительной влажности ($F_{1,7} = 267$, $p < 0.01$).

Оценка качества подгонки модели

Коэффициент детерминации

доля общей изменчивости, объясненная линейной связью x и y

$R^2 = \frac{SS_r}{SS_t}$

$0 \leq R^2 \leq 1$

Иначе рассчитывается как $R^2 = r^2$

Коэффициент детерминации

можно найти в сводке модели

- Осторожно, не сравнивайте R^2 моделей с разным числом параметров, для этого есть $R^2_{adjusted}$

```
summary(nelson_lm)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = weightloss ~ humidity, data = nelson)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.4640 -0.0344  0.0167  0.0746  0.4524
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value      Pr(>|t|)
## (Intercept)  8.70403    0.19156    45.4 0.00000000065 ***
## humidity    -0.05322    0.00326   -16.4 0.00000078161 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.297 on 7 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.974,  Adjusted R-squared:  0.971
## F-statistic:  267 on 1 and 7 DF,  p-value: 0.000000782
```

Условия применимости простой линейной регрессии и анализ остатков

Условия применимости простой линейной регрессии

должны выполняться, чтобы тестировать гипотезы

1. Независимость
2. Линейность
3. Нормальное распределение
4. Гомогенность дисперсий

Независимость

- Значения y_i должны быть независимы друг от друга
  - берегитесь псевдоповторностей
  - берегитесь автокорреляций (например, временных)
- Контролируется на этапе планирования
- Проверяем на графике остатков

Линейность связи

- проверяем на графике рассеяния исходных данных
- проверяем на графике остатков

Вот, что бывает, если неглядя применять линейную регрессию

Квартет Энскомба - примеры данных, где регрессии одинаковы во всех случаях (Anscombe, 1973)

$y_i = 3.0 + 0.5x_i$,

$r^2 = 0.68$,

$H_0 : \beta_1 = 0, t = 4.24, p = 0.002$

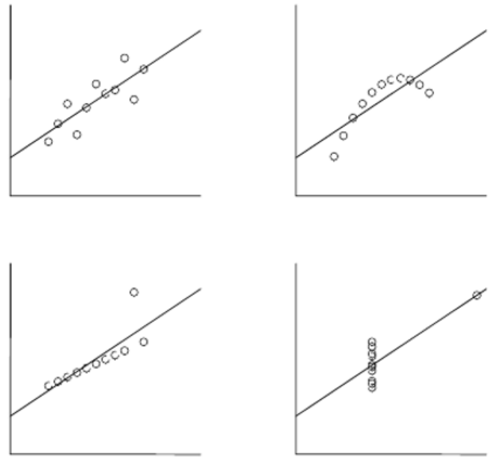
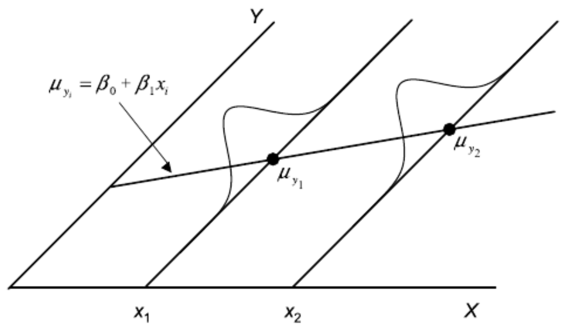


Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 97, рис. 5.9

Нормальное распределение

Нужно, т.к. в модели $Y_i = \beta_0 + \beta x_i + \epsilon_i$

$Y \sim N(0, \sigma^2)$



- К счастью, это значит, что $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
- Нужно для тестов параметров, а не для подбора методом наименьших квадратов
- Тесты устойчивы к небольшим отклонениям от нормального распределения
- Проверяем распределение остатков на нормально-вероятностном графике

Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 85, рис. 5.5

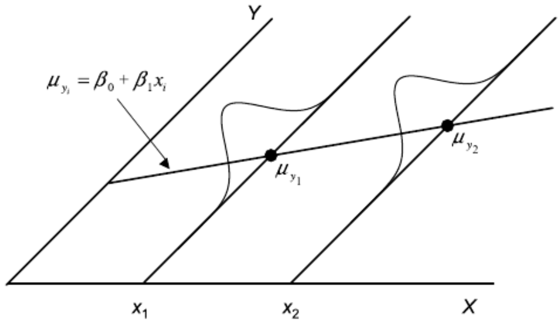
Гомогенность дисперсий

Нужно, т.к. в модели $Y_i = \beta_0 + \beta x_i + \epsilon_i$

$Y \sim N(0, \sigma^2)$,

и дисперсии $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_i^2$ для каждого Y_i

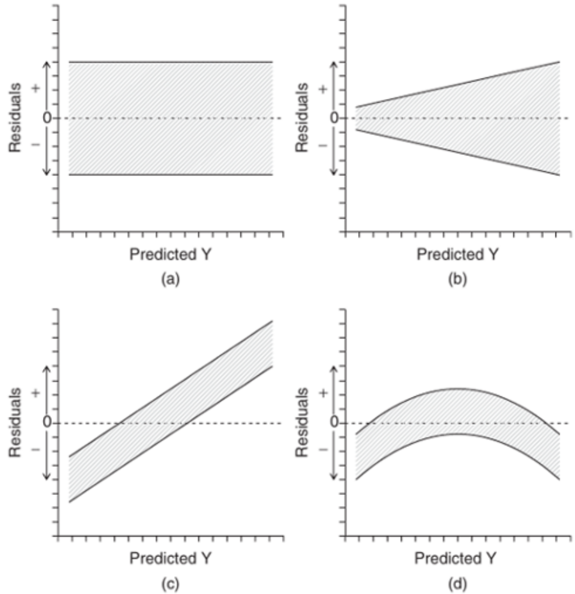
- К счастью, поскольку $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, можно проверить равенство дисперсий остатков ϵ_i



- Нужно и важно для тестов параметров
- Проверяем на графике остатков по отношению к предсказанным значениям
- Можно сделать тест С Кокрана (Cochran's C), но только если несколько значений y для каждого x

Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 85, рис. 5.5

Диагностика регрессии по графикам остатков



- a - все в порядке
- b - разброс остатков разный (wedge-shaped pattern)
- c - разброс остатков одинаковый, но нужны дополнительные предикторы
- d - к нелинейной зависимости применили линейную регрессию

Рисунок из кн. Logan, 2010, стр. 174, рис. 8.5 d

Какие наблюдения влияют на ход регрессии больше других?

Влиятельные наблюдения, выбросы, outliers

- большая абсолютная величина остатка
- близость к краям области определения (leverage - рычаг, "сила"; иногда называют hat)

- 1 - не влияет
- 2 - умеренно влияет (большой остаток, малая сила влияния)
- 3 - очень сильно влияет (большой остаток, большая сила влияния)

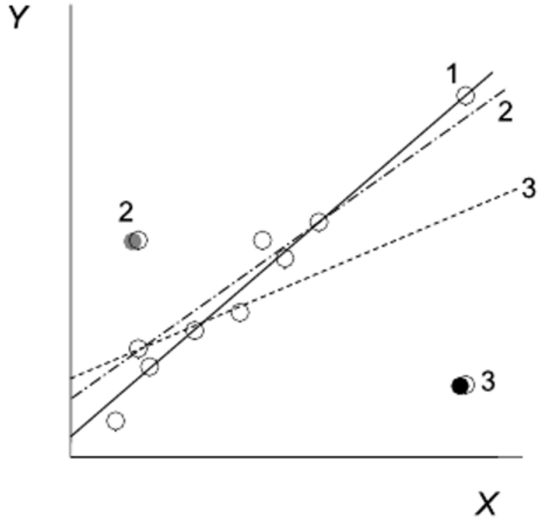


Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 96, рис. 5.8

Как оценить влиятельность наблюдений

Расстояние Кука (Cook's d) (Cook, 1977)

- Учитывает одновременно величину остатка и близость к краям области определения (leverage)

- Условное пороговое значение:
  выброс, если $d \geq 4/(N - k - 1)$,
  где N - объем выборки,
  k - число предикторов.

  Дж. Фокс советует не обращать внимания на пороговые значения (Fox, 1991).

- Что делать с влиятельными точками?
  - Проверить, не ошибка ли это.
    Если это не ошибка, не удалять - обсуждать!
  - Проверить, что будет, если их исключить из модели

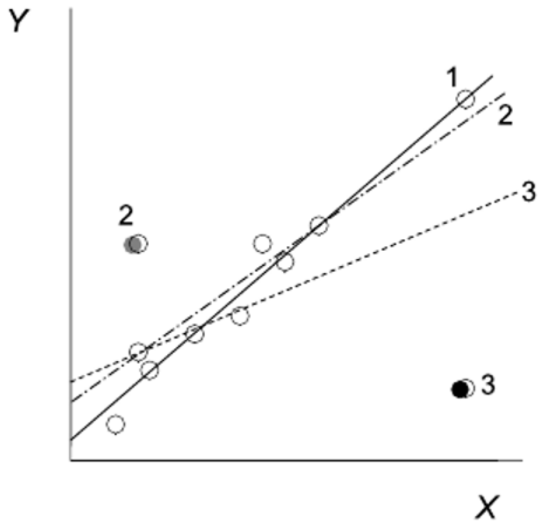


Рисунок из кн. Quinn, Keough, 2002, стр. 96, рис. 5.8

Проверим условия применимости

Проверьте линейность связи,

постройте для этого график рассеяния

```
ggplot()
aes()
geom_point()
```

Для анализа остатков выделим нужные данные в новый датафрейм

```
# library(ggplot2)
nelson_diag <- fortify(nelson_lm)
names(nelson_diag) # названия переменных
```

```
## [1] "weightloss" "humidity"   ".hat"       ".sigma"     ".cooksd"
## [6] ".fitted"    ".resid"     ".stdresid"
```

- Кроме `weightloss` и `humidity` нам понадобятся
  `.cooksd` - расстояние Кука
  `.fitted` - предсказанные значения
  `.resid` - остатки
  `.stdresid` - стандартизованные остатки

Постройте график зависимости остатков от предиктора (относительная влажность),

используя данные для анализа остатков из `nelson_diag`

```
names()
ggplot()
aes()
geom_point()
```

- По абсолютным остаткам сложно сказать, большие они или маленькие. Нужна стандартизация

Постройте график зависимости стандартизованных остатков от предсказанных значений

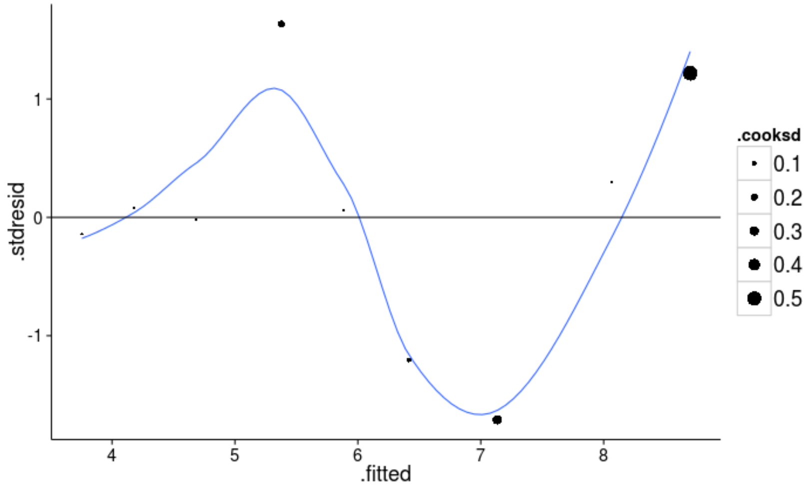
Стандартизованные остатки $\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{MS_e}}$

- можно сравнивать между регрессиями
- можно сказать, какие остатки большие, какие нет
    - $\leq 2SD$ - обычные
    - $> 3SD$ - редкие

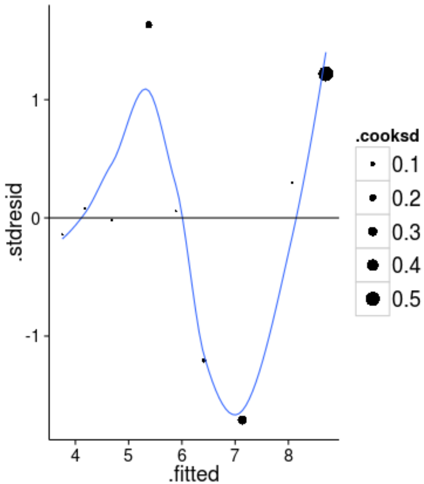
```
ggplot()
aes()
geom_point()
```

График станет информативнее, если кое-что добавить

```
ggplot(data = nelson_diag, aes(x = .fitted, y = .stdresid)) +
  geom_point(aes(size = .cooksd)) +          # расстояние Кука
  geom_smooth(method="loess", se = FALSE) +  # линия тренда
  geom_hline(yintercept = 0)                 # горизонтальная линия на уровне y = 0
```



Какие выводы можно сделать по графику остатков?



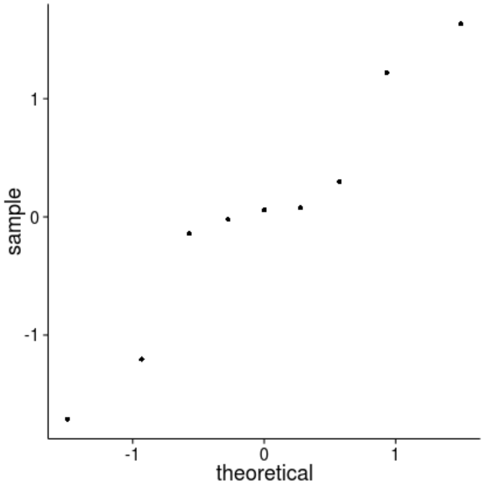
- Стандартизованные остатки умеренной величины (в пределах двух стандартных отклонений), их разброс почти одинаков
- Мало точек, чтобы надежно оценить наличие трендов среди остатков

Нормально-вероятностный график остатков

Используется, чтобы оценить форму распределения.

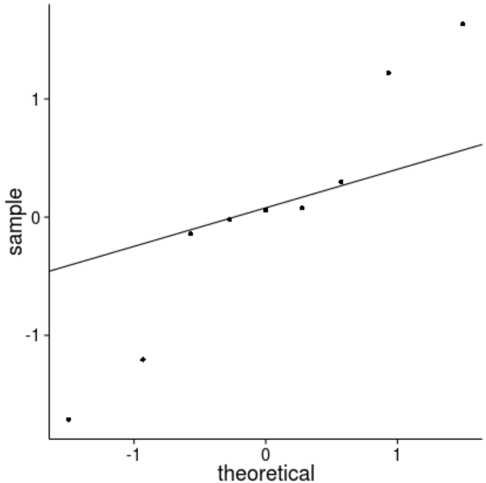
Если точки лежат на одной прямой - нормальное распределение.

```
ggplot(nelson_diag, aes(sample = .stdresid)) +
  geom_point(stat = "qq")
```



На нормально-вероятностный график можно добавить линию

```r
source(url("http://stat511.cwick.co.nz/code/stat_qqline.r"))
ggplot(nelson_diag, aes(sample = .stdresid)) +
  geom_point(stat = "qq") +
  stat_qqline()
```



- Небольшие отклонения от нормального распределения,но мало точек, чтобы оценить это с уверенностью
- Небольшими отклонениями можно пренебречь, т.к. тесты, используемые в регрессионном анализе к ним устойчивы.

Мощность линейной регрессии

Величина эффекта из общих соображений

```r
library(pwr)
cohen.ES(test="f2",size="large")
```

```
##
##      Conventional effect size from Cohen (1982)
##
##            test = f2
##            size = large
##     effect.size = 0.35
```

Величина эффекта для набора предикторов по R^2

$$f^2 = \frac{R^2}{1 - R^2}$$

R^2 - коэффициент детерминации

Посчитайте

какой нужен объем выборки, чтобы с вероятностью 0.8 обнаружить умеренную зависимость при помощи простой линейной регрессии?

```
cohen.ES()
pwr.f2.test()
```

Take home messages

- Модель простой линейной регрессии $y_i = \beta_0 + \beta_1 \dot{x}_i + \epsilon_i$
- В оценке коэффициентов регрессии и предсказанных значений существует неопределенность. Доверительные интервалы можно расчитать, зная стандартные ошибки.
- Валидность модели линейной регрессии можно проверить при помощи t- или F-теста. $H_0: \beta_1 = 0$
- Условия применимости линейной регрессии:
  - Независимость
  - Линейная связь
  - Нормальное распределение
  - Гомогенность дисперсий
- Анализ остатков используется для диагностики условий применимости линейной регрессии
- Мощность линейной регрессии можно рассчитать, например, как мощность F-критерия

Дополнительные ресурсы

- Гланц, 1999, стр. 221-244
- Logan, 2010, pp. 170-207
- Quinn, Keough, 2002, pp. 78-110
- Open Intro to Statistics: Chapter 7. Introduction to linear regression, pp. 315-353.
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 451-491
- Zar, 1999, pp. 328-355