

Семинар 2

Введение в алгоритмы. Теория графов.

Бирюков Владимир

Updated: 2016/02/26
seminar3

МФТИ



Stockholms
stad



Введение в теорию графов

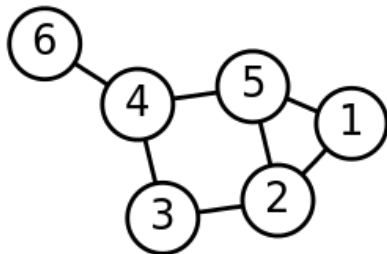
Граф – это математический объект, совокупность:

- V = вершины
- E = ребра

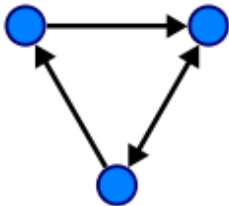
Обозначается как $G = (V, E)$

$n = |V|$ – число вершин

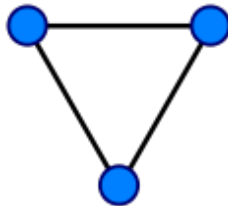
$m = |E|$ – число рёбер



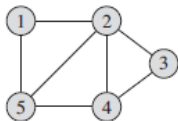
Ориентированный



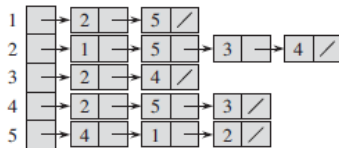
Неориентированный



1. связный граф – если для любых вершин u, v есть путь из u в v .
2. взвешенный граф – если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число, называемое весом ребра.
3. простой граф – если он не имеет петель и кратных рёбер.
4. ациклический граф – если он не имеет циклов.
5. дерево – если он связный и ациклический.



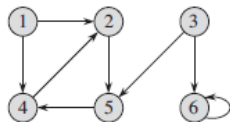
(a)



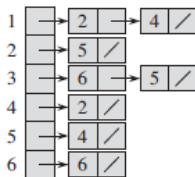
(b)

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

(c)



(a)

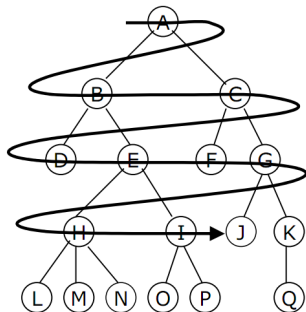


(b)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

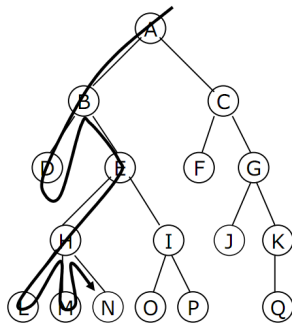
(c)

Поиск в ширину



BFS

Поиск в глубину



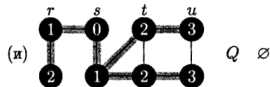
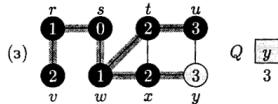
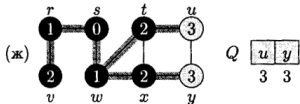
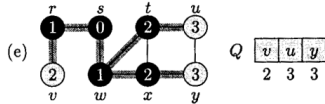
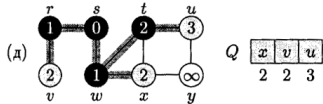
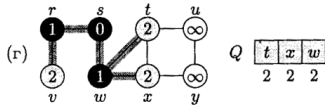
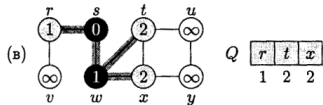
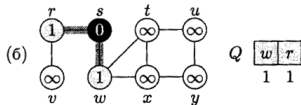
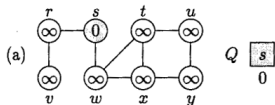
DFS

Граф. Псевдокод алгоритма для BFS.

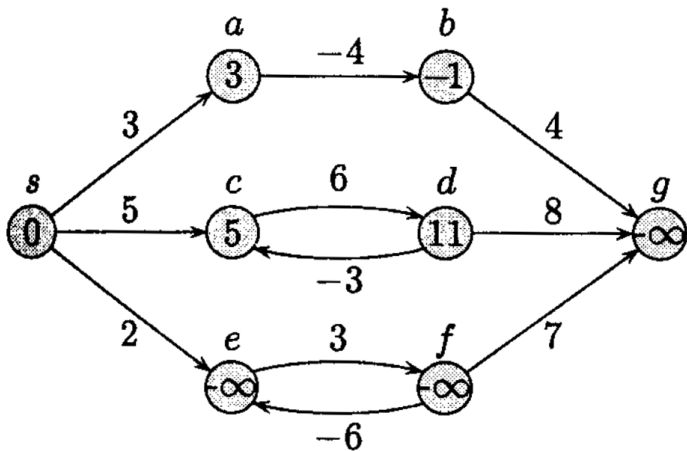
BFS(G, s)

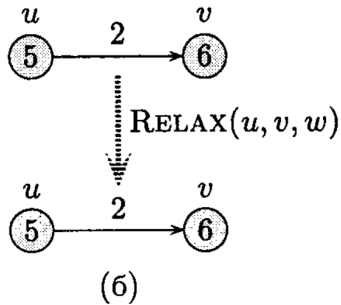
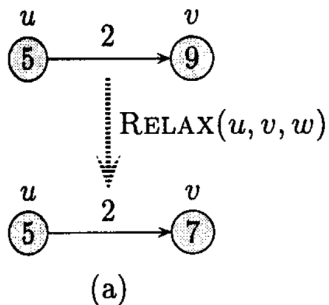
```
1  for (для) каждой вершины  $u \in V[G] - \{s\}$ 
2      do  $color[u] \leftarrow$  БЕЛЫЙ
3           $d[u] \leftarrow \infty$ 
4           $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$ 
5   $color[s] \leftarrow$  СЕРЫЙ
6   $d[s] \leftarrow 0$ 
7   $\pi[s] \leftarrow \text{NIL}$ 
8   $Q \leftarrow \{s\}$ 
9  while  $Q \neq \emptyset$ 
10     do  $u \leftarrow head[Q]$ 
11         for (для) всех  $v \in Adj[u]$ 
12             do if  $color[v] =$  БЕЛЫЙ
13                 then  $color[v] \leftarrow$  СЕРЫЙ
14                      $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
15                      $\pi[v] \leftarrow u$ 
16                     ENQUEUE( $Q, v$ )
17     DEQUEUE( $Q$ )
18      $color[u] \leftarrow$  ЧЁРНЫЙ
```

Граф. Алгоритм BFS.



Граф. Кратчайшие пути из одной вершины.





DIJKSTRA(G, w, s)

1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

2 $S \leftarrow \emptyset$

3 $Q \leftarrow V[G]$

4 **while** $Q \neq \emptyset$

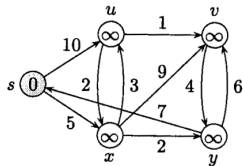
5 **do** $u \leftarrow \text{EXTRACT-MIN}(Q)$

6 $S \leftarrow S \cup \{u\}$

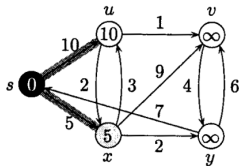
7 **for** (для) всех вершин $v \in \text{Adj}[u]$

8 **do** RELAX(u, v, w)

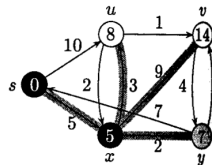
Граф. Алгоритм Дейкстры.



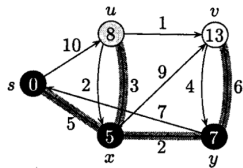
(а)



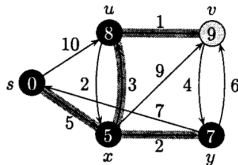
(б)



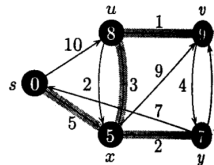
(в)



(г)



(д)



(е)

Граф. Сложности работы алгоритмов.

- BFS – $O(|V| + |E|)$
- DFS – $O(|V| + |E|)$
- Алгоритм Дейкстры – $O(|V|^2 + |E|)$
- Алгоритм Беллмана-Форда – $O(|V| * |E|)$
(алгоритм нахождения кратчайших путей из одной вершины если есть отрицательные веса)
- Алгоритм Флойда-Уоршолла – $O(|V|^3)$
(алгоритм нахождения кратчайших путей для всех пар вершин)

Практическая часть
