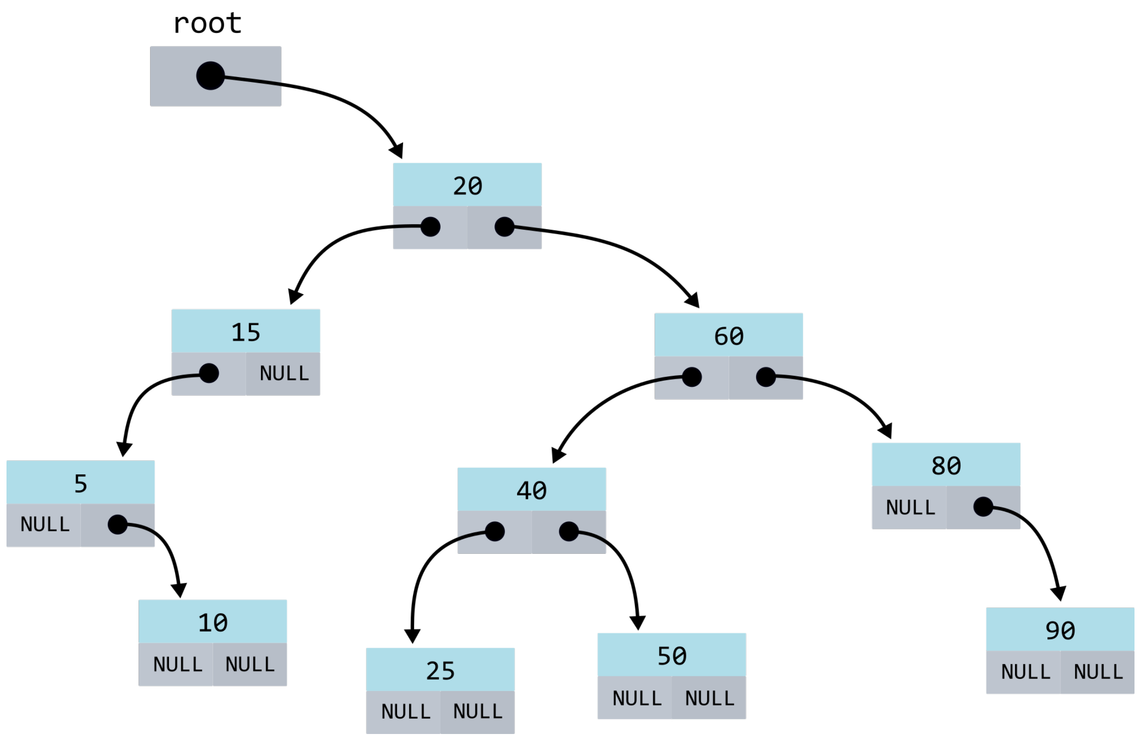
Семинар #14: Деревья.

Часть 1: Бинарные деревья поиска




```
struct node {
    int value;
    struct node* left;
    struct node* right;
}
typedef struct node Node;

Node* bst_insert(Node* root, int x) {
  if (root == NULL) {
    root = (Node*)malloc(sizeof(Node));
    root->value = x;
    root->left = NULL;
    root->right = NULL;
  }
  else if (x < root->value)
    root->left = bst_insert(root->left, x);
  else if (x > root->value)
    root->right = bst_insert(root->right, x);
  return root;
}
```

Бинарное дерево - дерево, в котором у каждого узла может быть не более двух потомков.
Бинарное дерево поиска (binary search tree – bst) - бинарное дерево со следующими условиями:

- У всех узлов левого поддерева `value` - меньше
- У всех узлов правого поддерева `value` - больше

Одинаковые элементы такое дерево не хранит.
Глубина узла = количество предков узла + 1
Высота дерева = глубина самого глубокого узла
Сложность операций с BST:

- Поиск $O(h(n))$
- Добавление $O(h(n))$
- Удаление $O(h(n))$

где $h(n)$ - высота дерева.

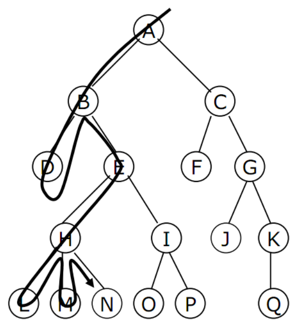
Стартовый код для этой части задания в файле `tree.c`.

- Написать функцию `size_t bst_size(const Node* root)`, вычисляющую количество элементов в данном дереве. Используйте рекурсию:

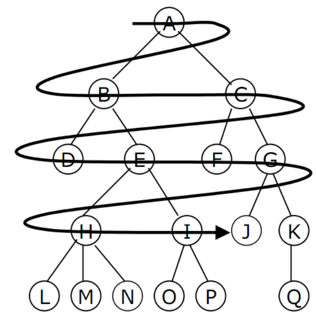
  ```
  size(корня) = size(левого ребёнка) + size(правого ребёнка) + 1
  ```

- Написать функцию `size_t bst_height(const Node* root)`, вычисляющую глубину бинарного дерева. Используйте рекурсию.

- Написать функцию `void bst_print_dfs(const Node* root)`, которая будет печатать все элементы дерева в порядке возрастания.



DFS



BFS

- Написать функцию `Node* bst_search(Node* root, int val)`, которая ищет элемент в бинарном дереве и возвращает указатель на этот элемент. Если такого элемента нет, то функция должна вернуть `NULL`. Протестируйте эту функцию, печатая поддерево с помощью `print_ascii_tree`.

- Написать функцию `Node* bst_get_min(Node* root)`, которая возвращает указатель на минимальный элемент в этом дереве.

- Написать рекурсивную функцию `Node* bst_remove(Node* root, int x)`, которая удаляет элемент, содержащий `x`, из дерева поиска. Функция должна возвращать указатель на узел, который встал на место удалённого узла. Если у удаляемого узла нет детей, то функция должна вернуть `NULL`.
  Нужно рассмотреть следующие случаи:

  - Если `root == NULL`, то ничего не делаем
  - Если `x > root->value`
  - Если `x < root->value`
  - Если `x == root->value` и у `root` нет детей
  - Если `x == root->value` и `root` имеет одного левого ребёнка
  - Если `x == root->value` и `root` имеет одного правого ребёнка
  - Если `x == root->value` и `root` имеет двух ребёнков. В этом случае делаем следующее:
    * Находим минимальный элемент в правом поддереве.
    * Копируем значение `val` из этого элемента в `root`.
    * Удаляем этот минимальный элемент в правом поддереве, используя функцию `bst_remove`.

  Протестируйте ваш код на всех случаях. Используйте функцию `print_ascii_tree` для проверки.

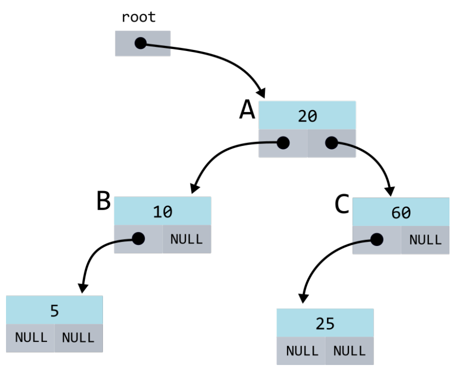
- Написать функцию `void bst_print_bfs(const Node* root)`, которая будет печатать элементы в порядке их расстояния от узла (при равенстве расстояния печатать по возрастанию). Тут нужно использовать одну из реализаций абстрактного типа данных Очередь.

Часть 2: Сбалансированные деревья

Сбалансированное дерево – это дерево у которого для *каждого* узла высоты левого поддерева и правого различаются не более, чем на 1.

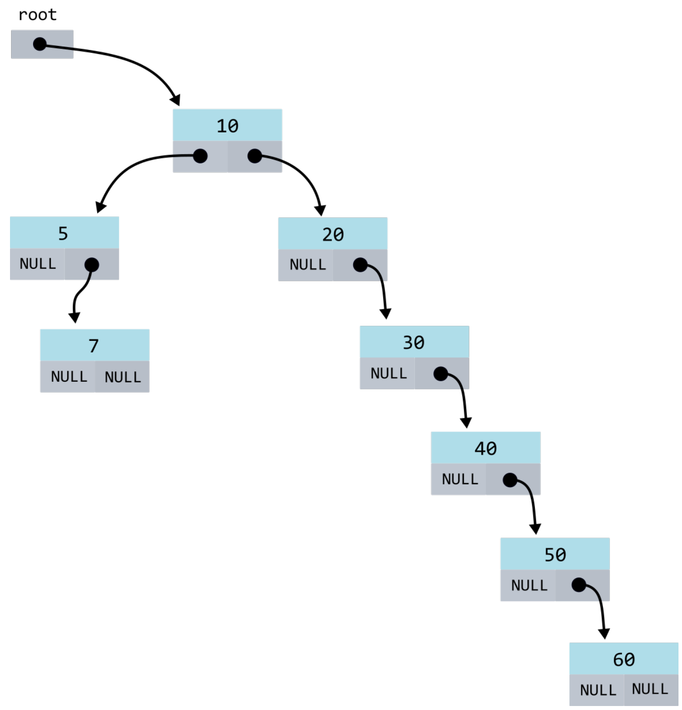
Пример 1:

Это дерево сбалансированное. Так как для узла `A` глубины левого и правого поддерева равны. Для узлов `B` и `C` глубины левого и правого поддерева отличается всего на `1` (глубина левого поддерева равна 1, а глубина правого равна нулю).



Пример 2:

Это дерево несбалансированное. Так как уже у корня дерева, высота левого поддерева равна 2, а высота правого поддерева равна 5. Разница высот больше, чем 1.



Можно показать, что для любого сбалансированного дерева его высота пропорциональна логарифму количества элементов и, как следствие, $h(n) = O(\log(n))$. Для несбалансированных деревьев высота может быть намного больше чем $\log(n)$. В худшем случае дерево вырождается в связный список.

Так как вычислительная сложность операций с деревом зависит от высоты дерева, то нам очень важно, чтобы дерево было сбалансированным. В ином случае, операции поиска/добавления/удаления будут работать намного медленнее. К сожалению, обычное бинарное дерево поиска, написанное нами в предыдущей части, не является сбалансированным. Это можно понять, если представить, что будет при добавлении в дерево последовательно возврастающих элементов с помощью функции `bst_insert`.

Однако, можно модифицировать бинарное дерево поиска так, чтобы дерево всегда оставалось сбалансированным. Есть два основных способа такой модификации:

1. AVL-деревья
2. Красно-черные деревья

Для самобалансирующихся деревьев поиска гарантируется, что вычислительная сложноть основных операций с ними будет равна $O(\log(n))$.

Задачи:

- Заполнить дерево $n = 20000$ случайных чисел и найти количество элементов и высоту этого дерева. Сравнить высоту с оптимальной $h_{optimal} = \lceil log_2(n+1) \rceil = 14.3$. Помните, что вычислительная сложность операций с деревом равна $O(h)$, где h – высота дерева.
- Заполнить дерево $n = 20000$ последовательными числами и найти количество элементов и высоту такого дерева. Сравнить высоту с оптимальной. Что будет, если увеличить n до миллиона?

Часть 3: AVL-дерево (самобалансирующееся дерево поиска)

Основная идея самобалансирующихся деревьев, заключается в следующем:

1. Считаем, что дерево сбалансированное

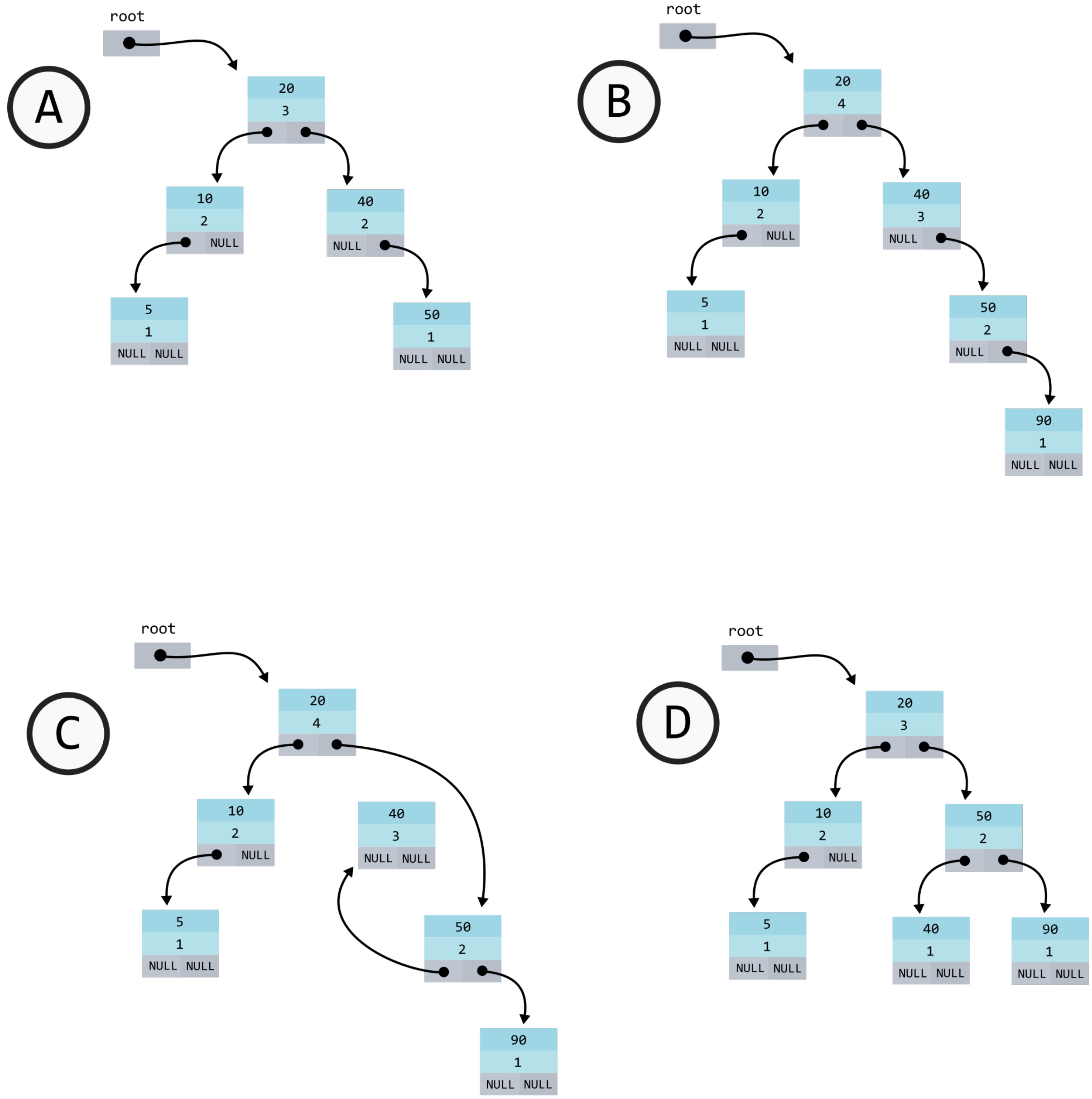
2. После каждой вставки элемента в дерево проверям, нарушилась ли балансировка дерева. То есть не появился ли у нас узел, для которого высоты левого и правого поддеревьев различаются более чем на 1.

3. Если такой узел появился, то перенаправляем указатели соседних узлов так, чтобы дерево стало вновь сбалансированным.

Чтобы не вычислять при каждой вставке высоту узла, будем хранить ей в узле (поле `height`):

```
struct node {
    int value;
    int height;
    struct node* left;
    struct node* right;
};
typedef struct node Node;
```

Пример самобалансирования AVL-дерева



A: Вначале дерево сбалансированно

B: Затем мы добавляем один элемент и дерево перестаёт быть сбалансированным. Так как для узла, хранящего значение `40` высота левого поддерева равна `0`, а высота правого поддерева равна `2`.

C: Затем, мы перенаправляем указатели у соседних узлов так, чтобы условие сбалансированности дерева вновь начало соблюдаться.

D: В конце просто корректируем значения высот для поддеревьев.

Задачи:

- Рассмотрите случай, когда в дерево `A` добавляют элемент, равный `1`. Как нужно перенаправить указатели в этом случае?
- Рассмотрите случай, когда из дерева `A` сначала удаляют элемент, равный `5`, а потом добавляют элемент, равный `90`. Как нужно перенаправить указатели в этом случае?
- Рассмотрите случай, когда из дерева `A` сначала удаляют элемент, равный `5`, а потом добавляют элемент, равный `30` и затем добавляют элемент, равный `25`. Как нужно перенаправить указатели в этом случае?