

# Семинар 1

Введение в алгоритмы. Машина Тьюринга.

---

Бирюков Владимир

МФТИ

# Повторение

---

## 1. Язык C

1.1 Синтаксис языка C.

1.2 Память и указатели.

1.3 Сегменты памяти процесса. Стек и куча.

## 2. Алгоритмы и структуры данных

2.1 Сложность алгоритмов.  $O(n)$  нотация.

2.2 Основные структуры данных: массив, список, дерево.

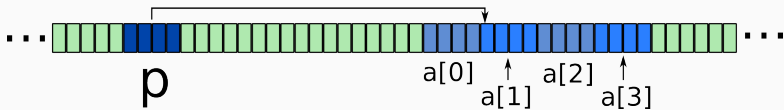
# Язык С

---

```
int a[4] = {1, 2, 3, 4};
```

```
int * p = &a[0];
```

```
p = p + 1;
```



# Сегменты памяти процесса

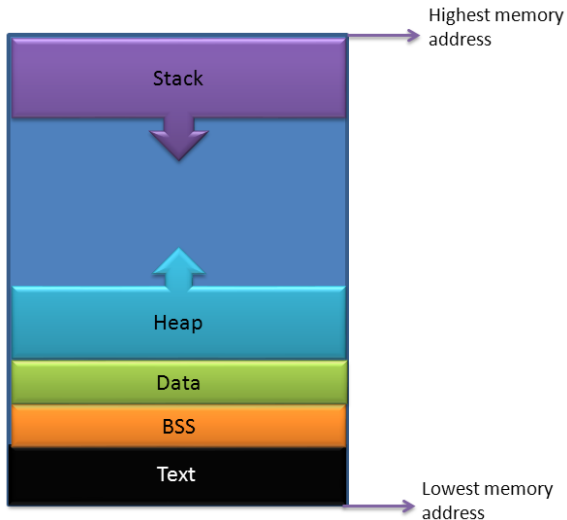
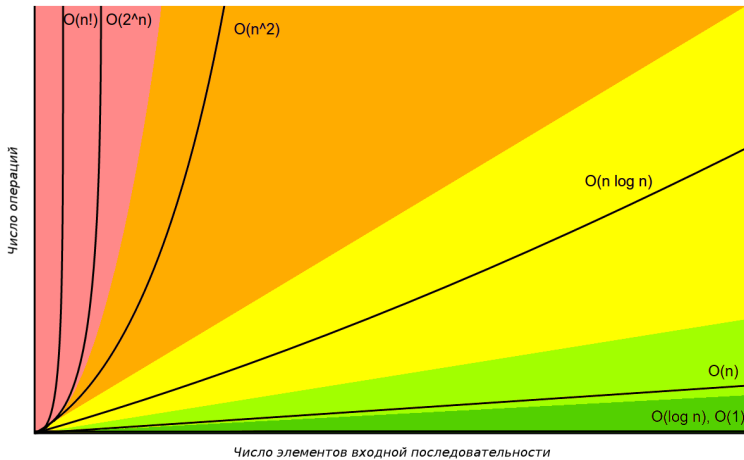


Figure : Process memory organization

# Алгоритмы и структуры данных

---

# О-большое



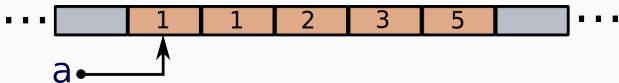


# Алгоритмы сортировки

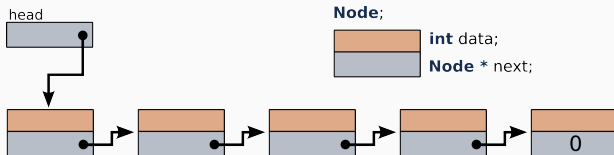
Алгоритм сортировки	Сложность(в среднем)
Сортировка вставками	$O(N^2)$
Сортировка пузырьком	$O(N^2)$
Сортировка выбором	$O(N^2)$
Сортировка слиянием	$O(N \log(N))$
Быстрая сортировка	$O(N \log(N))$
Цифровая сортировка	$O(kN)$

# Структуры данных. Массив и связный список

- Массив:



- Связный список:



# Операции со структурами данных

	Массив	Список
index	$O(1)$	$O(N)$
find	$O(N)$	$O(N)$
insert	$O(N)$	$O(1)^*$
remove	$O(N)$	$O(1)^*$

\* если известны указатели на данный и предыдущий элементы.

# Машина Тьюринга

---

# Машина Тьюринга

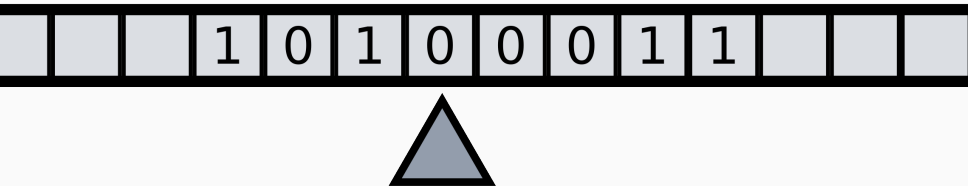
Машина Тьюринга (МТ) — математическая абстракция, представляющая вычислительную машину общего вида. Была предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году для формализации понятия алгоритма.

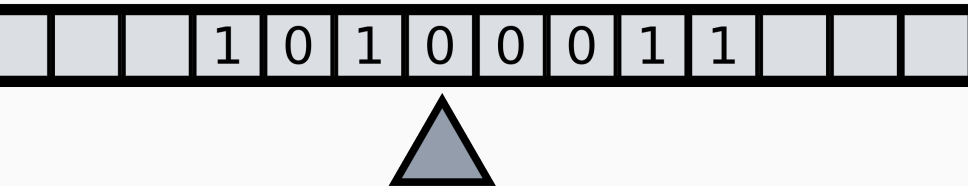


# Машина Тьюринга



# Машина Тьюринга





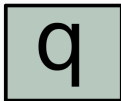
Состояние:

q





Состояние:



Программа:

состояние	символ	новый символ	новое состояние	движение
$q_1$	0	0	$q_1$	L
$q_1$	1	0	$q_2$	R
$q_2$	0	1	$q_2$	L
...				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:  
**0, 1, В**(пусто)

Состояния:  
**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	В	В	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>			

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

**$q_1$**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**$q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , Stop**

Программа:

состояние	новые символ и состояние	состояние	новые символ и состояние
символ	движение	символ	движение
$q_1$	0 0 R $q_1$	$q_2$	В 1 L Stop
$q_1$	1 1 R $q_1$	$q_3$	0 0 L $q_3$
$q_1$	В В L $q_2$	$q_3$	1 1 L $q_3$
$q_2$	0 1 L $q_3$	$q_3$	В В R Stop
$q_2$	1 0 L $q_2$		

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	В	В	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>			

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, B**(пусто)

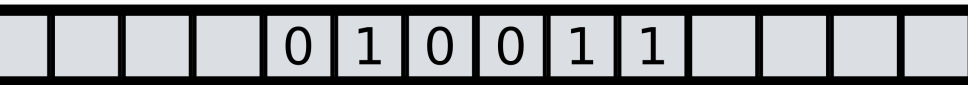
Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

Программа:

состояние новые символ и состояние				состояние новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	B	1 L Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	B	B	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	B	B R Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>			

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

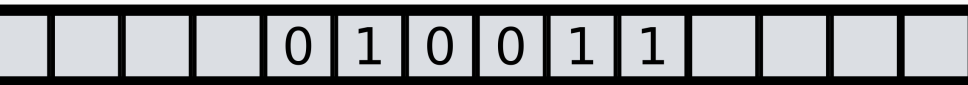
Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				



# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>1</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>2</sub>**

Алфавит:

**0, 1, B**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	B	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	B	B	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	B	B R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

**q<sub>2</sub>**

Алфавит:

**0, 1, B**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

Программа:

состояние	новые символ и состояние				состояние	новые символ и состояние			
символ	движение				символ	движение			
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	B	1	L	Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0	L	q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	B	B	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1	L	q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	B	B	R	Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>					

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

**q<sub>2</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

Программа:

состояние новые символ и состояние				состояние новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1 L q <sub>3</sub>		q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0 L q <sub>2</sub>					

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>3</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние					состояние    новые символ и состояние				
символ		движение			символ		движение		
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1	L	Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0	L	q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	В	В	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1	L	q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В	R	Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>					

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

**q<sub>3</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

Программа:

состояние	новые символ и состояние	состояние	новые символ и состояние
символ	движение	символ	движение
q <sub>1</sub> 0	0 R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub> В	1 L Stop
q <sub>1</sub> 1	1 R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub> 0	0 L q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub> В	В L q <sub>2</sub>	<b>q<sub>3</sub> 1</b>	<b>1 L q<sub>3</sub></b>
q <sub>2</sub> 0	1 L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub> В	В R Stop
q <sub>2</sub> 1	0 L q <sub>2</sub>		

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>3</sub>**

Алфавит:  
**0, 1, В**(пусто)

Состояния:  
**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние символ                    движение					состояние    новые символ и состояние символ                    движение				
q <sub>1</sub>	0	0	R	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1	L	Stop
q <sub>1</sub>	1	1	R	q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0	L	q <sub>3</sub>
q <sub>1</sub>	В	В	L	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1	L	q <sub>3</sub>
q <sub>2</sub>	0	1	L	q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В	R	Stop
q <sub>2</sub>	1	0	L	q <sub>2</sub>					

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**q<sub>3</sub>**

Алфавит:

**0, 1, В**(пусто)

Состояния:

**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	В	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	В	В	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	В	В R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				



# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:      Программа:

**Stop**

Алфавит:  
**0, 1, B**(пусто)

Состояния:  
**q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, Stop**

состояние    новые символ и состояние				состояние    новые символ и состояние			
символ		движение		символ		движение	
q <sub>1</sub>	0	0	R q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	B	1 L Stop	
q <sub>1</sub>	1	1	R q <sub>1</sub>	q <sub>3</sub>	0	0 L q <sub>3</sub>	
q <sub>1</sub>	B	B	L q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	1	1 L q <sub>3</sub>	
q <sub>2</sub>	0	1	L q <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>	B	B R Stop	
q <sub>2</sub>	1	0	L q <sub>2</sub>				

# Машина Тьюринга. Пример. Добавление к числу 1.



Состояние:

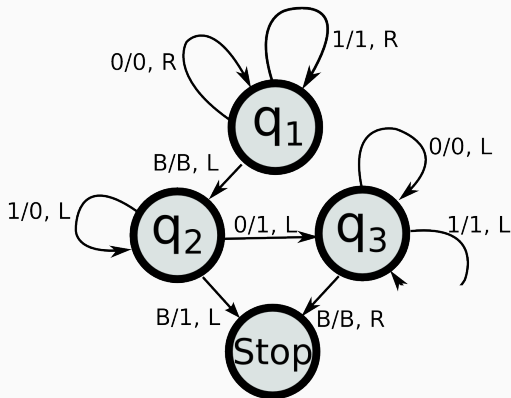
Stop

Алфавит:

**0, 1, B**(пусто)

Состояния:

**$q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , Stop**



# Недетерминированная машина Тьюринга

Недетерминированная машина Тьюринга — машина Тьюринга с бесконечной параллелизацией (абстрактная модель).

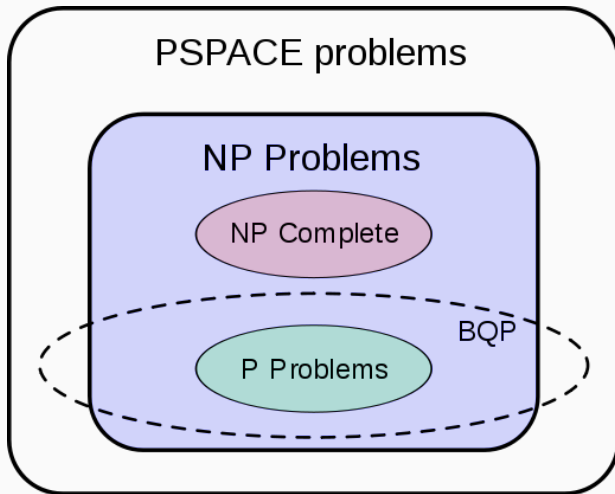
Пример: Факторизация числа

$$N = 15$$

$$\mathbf{414316826245109 = 5747281 * 72089189}$$

Факторизация числа не решается за полиномиальное время  $O(N^k)$  на детерминированной МТ.

Но решается за полиномиальное время на недетерминированной МТ.



# Задача коммивояжёра (принадлежит NP)

Задача коммивояжёра — заключается в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город.



# Вычислимые функции. Полнота по Тьюрингу.

- Вычислимые функции - это функции, которые могут быть реализованы на машине Тьюринга.  
Бывают невычислимые функции, например, функция определения остановки.
- В теории вычислимости исполнитель называется тьюринг-полным, если на нём можно реализовать любую вычислимую функцию.  
Большинство широко используемых языков программирования — тьюринг-полные.