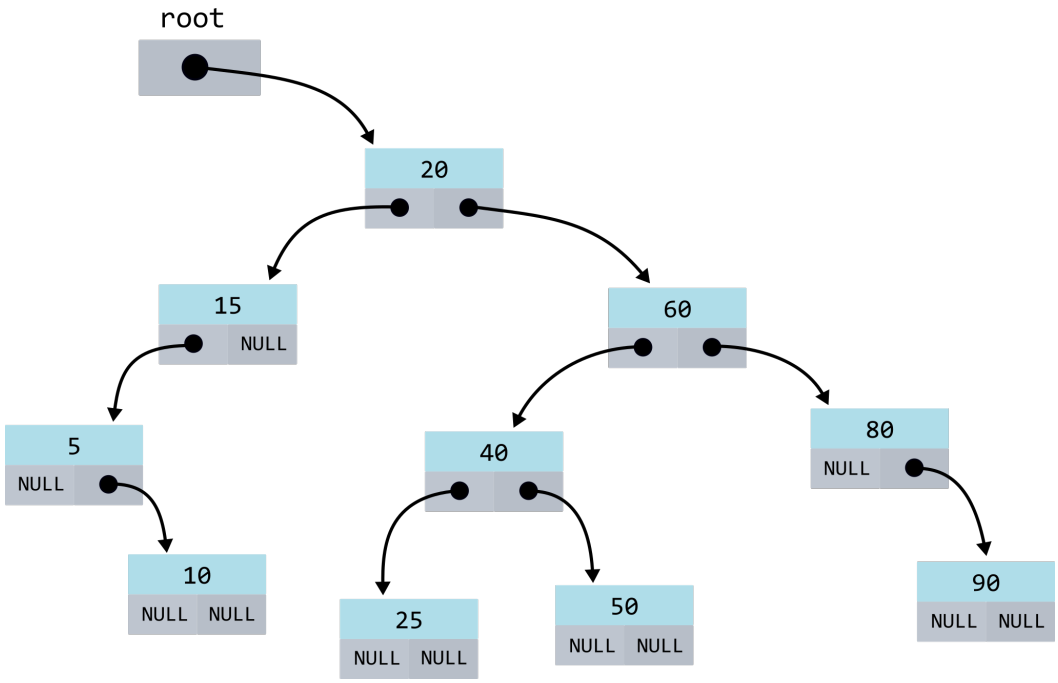
Семинар #11: Бинарные деревья поиска.




```c
struct node
{
    int value;
    struct node* left;
    struct node* right;
}
typedef struct node Node;

Node* bst_insert(Node* root, int x)
{
  if (root == NULL)
  {
    root = (Node*)malloc(sizeof(Node));
    root->value = x;
    root->left = NULL;
    root->right = NULL;
  }
  else if (x < root->value)
    root->left = bst_insert(root->left, x);
  else if (x > root->value)
    root->right = bst_insert(root->right, x);
  return root;
}
```

Стартовый код для этой части задания в файле `tree.c`.
Бинарное дерево - дерево, в котором у каждого узла может быть не более двух потомков.
Бинарное дерево поиска (binary search tree – bst) - бинарное дерево со следующими условиями:

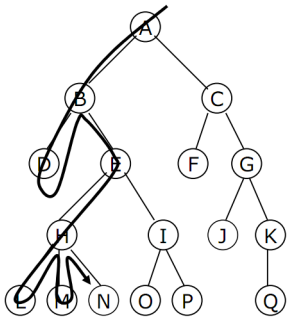
- У всех узлов левого поддерева `value` - меньше
- У всех узлов правого поддерева `value` - больше

Одинаковые элементы это дерево не хранит.
Глубина узла = количество предков узла + 1
Высота дерева = глубина самого глубокого узла
Сложность операций с bst:

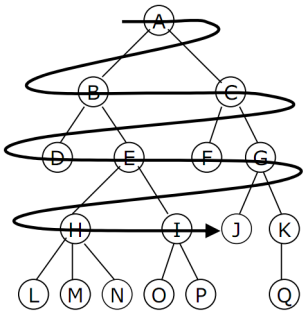
- Поиск $O(h(n))$
- Добавление $O(h(n))$
- Удаление $O(h(n))$

где $h(n)$ - высота дерева.
Для обычного дерева поиска $h(n)$ может достигать n.
Сбалансированное дерево - у *каждого* узла высоты левого поддерева и правого различаются не более, чем на 1. Для сбалансированного дерева $h(n) \approx log(n)$.
AVL-деревья и **красно-черные деревья** - два способа балансировки деревьев.

- Написать функцию `int bst_size(const Node* root)`, вычисляющую количество элементов в данном дереве. Используйте рекурсию.
- Написать функцию `int bst_height(const Node* root)`, вычисляющую глубину бинарного дерева. Используйте рекурсию.
- Написать функцию `void bst_print_dfs(const Node* root)`, которая будет печатать все элементы дерева в порядке возрастания.



DFS



BFS

- Написать функцию `Node* bst_search(Node* root, int val)`, которая ищет элемент в бинарном дереве и возвращает указатель на этот элемент. Если такого элемента нет, то функция должна вернуть `NULL`. Протестируйте эту функцию, печатая поддерево с помощью `print_ascii_tree`.
- Написать функцию `Node* bst_get_min(Node* root)`, которая возвращает указатель на минимальный элемент в этом дереве.
- Написать функцию `Node* bst_remove(Node* root, int x)`, которая удаляет элемент, содержащий `x`, из дерева поиска.
  Нужно рассмотреть следующие случаи:
  - Если `root == NULL`, то ничего не делаем
  - Если `x > root->value`
  - Если `x < root->value`
  - Если `x == root->value` и у `root` нет детей
  - Если `x == root->value` и `root` имеет одного левого ребёнка
  - Если `x == root->value` и `root` имеет одного правого ребёнка
  - Если `x == root->value` и `root` имеет двух ребёнков. В этом случае делаем следующее:
    * Находим минимальный элемент в правом поддереве.
    * Копируем значение `val` из этого элемента в `root`.
    * Удаляем этот минимальный элемент в правом поддереве, используя функцию `bst_remove`.

  Протестируйте ваш код на всех случаях. Используйте функцию `print_ascii_tree` для проверки.
- Заполнить дерево $n = 20000$ случайных чисел и найти количество элементов и высоту этого дерева. Сравнить высоту с оптимальной $h_{optimal} = \lceil log_2(n+1) \rceil = 14.3$. Помните, что вычислительная сложность операций с деревом равна $O(h)$, где h – высота дерева.
- Заполнить дерево $n = 20000$ последовательный чисел и найти количество элементов и высоту этого дерева. Сравнить высоту с оптимальной. Что будет, если увеличить n до миллиона?
- Написать функцию `void bst_print_bfs(const Node* root)`, которая будет печатать элементы в порядке их расстояния от узла (при равенстве расстояния печатать по возрастанию). Тут нужно использовать одну из реализаций абстрактного типа данных Очередь.