

# Úloha 1

(10 bodů) Je dána posloupnost celých čísel délky  $N$ , kde  $N < 100000$ . Určete v ní **nejdelší znaménkově vyvážený úsek**, tj. souvislý úsek obsahující **stejný počet kladných a záporných** čísel. Výstupem je index prvního a posledního prvku nalezeného úseku; je-li takových vyvážených úseků téže maximální délky více, stačí nalézt libovolný z nich. Pokud žádný takový vyvážený úsek neexistuje, můžete vrátit např. hodnotu `None`.

Navrhněte postup, jak správně vyřešit úlohu s co **nejlepší časovou složitostí** vzhledem k délce posloupnosti  $N$ . Plný počet bodů bude udělen pouze za řešení pracující v asymptoticky optimálním čase.

(a) **Popište algoritmus**: programový kód v Pythonu je vítán, ale není povinný, slovní vysvětlení zvoleného postupu řešení naopak povinné je. Nepoužívejte žádné netriviální datové struktury (typu zásobník, fronta, halda, slovník), jejichž algoritmus sami nepopíšete a neodvodíte jeho časovou složitost.

(b) **Zdůvodněte správnost** algoritmu.

(c) Odvoďte **časovou a prostorovou složitost** (v nejhorším případě). Pracuje vaše řešení v asymptoticky optimálním čase a prostoru?

## Příklad

vstup: 2 -2 0 6 -1 1 7 -9 2 5 výstup: 1 7 (pozice vstupní posloupnosti číslujeme od 0)

# Úloha 2

(10 bodů) Je zadán binární strom. Navrhněte efektivní algoritmus, který zjistí, zdali je zadán strom **AVL-vyvážený**, tj. zda pro každý vrchol stromu platí, že výšky jeho levého a pravého podstromu se liší nejvýše o 1. (a) Svoje řešení zapište jako **funkci v Pythonu**, využijte definici třídy pro vrchol binárního stromu níže a váš kód prosím opatřete **komentáři**,

(b) zdůvodněte **správnost**,

(c) odvoďte **časovou složitost**.

```
class VrcholBinStromu:
    """třída pro reprezentaci vrcholu binárního stromu"""
    def __init__(self, x = None, levy = None, pravy = None):
        self.info = x      # data
        self.levy = levy   # levé dítě
        self.pravy = pravy # pravé dítě
```

# Úloha 3

Odpovězte na otázky, své odpovědi vždy **zdůvodněte**.

(a) (3 body) Mějme danu dvojici funkcí  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  splňující  $f = O(g)$ . Dokažte nebo vyvráťte každé z následujících tvrzení:

- $\frac{1}{f} = O(\frac{1}{g})$
- $\frac{1}{g} = O(\frac{1}{f})$

(b) **(3 body)** Kolik listů může mít binární halda o  $n$  prvcích?

(c) **(3 body)** Předpokládejme, že se minimaxovým algoritmem podařilo ohodnotit celý strom hry šachy. Dokažte nebo vyvráťte: Je-li kořen stromu hry ohodnocen hodnotou 0, pak si černý hráč (který táhne jako druhý) může vynutit alespoň remízu