

# АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

Лекция 2



Мацкевич С.Е.

# План лекции 2 «Элементарные структуры данных»



- Однонаправленные, двунаправленные списки.
- Абстрактные типы данных «Стек», «Очередь», «Дек». Способы реализации.
- Динамическое программирование.
- Жадные алгоритмы.



# Абстрактные типы данных и структуры данных

---



## Напоминание:

Абстрактный тип данных = набор функций, интерфейс.

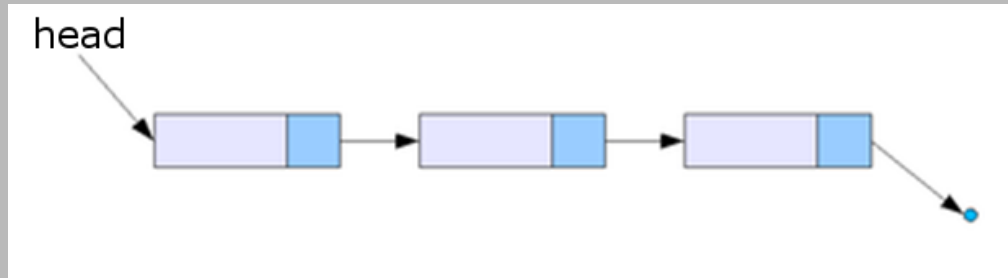
Структура данных = программная единица для обработки связанных данных, зачастую является реализацией некоторого АД.

**Определение. Связный список** — динамическая структура данных, состоящая из узлов, каждый из которых содержит как собственно данные, так и одну или две ссылки («связки») на следующий и/или предыдущий узел списка.

Преимущество перед массивом:

- Порядок элементов списка может не совпадать с порядком расположения элементов данных в памяти, а порядок обхода списка всегда явно задаётся его внутренними связями.

## Односвязный список (однонаправленный связный список)

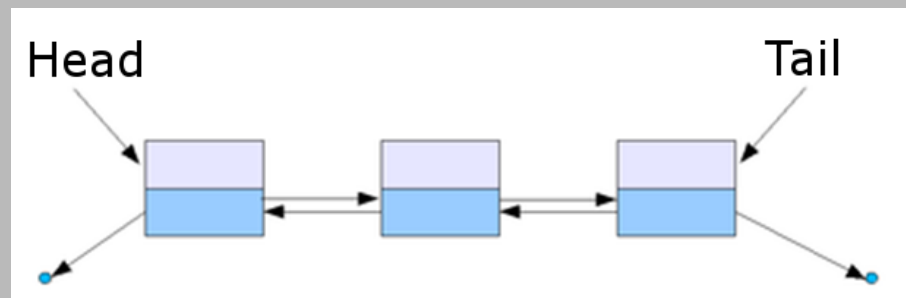


Ссылка в каждом узле одна.

Указывает на следующий узел в списке.

Узнать адрес предыдущего элемента, опираясь на содержимое текущего узла, невозможно.

## Двусвязный список (Двунаправленный связный список)



Ссылки в каждом узле указывают на предыдущий и на последующий узел в списке.

## Операции со списками:

- Поиск элемента,
- Вставка элемента,
- Удаление элемента,
- Объединение списков,
- ...



# Связные списки. Узел.



```
// Элемент двусвязного списка с целочисленными
// значениями.
struct CNode {
    int Data;
    CNode* Next;
    CNode* Prev;

    CNode() : Data( 0 ), Next( 0 ), Prev( 0 ) {}
};
```





# Связные списки. Поиск.



```
// Линейный поиск элемента «a» в списке.  
// Возвращает 0, если элемент не найден.  
CNode* Search( CNode* head, int a )  
{  
    CNode* current = head;  
    while( current != 0 ) {  
        if( current->Data == a )  
            return current;  
        current = current->Next;  
    }  
    return 0;  
}
```

Время работы в худшем случае =  $O(n)$ , где  $n$  – длина списка.



# Связные списки. Вставка.



```
// Вставка элемента «а» после текущего.
CNode* InsertAfter( CNode* node, int a )
{
    assert( node != 0 );
    // Создаем новый элемент.
    CNode* newNode = new CNode();
    newNode->Data = a;
    newNode->Next = node->Next;
    newNode->Prev = node;
    // Обновляем Prev следующего элемента, если он есть.
    if( node->Next != 0 ) {
        node->Next->Prev = newNode;
    }
    // Обновляем Next текущего элемента.
    node->Next = newNode;
    return newNode;
}
```

Время работы =  $O(1)$ .



# Связные списки. Удаление.



```
// Удаление элемента.
void DeleteAt( CNode* node )
{
    assert( node != 0 );
    // Обновляем Prev следующего элемента, если он есть.
    if( node->Next != 0 ) {
        node->Next->Prev = node->Prev;
    }
    // Обновляем Next предыдущего элемента, если он есть.
    if( node->Prev != 0 ) {
        node->Prev->Next = node->Next;
    }
    delete node;
}
```

Время работы =  $O(1)$  .



# Связные списки. Объединение.



```
// Объединение односвязных списков. К списку 1 подцепляем
список 2.
// Возвращает указатель на начало объединенного списка.
CNode* Union( CNode* head1, CNode* head2 ) {
    if( head1 == 0 ) {
        return head2;
    }
    if( head2 == 0 ) {
        return head1;
    }
    // Идем в хвост списка 1.
    CNode* tail1 = head1;
    for( ; tail1->Next != 0; tail1 = tail1->Next );
    // Обновляем Next хвоста.
    tail1->Next = head2;
    return head1;
}
```

Время работы =  $O(n)$ , где  $n$  – длина первого списка.

# Сравнение списков с массивами.



## Недостатки списков:

- Нет быстрого доступа по индексу.
- Расходуется доп. память.
- Узлы могут располагаться в памяти разреженно, что не позволяет использовать кэширование процессора.

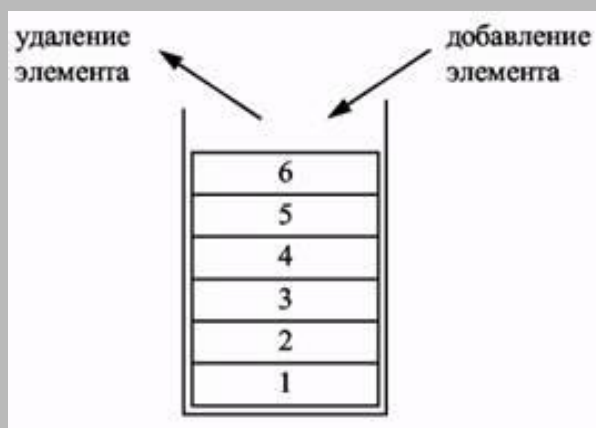
## Преимущества списков перед массивом:

- Быстрая вставка узла.
- Быстрое удаление узла.

**Определение.** Стек — абстрактный тип данных (или структура данных), представляющий из себя список элементов, организованный по принципу LIFO = Last In First Out, «последним пришел, первым вышел».

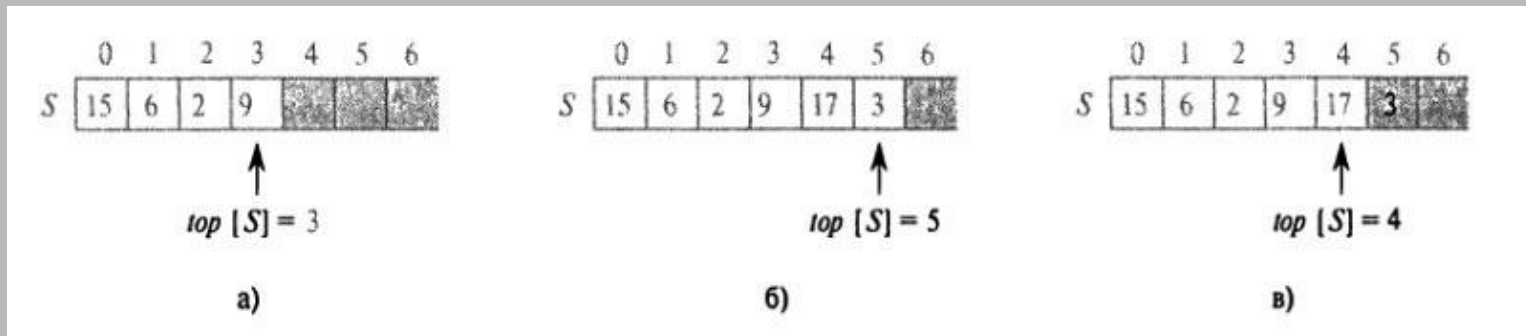
**Операции:**

1. Вставка (Push)
2. Извлечение (Pop) — извлечение элемента, добавленного последним.



Стек можно реализовать с помощью массива или с помощью списка.

**Реализация с помощью массива.**



Храним указатель на массив и текущее количество элементов в стеке.

Можно использовать динамический массив.



```
// Стек целых чисел, реализованный с помощью массива.
class CStack {
public:
    CStack( int _bufferSize );
    ~CStack();

    // Добавление и извлечение элемента из стека.
    void Push( int a );
    int Pop();

    // Проверка на пустоту.
    bool IsEmpty() const { return top == -1; }

private:
    int* buffer;
    int bufferSize;
    int top; // Индекс верхнего элемента.
};
```





# СД «Стек»

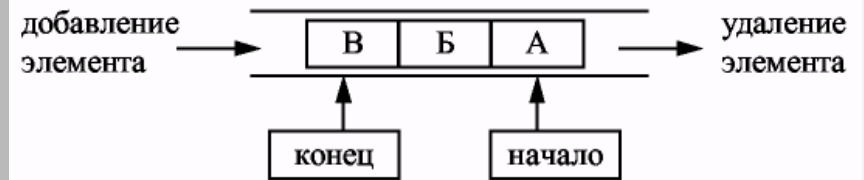


```
CStack::CStack( int _bufferSize ) :
    bufferSize( _bufferSize ),
    top( -1 )
{
    buffer = new int[bufferSize]; // Создаем буфер.
}
CStack::~CStack()
{
    delete[] buffer; // Удаляем буфер.
}
// Добавление элемента.
void CStack::Push( int a )
{
    assert( top + 1 < bufferSize );
    buffer[++top] = a;
}
// Извлечение элемента.
int CStack::Pop()
{
    assert( top != -1 );
    return buffer[top--];
}
```

**Определение.** Очередь — абстрактный тип данных (или структура данных), представляющий из себя список элементов, организованный по принципу FIFO = First In First Out, «первым пришел, первым вышел».

**Операции:**

1. Вставка (Enqueue)
2. Извлечение (Dequeue) — извлечение элемента, добавленного первым.



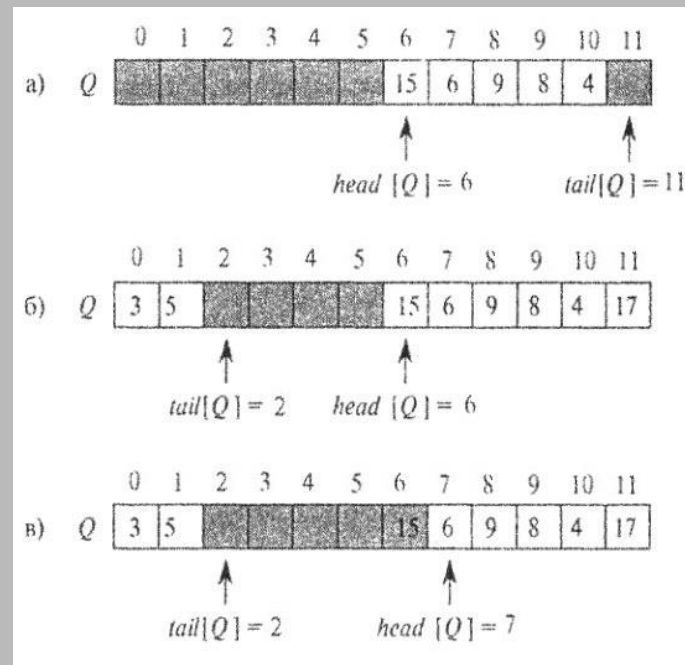
Очередь также как и стек можно реализовать с помощью массива или с помощью списка.

## Реализация с помощью массива.

Храним указатель на массив, текущее начало и конец очереди.

Считаем массив за цикленным.

Можно использовать динамически растущий буфер.





# СД «Очередь»



```
// Очередь целых чисел, реализованная с помощью массива.
class CQueue {
public:
    CQueue( int size );
    ~CQueue() { delete[] buffer; }

    // Добавление и извлечение элемента из очереди.
    void Enqueue( int a );
    int Dequeue();

    // Проверка на пустоту.
    bool IsEmpty() const { return head == tail; }

private:
    int* buffer;
    int bufferSize;
    int head; // Указывает на первый элемент очереди.
    int tail; // Указывает на следующий после последнего.
};
```



# СД «Очередь»



```
CQueue::CQueue( int size ) :
    bufferSize( size ),
    head( 0 ),
    tail( 0 )
{
    buffer = new int[bufferSize]; // Создаем буфер.
}

// Добавление элемента.
void CQueue::Enqueue( int a )
{
    assert( ( tail + 1 ) % bufferSize != head );
    buffer[tail] = a;
    tail = ( tail + 1 ) % bufferSize;
}

// Извлечение элемента.
int CQueue::Dequeue()
{
    assert( head != tail );
    int result = buffer[head];
    head = ( head + 1 ) % bufferSize;
    return result;
}
```

**Определение.** Двусвязная очередь — абстрактный тип данных (структура данных), в которой элементы можно добавлять и удалять как в начало, так и в конец, то есть принципами обслуживания являются одновременно FIFO и LIFO.

**Операции:**

1. Вставка в конец (PushBack),
2. Вставка в начало (PushFront),
3. Извлечение из конца (PopBack),
4. Извлечение из начала (PopFront).

Дек, также как стек или очередь, можно реализовать с помощью массива или с помощью списка.



# Динамическое программирование



Динамическое программирование (ДП) — способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи.

*Подход динамического программирования* состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только один раз, сократив тем самым количество вычислений.

Термин «динамическое программирование» также встречается в теории управления в смысле «динамической оптимизации». Основным методом ДП является сведение общей задачи к ряду более простых экстремальных задач.

*Лит.:* Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960.

# Динамическое программирование



Пример. Числа Фибоначчи.  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .  $F_1 = 1$ ,  $F_0 = 1$ .

Можно вычислять рекурсивно:

$$F_5 = F_4 + F_3,$$

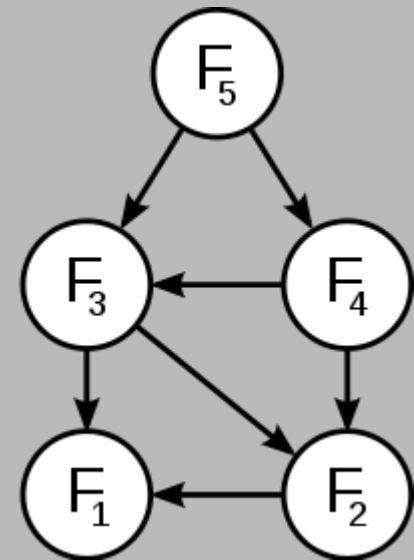
$$F_4 = F_3 + F_2,$$

$$F_3 = F_2 + F_1,$$

Многие значения могут вычисляться несколько раз.

Решение — сохранять результаты решения подзадач.

Этот подход называется кэшированием.





# Динамическое программирование



Пример. Вычисление рекуррентных функций нескольких аргументов.

$$F(x, y) = 3 \cdot F(x - 1, y) - 2 \cdot F^2(x, y - 1),$$
$$F(x, 0) = x, F(0, y) = 0.$$

Вычисление  $F(x, y)$  сводится к вычислению двух  $F(\cdot, \cdot)$  от меньших аргументов.

Есть перекрывающиеся подзадачи.

$F(x - 1, y - 1)$  в рекурсивном решении вычисляется дважды.

$F(x - 2, y - 1)$  в рекурсивном решении вычисляется три раза.

$F(x - n, y - m)$  в рекурсивном решении вычисляется  $C_{n+m}^n$  раз.

Снова будем использовать кэширование — сохранять результаты.

Вычисления будем выполнять от меньших аргументов к большим.



# Динамическое программирование



```
// Вычисление рекуррентного выражения от двух переменных.
int F( int x, int y )
{
    vector<vector<int>> values( x + 1 );
    for( int i = 0; i <= x; ++i ) {
        values[i].resize( y + 1 );
        values[i][0] = i; // F( x, 0 ) = x;
    }
    for( int i = 1; i <= y; ++i ) {
        values[0][i] = 0; // F( 0, y ) = 0;
    }
    // Вычисляем по рядам.
    for( int i = 0; i <= x; ++i ) {
        for( int j = 0; j <= y; ++j ) {
            values[i][j] = 3 * values[i - 1][j] -
                2 * values[i][j - 1] * values[i][j - 1];
        }
    }
    return value[x][y];
}
```

При вычисление рекуррентной функции  $F(x, y)$  можно было не хранить значения на всех рядах.

Для вычисления очередного ряда достаточно иметь значения предыдущего ряда.

**Важная оптимизация ДП:** Запоминать только те значения, которые будут использоваться для последующих вычислений.

Для вычисления числа Фибоначчи  $F_i$  также достаточно хранить лишь два предыдущих значения:  $F_{i-1}$  и  $F_{i-2}$ .

## Принципы ДП:

1. Разбить задачу на подзадачи.
2. Кэшировать результаты решения подзадач.
3. Удалять более неиспользуемые результаты решения подзадач (опционально).

Два подхода динамического программирования:

1. Нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи. Используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач.
2. Восходящее динамическое программирование: все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи.

Второй способ лучше нисходящего программирования в смысле размера необходимого стека и количества вызова функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить, решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

# Динамическое программирование



Иногда бывает нелегко заранее выяснить, решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Пример.  $F(n) = F\left(\frac{n}{2}\right) + F\left(\frac{2 \cdot n}{3}\right)$ ,  $F(0) = F(1) = 1$ , деление целочисленное.

Восходящее динамическое программирование применить можно, но будут вычислены все значения  $F$  от 1 до  $n$ . Сложно определить, для каких  $k$  требуется вычислять  $F(k)$ .

Нисходящее динамическое программирование позволит вычислить только те  $F(k)$ , которые требуются, но рекурсивно. Максимальная глубина рекурсии  $= \log_{3/2}(n)$ .



# Динамическое программирование



// Вычисление рекуррентного выражения методом нисходящего ДП.

```
int F( int n )
{
    std::vector<int> values( n, -1 );
    values[0] = 1;
    values[1] = 1;
    return calcF( n, values );
}
```

// Рекурсивное вычисление с запоминанием.

```
int calcF( int n, std::vector<int>& values )
{
    if( values[n] != -1 )
        return values[n];
    values[n] = calcF( n / 2, values ) + calcF( 2 * n / 3, values );
    return values[n];
}
```

# Наибольшая общая подпоследовательность



Последовательность  $X$  является подпоследовательностью  $Y$ , если из  $Y$  можно удалить несколько элементов так, что получится последовательность  $X$ .

Задача. Наибольшая общая подпоследовательность (англ. longest common subsequence, LCS) — задача поиска последовательности, которая является подпоследовательностью нескольких последовательностей (обычно двух).

Элементами подпоследовательности могут быть числа, символы...

$X = ABCAB,$

$Y = DCBA,$

$НОП(X, Y) = BA, CA, CB.$



# Наибольшая общая подпоследовательность



Будем решать задачу нахождения наибольшей общей подпоследовательности с помощью ДП.

Сведем задачу к подзадачам меньшего размера:

$f(n_1, n_2)$  — длина наибольшей общей подпоследовательности строк  $s_1[0..n_1]$ ,  $s_2[0..n_2]$ .

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} 0, & n_1 = 0 \vee n_2 = 0 \\ f(n_1 - 1, n_2 - 1) + 1, & s[n_1] = s[n_2] \\ \max(f(n_1 - 1, n_2), f(n_1, n_2 - 1)), & s[n_1] \neq s[n_2] \end{cases}$$

# Наибольшая общая подпоследовательность



		A	B	C	A	B
	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	1	1
B	0	0	1	1	1	2
A	0	1	1	1	2	2

В каждой ячейке – длина наибольшей общей подстроки соответствующих начал строк.

# Наибольшая общая подпоследовательность



$f(n_1, n_2)$  — длина НОП.

Как восстановить саму подпоследовательность?

Можно хранить в каждой ячейке таблицы «направление» перехода. Переход по диагонали означает, что очередной символ присутствует в обоих последовательностях.

Начинаем проход от правого нижнего угла.

Идем по стрелкам, на каждый переход по диагонали добавляем символ в начало строящейся подпоследовательности.

«Направления» можно не хранить, а вычислять по значениям в таблице.

# Наибольшая общая подпоследовательность



		A	B	C	A	B
	0	0	0	0	0	0
D	0	←↑ 0	←↑ 0	←↑ 0	←↑ 0	←↑ 0
C	0	←↑ 0	←↑ 0	↖ 1	← 1	← 1
B	0	←↑ 0	↖ 1	←↑ 1	←↑ 1	↖ 2
A	0	↖ 1	←↑ 1	←↑ 1	↖ 2	←↑ 2

Желтым выделены ячейки, лежащие на лучшем пути.

Переход по диагонали соответствует совпадению символа.

**Расстояние Левенштейна (также редакционное расстояние или дистанция редактирования)** между двумя строками — это минимальное количество следующих операций:

- вставки одного символа,
  - удаления одного символа,
  - замены одного символа на другой,
- необходимых для превращения одной строки в другую.

Впервые задачу упомянул в 1965 году советский математик Владимир Иосифович Левенштейн при изучении последовательностей 0-1.

Расстояние Левенштейна и его обобщения активно применяется:

- для исправления ошибок в слове (в поисковых системах, базах данных, при вводе текста, при автоматическом распознавании отсканированного текста или речи).
- для сравнения текстовых файлов утилитой diff и ей подобными. Здесь роль «символов» играют строки, а роль «строк» — файлы.
- в биоинформатике для сравнения генов, хромосом и белков.

# Расстояние Левенштейна



Будем вычислять расстояние Левенштейна с помощью Динамического программирования.

$D(i, j)$  = количество операций, необходимых для приведения одной подстроки  $S[0..i]$  к другой  $T[0..j]$ .

$$D(i, j) = \begin{cases} 0 & ; i = 0, j = 0 \\ i & ; j = 0, i > 0 \\ j & ; i = 0, j > 0 \\ \min( & \\ \quad D(i, j - 1) + 1, & \\ \quad D(i - 1, j) + 1, & ; j > 0, i > 0 \\ \quad D(i - 1, j - 1) + m(S_1[i], S_2[j]) & \\ ) & \end{cases}$$

# Расстояние Левенштейна



Пример.

		А	Р	Е	С	Т	А	Н	Т
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Д	1	1	2	3	4	5	6	7	8
А	2	1	2	3	4	5	5	6	7
Г	3	2	2	3	4	5	6	6	7
Е	4	3	3	2	3	4	5	6	7
С	5	4	4	3	2	3	4	5	6
Т	6	5	5	4	3	2	3	4	5
А	7	6	6	5	4	3	2	3	4
Н	8	7	7	6	5	4	3	2	3





# Расстояние Левенштейна



```
// Вычисление расстояния Левенштейна.
int LevenshteinDistance( const string& s, int sLength, const string& t,
    int tLength )
{
    // Крайние случаи.
    if( sLength == 0 ) return tLength;
    if( tLength == 0 ) return sLength;

    // Проверим совпадение последних символов.
    int cost = s[sLength - 1] == t[tLength - 1] ? 0 : 1;

    // Вычисляем минимум.
    return min( LevenshteinDistance( s, sLength - 1, t, tLength ) + 1,
        LevenshteinDistance( s, sLength, t, tLength - 1 ) + 1,
        LevenshteinDistance( s, sLength - 1, t, tLength - 1 ) + cost );
}
```

**Жадный алгоритм** (англ. Greedy algorithm) — алгоритм, заключающийся в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным.

Доказательство оптимальности часто следует такой схеме:

1. Доказывается, что жадный выбор на первом шаге не закрывает пути к оптимальному решению: для всякого решения есть другое, согласованное с жадным выбором и не хуже первого.
2. Показывается, что подзадача, возникающая после жадного выбора на первом шаге, аналогична исходной.
3. Рассуждение завершается по индукции.

# Жадные алгоритмы. Размен монет.



Монетная система некоторого государства состоит из монет достоинством  $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_n$ . Требуется выдать сумму  $S$  наименьшим возможным количеством монет.

## Жадный алгоритм:

Берём наибольшее возможное количество монет наибольшего достоинства  $a_n$ :  $x_n = \lfloor S/a_n \rfloor$ .

Далее аналогично получаем, сколько нужно монет меньшего номинала для выдачи остатка.

- Не всегда даёт оптимальное решение.  
Например. Монеты в 1, 5 и 7 коп. Сумма 24.  
Жадный алгоритм разменивает так:  
7к. — 3 шт., 1к. — 3 шт.  
Правильное решение:  
7к. — 2 шт., 5к. — 2 шт.
- Тем не менее, на всех *реальных* монетных системах жадный алгоритм даёт правильный ответ.



# Жадные алгоритмы. Покрывтие отрезками.



Задача. Дано множество отрезков  $[a_i, b_i]$ , покрывающее отрезок  $[0, X]$ . Найти наименьшее подпокрытие, т.е. минимальный набор отрезков, по-прежнему покрывающий отрезок  $[0, X]$ .

Жадное решение.

Упорядочим набор отрезков по возрастанию левого конца  $a_i$ .

- Шаг 1. Среди отрезков, содержащих 0, найдем такой, у которого наибольший правый конец  $b_i$ . Обозначим этот отрезок  $[\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1]$ .
- Шаг 2. Среди отрезков, содержащих  $\widetilde{b}_1$ , найдем такой, у которого наибольший правый конец  $b_i$ . Обозначим этот отрезок  $[\widetilde{a}_2, \widetilde{b}_2]$ .
- И так далее.

# Жадные алгоритмы. Покрывтие отрезками.



Утверждение. Жадное решение является оптимальным.

Доказательство. От противного. Пусть жадное решение состоит из  $K$  отрезков  $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ . И пусть существует более оптимальное решение  $[\hat{a}_i, \hat{b}_i]$ , состоящие из менее чем  $K$  отрезков.

Упорядочим отрезки в решениях по правому краю. Заметим, что отрезки также будут упорядочены и по левому краю в оптимальном решении и в жадном решении.

Найдем первый отрезок, отличающийся в жадном решении от оптимального. У такого отрезка оптимального решения меньше правый край и он по-прежнему покрывает правый край предыдущего общего отрезка. Значит, его можно заменить на отрезок из жадного решения.

Так, заменяя отрезки оптимального решения на отрезки жадного, получим, что менее  $K$  первых отрезков жадного решения являются оптимальным решением, что невозможно по построению жадного решения.

# Жадные алгоритмы. Задача о рюкзаке.



## Жадный алгоритм.

Предметы сортируются по убыванию стоимости единицы каждого (по отношению цены к весу).

Шаг 1. Помещаем в рюкзак первый предмет из отсортированного массива, который поместится в рюкзак.

Шаг 2. Помещаем в рюкзак первый из оставшихся предметов отсортированного массива, который поместится в рюкзак.

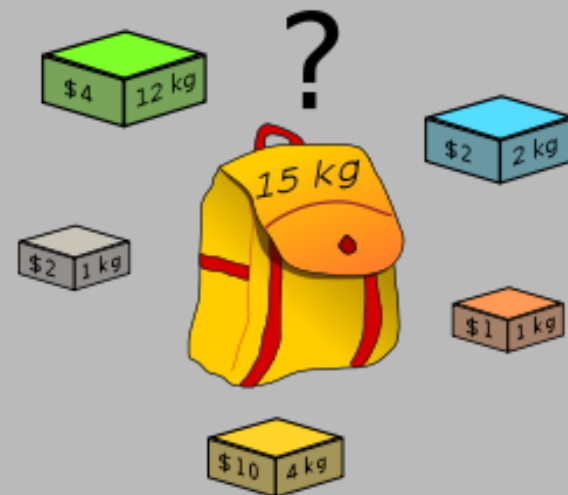
И т.д., пока в рюкзаке остается место или все оставшиеся предметы оказались тяжелее.

# Жадные алгоритмы. Задача о рюкзаке.



**Задача о рюкзаке** (англ. Knapsack problem) — одна из NP-полных задач комбинаторной оптимизации. Название своё получила от максимизационной задачи укладки как можно большего числа нужных вещей в рюкзак при условии, что общий объём (или вес) всех предметов, способных поместиться в рюкзак, ограничен.

Имеется  $N$  грузов. Для каждого  $i$ -го груза определён вес  $w_i$  и ценность  $c_i$ . Нужно упаковать в рюкзак ограниченной грузоподъёмности  $G$  те грузы, при которых суммарная ценность упакованного была бы максимальной.



# Жадные алгоритмы. Задача о рюкзаке.



Пример, когда жадный алгоритм не работает.

Пусть вместимость рюкзака 90. Предметы уже отсортированы. Применяем к ним жадный алгоритм.

	вес	цена	цена/вес
1	20	60	3
2	30	90	3
3	50	100	2

Кладём в рюкзак первый, а за ним второй предметы. Третий предмет в рюкзак не влезет. Суммарная ценность поместившегося равна 150. Если бы были взяты второй и третий предметы, то суммарная ценность составила бы 190. Видно, что жадный алгоритм не обеспечивает оптимального решения, поэтому относится к приближенным.



