

Сдать задание нужно до 22 октября марта 2016г. (9:00) включительно.

Задача № 1 (2 балла)

1_1. Найти, на сколько нулей оканчивается $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$.

$n \leq 1000$.

| in | out |
|----|-----|
| 25 | 6 |

1_2. Вывести разложение натурального числа n на простые множители. Простые множители должны быть упорядочены по возрастанию и разделены пробелами.

$2 \leq n \leq 10^6$.

| in | out |
|----|-------|
| 75 | 3 5 5 |

1_3. Даны две рациональные дроби: a/b и c/d . Сложить их и результат представьте в виде несократимой дроби m/n . Вывести числа m и n .

$a, b, c, d \leq 1000$.

| in | out |
|-----------|-------|
| 3 10 5 18 | 26 45 |

1_4. Дано натуральное число N . Представить N в виде $A + B$, так, что $\text{НОД}(A, B)$ максимален, $A \leq B$. Вывести A и B . Если возможно несколько ответов - вывести ответ с минимальным A .

$n \leq 10^7$.

| in | out |
|----|------|
| 35 | 7 28 |

1_5. Вывести квадраты натуральных чисел от 1 до n , используя только $O(n)$ операций сложения и вычитания (умножением пользоваться нельзя).

$n \leq 1000$.

| in | out |
|----|-------------|
| 5 | 1 4 9 16 25 |

1_6. Дан массив целых чисел $A[0..n]$. Не используя других массивов переставить элементы массива A в обратном порядке за $O(n)$.

$n \leq 10000$.

| in | out |
|---------------|----------|
| 4 3 9 -5 2 | 2 -5 9 3 |

1_*. Найти все простые числа в диапазоне $[2..n]$ за $O(n)$.

| in | out |
|----|---------------|
| 15 | 2 3 5 7 11 13 |

Задача № 2 (3 балла)

В каждой задаче, где начальными данными является массив вначале вводится количество элементов, а затем и сами элементы массива.

2_1. Даны два массива целых чисел одинаковой длины $A[0..n-1]$ и $B[0..n-1]$. Необходимо найти первую пару индексов i_0 и j_0 , $i_0 \leq j_0$, такую что $A[i_0] + B[j_0] = \max \{A[i] + B[j], \text{ где } 0 \leq i < n, 0 \leq j < n, i \leq j\}$. Время работы - $O(n)$.

$n \leq 100000$.

| in | out |
|----------------------------|-----|
| 4 4 -8 6 0 -10 3 1 1 | 0 1 |

2_2. Вычислить площадь выпуклого n -угольника, заданного координатами своих вершин. Вначале вводится количество вершин, затем последовательно целочисленные координаты всех вершин в порядке обхода против часовой стрелки.

$n < 1000$, координаты < 10000 .

Указание. Для вычисления площади n -угольника можно посчитать сумму ориентированных площадей трапеций под каждой стороной многоугольника.

| in | out |
|------------------------|-----|
| 3 0 1 1 0 2 2 | 1.5 |

2_3. Даны два строго возрастающих массива целых чисел $A[0..n]$ и $B[0..m]$ и число k . Найти количество таких пар индексов (i, j) , что $A[i] + B[j] = k$. Время работы $O(n + m)$.

$n, m \leq 100000$.

Указание. Обходите массив B от конца к началу.

| in | out |
|---|-----|
| 4 -5 0 3 18 5 -10 -2 4 7 12 7 | 3 |

2_4. "Считалочка". В круг выстроено N человек, пронумерованных числами от 1 до N . Будем исключать каждого k -ого до тех пор, пока не уцелеет только один человек. (Например, если $N=10$, $k=3$, то сначала умрет 3-й, потом 6-й, затем 9-й, затем 2-й, затем 7-й, потом 1-й, потом 8-й, за ним - 5-й, и потом 10-й. Таким образом, уцелеет 4-й.) Необходимо определить номер уцелевшего.

$N, k \leq 10000$.

| in | out |
|------|-----|
| 10 3 | 4 |

2_* Дан массив целых чисел $A[0..n]$. Массив произвольным образом заполнен натуральными числами из диапазона $[0..n - 1]$. Одно или несколько значений в массиве может повторяться. Необходимо найти любой повтор за $O(n)$, памяти $O(1)$. Исходный массив хранить можно, модифицировать нельзя.

$n \leq 10000$.

| in | out |
|----------------------|-----|
| 8 1 2 4 5 6 1 0 3 | 1 |

Задача № 3 (4 балла)

3_1. Дан отсортированный массив целых чисел $A[0..n-1]$ и массив целых чисел $B[0..m-1]$. Для каждого элемента массива $B[i]$ найдите минимальный индекс k минимального элемента массива A , равного или превосходящего $B[i]$: $A[k] \geq B[i]$. Если такого элемента нет, выведите n . Время работы поиска k для каждого элемента $B[i]$: $O(\log(k))$.

$n, m \leq 10000$.

Формат входных данных.

В первой строчке записаны числа n и m . Во второй и третьей массивы A и B соответственно.

| in | out |
|-------------------------|-------|
| 2 1 1 2 2 | 1 |
| 4 3 2 4 5 7 4 6 1 | 1 3 0 |

3_2. Дан массив целых чисел $A[0..n-1]$. Известно, что на интервале $[0, m]$ значения массива строго возрастают, а на интервале $[m, n-1]$ строго убывают. Найти m за $O(\log m)$.

$2 \leq n \leq 10000$.

| in | out |
|---------------------------|-----|
| 10 1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 | 6 |

3_3. Даны два массива неповторяющихся целых чисел, упорядоченные по возрастанию. $A[0..n-1]$ и $B[0..m-1]$. $n \gg m$. Найдите их пересечение. Требуемое время работы: $O(m * \log k)$, где k - позиция элемента $B[m-1]$ в массиве A . В процессе поиска очередного элемента $B[i]$ в массиве A пользуйтесь результатом поиска элемента $B[i-1]$.

$n, k \leq 10000$.

| in | out |
|------------------------------|-------|
| 5 3 1 2 3 4 5 1 3 5 | 1 3 5 |

3_4. Дан отсортированный массив различных целых чисел $A[0..n-1]$ и массив целых чисел $B[0..m-1]$. Для каждого элемента массива $B[i]$ найдите минимальный индекс элемента массива $A[k]$, ближайшего по значению к $B[i]$. Время работы поиска для каждого элемента $B[i]$: $O(\log(k))$.

$n \leq 110000, m \leq 1000$.

| in | out |
|---------------------------------|---------|
| 3 10 20 30 3 9 15 35 | 0 0 2 |
| 3 10 20 30 4 8 9 10 32 | 0 0 0 2 |

Задача № 4 (4 балла)

Во всех задачах из следующего списка следует написать структуру данных, обрабатывающую команды push* и pop*.

Формат входных данных.

В первой строке количество команд n. $n \leq 1000000$.

Каждая команда задаётся как 2 целых числа: a b.

a = 1 - push front

a = 2 - pop front

a = 3 - push back

a = 4 - pop back

Для очереди используются команды 2 и 3. Для дека используются все четыре команды.

Если дана команда pop*, то число b - ожидаемое значение. Если команда pop вызвана для пустой структуры данных, то ожидается "-1".

Формат выходных данных.

Требуется напечатать YES - если все ожидаемые значения совпали. Иначе, если хотя бы одно ожидание не оправдалось, то напечатать NO.

4_1. Реализовать очередь с динамическим зацикленным буфером.

| in | out |
|---------------------------|-----|
| 3 3 44 3 50 2 44 | YES |
| 2 2 -1 3 10 | YES |
| 2 3 44 2 66 | NO |

4_2. Реализовать дек с динамическим зацикленным буфером.

| in | out |
|---------------------------|-----|
| 3 1 44 3 50 2 44 | YES |
| 2 2 -1 1 10 | YES |
| 2 3 44 4 66 | NO |

4_3. Реализовать очередь с помощью двух стеков. Использовать стек, реализованный с помощью

динамического буфера.

| in | out |
|---------------------------|-----|
| 3 3 44 3 50 2 44 | YES |
| 2 2 -1 3 10 | YES |
| 2 3 44 2 66 | NO |

4_*. Реализовать очередь при помощи нескольких стеков. Каждая операция `pop front` и `push back` должна выполняться за $O(1)$.

Задача № 5 (4 балла)

Решение всех задач данного раздела предполагает использование стека. Способ реализации стека может быть любым (список/динамический массив).

5_1. Скобочная последовательность.

Дан фрагмент последовательности скобок, состоящей из символов `(){}[]`.

Требуется определить, возможно ли продолжить фрагмент в обе стороны, получив корректную последовательность.

Длина исходной последовательности ≤ 200000 .

Формат входных данных. Строка, содержащая символы `(){}[]` и, возможно, перевод строки.

Формат выходных данных. Если возможно - вывести минимальную корректную последовательность, иначе - напечатать **"IMPOSSIBLE"**.

| in | out |
|----------|-------------|
| {[[[[{[] | {[[[[{[]]]] |
| {[[[[{[] | IMPOSSIBLE |
|]{}[]((| {[]{}[]((}} |

5_2. Стековые анаграммы.

Пара слов называется стековой анаграммой, если одно слово можно получить из другого, проведя последовательность стековых операций с его буквами (взять очередную букву исходного слова и поместить ее в стек; взять букву из стека и добавить ее в конец выходного слова).

Для заданной пары слов требуется определить, можно ли выполнить последовательность стековых операций, переводящую первое слово во второе. Все буквы в слове различные.

Длина анаграммы ≤ 10000 .

Формат входных данных. Пара слов, являющихся анаграммой.

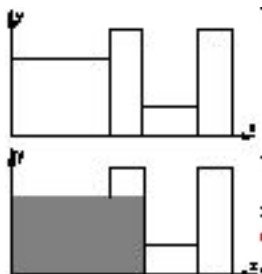
Формат выходных данных. **YES**, если последовательность стековых операций существует и **NO** в противном случае.

| in | out |
|----|-----|
|----|-----|

| | |
|-----------|-----|
| STOL SLOT | YES |
| ABC CAB | NO |

5_3. Прямоугольники.

Дана последовательность N прямоугольников различной ширины и высоты (w_i, h_i). Прямоугольники расположены, начиная с точки $(0, 0)$, на оси OX вплотную друг за другом (вправо). Требуется найти M - площадь максимального прямоугольника (параллельного осям координат), который можно вырезать из этой фигуры.



Время работы - $O(n)$.

Формат входных данных. В первой строке задано число N ($1 \leq N \leq 10000$). Далее идет N строк. В каждой строке содержится два числа width и height: ширина и высота i -го прямоугольника. ($0 < \text{width} \leq 10000$, $0 \leq \text{height} \leq 10000$)

Формат выходных данных. вывести число M . ($0 \leq M \leq 10^9$).

| in | out |
|---------------------------------------|------|
| 4 30 30 10 40 20 10 10 40 | 1200 |
| 1 1 3000 | 3000 |
| 3 1 1 1 3 3 2 | 8 |

5_4. Вычисление выражения.

Дано выражение в инфиксной записи. Вычислить его, используя перевод выражения в постфиксную запись. Выражение не содержит отрицательных чисел.

Количество операций ≤ 100 .

Формат входных данных. Строка, состоящая из символов "0123456789-+*/()"

Гарантируется, что входное выражение корректно, нет деления на 0, вычислимо в целых числах. Деление целочисленное.

Формат выходных данных.

Значение выражения.

| in | out |
|-----------------------|-----|
| 1 + 2 | 3 |
| 200-(123+34*2)+(48-2) | 55 |

Задача № 6 (4 балла)

Дано N кубиков. Требуется определить каким количеством способов можно выстроить из этих кубиков пирамиду.

Формат входных данных:

На вход подается количество кубиков N .

Формат выходных данных:

Вывести число различных пирамид из N кубиков.

6_1. Высокая пирамида. Каждый вышележащий слой пирамиды должен быть не больше нижележащего.
 $N \leq 200$.

| in | out |
|----|-----|
| 3 | 3 |
| 5 | 7 |
| 7 | 15 |

6_2. Широкая пирамида. Каждый вышележащий слой пирамиды должен быть строго меньше нижележащего.
 $N \leq 300$.

| in | out |
|----|-----|
| 3 | 2 |
| 5 | 3 |
| 7 | 5 |

Задача № 7 (3 балла)

7_1. Атлеты.

В город N приехал цирк с командой атлетов. Они хотят удивить горожан города N — выстроить из своих тел башню максимальной высоты. Башня — это цепочка атлетов, первый стоит на земле, второй стоит у него на плечах, третий стоит на плечах у второго и т.д.

Каждый атлет характеризуется силой s_i (kg) и массой m_i (kg). Сила — это максимальная масса, которую атлет способен держать у себя на плечах.

К сожалению ни один из атлетов не умеет программировать, так как всю жизнь они занимались физической подготовкой, и у них не было времени на изучение языков программирования. Помогите им, напишите программу, которая определит максимальную высоту башни, которую они могут составить.

Известно, что если атлет тяжелее, то он и сильнее:

$$\text{если } m_i > m_j, \text{ то } s_i > s_j.$$

Атлеты равной массы могут иметь различную силу.

Формат входных данных:

Вход содержит только пары целых чисел — массу и силу атлетов. Число атлетов $1 \leq n \leq 100000$. Масса и сила являются положительными целыми числами меньше, чем 2000000.

Формат выходных данных:

Выход должен содержать натуральное число — максимальную высоту башни.

| in | out |
|--------------------------|-----|
| 3 4 2 2 7 6 4 5 | 3 |

7_2. Заявки на переговоры.

В большой IT-фирме есть только одна переговорная комната. Желающие посоветоваться заполняют заявки с желаемым временем начала и конца. Ваша задача определить максимальное количество заявок, которое может быть удовлетворено.

Число заявок ≤ 100000 .

Формат входных данных:

Вход содержит только пары целых чисел — начала и концы заявок.

Формат выходных данных:

Выход должен содержать натуральное число — максимальное число заявок.

| in | out |
|------|-----|
| 1 2 | 5 |
| 2 5 | |
| 7 10 | |
| 2 3 | |
| 6 7 | |
| 4 7 | |
| 3 6 | |
| 3 5 | |
| 1 2 | |
| 4 5 | |
| | |
| | |