Проблема Шпехта и Гипотеза Гельфанда

Воробьев Иван Евгеньевич

Научный руководитель, доктор физ.-мат. наук, профессор
Алексей Яковлевич Канель-Белов

Соруководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Антон Сергеевич Хорошкин

Рецензент, доктор физ.-мат. наук, профессор
Сергей Олегович Горчинский

20 июня 2024 г.

Структура работы

Мы рассмотрим два применения PI-теории:

- Нелинейность свободных про-p групп
- Гипотеза Гельфанда

Структура:

1. Предварительные сведения
2. Историческая справка
3. Постановка задачи (о нелинейности свободной про-p группы)
4. Обзор подхода А.Н. Зубкова ($d = 2, p > 2$)
5. Обзор подхода Бена-Эзры—Зельманова ($p = 2, d = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 2$)
6. Случай $p = 2, d = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 4$
7. Методы Гришина
8. Гипотеза Гельфанда
9. Связь гипотезы Гельфанда с методами А.В. Гришина

Предварительные сведения

Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных групп называется проконечной группой.

Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных p-групп называется про-p группой.

Definition

Коммутативное нетерово I-полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про-p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p.

$$\Delta = \varprojlim \Delta/I^n$$

Предварительные сведения

Definition

Пусть F свободная группа порожденная алфавитом $\mathcal{S}$. Рассмотрим пополнение $\widetilde{F}_p$ группы F относительно топологии, определенной всеми нормальными подгруппами индекса p^l, $\forall l \in \mathbb{N}$. Тогда $\widetilde{F}_p$ называется свободной про-p группой.

Remark

Здесь и далее под подобным пополнением мы имеем в виду обратный предел факторгрупп.

Пусть Δ про-p кольцо.

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta\to\Delta/I} GL_d(\Delta/I)\right)$$

является про-p группой.

Основная гипотеза

Conjecture

Некоммутативная свободная про-p группа $\widetilde{F}_p$ *не может быть непрерывно вложена в* $GL^1_d(\Delta)$ *для любого про-p кольца* Δ.

Историческая справка

Существует множество частичных результатов для различных $\widetilde{F}_p, \Delta, p$, которые дают надежду на положительный результат и в общем случае:

- В 1987, А.Н. Зубков ([3]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1991, J.D. Dixon, A. Mann, M.P.F. du Sautoy, D. Segal ([6]) доказали гипотезу для $\Delta = \mathbb{Z}_p$,
$$GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker\left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p)\right)$$
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([4]), Y. Barnea, M. Larsen ([5]) доказали гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$.
- В 2005, E. Zelmanov ([8]) анонсировал доказательство гипотезы для $p \gg d$.
- В 2020, D. Ben-Ezra, E. Zelmanov доказали ([7]) гипотезу для $d = 2, p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 2$.

Подход Зубкова

Theorem (А.Н. Зубков, 1989)

Некоммутативная свободная про-p группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.

Общие матрицы

Обозначения:

- $S = \mathbb{Z}_p[[x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2}]]$
- $S_k = \{\sum_k^{\infty} f_i\}$
- $B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$

Матричное кольцо $M_2(S)$ — про-p кольцо с топологией конгруенц-идеалов

$$\ker\left(M_2(S) \to M_2(S/B_{k,n})\right)$$

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Универсальное представление

Зубков рассматривает естественный гомоморфизм в алгебру общих матриц:
Пусть $x, y \in \widetilde{F}_p$ — образующие,

$$\pi : x \mapsto 1 + X, y \mapsto 1 + Y$$

где X, Y общие матрицы над $\mathbb{Z}_p$.
Можно продолжить π на замыкание $\langle\langle x, y\rangle\rangle$, и оно отобразится на замыкание $\langle 1 + x^*, 1 + y^* \rangle$.

Универсальное представление

Гомоморфизм π называется универсальным представлением:

Theorem (А.Н. Зубков, 1987)

Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$, то и универсальное представление π инъективно.

Theorem

Универсальное представление не инъективно для $p \neq 2$.

Обозначения

Обозначения:

- $\mathbf{S}$ — кольцо степенных рядов от общих матриц X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$ однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.
- $\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$ — $\mathbb{Z}_p$-модуль однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$.
- Для $g \in 1 + \ker(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$: $\min g$ — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \ldots$)

План доказательства

1. Определим $G \supseteq G^{(n)} = G \cap \ker\left(GL(S) \to GL(S/S_n)\right)$. Докажем, что для любого $g \in G^{(n)}$
$$\min g \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$$
2. Таким образом, можно изучать $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ как $\mathbb{Z}_p$-модуль $\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$. Докажем, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p} = \mathrm{rank}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} = f(n)$ для некоторой f.
3. Доказав, что $G^{(n)}$ — нижний центральный ряд G получим противоречие с формулой Э. Витта (см. [6]):

Formula (Э. Витт, [6])

Пусть F — свободная про-p группа порожденная m образующими, тогда n-ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как $\mathbb{Z}_p$-модуль)
$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)m^{n/d}$$
где μ — функция Мебиуса.

Подход Бена-Эзры—Зельманова

Theorem (Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов, 2020)

Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2.

Авторы изменяют универсальное представление Зубкова для случая $p = 2$: аналогичный гомоморфизм π в общие матрицы над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (вместо $\mathbb{Z}_2$).
Все так же верна следующая лемма об универсальности:

Theorem

Пусть F — свободная про-2 группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2, то и универсальное представление π инъективно.

Редукция к псевдо-общим матрицам

Авторы вводят новые матрицы $\tilde{X}, \tilde{Y}$, такие что $\det \tilde{X} = \det \tilde{Y} = 0$, называемые псевдо-общими (pseudo generic matrices), аналогичная идея встречается и в PI-теории.
Несложно показать, что $[G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ и из этого следует, что достаточно доказать следующую теорему:

Theorem

Определим гомоморфизм $\tilde{\pi}$ из F в $\tilde{G}$: $x \mapsto 1 + \tilde{X}, y \mapsto 1 + \tilde{Y}$, тогда ограничение $\tilde{\pi} : [F, F] \to [\tilde{G}, \tilde{G}]$ не инъективно.

Кольцо псевдо-общих матриц

Авторы изучают кольца

$$\begin{aligned} S &= \langle \operatorname{trace}(\tilde{X}), \quad \operatorname{trace}(\tilde{Y}), \quad [\tilde{X}, \quad \tilde{Y}]^2 \rangle \quad \subseteq \tilde{S} \\ T &= \langle \operatorname{trace}(\tilde{X}), \quad \operatorname{trace}(\tilde{Y}), \quad \operatorname{trace}(\tilde{X}\tilde{Y}) \rangle \quad \subseteq \tilde{S} \\ R &= \langle \tilde{X}, \quad \tilde{Y}, \quad T \rangle \end{aligned}$$

И T-модуль J порожденный

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{X}, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{Y}, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]^2, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{X}\tilde{Y}$$

Доказав множество структурных теорем, получается описать вторую производную подгруппу $\tilde{G}$

Lemma

Замыкание модуля J содержит вторую производную подгруппу $\tilde{G}$:

$$\tilde{G}'' \subseteq \hat{J}$$

Кольцо псевдо-общих матриц

Кроме того, доказывается структурная теорема для $\hat{J}$:

Proposition

Каждый элемент $\hat{J}$ единственным образом представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$$

здесь $u_{n,i}, v_{n,i}, w_{n,i}$ специального вида.

Пусть $g = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$. Тогда

$$n(g) = \min\left\{n \mid \exists i : u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i} \neq 0\right\}$$
$$\overline{n}(g) = \min\left\{n \mid \exists i : u_{n,i} \neq 0\right\}$$
$$\overline{i}(g) = \min\left\{i \mid \exists i : u_{\overline{n}(g),i} \neq 0\right\}$$

Основная лемма

Следующая лемма позволяет провести тонкие индуктивные топологические рассуждения и завершить доказательство теоремы (однако сами рассуждения в целом похожи на те, что были у А.Н. Зубкова)

Lemma

Для каждого нетривиального элемента $g \in \tilde{G}^{(3)}$ и целого неотрицательного числа k существует $\rho \in \mathbb{N}$, такое что если

$$\begin{cases} \overline{n}(g_x) \geq \rho \\ \overline{i}(g_x) \geq \rho + 8k \end{cases}$$

существует $h \in \tilde{G}^{(3)} \cap \tilde{G}_k$ такой, что

$$\overline{n}((gh)_x) \geq \overline{n}(g_x)$$

Причем равенство достигается только при $\overline{i}((gh)_x) > \overline{i}(g_x)$

Основная лемма

Remark

Доказательство основной леммы весьма нетривиально, однако идейное ядро заключается в применении леммы Артина-Риса подобно тому, как она применялась в PI-теории в работах [2], [9] (а также это применение было описано в курсовой работе докладчика прошлого года)

$\mathrm{char}(\Delta) = 4$

Conjecture

Let F be a free non-abelian pro-2 group, Δ is a pro-2 ring. F cannot be continuously embedded in $GL_2^1(\Delta)$, when $\mathrm{char}\Delta = 4$.

We intend to prove it using the similar approaches, and believe that one can prove it even for the case $\mathrm{char}\Delta = 2^l$.
Furthermore, maybe the case $\mathrm{char}\Delta = 0$ can be investigated if the above statement will be proved.

PI-теория

Пусть k — поле характеристики ноль, а $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — свободная, счётно порождённая ассоциативная алгебра над полем k. Пусть T — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) F.

Definition

Эндоморфизм τ алгебры F, определяемый правилом $x_i \mapsto g_i$, где $g_i \in F$, называется подстановкой типа $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i, \dots)$.

Definition

T-пространство в F — это векторное подпространство F, замкнутое относительно подстановок.

Definition

T-идеал в F — это идеал F, который одновременно является T-пространством.

Методы Гришина

Ограничимся подстановками вида $x_i \mapsto p(x_i)$ и в этом смысле будем использовать понятие T-пространства.
Следующая теорема (а вернее, метод ее доказательства) очень полезна при изучении гипотезы Гельфанда:

Theorem

Пусть M — подмножество кольца многочленов от n переменных над полем характеристики 0. Тогда существует конечное подмножество $M_0 \subseteq M$, такое что M содержится в T-пространстве порожденном M_0.

Remark

Данная теорема является важным шагом в альтернативном доказательстве проблемы Шпехта. Она доказывает базу индукции, а переход (как раз с помощью леммы Артина-Риса) описан в курсовой работе докладчика прошлого года.

Элементарные соображения

1. Можно выделить из многочлена его однородные компоненты, подействовав на многочлен подстановками $x_i \mapsto \lambda x_i$
2. Разрешим применять только такую последовательность операций, которая из однородного многочлена получает однородный
3. Можем считать, что изначальное множество замкнуто относительно однородных подстановок

Ключевая подстановка

Следующая подстановка является ключевой:

$$P(x_1, \dots, x_n) \mapsto P_{(t,1)}\,(x_1 + t(x_1)x_1, \dots, x_n + t(x_n)x_n)$$

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} t(x_i)(\alpha_i \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$$

Remark

Заметим, что это соответствует действию диагонального векторного поля $\sum t(x_i) \cdot x_i \cdot \partial_i$. Это будет полезно для гипотезы Гельфанда.

$$P \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i(x_1, \dots, x_n)$$

Индукция

По индукции по количеству переменных можно доказать следующую теорему:

Theorem

Пусть M — множество многочленов от n переменных над нетеровым кольцом R, содержащем подкольцо изоморфное $\mathbb{Q}$. Тогда M конечно базируемо относительно линейных комбинаций и ключевых подстановок.

Переход индукции во многом основан на идеи рассмотрения *ширины*:

$$\mathrm{width}(x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}) = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Gelfand conjecture

Пусть $\mathcal{W}_n$ — алгебра Ли формальных векторных полей, и $\mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}}$ — алгебра Ли полиномиальных векторных полей. Хорошо известно, что

$$\mathcal{W}_n \cong \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*, \quad \mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

Обозначим подалгебры конечного индекса:

$$\mathcal{L}_d(n) = \prod_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*, \quad \mathcal{L}_d^{\mathrm{pol}}(n) = \bigoplus_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

Пусть V_λ — произвольное неприводимое представление $\mathfrak{gl}_n$, ему соответствует $\mathcal{L}_0(n)$-модуль V_λ и тривиальное действие на подалгебре $\mathcal{L}_1(n) \subset \mathcal{L}_0(n)$. Обозначим индуцированный и коиндуцированный $\mathcal{W}_n$- и $\mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}}$- модули:

$$T_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathcal{L}_0(n)}^{\mathcal{W}_n} V_\lambda = U(\mathcal{W}_n^{pol}) \otimes_{U(L_0(n))} V_\lambda \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V^* \otimes V_\lambda$$

Библиография

I. Sanov, *The property of one free group representation*, *Doklady Akademii Nauk USSR*, vol. 57, no. 7, pp. 657–659, 1947.

A. Kanel-Belov, *Local finite basability and local representability of varieties of associative rings*, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 432, no. 6, pp. 727–731, 2010.

A. Zubkov, *Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices*, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, pp. 742–747, 1987.

R. Pink, *Compact subgroups of linear algebraic groups*, *Journal of Algebra*, vol. 206, pp. 438–504, 1998.

Y. Barnea and M. Larsen, *A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field*, *Journal of Algebra*, vol. 214, pp. 338–341, 1999.

J. Dixon, A. Mann, M. du Sautoy, and D. Segal, *Analytic pro-p-groups*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1991.

D. Ben-Ezra and E. Zelmanov, *On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups*, *arXiv:1910.05805v2*, 2020.

E. Zelmanov, *Infinite algebras and pro-p groups*, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, Progr. Math., vol. 248, pp. 403–413, 2005.

E. Zelmanov, *Groups with identities*, *Note. Mat.*, vol. 36, pp. 101–113, 2016.

I.M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry*, *Proceedings of ICM*, vol. T.1, p. 106, 1970.

B. Feigin, A. Kanel-Belov, and A. Khoroshkin, *On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields*, *arXiv:2211.08510v1*, 2022.

Библиография

L. Centrone, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin, and I. Vorobiov, *Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture*, https://www.researchgate.net/publication/355916110_Gelfand_conjecture_and_the_method_of_proof_of_Specht_problem, 2022.

A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, *Algebra and Logics*, vol. 26, no. 5, pp. 597–641, 1987.

C. Procesi, *The geometry of polynomial identities*, *Izv. Math.*, vol. 80, no. 5, pp. 910–953, 2016.

A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.

V. Shchigolev, *Finite-basis property of T-spaces over fields of characteristic zero*, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, vol. 65, no. 5, pp. 1041–1071, 2001.

A. Lubotzky, *Combinatorial group theory for PRO-p groups*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 25, pp. 311–325, 1982.

E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, and Y. Karasik, *Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 220, pp. 2771–2808, 2016.

A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.

A. Grishin and V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, *Math. Sci., New York*, vol. 134, no. 1, pp. 1799–1878, 2004.

I. Benediktovich and A. Zalesskii, *T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensions*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences*, vol. 3, pp. 5–10, 1980.

Библиография

A. Vais and E. Zelmanov, *Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras*, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.*, vol. 33, no. 6, pp. 42–51, 1989. Note: Translation: Soviet Math. (Iz. VUZ) 33(6) (1989), 38–47.

L. Centrone, A. Estrada, and A. Ioppolo, *On PI-algebras with additional structures: rationality of Hilbert series and Specht's problem*, *J. Algebra*, vol. 592, pp. 300–356, 2022.

A. Kanel-Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 3, pp. 13–24, 2000. Note: Translation: Sb. Math. 131(3-4) (2000), 329–340.

A. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 101–118, 1999.

V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 307–312, 1999.

E. Aljadeff and A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, *Adv. Math.*, vol. 225, no. 5, pp. 2391–2428, 2010.

I. Sviridova, *Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group*, *Comm. Algebra*, vol. 39, no. 9, pp. 3462–3490, 2011.

D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Springer Science & Business Media, 2012.