

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

**Воробьев Иван Евгеньевич**

## **Проблема Шпехта и гипотеза Гельфанда**

Выпускная квалификационная работа студента 4 курса  
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:  
Доктор физико-математических  
наук, профессор  
Канель-Белов Алексей Яковлевич

Научный соруководитель:  
Кандидат физико-математических  
наук,  
Хорошкин Антон Сергеевич

Москва 2024

## Аннотация

Пусть  $F$  свободная некоммутативная про- $p$  группа, и пусть  $\Delta$  коммутативное нетерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом  $I$ , такое что  $\Delta/I$  конечное поле характеристики  $p$ . Определим группу

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left( GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

А.Н. Зубков доказал, что  $F$  не может быть непрерывно вложена в  $GL_2^1(\Delta)$  для  $p \neq 2$ .

Д. Бен-Эзра и Е. Зельманов, показали, что и для  $p = 2$ ,  $\text{char}(\Delta) = 2$  имеет место такой же результат.

Цель данной статьи обобщить подход для  $p = 2$  и  $\text{char}(\Delta) = 4$ .

Кроме того, Зельманов показал в [11], что гипотеза о нелинейности про- $p$  групп тесно связана с PI-теорией.

Во второй части данной статьи мы изучаем связь между PI-теорией и гипотезой Гельфанда о конечномерности гомологий алгебр Ли векторных полей.

Таким образом, можно видеть, что работа в основном посвящена изучению комбинаторики подстановок.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	О нелинейности свободных про- $p$ -групп . . . . .	3
1.2	Гипотеза Гельфанда . . . . .	4
<b>2</b>	<b>О нелинейности свободных про-<math>p</math> групп</b>	<b>5</b>
2.1	Подход Зубкова . . . . .	5
2.1.1	Универсальное представление . . . . .	5
2.1.2	Неточность универсального представления . . . . .	7

## 1 Введение

Мы рассмотрим применения теории полиномиальных тождеств (PI-теории для краткости) в двух, казалось бы, несвязанных с ней областях:

- В 2005, Е. Зельманов представил набросок доказательства нелинейности некоторых свободных про- $p$  групп. Доказательство во многом опирается на стандартные подходы PI-теории (см. [11]).

- Дополнительно мы рассмотрим неожиданную связь между гипотезой Гельфанда и PI-теорией, а именно с методами Гришина ([7]).

Приведем краткую историческую справку и формулировку основных проблем.

## 1.1 О нелинейности свободных про- $p$ -групп

Проблема линейности топологических групп изучалась много лет. Одной из естественных топологий, наряду с  $\mathbb{R}^n$  и дискретной, является про- $p$  топология.

Сформулируем центральную гипотезу данной теории, а далее приведем все необходимые определения:

**Гипотеза 1.1.1.** *Некоммутативная свободная про- $p$  группа не может быть вложена в  $GL_d(\Delta)$  ни для какого про- $p$  кольца  $\Delta$ .*

**Определение 1.1.1.** *Обратный (проективный) предел конечных  $p$ -групп называется про- $p$  группой.*

Топология индуцируется с топологии тихоновского произведения.

**Определение 1.1.2.** *Коммутативное нетерово полное локальное кольцо  $\Delta$  с максимальным идеалом  $I$  называется про- $p$  кольцом, если  $\Delta/I$  конечное поле характеристики  $p$ .*

Таким образом:

$$\Delta \cong \varprojlim \Delta/I^n$$

Рассмотрим конгруенц-подгруппу:

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left( GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

Можно видеть, что это про- $p$  группа.

Основной вопрос состоит в том, может ли свободная про- $p$  группа быть непрерывно вложена в  $GL_d^1(\Delta)$ .

Свободную про- $p$  группу можно определить классическим способом через универсальное свойство или конструктивно:

**Определение 1.1.3.** *Свободная про- $p$  группа  $F_p(X)$  является пополнением дискретной свободной группы  $F(X)$  относительно топологии всех нормальных подгрупп индекса степени  $p$ .*

Существует множество частичных результатов:

- В 1987, А.Н. Зубков ([12]) доказал гипотезу для  $d = 2, p \neq 2$ .
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([9]), Й. Барнеа, М. Ларсен ([1]) подтвердили гипотезу для  $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$
- В 1991, Д. Диксон, А. Манн, М.П.Ф. Ду Сатой, Д. Сигал ([4]) доказали гипотезу для всех размеров матриц для целых  $p$ -адических чисел  $\Delta = \mathbb{Z}_p, GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker \left( GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p) \right)$
- В 2005, Е. Зельманов ([11], [10]) анонсировал доказательство гипотезы для  $p \gg d$ , однако до сих пор существует только набросок доказательства.
- В 2020, Д. Бен-Эзра, Е. Зельманов ([2]) обобщили результат Зубкова для  $d = 2, p = 2$  и  $\text{char}(\Delta) = 2$ .

Мы сконцентрируемся на случае  $2 \times 2$  матриц, то есть на результатах Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.

Сейчас опишем общий план доказательства, он отчасти реализован для произвольных размеров матриц в [11], [10]:

Для начала сузим множество рассматриваемых колец. Можно построить, так называемое, универсальное представление в общие матрицы. Оказывается, что классическими алгебраическими рассуждениями можно показать, что если какое-то представление точно, то и это универсальное представление точно.

Таким образом, остается исследовать это универсальное представление. Это делается путем изучения алгебры Ли общих матриц, которая множество раз возникала в PI-теории. В завершение строится связь между этой алгеброй Ли и образом нашего представления — подобно связи между группой Ли и алгеброй Ли.

## 1.2 Гипотеза Гельфанда

В 2022 была обнаружена замечательная связь между PI-теорией (точнее методами Гришина) и гипотезой Гельфанда сформулированной на ISM'70 (см [6]).

**Гипотеза 1.2.1** (Гельфанд, 1970). *Гомологии подалгебры Ли конечной коразмерности алгебры Ли алгебраических векторных полей на аффинном алгебраическом многообразии конечномерны.*

Эта интересная связь была найдена в результате совместной работы А.С. Хорошкина, А.Я. Канель-Белова с некоторым участием автора. Можно найти набросок доказательства Хорошкина в [5], [3].

Дополнительно, мы заметим, что именно результат из последней курсовой работы автора (частный случай методов Гришина [7]) помогает в доказательстве гипотезы Гельфанда.

## 2 О нелинейности свободных про- $p$ групп

Для начала необходимо привести полные доказательства Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.

### 2.1 Подход Зубкова

**Теорема 2.1.1** (Зубков, 1989). *Некоммутативная свободная про- $p$  группа не может быть непрерывно вложена в  $GL_2^1(\Delta)$  для  $p \neq 2$ .*

#### 2.1.1 Универсальное представление

Определим алгебру общих матриц над  $p$ -адическими числами.

Мы будем работать с матрицами  $2 \times 2$ , однако все результаты и конструкции этого параграфа дословно переносятся на матрицы произвольного размера.

Рассмотрим формальные степенные ряды от свободных коммутирующих переменных  $x_{i,j}, y_{i,j}$  для  $i, j \in \{1, 2\}$ :

$$S = \mathbb{Z}_p \langle x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2} \rangle$$

Введем стандартную градуировку  $\deg$ : любой элемент  $S$  записывается в виде  $\sum f_i$  где  $\deg(f_i) = i$ .

Рассмотрим идеалы вида

$$S_k = \left\{ \sum_k^{\infty} f_i \right\}$$

**Предложение 2.1.1.** *Следующие идеалы*

$$B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$$

*являются идеалами конечного индекса*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p$  — конечное кольцо.

$$\ker(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p p^n = (0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

Ясно, что множество целых  $p$ -адических чисел отличающихся на элементы такого вида конечно и  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p p^n \cong \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$   $\square$

Снабдим  $S$  топологией с базой окрестностей нуля состоящей из идеалов  $B_{k,n}$ .  $S$  является про- $p$  кольцом:

$$S/B_{1,1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Наконец, рассмотрим матричное кольцо  $M_2(S)$ . Наделив его топологией с базой окрестностей нуля конгруэнц-идеалов

$$\ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/B_{k,n}))$$

получим, что  $M_2(S)$  — про- $p$  кольцо.

**Предложение 2.1.2.** *Множество*

$$1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

*является про- $p$  группой.*

*Доказательство.* Заметим, что  $\ker(S \rightarrow S/S_1)$  состоит из рядов без свободного члена. Получается, что  $1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$  является группой, так как ряд обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим.

Также можно заметить, что эта группа полна относительно определенной выше топологии, то есть является про- $p$  группой.  $\square$

Рассмотрим общие матрицы  $X, Y \in \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Пусть  $F$  — свободная про- $p$  группа порожденная  $x, y$ .

Наконец определим универсальное представление:

$$\pi : \begin{cases} x \mapsto 1 + X \\ y \mapsto 1 + Y \end{cases}$$

Продолжим его на дискретную подгруппу, порожденную  $x, y$ :

$$\pi : \langle x, y \rangle \rightarrow \langle 1 + X, 1 + Y \rangle \subseteq 1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

А затем можно непрерывно доопределить  $\pi$  на всей  $F$ , построив замыкание  $\langle 1 + X, 1 + Y \rangle$  в топологии  $1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$ :

$$\pi : F \rightarrow G \subseteq 1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

Итак, следующая теорема позволяет нам изучать только универсальное представление, не задумываясь о других про- $p$  кольцах.

**Теорема 2.1.2** (Зубков, 1987). Пусть  $F$  — свободная про-р группа порожденная  $x, y$ . Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм  $\varphi : F \rightarrow GL_2^1(\Delta)$ , то и универсальное представление  $\pi$  инъективно.

*Доказательство.* Напомним

$$GL_2^1(\Delta) = \ker (GL(\Delta \rightarrow \Delta/I))$$

Рассмотрим образы  $x, y$ :

$$\varphi(x) = 1 + A, \quad \varphi(y) = 1 + B$$

Заметим, что

$$A, B \in \ker (M_2(\Delta) \rightarrow M_2(\delta/I))$$

так как  $1 + A, 1 + B \in \ker (GL(\Delta \rightarrow \Delta/I))$ . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ясно, что  $\lim a_{i,j}^n = \lim b_{i,j}^n = 0$ . Тогда можно построить гомоморфизм  $\zeta : x_{i,j} \mapsto a_{i,j}, y_{i,j} \mapsto b_{i,j}$ , он индуцирует эпиморфизм  $\hat{\zeta} : G \rightarrow \text{Im } \varphi$ . Наконец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \pi & & \searrow \varphi \\ G & \xrightarrow{\hat{\zeta}} & GL_2^1(\Delta) \end{array}$$

Следовательно:

$$\ker \pi \subseteq \ker \varphi$$

□

### 2.1.2 Неточность универсального представления

Введем обозначения:

- $\mathbf{S}$  — кольцо степенных рядов от общих матриц  $X, Y$  над  $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$  — алгебра Ли порожденная общими матрицами  $X, Y$  над  $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$  — алгебра Ли порожденная общими матрицами  $X, Y$  над  $\mathbb{Z}_p$

- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$  — векторное пространство над  $\mathbb{Q}_p$  однородных элементов степени  $n$  в алгебре  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ .
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$  —  $\mathbb{Z}_p$ -модуль однородных элементов степени  $n$  в алгебре  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ .
- Для  $g \in G$ :  $\min g$  — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать  $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \dots$ )
- Будем записывать коммутатор веса  $n$  следующим образом  $[l_1, \dots, l_n] = [[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}], l_n]$

Приведем сначала план доказательства, чтобы была понятна мотивация каждой леммы:

1. Определим  $G \supseteq G^{(n)}$ , вложенную последовательность нормальных подгрупп попадающую в любую окрестность единицы, такую что для любого  $g \in G^{(n)}$

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

2. Таким образом, можно изучать  $G^{(n)}/G^{(n+1)}$  как  $\mathbb{Z}_p$ -модуль  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ . Докажем, что  $\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = f(n)$  для некоторой  $f$ .
3. Доказав, что  $G^{(n)}$  — нижний центральный ряд  $G$  получим противоречие с формулой Витта (см. [8]):

**Предложение 2.1.3** (Витт, [8]). *Пусть  $F$  — свободная про- $p$  группа порожденная  $m$  образующими, тогда  $n$ -ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как  $\mathbb{Z}_p$ -модуль)*

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d}$$

где  $\mu$  — функция Мебиуса.

Итак, докажем следующее техническое утверждение:

**Предложение 2.1.4.** *При  $p \neq 2$ :*

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

**Замечание 2.1.1.** *Данное предложение не верно для  $p = 2$ , что влечет существенные сложности, возникающие для  $p = 2$ .*



*Доказательство.* Пусть

$$\begin{aligned} a &= 4x_{1,2}x_{2,1} + (x_{1,1} - x_{2,2})^2 \\ b &= 2(y_{1,2}x_{2,1} + x_{1,2}y_{2,1}) + (x_{1,1} - x_{2,2})(y_{1,1} - y_{2,2}) \\ c &= 4y_{1,2}y_{2,1} + (y_{1,1} - y_{2,2})^2 \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} [x, y, x, x] &= a[x, y] \\ [x, y, y, x] &= b[x, y] \\ [x, y, y, y] &= c[x, y] \\ [x, y, x, y] &= [x, y, y, x] \end{aligned}$$

Получаем, что любой  $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$  имеет вид

$$l = \begin{cases} \sum_{i_a+i_b+i_c=(n-2)/2} \lambda_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y], & \text{если } n \text{ четно} \\ \sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} \alpha_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, x] + \beta_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, y], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda_{i_a, i_b, i_c}, \alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c} \in \mathbb{Q}_p$

Разберем случай нечетного  $n$ . Рассмотрим какое-то  $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S}$  с нецелыми  $p$ -адическими  $\alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c}$ .

Далее рассуждение аналогично классическому доказательству теоремы Гильберта о базисе. Введем лексикографический порядок на мономах порожденный отношением

$$x_{1,2} > x_{1,1} > y_{1,2} > y_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > y_{2,1} > y_{2,2}$$

Старшие члены у  $a, b, c$ :  $4x_{1,2}x_{2,1}, 2x_{1,2}y_{2,1}, 4y_{1,2}y_{2,1}$  соответственно. Тогда старший член элемента, стоящего в левом верхнем углу  $l$  равен старшему члену выражения

$$\sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} 2^{2i_a+2i_c+i_b} (\alpha_{i_a, i_b, i_c} x_{1,1} y_{1,2}^{i_c} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} + \beta_{i_a, i_b, i_c} y_{1,2}^{i_c} y_{1,1} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1})$$

Старшие члены различны и  $2^k$  обратим в кольце  $\mathbb{Z}_p$  (при  $p \neq 2$ !).

Следовательно, так как  $\alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c} \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ , а значит старший член левого верхнего угла  $l$  не лежит в  $\mathbb{Z}_p$ . Получаем противоречие с тем, что  $l \in \mathbf{S}$ .

Случай четного  $n$  разбирается аналогично.

**Замечание 2.1.2.** Попутно мы доказали, что суммы в формуле (1) на самом деле прямые.

□

Сразу же получаем следствие

**Следствие 2.1.1.**

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{8}, & \text{при четном } n \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

Итак, пусть

$$G^{(n)} = G \cap \ker (GL(S) \rightarrow GL(S/S_n))$$

Следующая лемма является ключевой.

**Лемма 2.1.1.** Пусть  $g \in G^{(n)}$ , тогда

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

*Доказательство.* В силу предложения 2.1.4 достаточно доказать, что  $\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ .

□

Пусть  $G = G_1, \dots, G_n, \dots$  — нижний центральный ряд.

Следующее предложение завершает доказательство теоремы 2.1.1

**Предложение 2.1.5.** Нижний центральный ряд совпадает с пересечениями группы  $G$  с конгруэнц-подгруппами по идеалу  $S_n$ , то есть

$$G_n = G^{(n)}$$

*Доказательство.* Ясно, что  $G_n \subseteq G^{(n)}$ , так как коммутаторы веса  $n$  конечно лежат в  $\ker (GL(S) \rightarrow GL(S/S_n))$  по определению  $S_n$ . С другой стороны, пусть  $g \in G^{(n)}$ :

$$g = 1 + v_n(X, Y) + \text{старшие члены}$$

где  $v_n(X, Y)$  — линейная комбинация коммутаторов веса  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .

□

## Список литературы

- [1] Y. Barnea и M. Larsen. “A non-abelian free pro- $p$  group is not linear over a local field”. В: *Journal of Algebra* 214 (1999), с. 338—341.

- [2] D. Ben-Ezra и E. Zelmanov. “On Pro-2 Identities of  $2 \times 2$  Linear Groups”. B: *arXiv:1910.05805v2* (2020).
- [3] L. Centrone и др. “Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture”. B: *researchgate net* (2022).
- [4] J. Dixon и др. “Analytic pro-p-groups”. B: *London Mathematical Society Lecture Note Series* (1991).
- [5] B. Feigin, A. Kanel-Belov и A. Khoroshkin. “On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields”. B: *arXiv:2211.08510v1* (2022).
- [6] I.M. Gelfand. “The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry”. B: *Proceedings of ICM T.1* (1970), c. 95—111.
- [7] A. Grishin. “On finitely based systems of generalized polynomials”. B: *Math. USSR-Izv.* 37.2 (1991), c. 243—272.
- [8] A. Lubotzky. “Combinatorial group theory for PRO-p groups”. B: *Pure and Applied Algebra* 25, (1982), c. 311—325.
- [9] R. Pink. “Compact subgroups of linear algebraic groups”. B: *Journal of Algebra* 206 (1998), c. 438—504.
- [10] E. Zelmanov. “Groups with identities”. B: *Note. Mat.* 36 (2016), c. 101—113.
- [11] E. Zelmanov. “Infinite algebras and pro-p groups”. B: *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* 248 (2005), c. 403—413.
- [12] A. Zubkov. “Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices”. B: *Siberian Mathematical Journal* 28 (1987), c. 742—747.