Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики

Воробьев Иван Евгеньевич

Проблема Шпехта и гипотеза Гельфанда

Выпускная квалификационная работа — бакалаврская работа
по направлению подготовки 01.03.01 — Математика,
образовательная программа «Математика»

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
профессор
Горчинский Сергей Олегович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Канель-Белов Алексей Яковлевич

Консультант:
Кандидат физико-математических наук,
доцент
Хорошкин Антон Сергеевич

Москва 2024

Аннотация

Пусть F свободная некоммутативная про-p группа, и пусть Δ коммутативное нетерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом I, такое что Δ/I конечное поле характеристики p.
Определим про-p группу

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \to \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

- Е.И. Зельманов ([27], [26]) показал, что F не может быть непрерывно вложена в $GL_d^1(\Delta)$ для $p \gg d$.
- А.Н. Зубков [28] доказал, что F не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.
- Д. Бен-Эзра и Е.И. Зельманов [4] доказали, что и для $d = 2, p = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 2$ имеет место такой же результат.

Цель данной статьи — сделать обзор подходов для 2×2 матриц, и показать, что они обобщаются на случай $p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 4$. Кроме того, Е.И. Зельманов показал в [27], что гипотеза о нелинейности про-p групп тесно связана с PI-теорией.

Во второй части работы мы изучаем связь между PI-теорией (приведены методы А.В. Гришина на элементарном языке) и гипотезой И.М. Гельфанда [11] о конечномерности гомологий алгебр Ли векторных полей.

Таким образом, можно видеть, что работа в основном посвящена изучению комбинаторики подстановок.

Содержание

1 Введение

Мы рассмотрим применения теории полиномиальных тождеств (PI-теории для краткости) в двух, казалось бы, несвязанных с ней областях:

- В 2005, Е.И. Зельманов представил набросок доказательства нелинейности некоторых свободных про-p групп. Доказательство во многом опирается на стандартные подходы PI-теории (см. [27]).

- Дополнительно мы рассмотрим неожиданную связь между гипотезой И.М. Гельфанда и PI-теорией, а именно методами А.В. Гришина ([13]).

Приведем краткую историческую справку и формулировку основных проблем. Отметим, что параграфы 2, 3, 4 и параграфы 5, 6 независимы.

1.1 О нелинейности свободных про-p групп

Проблема линейности топологических групп изучалась много лет. Одной из естественных топологий, наряду с $\mathbb{R}^n$ и дискретной, является про-p топология.

Сформулируем центральную гипотезу данной теории, а далее приведем все необходимые определения:

Гипотеза 1.1. *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть вложена в $GL_d^1(\Delta)$ ни для какого про-p кольца Δ.*

Определение 1.2. *Обратный (проективный) предел конечных p-групп называется про-p группой.*

Топология индуцируется с топологии тихоновского произведения.

Определение 1.3. *Коммутативное нетерово I-полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про-p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p.*

Таким образом:

$$\Delta \cong \varprojlim \Delta/I^n$$

Рассмотрим конгруенц-подгруппу:

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \to \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

Можно заметить, что это про-p группа.

Основной вопрос состоит в том, может ли свободная про-p группа быть непрерывна вложена в $GL_d^1(\Delta)$. Мотивируя данную постановку, отметим, что А.Н. Зубков заметил ([28]), что, доказывая нелинейность про-p групп, мы можем ограничиться рассмотрением только про-p колец и строить вложение в конгруенц-подгруппу.
Кроме того, Е.И. Зельманов на одном из пленарных докладов сообщал, что проблема нелинейности про-p групп связана с программой Р. Ленглендса.

Свободную про-p группу можно определить классическим способом через универсальное свойство или конструктивно:

Определение 1.4. *Свободная про-p группа $F_p(X)$ является пополнением дискретной свободной группы $F(X)$ относительно топологии с базой окрестностей единицы всех нормальных подгрупп индекса степени p.*

Существует множество частичных результатов:

- В 1987 А.Н. Зубков ([28]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1999 используя глубокие результаты Р. Пинка ([20]), Й. Барнеа, М. Ларсен ([3]) подтвердили гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$
- В 1991 Д. Диксон, А. Манн, М.П.Ф. Ду Сатой, Д. Сигал ([8]) доказали гипотезу для всех размеров матриц над кольцом целых p-адических чисел $\Delta = \mathbb{Z}_p$, $GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker \left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p) \right)$
- В 2005 Е.И. Зельманов ([27], [26]) представил доказательство гипотезы для $p \gg d$.
- В 2020 Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов ([4]) обобщили результат Зубкова для $d = 2, p = 2$ и $\operatorname{char}(\Delta) = 2$.

Мы сконцентрируемся на случае 2×2 матриц, то есть на результатах А.Н. Зубкова и Бена-Эзры—Зельманова.

Сейчас опишем общий план доказательства, он частично реализован для произвольных размеров матриц в [27], [26].

Для начала сузим множество рассматриваемых колец. Можно построить, так называемое, универсальное представление в общие матрицы. Оказывается, что классическими алгебраическими рассуждениями можно показать, что если какое-то представление точно, то и это универсальное представление точно.

Таким образом, остается исследовать это универсальное представление. Это делается путем изучения алгебры Ли общих матриц, которая множество раз возникала в PI-теории. В завершение строится связь между этой алгеброй Ли и образом нашего представления — подобно связи между группой Ли и алгеброй Ли.

1.2 PI-теория и гипотеза Гельфанда

В 1980-х годах решение проблемы Шпехта А.Р. Кемером стало значительным прорывом в теории полиномиальных тождеств ([18], см. также упрощенную версию доказательства А.Р. Кемера в [2], [21]):

Теорема (А.Р. Кемер, 1987). *Любая ассоциативная алгебра над полем характеристики ноль имеет конечный базис тождеств.*

Существует хорошо известная переформулировка теоремы А.Р. Кемера:

Теорема. *Любой T-идеал алгебры $k\langle X\rangle$, где X — счетный алфавит, а k — поле характеристики ноль, конечно базируем (является конечно порожденным, как T-идеал).*

T-идеал — это идеал в $k\langle X\rangle$, который замкнут относительно любого эндоморфизма $k\langle X\rangle$. T-пространство — это векторное подпространство в $k\langle X\rangle$, которое замкнуто относительно любого эндоморфизма $k\langle X\rangle$.

Следующий естественный вопрос: можно ли заменить T-идеал на T-пространство в теореме Кемера?

А.В. Гришин заметил, что доказательство А.Р. Кемера для систем обобщённых многочленов определённого типа, использует исключительно линейные комбинации и подстановки, а умножение является избыточным (см. [13], [14], а также обзор [15]).

Методы А.В. Гришина хорошо подходят для полупростых алгебр. А.Я. Канель-Белов заметил, что лемма Артина-Риса (классическая лемма в коммутативной алгебре) и теорема Ю.П. Размыслова (см. [15], кроме того эти переходы содержатся в курсовой работе автора прошлого года) могут дополнить рассуждения А.В. Гришина. Он осуществил переход к алгебре меньшей сложности, индуктивно повторяя методы Гришина. Однако этот подход применим только для локальной проблемы Шпехта (когда X — конечный алфавит).

В 2001 году В.В. Щиголев объединил методы А.Я. Канеля-Белова и А.В. Гришина, дополнительно заметив, что подход, приведенный у А.Р. Кемера, можно применить к локализации проблемы Шпехта для T-пространств. И, наконец, он доказал (см. [23]):

Теорема (В.В. Щиголев, 2001). *Любое T-пространство алгебры $k\langle X\rangle$, где X — счетный алфавит, а k — поле характеристики ноль, конечно базируемо.*

Существует множество неассоциативных постановок этой проблемы: для алгебр Ли (см. [5]), для Йордановых алгебр (см. [25]), для супералгебр (см. [6]). Также существуют постановки над полем положительной характеристики (см. контрпримеры для T-идеалов в работах [16], [12], [22] А.Я. Канеля-Белова, А.В. Гришина и В.В. Щиголева соответственно). И для алгебр градуированных конечной группой (см. работу [1] и работу [24] для случая коммутативной конечной группы).

В 2022 была обнаружена замечательная связь между PI-теорией (точнее с методами А.В. Гришина) и гипотезой И.М. Гельфанда сформулированной на ICM'70 (см [11]).

Гипотеза 1.5 (И.М. Гельфанд, 1970). *Гомологии подалгебры Ли конечной коразмерности алгебры Ли алгебраических векторных полей на афинном алгебраическом многообразии конечномерны.*

Эта интересная связь была найдена в результате совместной работы А.С. Хорошкина, А.Я. Канель-Белова с некоторым участием автора. Можно найти набросок доказательства А.С. Хорошкина в [9], [7].

Дополнительно, мы заметим, что именно результат, которого касалась курсовая работа автора после второго курса (частный случай методов В.А. Гришина [13], описанных элементарными методами) помогает в изучении гипотезы Гельфанда.

2 Подход Зубкова, $p \neq 2$

Теорема 2.1 (А.Н. Зубков, 1989). *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.*

2.1 Универсальное представление

Определим алгебру общих матриц над p-адическими числами.

Мы будем работать с матрицами 2×2, однако все результаты и конструкции этого параграфа дословно переносятся на матрицы произвольного размера.

Рассмотрим формальные степенные ряды от свободных коммутирующих переменных $x_{i,j}, y_{i,j}$ для $i, j \in \{1, 2\}$:

$$S = \mathbb{Z}_p[[x_{1,1}, y_{1,1}, \ldots, x_{2,2}, y_{2,2}]]$$

Введем стандартную градуировку deg: любой элемент S записывается в виде $\sum f_i$ где $\deg(f_i) = i$.

Рассмотрим идеалы вида

$$S_k = \{\sum_k^\infty f_i\}$$

Предложение 2.2. *Следующие идеалы*

$$B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$$

являются идеалами конечного индекса

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ — конечное кольцо.

$$\ker(\mathbb{Z}_p \to Z_p/p^n\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p p^n = \{(0, \ldots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)\}$$

Ясно, что множество целых p-адических чисел отличающихся на элементы такого вида конечно и $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p p^n \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ □

Снабдим S топологией с базой окрестностей нуля состоящей из идеалов $B_{k,n}$. Ясно, что S является про-p кольцом:

$$S/B_{1,1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Наконец, рассмотрим матричное кольцо $M_2(S)$. Наделив его топологией с базой окрестностей нуля конгруенц-идеалов

$$\ker(M_2(S) \to M_2(S/B_{k,n}))$$

Получаем, что $M_2(S)$ — про-p кольцо.

Предложение 2.3. *Множество*

$$1 + \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$$

является про-p группой.

Доказательство. Заметим, что $\ker\,(S \to S/S_1)$ состоит из рядов без свободного члена. Получается, что $1 + \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$ является группой, так как ряд обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим.

Также можно заметить, что эта группа полна относительно определенной выше топологии, то есть является про-p группой. $\square$

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y.

Наконец определим универсальное представление:

$$\pi : \begin{cases} x \mapsto 1 + X \\ y \mapsto 1 + Y \end{cases}$$

Продолжим его на дискретную подгруппу, порожденную x, y:

$$\pi : \quad \langle x, y \rangle \to \langle 1 + X, 1 + Y \rangle \subseteq 1 + \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$$

А затем можно непрерывно доопределить π на всей F, построив замыкание $\langle 1 + X, 1 + Y \rangle$ в топологии $1 + \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$:

$$\pi : \quad F \to G \subseteq 1 + \ker\,(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$$

Итак, следующая теорема позволяет нам изучать только универсальное представление, не задумываясь о других про-p кольцах.

Теорема 2.4 (А.Н. Зубков, 1987)**.** *Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$, то и универсальное представление π инъективно.*

Доказательство. Напомним

$$GL_2^1(\Delta) = \ker\left(GL(\Delta) \to GL(\Delta/I)\right)$$

Рассмотрим образы x, y:

$$\varphi(x) = 1 + A, \quad \varphi(y) = 1 + B$$

Заметим, что

$$A, B \in \ker\left(M_2(\Delta) \to M_2(\Delta/I)\right)$$

так как $1 + A, 1 + B \in \ker\left(GL(\Delta) \to GL(\Delta/I)\right)$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\lim a_{i,j}^n = \lim b_{i,j}^n = 0$. Тогда можно построить гомоморфизм $\zeta : x_{i,j} \mapsto a_{i,j}, y_{i,j} \mapsto b_{i,j}$, он индуцирует эпиморфизм $\hat{\zeta} : G \to \operatorname{Im}\varphi$. Наконец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \arrow[rr, "\hat{\zeta}"] & & GL_2^1(\Delta) \end{tikzcd}$$

Следовательно:

$$\ker\pi \subseteq \ker\varphi$$

□

2.2 Неточность универсального представления

Введем обозначения:

- $\mathbf{S}$ — кольцо степенных рядов от общих матриц X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$ однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ — $\mathbb{Z}_p$-модуль однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$.
- Для $g \in 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$: $\min g$ — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \ldots$)

- Будем записывать коммутатор веса n следующим образом $[l_1, \dots, l_n] = [[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}], l_n]$

Замечание 2.5. *Полезно заметить, что*

$$\min{(1+X)(1+Y)} = X + Y$$
$$\min{(1+X)(1+Y)(1+X)^{-1}(1+Y)^{-1}} = [X, Y]$$

Приведем сначала план доказательства, чтобы была понятна мотивация каждой леммы:

1. Определим $G \supseteq G^{(n)}$, вложенную последовательность нормальных подгрупп попадающую в любую окрестность единицы, такую что для любого $g \in G^{(n)}$

$$\min g \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$$

2. Таким образом, можно изучать $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ как $\mathbb{Z}_p$-модуль $\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$. Докажем, что $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p} = f(n)$ для некоторой f.

3. Доказав, что $G^{(n)}$ — нижний центральный ряд G получим противоречие с формулой Э. Витта (см. [19]):

   Предложение 2.6 (Э. Витт, [19])**.** *Пусть F — свободная про-p группа порожденная m образующими, тогда n-ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как $\mathbb{Z}_p$-модуль)*

   $$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d}$$

   где μ — функция Мебиуса.

Итак, докажем следующее техническое утверждение:

Предложение 2.7. *При $p \neq 2$:*

$$\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$$

Замечание 2.8. *Данное предложение не верно для $p = 2$, что влечет существенные сложности, возникающие для $p = 2$.*

Доказательство. Пусть

$$
\begin{aligned}
a &= 4x_{1,2}x_{2,1} + (x_{1,1} - x_{2,2})^2 \\
b &= 2(y_{1,2}x_{2,1} + x_{1,2}y_{2,1}) + (x_{1,1} - x_{2,2})(y_{1,1} - y_{2,2}) \\
c &= 4y_{1,2}y_{2,1} + (y_{1,1} - y_{2,2})^2
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что

$$
\begin{aligned}
[x, y, x, x] &= a[x, y] \\
[x, y, y, x] &= b[x, y] \\
[x, y, y, y] &= c[x, y] \\
[x, y, x, y] &= b[x, y]
\end{aligned}
$$

Получаем, что любой $l \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p}$ (аналогичное верно для $l \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$) имеет вид

$$
l = \begin{cases} \sum\limits_{i_a+i_b+i_c=(n-2)/2} \lambda_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y], & \text{если } n \text{ четно} \\ \sum\limits_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} \alpha_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, x] + \beta_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, y], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \tag{1}
$$

где $\lambda_{i_a,i_b,i_c}, \alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c} \in \mathbb{Q}_p$

Разберем случай нечетного n. Рассмотрим какое-то $l \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S}$ с нецелыми p-адическими $\alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c}$.

Далее рассуждение аналогично классическому доказательству теоремы Гильберта о базисе. Введем лексикографический порядок на мономах порожденный отношением

$$
x_{1,2} > x_{1,1} > y_{1,2} > y_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > y_{2,1} > y_{2,2}
$$

Старшие члены у a, b, c: $4x_{1,2}x_{2,1}, 2x_{1,2}y_{2,1}, 4y_{1,2}y_{2,1}$ соответственно. Тогда старший член элемента, стоящего в левом верхнем углу l равен старшему члену выражения

$$
\sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} 2^{2i_a+2i_c+i_b} \left(\alpha_{i_a,i_b,i_c} x_{1,1} y_{1,2}^{i_c} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} + \beta_{i_a,i_b,i_c} y_{1,2}^{i_c} y_{1,1} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} \right)
$$

Старшие члены различны и 2^k обратим в кольце $\mathbb{Z}_p$ (при $p \neq 2$!).

Следовательно, так как $\alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c} \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, а значит старший член левого верхнего угла l не лежит в $\mathbb{Z}_p$. Получаем противоречие с тем, что $l \in \mathbf{S}$.

Случай четного n разбирается аналогично.

Замечание 2.9. *Попутно мы доказали, что суммы в формуле* (1) *на самом деле прямые.*

$\square$

Сразу же получаем следствие

Следствие 2.10.

$$rank_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p} = \dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{8}, & \textit{при четном } n \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \textit{при нечетном } n \end{cases}$$

Итак, пусть

$$G^{(n)} = G \cap \ker\left(GL(S) \to GL(S/S_n)\right)$$

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2.11. *Пусть $g \in G^{(n)}$, тогда*

$$\min g \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$$

Замечание 2.12. *Д. Бен-Эзра и Е.И. Зельманов приводят альтернативное доказательство этой леммы в последнем параграфе [4]. Мы приведем доказательство А.Н. Зубкова.*

Доказательство. В силу предложения 2.7 достаточно доказать, что $\min g \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p}$.

Введем обозначения. Аналогично предыдущему параграфу $S_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра формальных степенных рядов от переменных $x_{i,j}, y_{i,j}$ над $\mathbb{Q}_p$, а $S_{\mathbb{Q}_p,n}$ — идеалы конечного индекса.

Зафиксируем произвольное $r > n$, чтобы работать в алгебре $M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$ и общие матрицы были нильпотентны. Таким образом, можем ввести стандартное экспоненциальное отображение:

$$\exp : X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$$
$$\exp : M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r}) \to 1 + M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$$

Кроме того, можно ввести и обратное отображение

$$\log : 1 + X \mapsto \sum_{k=1}^{\infty}(-X)^k/k$$
$$\log : 1 + M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r}) \to M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$$

Пусть $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p,n}$ — алгебры Ли нижнего центрального ряда $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.

Далее остается применить формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Применим экспоненту к алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p,n}$, обозначим образ через H. H — подгруппа $M_2(S_{\mathbb{Q}_p,1})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$. Тогда

$$\begin{aligned} H^{(n)} = H \cap (1 + M_2(S_{\mathbb{Q}_p,n})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})) = \\ \exp\big(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}/\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p,n} \cap M_2(S_n)/M_2(S_r)\big) = \exp\big(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(r-1)}\big) \end{aligned}$$

Пусть φ — отображение факторизации $M_2(S_{\mathbb{Q}_p}) \to M_2(S_{\mathbb{Q}_p})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$. Таким образом, для каждого элемента $h \in H^{(n)}$, минимум $\min h$ представляется в виде коммутатора веса n от $A = \varphi(X), B = \varphi(Y)$.

Обозначим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(-X)^k/k = \begin{pmatrix} x_{1,1}+x^*_{1,1} & x_{1,2}+x^*_{1,2} \\ x_{2,1}+x^*_{2,1} & x_{2,2}+x^*_{2,2} \end{pmatrix}$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}(-Y)^k/k = \begin{pmatrix} y_{1,1}+y^*_{1,1} & y_{1,2}+y^*_{1,2} \\ y_{2,1}+y^*_{2,1} & y_{2,2}+y^*_{2,2} \end{pmatrix}$$

где $x_{i,j}, y_{i,j} \in S_{\mathbb{Q},2}$.
Заметим, что

$$\log(1+A) = \varphi\begin{pmatrix} x_{1,1}+x^*_{1,1} & x_{1,2}+x^*_{1,2} \\ x_{2,1}+x^*_{2,1} & x_{2,2}+x^*_{2,2} \end{pmatrix}$$
$$\log(1+B) = \varphi\begin{pmatrix} y_{1,1}+y^*_{1,1} & y_{1,2}+y^*_{1,2} \\ y_{2,1}+y^*_{2,1} & y_{2,2}+y^*_{2,2} \end{pmatrix}$$

Введем $\tau : x_{i,j} \mapsto x_{i,j} + x^*_{i,j}, \tau : y_{i,j} \mapsto y_{i,j} + y^*_{i,j}$, продолжим его до автоморфизма $\overline{\tau}$ алгебры $M_2(S_{\mathbb{Q}_p})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$.
Заметим, что

$$\overline{\tau}(H^{(n)}) = \tau(H) \cap M_2(S_{\mathbb{Q}_p})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$$

так как $\tau(S_{\mathbb{Q}_p,r}) = S_{\mathbb{Q}_p,r}$ С другой стороны для каждого элемента $h \in H^{(n)}$:

$$\min\overline{\tau}(h) = \min h$$

Следовательно, элементы из $\overline{\tau}(H) \cap M_2(S_{\mathbb{Q}_p})/M_2(S_{\mathbb{Q}_p,r})$ тоже представляются в требуемом виде.

Кроме того $\exp(A), \exp(B) \in H$, значит $\overline{\tau}(\exp(A)), \overline{\tau}(\exp(B)) \in \overline{\tau}(H)$. И по построению $\overline{\tau}$:

$$\overline{\tau}(\exp(A)) = 1 + A = 1 + \varphi(X) \in \overline{\tau}(H)$$
$$\overline{\tau}(\exp(B)) = 1 + B = 1 + \varphi(Y) \in \overline{\tau}(H)$$

Наконец получаем, что $\tau(H)$ содержит группу, порожденную $1 + \varphi(X), 1 + \varphi(Y)$, а значит содержит и $G/G^{(r)}$. И так как мы выбирали $r > n$, получаем требуемое.

□

Пусть $G = G_1, \ldots, G_n, \ldots$ — нижний центральный ряд. Аналогично замечанию 2.5 верно следующее общее предложение.

Предложение 2.13.

$$\min G_n \supseteq \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

Следующее предложение завершает доказательство теоремы 2.1

Предложение 2.14. *Нижний центральный ряд совпадает с пересечениями группы G с конгруенц-подгруппами по идеалам S_n, то есть*

$$G_n = G^{(n)}$$

Доказательство. Ясно, что $G_n \subseteq G^{(n)}$ по определению S_n.
С другой стороны, рассмотрим произвольный элемент $g^{(n)} \in G^{(n)}$:

$$g^{(n)} = 1 + v_n(X, Y) + \text{старшие члены}$$

где $v_n(X, Y)$ — линейная комбинация коммутаторов веса n над $\mathbb{Z}_p$.

Согласно двум предложениям выше, существует элемент $g_n \in G_n$ и элемент $g^{(n+1)} \in G^{(n+1)}$, что

$$g^{(n)} = g_n g^{(n+1)}$$

Повторяя это рассуждение для $g^{(n+i)}$ получаем

$$g^{(n)} = g_n g_{n+1} \cdots g_{n+k} \cdot g^{(n+k+1)}$$

где верхние индексы означают принадлежность к $G^{(i)}$, а нижние — к G_n.

Заметим, что по определению топологии в G элемент $g^{(n+k+1)}$ попадает в любую окрестность единицы, и значит $g^{(n)} \in G_n$, то есть

$$G^{(n)} \subseteq G_n$$

□

Остается заметить, что в силу последнего предложения и предложения 2.13

$$G_n/G_{n+1} = G^{(n)}/G^{(n+1)} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p^{\frac{n(n+2)}{8}}, & \text{при четном } n \\ \mathbb{Z}_p^{\frac{(n-1)(n+1)}{4}}, & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

Однако для $n = 6$ это противоречит формуле Витта 2.6 о ранге факторов нижнего центрального ряда свободной про-p группы.

3 Подход Бена-Эзры—Зельманова, $p = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 2$

Д. Бен-Эзра и Е.И. Зельманов доказали следующую теорему

Теорема 3.1 (Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов, 2020)**.** *Некоммутативная свободная про-*2 *группа не может быть непрерывно вложена в* $GL_2^1(\Delta)$ *для про-*2 *кольца* Δ *характеристики* 2.

Авторы начинают доказательство с все той же идеи универсального объекта.

3.1 Универсальное представление

Для построения кольца общих матриц авторы взяли основное кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ вместо 2-адических чисел, как это было у А.Н. Зубкова. Введем аналогичные 2.1 обозначения.

- $S = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[[x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2}]]$
- $S_k = \{\sum\limits_k^\infty f_i\}$, где $f_i \in S$ однородные многочлены степени i.
- Наделим S аналогичной 2.1 топологией и рассмотрим про-2 группу $1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$
- Опять же
$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$
- F — свободная про-p группа порожденная x, y

- Определим универсальное представление $\pi : x \mapsto 1 + X, y \mapsto 1 + Y$ и, как и раньше, продолжим его на всю F, образ будет про-p подгруппой $G \subseteq 1 + \ker(M_2(S) \to M_2(S/S_1))$.

Теорема 3.2. *Пусть F — свободная про-2 группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2, то и универсальное представление π инъективно.*

Доказательство. Доказательство аналогично теореме2.4 основано на универсальности общих матриц.

Пусть $\sigma : F \to GL_2^1(\Delta)$.

$$\sigma(x) \mapsto 1 + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \sigma(y) \mapsto 1 + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix},$$

Тогда, пользуясь тем, что $\mathrm{char}\Delta = 2$ определим, отображение $\zeta : x_{i,j} \mapsto a_{i,j}$, которое все так же индуцирует эпиморфизм $\hat{\zeta} : G \to \operatorname{Im} \varphi$. И диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \arrow[rr, "\hat{\zeta}"] & & GL_2^1(\Delta) \end{tikzcd}$$

Следовательно:

$$\ker \pi \subseteq \ker \varphi$$ □

3.2 Разница со случаем $p > 2$

В основе доказательства А.Н. Зубкова лежит предложение 2.7 о том, если элемент сумма коммутаторов веса n оказалась суммой мономов с целыми p-адическими коэффициентами, то она лежит и в алгебре Ли с целыми p-адическими коэффициентами.

Из этого предложения удается доказать, что нахождение элемента g в нижнем центральном ряде группы соответствует тому, что $\min g$ представляется в виде линейной комбинации коммутаторов соответсвующего веса. Однако для центрального ряда свободной про-p группы существует замечательная формула Витта, с которой получается противоречие.

Д. Бен-Эзра и Е.И. Зельманов в приложении своей работы показали, почему подход А.Н. Зубкова напрямую нельзя обобщить на случай $p = 2$: в некотором смысле про-2 группа общих матриц ближе к тому, чтобы быть свободной:

Предложение 3.3 (Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов, 2020). *В обозначениях предыдущего параграфа для $p = 2$, G_6/G_7 — абелева группа порожденная не менее, чем 9 образующими.*

Заметим, что формула Витта как раз дает значение 9. Для контраста еще раз приведем предложение, доказанное А.Н. Зубковым, оно противоречит (если G была бы свободной) формуле Витта для $n = 6$:

Предложение 3.4. *При $p > 2$ $G_n/G_{n+1} \cong \mathbb{Z}_p^{f(n)}$, где*

$$f(n) = \begin{cases} p^{\frac{n(n+2)}{8}}, & \textit{при четном } n \\ p^{\frac{(n-1)(n+1)}{4}}, & \textit{при нечетном } n \end{cases}$$

В дополнение авторы приводят полное описание $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S}$ для $p = 2$, которым однако не пользуются в основном тексте, а доказывают через него предложение 3.3, которое независимо от основного результата.

3.3 Набросок доказательства

В этом параграфе мы приведем план доказательства Бена-Эзры—Зельманова — полное доказательство содержит более 20-и страниц вычислений, так что мы постараемся привести основные идеи, опуская вычисления.

Определение псевдо-общих матриц.

Авторы вводят новые матрицы $\tilde{X}, \tilde{Y}$, такие что $\det \tilde{X} = \det \tilde{Y} = 0$, называемые псевдо-общими (pseudo generic matrices), аналогичная идея встречается и в PI-теории. Эти матрицы определяются следующим образом.

Введем квадратные расширения

$$\mu^2 = (1 + \mathrm{trace}(X) + \det(X))^{-1} \cdot (\mu \cdot \mathrm{trace}(X) + \det(X))$$
$$\nu^2 = (1 + \mathrm{trace}(Y) + \det(Y))^{-1} \cdot (\nu \cdot \mathrm{trace}(Y) + \det(Y))$$

Легко показать, что эти элементы независимы. Далее авторы работают в про-2 кольце

$$\tilde{S} = S + \mu S + \nu S + \mu\nu S$$

Наконец псевдо-общие матрицы

$$\tilde{X} = (1 + X) \cdot (1 + \mu) - 1$$
$$\tilde{Y} = (1 + Y) \cdot (1 + \nu) - 1$$

Пусть $\tilde{G}$ группа топологически порожденная $1+\tilde{X}, 1+\tilde{Y}$. Несложно показать, что $[G,G]=[\tilde{G},\tilde{G}]$ и из этого следует, что достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 3.5. *Определим гомоморфизм $\tilde{\pi}$ из F в $\tilde{G}$: $x \mapsto 1+\tilde{X}, y \mapsto 1+\tilde{Y}$, тогда ограничение $\tilde{\pi} : [F,F] \to [\tilde{G},\tilde{G}]$ не инъективно.*

Мы пропустим часть с выводом некоторых достаточно тривиальных свойств матриц 2×2, следующих из теоремы Гамильтона-Кэли. Отметим, что квадрат коммутатора $\tilde{X}, \tilde{Y}$ лежит в центре алгебры матриц, является скалярной матрицей. Поэтому иногда будет воспринимать $[\tilde{X},\tilde{Y}]^2$ как элемент $\tilde{S}$. И наоборот, если пишем, что элемент $\tilde{S}$ лежит в $M_2(\tilde{S})$, то имеем в виду элементы вида $\tilde{S}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Кольцо псевдо-общих матриц.

Введем обозначения для следующих дискретных колец

$$\begin{aligned} S = &\quad \langle \mathrm{trace}(\tilde{X}), \quad \mathrm{trace}(\tilde{Y}), \quad [\tilde{X}, \quad \tilde{Y}]^2\rangle \quad \subseteq \tilde{S} \\ T = &\quad \langle \mathrm{trace}(\tilde{X}), \quad \mathrm{trace}(\tilde{Y}), \quad \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y})\rangle \quad \subseteq \tilde{S} \\ R = &\quad \langle \tilde{X}, \quad \tilde{Y}, \quad T\rangle \end{aligned}$$

Кольцо R называется кольцом псевдо-общих матриц.
Далее авторы исследуют некоторые свойства этих колец. Приведем их списком без доказательств, отметив, что используемые техники вполне элементарны и что комбинаторика, связанная со следами изучалась в PI-теории.

Предложение 3.6. *Алгебра T — свободная коммутативная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-алгебра порожденная* $\mathrm{trace}(\tilde{X}), \mathrm{trace}(\tilde{Y}), \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y})$.

Предложение 3.7. *Имеют место следующие утверждения о структуре алгебры S:*

1. *Алгебра S — свободная коммутативная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-алгебра порожденная* $\mathrm{trace}(\tilde{X}), \mathrm{trace}(\tilde{Y}), \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y})$
2. $S \supseteq T$
3. T *— свободный S-модуль порожденный* $1, \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y})$.

Предложение 3.8. *Кольцо R — свободный T-модуль порожденный* $1, \tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{x}\tilde{y}$

Вернувшись к общим матрицам, рассмотрим алгебру

$$\langle 1, \mathrm{trace}(X), \mathrm{trace}(Y), \mathrm{trace}(XY)\rangle$$

и заметим, что она снабжена градуировкой однородных компонент. Построим гомоморфизм из нее в R, определенный $X \mapsto \tilde{X}, Y \mapsto \tilde{Y}$, который индуцирует градуировку на R:

Предложение 3.9. *Можно ввести градуировку на R:*

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^{(n)}$$

Исследуя кольцо общих матриц полезным оказывается рассмотреть следующий T-модуль порожденный

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{Y}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}\tilde{Y}$$

Обозначим его через J. И пусть $\hat{J}$ — замыкание J в топологии градуировки R.

Предложение 3.10. *Модуль J является*

1. *двусторонним идеалом кольца R.*

2. *свободным T-модулем порожденным*

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{Y}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}\tilde{Y}$$

Определив

$$\mathring{S} = \langle \mathrm{trace}(\tilde{Y}), [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2\rangle$$
$$\mathring{T} = \mathring{S} + \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y})\mathring{S}$$

авторы получают следующее описание $\hat{J}$:

Предложение 3.11. *Каждый элемент $\hat{J}$ единственным образом представляется в виде*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$$

где

$$u_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot (\mathring{T} \cdot [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X} + \mathring{T} \cdot [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{Y})$$
$$v_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot \mathring{T} \cdot [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2$$
$$w_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot \mathring{T} \cdot [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot \tilde{X} \cdot \tilde{Y}$$

Производная подгруппа $\tilde{G}$.

Пусть $\tilde{G}', \tilde{G}''$ первая и вторая производные подгруппы соответственно. Следующая лемма мотивирует все предыдущие предложения:
Лемма 3.12. *Модуль J содержит вторую производную подгруппу $\tilde{G}$:*

$$\tilde{G}'' \subseteq \hat{J}$$

Введем отображения

$$n, \overline{n}, \overline{i} : \tilde{G}'' :\to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Пусть $g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$. Тогда

$$\begin{aligned} n(g) &= \min\{n \mid \exists i : u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i} \neq 0\} \\ \overline{n}(g) &= \min\{n \mid \exists i : u_{n,i} \neq 0\} \\ \overline{i}(g) &= \min\left\{i \mid \exists i : u_{\overline{n}(g),i} \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Рассмотрим подгруппу в $\tilde{G}^{(3)} \triangleleft \tilde{G}$ состоящую из элементов $1 + \sum a_i$, где $a_i \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^3 J$, и $\tilde{G}_n$ — нижний центральный ряд группы $\tilde{G}$. И обозначим

$$g_x = [(1+\tilde{X})^4, g] = [1 + (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^3 \tilde{X}, g]$$

Следующая лемма является ключевой.
Лемма 3.13. *Для каждого нетривиального элемента $g \in \tilde{G}^{(3)}$ и целого неотрицательного числа k существует $\rho \in \mathbb{N}$, такое что если*

$$\begin{cases} \overline{n}(g_x) \geq \rho \\ \overline{i}(g_x) \geq \rho + 8k \end{cases}$$

существует $h \in \tilde{G}^{(3)} \cap \tilde{G}_k$ такой, что

$$\overline{n}((gh)_x) \geq \overline{n}(g_x)$$

Причем равенство достигается только при $\overline{i}((gh)_x) > \overline{i}(g_x)$

Существование такого h позволяет завершить доказательство основной теоремы с помощью индуктивных топологических рассуждений схожих с теми, что были у А.Н. Зубкова.

Доказательство самой леммы 3.13 весьма нетривиально. Однако это доказательство в основном основывается на применении леммы Артина-Риса, похожим на ее применение в PI-теории (например, в статьях [17], [15])

4 Случай $p = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 4$

В данном параграфе мы приводим план исследования следующих проблем.

Гипотеза 4.1. *Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 4.*

Гипотеза 4.2. *Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2^n.*

Гипотеза 4.3. *Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ ни для какого для про-2 кольца Δ.*

Так же, как в предыдущих параграфах, мы можем изучать каждую гипотезу, ограничившись соответствующим ей универсальным представлением:

Предложение 4.4. *Если существует непрерывное вложение некоммутативной свободной про-2 группы в $GL_2^1(\Delta)$ для какого-то про-2 кольца Δ характеристики 4, то и универсальное представление в про-2 группу, порожденную (как раньше) общими матрицами над кольцом $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ инъективно.*

Предложение 4.5. *Если существует непрерывное вложение некоммутативной свободной про-2 группы в $GL_2^1(\Delta)$ для какого-то про-2 кольца Δ характеристики 2^n, то и универсальное представление в про-2 группу, порожденную общими матрицами над кольцом $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ инъективно.*

Предложение 4.6. *Если существует непрерывное вложение некоммутативной свободной про-2 группы в $GL_2^1(\Delta)$ для какого-то про-2 кольца Δ, то и универсальное представление в про-2 группу, порожденную общими матрицами над кольцом $\mathbb{Z}_2$ инъективно.*

Доказательства этих предложений дословно переносятся из параграфов 2.1, 3.1.
Есть основания полагать, что обобщив вычисления Бена-Эзры—Зельманова на случай характеристики 4, гипотезу 4.2 можно будет доказать аналогичным обобщением.

Сконцентрируемся сейчас на гомоморфизме из свободной некоммутативной про-2 группы с двумя (топологически) образующими в замыкание (в уже известной нам топологии) группы

$$\langle 1 + X, 1 + Y \rangle$$

где X, Y — общие матрицы над $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Вероятно, подход Бена-Эзры—Зельманова изучения алгебры Ли общих матриц над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ можно обобщить до алгебры Ли общих матриц над $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ следующим образом (авторы пишут [4], что гипотеза 4.2 вполне может быть исследована).

Мы дополним настоящую работу, начав с рассмотрения аналогичной конструкции псевдо-общих матриц, мы повторим рассуждения о структуре модулей и центральных рядов над кольцом $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Нужно лишь обойти тонкость возникающую из-за структуры самого кольца: отдельно мы будем рассматривать элементы, делящиеся на 2.

Таким образом, результаты Бена-Эзры—Зельманова о структуре модулей R, S, T, J останутся аналогичными, но слагаемых в структурных теоремах окажется вдвое больше.

5 Методы Гришина

Пусть k — поле характеристики ноль, а $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ — свободная, счётно порождённая ассоциативная алгебра над полем k. Пусть T — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) F. И алфавит
$X = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$.

Теперь приведем несколько классических определений.

Определение 5.1. *Эндоморфизм τ алгебры F, определяемый правилом $x_i \mapsto g_i$, где $g_i \in F$, называется подстановкой типа $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i, \dots)$.*

Определение 5.2. *T-пространство в F — это векторное подпространство F, замкнутое относительно подстановок.*

Определение 5.3. *T-идеал в F — это идеал F, который одновременно является T-пространством.*

Следующая теорема (а вернее, метод ее доказательства) очень полезна при изучении гипотезы Гельфанда:

Теорема 5.4. *Пусть M — подмножество кольца многочленов от n переменных над полем характеристики 0. Тогда существует конечное подмножество $_0 \subseteq M$, такое что M содержится в T-пространстве порожденном M_0.*

В следующих параграфах приведено элементарное доказательство этой теоремы, отражающее суть методов Гришина.

5.1 Основные леммы

Будем говорить, что множество N_0 является *базой* N, если каждый многочлен из N можно получить применяя к элементам N конечное количество подстановок и линейных комбинаций. Будем писать *операции* имея в виду линейные комбинации и подстановки. Свойство существования конечной базы у множества называется конечной базируемостью множества.

Для начала докажем три простых леммы.

Лемма 5.5. *Достаточно доказать теорему 5.4 для случая, когда M замкнуто относительно линейных комбинаций и подстановок, то есть является T-пространством.*

Доказательство. Рассмотрим $\overline{M}$ — множество, получаемое из M применением конечного количества последовательных операций.
Ясно, что $\overline{M}$ замкнуто относительно них. Действительно, если взять любую линейную комбинацию многочленов из $\overline{M}$, то она получается из M последовательным применением конечного числа операций и, следовательно, лежит в $\overline{M}$. То же самое верно и про подстановку.
Осталось доказать, что если $\overline{M}$ конечно базируемо, то и M — тоже. Пусть $\overline{M_0}$ — конечная база $\overline{M}$. Тогда пусть M_0 — это множество многочленов, из которых мы получили $\overline{M_0}$. По построению M_0 конечно и является базой M. □

Следующая лемма также сужает класс множеств для которых мы будем доказывать теорему: можно считать, что M содержит исключительно однородные многочлены.

Лемма 5.6. *Из многочлена F конечным количеством операций можно получить его однородные компоненты.*

Доказательство. Пусть m – степень F.
Сделаем подстановку: $F(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$. Заметим, что при такой подстановке однородная компонента k-ой степени умножается на α^k. Тогда пусть $v_0, \ldots, v_n$ – однородные компоненты F.
Заметим, что все подстановки указанного вида лежат в линейной оболочке $\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$. Запишем $F(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ в базисе $v_0, \ldots, v_n$:

$$(\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n)$$

Так как определитель матрицы Вандермонда отличен от 0, получаем, что если подставить любые $m+1$ различных α, можно выразить любую однородную компоненту v_i. □

Теперь можно считать, что множество M состоит только из однородных многочленов, однако возникает проблема: нам было бы удобно считать и то, что множество замкнуто относительно операций, и то, что оно состоит из однородных многочленов. Однако сейчас эти условия, конечно, несовместимы.
Эта проблема решается следующим образом. Вместо операций будем применять конечную последовательность операций, которая из однородного многочлена получает однородный. Такие последовательности операций будем называть однородной подстановкой.
Причем можно считать, что M замкнуто относительно однородных операций, доказательство этого аналогично уже приведенному.

Когда решается задача про конечную базируемость множества многочленов (например, доказывается существование базиса Грёбнера из теоремы Гильберта о базисе) полезной является лемма про светильники — она помогает следующим образом. Если ввести порядок на старших членах многочленов и доказать, что старшие члены из младших (в некотором смысле), то из этого получим конечную базируемость.
Следующая лемма очевидным образом следует из теоремы Гильберта о базисе, но приведем все-таки независимое доказательство.

Лемма 5.7. *Пусть в $\mathbb{Z}_+^n$ дано некоторое множество светильников – точка с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ освещает все $(y_1, \ldots, y_n), y_i \geq x_i \forall i$. Тогда можно выбрать конечное количество светильников, которые освещают все остальные.*

Доказательство. Докажем индукцией по размерности пространства.
При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.
Пусть лемма верна для $n - 1$, докажем для n.
Спроецируем все светильники на гиперплоскость $x_n = 0$. Выберем конечный набор проекций $m'_1, \ldots, m'_k$, который освещает все остальные проекции (такой есть в силу индукционного предположения). Теперь найдем m_i — светильник с наименьшей координатой по x_n из тех, что спроецировались в m'_i.
Пусть l — наибольшая координата по x_n среди m_i. Заметим, что для все светильники с координатой по x_n, не меньшей l освещены множеством $m_1, \ldots, m_k$. Осталось для каждой гиперплоскости $x_n = c$, где $c = 0, \ldots, l-1$ выбрать конечные наборы светильников, которые освещают все остальные, лежащие в соответствующей гиперплоскости. $\square$

5.2 Ключевая подстановка

Следующая подстановка является ключевой:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \mapsto P_{(t,1)}\left(x_1 + t(x_1)x_1, \ldots, x_n + t(x_n)x_n\right) \tag{2}$$

где индекс $(t, 1)$ обозначает, что мы линеаризуем по t после того, как, сделаем приведенную подстановку.
Докажем, что мы можем отлинеаризовать по t. Будем рассматривать многочлен $P(x_1+t(x_1)x_1, \ldots, x_n+t(x_n)x_n)$ как многочлен от $2n$ переменных – от x_i и $t(x_i)$.
Причем понятно, что переменные $t(x_i)$ можно умножать на константу все сразу – в подстановке 2 можно взять $x_i \mapsto x_i + c \cdot t(x_i)x_i$. Далее все аналогично доказательству леммы 5.6.
Итак, разберемся, что получилось после отлинеаризованной подстановки (2). Для этого рассмотрим, что произойдет с мономом $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$:

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto ((x_1 + t(x_1)x_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n + t(x_n)x_n)^{\alpha_n}))_{(t,1)}$$

Ясно, что после линеаризации по t останутся только те члены, в которых ровно из одной скобки произведения взяли $t(x_i)$. То есть при $t(x_i)$ будет $\alpha_i \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Итак:

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} t(x_i)(\alpha_i \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) \tag{3}$$

Замечание 5.8. *Заметим, что это соответствует действию диагонального векторного поля $\sum t(x_i) \cdot x_i \cdot \partial_i$. Это будет полезно для гипотезы Гельфанда.*

Следовательно, однородный многочлен P степени m перейдет в:

$$\sum_{i=1}^{n} t(x_i)P_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

Причем, если вместо t подставить $\frac{1}{m}$, то из последней формулы (4) получится ровно многочлен P.
Далее, нам потребуются лишь $t(x) = x^k$. Каждому многочлену из множества M мы сопоставили некоторое семейство многочленов:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

где k пробегает все целые неотрицательные числа.
Обозначим сумму (5) как $(P_1, \dots, P_n)$ и назовем ее координатным представлением многочлена.

Определение 5.9. *Семейством многочленов будем называть всякое множество многочленов вида* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k P_i(x_1, \dots, x_n)$.

Мы будем делать однородные подстановки специального вида уже к семействам. Причем будем делать их так, чтобы они инвариантно действовали на каждую координату. Таким образом, мы сможем доказать конечную базируемость по каждой координате, а потом выведем из этого глобальную конечную базируемость. Ключевая идея заключается в том, что для каждой отдельной координаты доказывать конечную базируемость куда проще, чем для бескоординатного представления, так как наличие i-ой координаты разрешает нам умножать многочлены внутри нее на x_i, что существенно упрощает задачу.

Замечание 5.10. *Мы доказываем конечную базируемость множества семейств многочленов вместо множества многочленов.*

Мы докажем конечную базируемость по каждой координате, но для начала докажем, что из этого будет следовать теорема 5.4.

5.3 Глобальная конечная базируемость из конечной базируемости по каждой координате

Мы рассматриваем вместо каждого многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ соответствующее ему семейство:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i(x_1, \dots, x_n)$$

Пусть N — множество координатных представлений многочленов из M. Аналогично лемме 5.5, рассмотрим вместо N, его замыкание $\overline{N}$. То есть будем рассматривать некоторое множество систем многочленов, содержащее в себе координатное представление каждого многочлена из M.

Теперь осталось явно описать конечный базис $\overline{N}$. Сначала рассмотрим конечное количество семейств многочленов, у которых первая координата является конечным базисом первой координаты из $\overline{N}$.

Далее, возьмем $\overline{N}_1 \subset \overline{N}$ состоящее только из семейств с нулевой первой координатой (ясно, что это подмножество тоже замкнуто относительно подстановок и линейных комбинаций). Теперь возьмем те семейства из $\overline{N}_1$, у которых вторая координата является конечной базой вторых координат.

Повторяя эту операцию получим конечную базу всего $\overline{N}$.

5.4 Конечная базируемость по каждой координате

Ключевая подстановка решает задачу в случае двух переменных, однако в общем случае нужны тонкие индукционные рассуждения. Докажем, что внутри каждой координаты можно опять сделать подстановку (2).

$$(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i(x_1, \ldots, x_n) \mapsto$$
$$\mapsto [\sum_{i=1}^{n} (x_i + r(x_i)x_i)^k \cdot p_i(x_1 + r(x_1)x_1, \ldots, x_n + r(x_n)x_n))]_{(r,1)}$$

Здесь индекс $(r, 1)$ означает линеаризацию по r, как и раньше. Рассмотрим первую координату. Она, конечно, полностью получается из члена

$$[(x_1 + r(x_1)x_1)^k \cdot p_1(x_1 + r(x_1)x_1, \ldots, x_n + r(x_n)x_n)]_{(r,1)}$$

Раскрыв первые скобки получаем

$$x_1^k \cdot (k \cdot r(x_1)p_1(x_1, \ldots, x_n) + [p_1(x_1 + r(x_1)x_1, \ldots, x_n + r(x_n)x_n)]_{(r,1)}) \quad (6)$$

Заметим, что первое слагаемое нам совсем не нужно, ведь оно преобразует только степень мономов p_1 по x_1, а мы добиваемся увеличения других степеней. Так что вычтем из семейства, полученного при подстановке (6) изначальное семейство умноженное на $r(x_i)k$ покоординатно. Получим, что по первой координате у нас:

$$[p_1(x_1 + r(x_1)x_1, \ldots, x_n + r(x_n)x_n)]_{(r,1)}$$

Сравним это с подстановкой (2), специализуем $r(x) = x^m$ и сделаем вывод, что это равно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m p_{1i}(x_1, \ldots, x_n) \quad (7)$$

Итак, внутри каждой координаты можно опять делать ключевую подстановку. Назовем ее φ.
Докажем теперь теорему в следующем частном случае.

5.4.1 Доказательство в случае двух переменных.

Итак, пусть у нас есть многочлен

$$x_1^{m_1}p_1 + x_2^{m_1}p_2$$

Мы рассматриваем только случай, когда в p_1 все мономы делятся x_1, ведь иначе первой координаты вообще не существовало бы, то есть она была бы нулевой (что видно из (3)) Мы хотим узнать, что из семейства многочленов $x_1^{m_1}p_1 + x_2^{m_1}p_2$ можно получить по первой координате. Здесь потребуется лемма, которая сведет всю задачу к лемме о светильниках (5.7).

Лемма 5.11. *Если у p_1 старший член в лексикографическом порядке $x_2 \succ x_1$ это $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, причем $\alpha_2 > 0$, то для любого монома, делящегося на данный, мы можем получить многочлен, у которого по первой координате будет старшим этот моном.*

Доказательство. Пусть нам нужно получить моном $x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}$.

Рассмотрим случай, когда $\beta_2 = 0$. Тогда сдвинем $m_1 := m_1 + \beta_1$. Естественно, мы получим многочлен с нужным старшим членом Пусть теперь $\beta_2 > 0$. Сделаем нашу подстановку еще раз, как мы описали в (7). Получится многочлен

$$x_1^{m_1}(x_1^{m_2}p_{11} + x_2^{m_2}p_{12})$$

Причем и в p_{11}, и в p_{22} старший член — это $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$. Тогда возьмем $m_2 = \beta_2$ и, опять же, заменим m_1 на $m_1 + \beta_1$. Получается

$$x_1^{m_1}x_1^{\beta_1}(x_1^{\beta_2}p_{11} + x_2^{\beta_2}p_{12}) = x_1^{m_1}(x_1^{\beta_2}x_1^{\beta_1}p_{11} + x_2^{\beta_2}x_1^{\beta_1}p_{12})$$

Ясно, что старший моном содержится только во втором слагаемом (ведь $\beta_2 > 0$). Причем он имеет вид $x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}$. □

Замечание 5.12. *Полезно заметить, что если все же $\alpha_2 = 0$, то мы по крайней мере можем получить мономы вида $x_1^{\alpha_1+\beta_1}$.*

Итак, осталось свести доказательство к лемме о светильниках (5.7). Рассмотрим множество M и каждому многочлену из него сопоставим точку в $\mathbb{Z}_+^2$ – набор степеней в его старшем члене по первой координате. В этой точке расположим светильник: если ордината не равна 0, то он освещает все точки, которые не меньше его по абсциссе и ординате; если же ордината равна 0, то он освещает все точки, которые совпадают с ним по ординате и не меньше по абсциссе (см замечание 5.12).
Здесь видно, что нам не хватает леммы о светильниках и нужна ее расширенная версия:

Лемма 5.13. *Пусть, как и в лемме 5.7, дано множество светильников, только теперь каждый $(x_1, \ldots, x_n)$ освещает точки $(y_1, \ldots, y_n)$, для которых выполнено два условия: $y_i \geq x_i$ и $y_i = 0$, если $x_i = 0$. Тогда, опять, же существует конечное подмножество светильников, которое освещает все остальные.*

Доказательство. Пусть K_i — множество точек, у которых ровно i координат ненулевые. Внутри K_i можно найти соответствующий ему конечный набор светильников по классической лемме. Остается заметить, что $\mathbb{Z}_+^n = \bigcup_{k=0}^n K_i$. □

Теперь, в силу леммы, можно выбрать конечное подмножество светильников, которые мы сопоставили многочленам, освещающее все остальные.

Осталось доказать, что многочлены, которым соответствуют эти светильники являются конечной базой по первой координате (обозначим множество этих многочленов за M_0) множества M.

Предположим противное. Рассмотрим многочлен с наименьшим старшим членом по первой координате, первая координата которого не получается из M_0.

Однако мы можем получить многочлен с таким же старшим членом по первой координате. Вычитая один из другого, получаем меньший многочлен, у которого первая координата не получается из M_0. Противоречие.

5.4.2 Доказательство в общем случае

Когда мы делаем подстановку φ внутри первой координаты, у нас возникает сумма

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m p_{1i}(x_1, \ldots, x_n)$$

Видно, что первое слагаемое нам совсем не нужно, ведь оно разрешает умножать на x_1, а это мы и так делать можем, в виду того, что работаем с первой координатой. Так что хотелось бы считать x_1 коэффициентом и воспользоваться конечной базируемостью уже для меньшего числа переменных.

Эта идея реализуется следующим образом. Во-первых, разрешим делать только φ подстановки, чтобы не потерять однородность. А во вторых, будем доказывать теорему 5.4 не над полем, а над произвольным нетеровым кольцом, содержащем подкольцо изоморфное $\mathbb{Q}$ (последнее обобщение позволит нам в индукционном переходе считать x_1 коэффициентом, а не переменной).

Теорема 5.14. *Пусть M — множество многочленов от n переменных над нетеровым кольцом R, содержащем подкольцо изоморфное $\mathbb{Q}$. Тогда M конечно базируемо относительно линейных комбинаций и φ-подстановок.*

Ввиду того, что R содержит поле характеристики 0, леммы 5.5 и 5.6 дословно переносятся на этот обобщенный случай (ведь рассуждение с матрицей Вандермонда задействует только частный случай φ-подстановки). Значит, опять же можно доказывать теорему только для однородных многочленов.
Также мы все еще можем разбить многочлен на координаты 5 и доказать только конечную базируемость по каждой.

Итак, будем доказывать теорему 5.14 по индукции по числу переменных.

База индукции.

Пусть $n = 1$.
Заметим, что каждый многочлен с помощью φ-подстановки можно умножить на x, а с помощью линейной комбинации умножать на элемент кольца.
Следовательно из каждого многочлена из M можно получить идеал порожденный им в $R[x]$. Получается, что база индукции эквивалентна теореме Гильберта о базисе.

Переход индукции.

Пусть теорема верна для $n-1$ переменной, докажем для n.
Рассмотрим координатные представления многочленов и, без ограничения общности, будем доказывать конечную базируемость по первой.
Первая координата имеет вид $x_1^m P$. То есть, как и раньше, мы можем умножать многочлены внутри первой координаты на x_1. Следовательно, достаточно доказать утверждение теоремы 5.14 с дополнительной операцией: теперь кроме линейных комбинаций и φ-подстановок также разрешим умножать на x_1.
Как описывалось в начале параграфа, мы хотели бы на время забыть, что φ-подстановка действует на первую координату.
Введем ψ-подстановку:

$$\psi : P(x_1, \ldots, x_n) \mapsto P_{(r,1)}(x_1, x_2 + r(x_2)x_2, \ldots, x_n + r(x_n)x_n)$$

Лемма 5.15. *Множество многочленов от n переменных конечно базируемо относительно ψ-подстановок, умножений на x_1 и линейных комбинаций.*

Доказательство. Заметим, что это множество можно рассматривать, как множество многочленов от $n-1$ переменной $(x_2, \dots, x_n)$ над кольцом $R[x_1]$ (которое является нетеровым). Причем все условия теоремы 2 соблюдаются. По предположению индукции получаем требуемое. $\square$

Итак, осталось применить лемму.
Назовем *шириной* монома его суммарную степень по переменным $x_2, \dots, x_n$. Мы доказываем конечную базируемость множества M однородных многочленов, причем опять же, как и раньше, будем считать, что оно замкнуто относительно φ-подстановок и линейных комбинаций. Тогда пусть N — множество получаемое из M, заменой каждого многочлена на него же, но с удаленными мономами **не** максимальной ширины.

Применив лемму 5.15 получаем, что N конечно базируемо относительно ψ-подстановок. Пусть $f'_1, \dots, f'_k$ конечный базис.
Рассмотрим $f_1, \dots, f_k$ — какие-то многочлены, которые заменились на $f'_1, \dots, f'_k$ при переходе от M к N. Предположим, что это не базис M.

Тогда возьмем многочлен минимальной ширины $p \in M$, который нельзя получить с помощью φ-подстановок и линейных комбинаций (здесь мы пользуемся замкнутостью M). Пусть p' — соответствующий ему однородный по ширине многочлен из N.
Проделаем все те же операции с $\{f_i\}$, что делали с $\{f'_i\}$, чтобы получить p', заменив подстановку вида ψ на соответствующую ей φ-подстановку. Заметим, что сначала мы можем применить операции подстановок, а потом уже один раз сделать линейную комбинацию, ведь φ и ψ -подстановки линейны.

Итак, сделаем все подстановки и заметим, что после линейной комбинации мономы старшей ширины совпадают с p'. Действительно, каждый раз делая φ-подстановку вместо ψ у нас возникают «лишние» члены не максимальной ширины (ведь отличие между ними в том, что одна бьет по x_1 — переменной не увеличивающей ширину, а другая нет). Также члены максимальной ширины не сократятся друг с другом или с какими-то другими, потому что они всегда совпадают с теми, что мы получали из $\{f'_i\}$.
Получается, что раз p не порождается базисом $\{f_i\}$, а какой-то многочлен с такими же мономами старшей ширины мы получить можем, то существует многочлен q меньшей ширины, чем p, который тоже не порождается базисом. Противоречие.

Замечание 5.16. *В теореме 2 существенно, что мы доказываем конечную базируемость относительно однородных подстановок. Иначе возникли бы эффекты, связанные с тем, что мономы старшей ширины,*

получаемые из $f_1', \ldots, f_k'$ могли бы занулиться, что не дало бы свести φ-подстановки к ψ-подстановкам.
Действительно, мы бы знали только то, что из $f_1', \ldots, f_k'$ получаются все старшие по ширине компоненты. Однако они могли бы не совпасть со старшими компонентами после подстановок и линейной комбинации. Ведь последняя могла сократить старшие компоненты, полученные после подстановок (именно в этом месте мы существенно воспользовались однородностью подстановок), и разница между подстановками φ и ψ повлияла бы на итоговые старшие компоненты.

6 Связь методов Гришина с гипотезой Гельфанда

Пусть $\mathcal{W}_n$ — алгебра Ли формальных векторных полей, и $\mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}}$ — алгебра Ли полиномиальных векторных полей. Хорошо известно, что

$$\mathcal{W}_n \cong \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*, \quad \mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}} \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

Обозначим подалгебры конечного индекса:

$$\mathcal{L}_d(n) = \prod_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*, \quad \mathcal{L}_d^{\mathrm{pol}}(n) = \bigoplus_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

Пусть V_λ — произвольное неприводимое представление $\mathfrak{gl}_n$, ему соответствует $\mathcal{L}_0(n)$-модуль V_λ и тривиальное действие на подалгебре $\mathcal{L}_1(n) \subset \mathcal{L}_0(n)$. Обозначим индуцированный и коиндуцированный $\mathcal{W}_n$- и $\mathcal{W}_n^{\mathrm{pol}}$- модули:

$$T_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathcal{L}_0(n)}^{\mathcal{W}_n} V_\lambda = U(\mathcal{W}_n^{pol}) \otimes_{U(L_0(n))} V_\lambda \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V^* \otimes V_\lambda$$

$$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{CoInd}_{\mathcal{L}_0(n)}^{\mathcal{W}_n} V_\lambda = \mathrm{Hom}_{U(L_0(n))}(U(\mathcal{W}_n), V_\lambda) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V_\lambda$$

Методами гомологической алгебры (которые здесь будут опущены, см. одну из классических монографий [10]) можно свести гипотезу Гельфанда 1.5 к более общему утверждению

Гипотеза 6.1. *Модуль $\mathcal{T}_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}_{\lambda_r}$ нетеров как $\mathcal{L}_d(n)$-модуль.*

Оказывается, что для $\lambda_i = 0, d = 1$ данная гипотеза уже весьма нетривиальна. В дополнение в [9] А.С. Хорошкин привел набросок доказательства общего случая во многом похожий на приведенный ниже подход для случая $\mathcal{T}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}_0$.

Наконец, случай $\lambda_i = 0, d = 1$ соответствует $\mathcal{L}_1(n)$-нетеровости $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим инфинитезимальные подстановки вида

$$\sigma_p : x_i \mapsto x + \varepsilon p(x_i)$$

для $\varepsilon \to 0$.
Инфинитезимальность эквивалентна линеаризации по ε, а значит эта подстановка есть не что иное, как ключевая подстановка 2 из доказательства теоремы 5.4. Кроме того эта подстановка соответствует действию диагонального векторного поля

$$\delta_p : p(x_1)\partial_1 + \ldots + p(x_n)\partial_n$$

Однако возникает тонкость: если последовательно применять векторные поля $\delta_p \circ \delta_q$, то получится не то же самое, что $\sigma_p \circ \sigma_q$.

Эта проблема решается следующим образом:

$$\delta_p \circ \delta_q(f) = \sigma_p \circ \sigma_q(f) - \sigma_{q'p}(f)$$

Аналогичные комбинаторные рассуждения можно сделать для $\delta_{p_1} \circ \ldots \circ \delta_{p_k}$.

Таким образом, в данном частном случае нетеровость эквивалентна конечной базируемости относительно подстановок специального типа. В завершение отметим, что методы Гришина приведенные в доказательстве теоремы 5.4 показывают, что для доказательства конечной базируемости достаточно ключевых подстановок 2 и линейных комбинаций.

Список литературы

[1] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov. “Representability and Specht problem for G-graded algebras”. В: *Adv. Math.* 225.5 (2010), с. 2391—2428.

[2] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, Y. Karasik. “Kemer’s theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero”. В: *Pure and Applied Algebra* 220, (2016), с. 2771—2808.

[3] Y. Barnea, M. Larsen. “A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field”. В: *Journal of Algebra* 214 (1999), с. 338—341.

[4] D. Ben-Ezra, E. Zelmanov. "On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups". B: *arXiv:1910.05805v2* (2020).

[5] I. Benediktovich, A. Zalesskii. "T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensions". B: *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences* 3, (1980), c. 5—10.

[6] L. Centrone, A. Estrada, A. Ioppolo. "On PI-algebras with additional structures: rationality of Hilbert series and Specht's problem". B: *J. Algebra* 592 (2022), c. 300—356.

[7] L. Centrone, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin, I. Vorobiov. "Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture". B: (2022). URL: https://www.researchgate.net/publication/355916110_Gelfand_conjecture_and_the_method_of_proof_of_Specht_problem.

[8] J. Dixon, A. Mann, M. du Sautoy, D. Segal. "Analytic pro-p-groups". B: *London Mathematical Society Lecture Note Series* (1991).

[9] B. Feigin, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin. "On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields". B: *arXiv:2211.08510v1* (2022).

[10] D. B. Fuks. *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] I.M. Gelfand. "The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry". B: *Proceedings of ICM* T.1 (1970), c. 106.

[12] A. Grishin. "Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property". B: *Fundam. Prikl. Mat.* 5.1 (1999), c. 101—118.

[13] A. Grishin. "On finitely based systems of generalized polynomials". B: *Math. USSR-Izv.* 37.2 (1991), c. 243—272.

[14] A. Grishin. "On finitely based systems of generalized polynomials". B: *Math. USSR-Izv.* 37,2 (1991), c. 243—272.

[15] A. Grishin, V. Shchigolev. "T-spaces and their applications." B: *Math. Sci., New York* 134,1 (2004), c. 1799—1878.

[16] A. Kanel-Belov. "Counterexamples to the Specht problem". B: *Sb. Math.* 191.3 (2000). Translation: Sb. Math. 131(3-4) (2000), 329–340, c. 13—24.

[17] A. Kanel-Belov. “Local finite basability and local representability of varieties of associative rings”. B: *Doklady Akademii Nauk* 432.6 (2010), c. 727—731.

[18] A. Kemer. “Finite basability of identities of associative algebras”. B: *Algebra and Logics* 26.5 (1987), c. 597—641.

[19] A. Lubotzky. “Combinatorial group theory for PRO-p groups”. B: *Pure and Applied Algebra* 25, (1982), c. 311—325.

[20] R. Pink. “Compact subgroups of linear algebraic groups”. B: *Journal of Algebra* 206 (1998), c. 438—504.

[21] C. Procesi. “The geometry of polynomial identities”. B: *Izv. Math.* 80.5 (2016), c. 910—953.

[22] V. Shchigolev. “Examples of infinitely based T-ideals”. B: *Fundam. Prikl. Mat.* 5.1 (1999), c. 307—312.

[23] V. Shchigolev. “Finite-basis property of T-spaces over fields of characteristic zero”. B: *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* 65,5 (2001), c. 1041—1071.

[24] I. Sviridova. “Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group”. B: *Comm. Algebra* 39.9 (2011), c. 3462—3490.

[25] A. Vais, E. Zelmanov. “Kemer’s theorem for finitely generated Jordan algebras”. B: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.* 33.6 (1989). Translation: Soviet Math. (Iz. VUZ) 33(6) (1989), 38–47, c. 42—51.

[26] E. Zelmanov. “Groups with identities”. B: *Note. Mat.* 36 (2016), c. 101—113.

[27] E. Zelmanov. “Infinite algebras and pro-p groups”. B: *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* 248 (2005), c. 403—413.

[28] A. Zubkov. “Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices”. B: *Siberian Mathematical Journal* 28 (1987), c. 742—747.