Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Воробьев Иван Евгеньевич

Проблема Шпехта и гипотеза Гельфанда

Выпускная квалификационная работа студента 4 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Доктор физико-математических
наук, профессор
Канель-Белов Алексей Яковлевич

Научный соруководитель:
Кандидат физико-математических
наук,
Хорошкин Антон Сергеевич

Москва 2024

Аннотация

Пусть F свободная некоммутативная про-p группа, и пусть Δ коммутативное нетерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом I, такое что Δ/I конечное поле характиристики p Определим группу

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta\to\Delta/I} GL_2(\Delta/I)\right)$$

А.Н. Зубков доказал, что F не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.
Д. Бен-Эзра и Е. Зельманов, показали, что и для $p = 2$, $\mathrm{char}(\Delta) = 2$ имеет место такой же результат.
Цель данной статьи обобщить подход для $p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 4$.
Кроме того, Зельманов показал в [11], что гипотеза о нелинейности про-p групп тесно связана с PI-теорией.

Во второй части данной статьи мы изучаем связь между PI-теорией и гипотизей Гельфанда о конечномерности гомологий алгебр Ли векторных полей.

Таким образом, можно видеть, что работа в основном посвящена изучению комбинаторики подстановок.

Содержание

1 Введение

Мы рассмотрим применения теории полиномиальных тождеств (PI-теории для краткости) в двух, казалось бы, несвязанных с ней областях:

- В 2005, Е. Зельманов представил набросок доказательства нелинейности некоторых свободных про-p групп. Доказательство во многом опирается на стандартные подходы PI-теории (см. [11]).

- Дополнительно мы рассмотрим неожиданную связь между гипотезой Гельфанда и PI-теорией, а именно с методами Гришина ([7]).

Приведем краткую историческую справку и формулировку основных проблем. Отметим, что параграфы 2, 3 и параграфы 4, 5 независимы.

1.1 О нелинейности свободных про-p-групп

Проблема линейности топологических групп изучалась много лет. Одной из естественных топологий, наряду с $\mathbb{R}^n$ и дискретной, является про-p топология.
Сформулируем центральную гипотезу данной теории, а далее приведем все необходимые определения:

Гипотеза 1.1. *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть вложена в $GL_d(\Delta)$ ни для какого про-p кольца Δ.*

Определение 1.1. *Обратный (проективный) предел конечных p-групп называется про-p группой.*

Топология индуцируется с топологии тихоновского произведения.

Определение 1.2. *Коммутативное нетерово полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про-p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p.*

Таким образом:

$$\Delta \cong \varprojlim \Delta/I^n$$

Рассмотрим конгруенц-подгруппу:

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta\to\Delta/I} GL_d(\Delta/I)\right)$$

Можно видеть, что это про-p группа.
Основной вопрос состоит в том, может ли свободная про-p группа быть непрерывна вложена в $GL_d^1(\Delta)$.
Свободную про-p группу можно определить классическим способом через универсальное свойство или конструктивно:

Определение 1.3. *Свободная про-p группа $F_p(X)$ является пополнением дискретной свободной группы $F(X)$ относительно топологии всех нормальных подгрупп индекса степени p.*

Существует множество частичных результатов:

- В 1987, А.Н. Зубков ([12]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([9]), Й. Барнеа, М. Ларсен ([1]) подтвердили гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\,[[t]]$
- В 1991, Д. Диксон, А. Манн, М.П.Ф. Ду Сатой, Д. Сигал ([4]) доказали гипотезу для всех размеров матриц для целых p-адических чисел $\Delta = \mathbb{Z}_p$, $GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker\left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p)\right)$
- В 2005, Е. Зельманов ([11], [10]) анонсировал доказательство гипотезы для $p \gg d$, однако до сих пор существует только набросок доказательства.
- В 2020, Д. Бен-Эзра, Е. Зельманов ([2]) обобщили результат Зубкова для $d = 2, p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 2$.

Мы сконцентрируемся на случае 2×2 матриц, то есть на результатах Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.
Сейчас опишем общий план доказательства, он отчасти реализован для произвольных размеров матриц в [11], [10]:
Для начала сузим множество рассматриваемых колец. Можно построить, так называемое, универсальное представление в общие матрицы. Оказывается, что классическими алгебраическими рассуждениями можно показать, что если какое-то представление точно, то и это универсальное представление точно.
Таким образом, остается исследовать это универсальное представление. Это делается путем изучения алгебры Ли общих матриц, которая множество раз возникала в PI-теории. В завершение строится связь между этой алгеброй Ли и образом нашего представления — подобно связи между группой Ли и алгеброй Ли.

1.2 Гипотеза Гельфанда

В 2022 была обнаружена замечательная связь между PI-теорией (точнее методами Гришина) и гипотезой Гельфанда сформулированной на ICM'70 (см [6]).

Гипотеза 1.2 (Гельфанд, 1970)**.** *Гомологии подалгебры Ли конечной коразмерности алгебры Ли алгебраических векторных полей на афинном алгебраическом многообразии конечномерны.*

Эта интересная связь была найдена в результате совместной работы А.С. Хорошкина, А.Я. Канель-Белова с некоторым участием автора. Можно найти набросок доказательства Хорошкина в [5], [3].

Дополнительно, мы заметим, что именно результат, которого касалась последняя курсовая работа автора (частный случай методов Гришина [7], описанный элементарными методами) помогает в доказательстве гипотезы Гельфанда.

2 Подход Зубкова, $p \neq = 2$

Теорема 2.1 (Зубков, 1989)**.** *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.*

2.1 Универсальное представление

Определим алгебру общих матриц над p-адическими числами.
Мы будем работать с матрицами 2×2, однако все результаты и конструкции этого параграфа дословно переносятся на матрицы произвольного размера.
Рассмотрим формальные степенные ряды от свободных коммутирующих переменных $x_{i,j}, y_{i,j}$ для $i, j \in \{1, 2\}$:

$$S = \mathbb{Z}_p\langle x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2}\rangle$$

Введем стандартную градуировку deg: любой элемент S записывается в виде $\sum f_i$ где $\deg(f_i) = i$.
Рассмотрим идеалы вида

$$S_k = \{\sum_k^\infty f_i\}$$

Предложение 2.1. *Следующие идеалы*

$$B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$$

являются идеалами конечного индекса

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ — конечное кольцо.

$$\ker(\mathbb{Z}_p \to Z_p/p^n\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p p_n = (0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

Ясно, что множество целых p-адических чисел отличающихся на элементы такого вида конечно и $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p p^n \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $\square$

Снабдим S топологией с базой окрестностей нуля состоящей из идеалов $B_{k,n}$. S является про-p кольцом:

$$S/B_{1,1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Наконец, рассмотрим матричное кольцо $M_2(S)$. Наделив его топологией с базой окрестностей нуля конгруенц-идеалов

$$\ker\left(M_2(S) \to M_2(S/B_{k,n})\right)$$

получим, что $M_2(S)$ — про-p кольцо.

Предложение 2.2. *Множество*

$$1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

является про-p группой.

Доказательство. Заметим, что $\ker\left(S \to S/S_1\right)$ состоит из рядов без свободного члена. Получается, что $1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$ является группой, так как ряд обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим.
Также можно заметить, что эта группа полна относительно определенной выше топологии, то есть является про-p группой. □

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y.
Наконец определим универсальное представление:

$$\pi : \begin{cases} x \mapsto 1 + X \\ y \mapsto 1 + Y \end{cases}$$

Продолжим его на дискретную подгруппу, порожденную x, y:

$$\pi : \quad \langle x, y \rangle \to \langle 1 + X, 1 + Y \rangle \subseteq 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

А затем можно непрерывно доопределить π на всей F, построив замыкание $\langle 1 + X, 1 + Y \rangle$ в топологии $1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$\pi : \quad F \to G \subseteq 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

Итак, следующая теорема позволяет нам изучать только универсальное представление, не задумываясь о других про-p кольцах.

Теорема 2.2 (Зубков, 1987)**.** *Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$, то и универсальное представление π инъективно.*

Доказательство. Напомним

$$GL_2^1(\Delta) = \ker\left(GL(\Delta \to \Delta/I)\right)$$

Рассмотрим образы x, y:

$$\varphi(x) = 1 + A, \quad \varphi(y) = 1 + B$$

Заметим, что

$$A, B \in \ker\left(M_2(\Delta) \to M_2(\delta/I)\right)$$

так как $1 + A, 1 + B \in \ker\left(GL(\Delta \to \Delta/I)\right)$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\lim a_{i,j}^n = \lim b_{i,j}^n = 0$. Тогда можно построить гомоморфизм $\zeta : x_{i,j} \mapsto a_{i,j}, y_{i,j} \mapsto b_{i,j}$, он индуцирует эпиморфизм $\hat{\zeta} : G \to \operatorname{Im}\varphi$. Наконец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \arrow[rr, "\hat{\zeta}"] & & GL_2^1(\Delta) \end{tikzcd}$$

Следовательно:

$$\ker\pi \subseteq \ker\varphi$$

□

2.2 Неточность универсального представления

Введем обозначения:

- **S** — кольцо степенных рядов от общих матриц X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$ однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.

- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ — $\mathbb{Z}_p$-модуль однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$.
- Для $g \in G$: $\min g$ — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \ldots$)
- Будем записывать коммутатор веса n следующим образом $[l_1, \ldots, l_n] = [[l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}], l_n]$

Приведем сначала план доказательства, чтобы была понятна мотивация каждой леммы:

1. Определим $G \supseteq G^{(n)}$, вложенную последовательность нормальных подгрупп попадающую в любую окрестность единицы, такую что для любого $g \in G^{(n)}$
$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$
2. Таким образом, можно изучать $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ как $\mathbb{Z}_p$-модуль $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$. Докажем, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = f(n)$ для некоторой f.
3. Доказав, что $G^{(n)}$ — нижний центральный ряд G получим противоречие с формулой Э. Витта (см. [8]):

   Предложение 2.3 (Витт, [8])**.** *Пусть F — свободная про-p группа порожденная m образующими, тогда n-ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как $\mathbb{Z}_p$-модуль)*
$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d}$$
   где μ — функция Мебиуса.

Итак, докажем следующее техническое утверждение:

Предложение 2.4. *При $p \neq 2$:*
$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

Замечание 2.1. *Данное предложение не верно для $p = 2$, что влечет существенные сложности, возникающие для $p = 2$.*

Доказательство. Пусть

$$
\begin{aligned}
a &= 4x_{1,2}x_{2,1} + (x_{1,1} - x_{2,2})^2 \\
b &= 2(y_{1,2}x_{2,1} + x_{1,2}y_{2,1}) + (x_{1,1} - x_{2,2})(y_{1,1} - y_{2,2}) \\
c &= 4y_{1,2}y_{2,1} + (y_{1,1} - y_{2,2})^2
\end{aligned}
$$

Легко проверить, что

$$
\begin{aligned}
[x, y, x, x] &= a[x, y] \\
[x, y, y, x] &= b[x, y] \\
[x, y, y, y] &= c[x, y] \\
[x, y, x, y] &= [x, y, y, x]
\end{aligned}
$$

Получаем, что любой $l \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p}$ имеет вид

$$
l = \begin{cases} \sum\limits_{i_a+i_b+i_c=(n-2)/2} \lambda_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y], & \text{если } n \text{ четно} \\ \sum\limits_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} \alpha_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, x] + \beta_{i_a,i_b,i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, y], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \tag{1}
$$

где $\lambda_{i_a,i_b,i_c}, \alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c} \in \mathbb{Q}_p$
Разберем случай нечетного n. Рассмотрим какое-то $l \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S}$ с нецелыми p-адическими $\alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c}$.
Далее рассуждение аналогично классическому доказательству теоремы Гильберта о базисе. Введем лексикографический порядок на мономах порожденный отношением

$$
x_{1,2} > x_{1,1} > y_{1,2} > y_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > y_{2,1} > y_{2,2}
$$

Старшие члены у a, b, c: $4x_{1,2}x_{2,1}, 2x_{1,2}y_{2,1}, 4y_{1,2}y_{2,1}$ соответственно. Тогда старший член элемента, стоящего в левом верхнем углу l равен старшему члену выражения

$$
\sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} 2^{2i_a+2i_c+i_b} \left(\alpha_{i_a,i_b,i_c} x_{1,1} y_{1,2}^{i_c} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} + \beta_{i_a,i_b,i_c} y_{1,2}^{i_c} y_{1,1} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} \right)
$$

Старшие члены различны и 2^k обратим в кольце $\mathbb{Z}_p$ (при $p \neq 2$!).
Следовательно, так как $\alpha_{i_a,i_b,i_c}, \beta_{i_a,i_b,i_c} \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, а значит старший член левого верхнего угла l не лежит в $\mathbb{Z}_p$. Получаем противоречие с тем, что $l \in \mathbf{S}$.
Случай четного n разбирается аналогично.

Замечание 2.2. *Попутно мы доказали, что суммы в формуле* (1) *на самом деле прямые.*

□

Сразу же получаем следствие
Следствие 2.1.

$$rank_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = \dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{8}, & \textit{при четном } n \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \textit{при нечетном } n \end{cases}$$

Итак, пусть

$$G^{(n)} = G \cap \ker\left(GL(S) \to GL(S/S_n)\right)$$

Следующая лемма является ключевой.
Лемма 2.1. *Пусть* $g \in G^{(n)}$*, тогда*

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

Доказательство. В силу предложения 2.4 достаточно доказать, что $\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$.

□

Пусть $G = G_1, \dots, G_n, \dots$ — нижний центральный ряд.
Следующее предложение завершает доказательство теоремы 2.1
Предложение 2.5. *Нижний центральный ряд совпадает с пересечениями группы* G *с конгруэнц-подгруппами по идеалу* S_n*, то есть*

$$G_n = G^{(n)}$$

Доказательство. Ясно, что $G_n \subseteq G^{(n)}$, так как коммутаторы веса n лежат в $\ker\left(GL(S) \to GL(S/S_n)\right)$ по определению S_n.
С другой стороны, пусть $g \in G^{(n)}$:

$$g = 1 + v_n(X,Y) + \text{старшие члены}$$

где $v_n(X,Y)$ — линейная комбинация коммутаторов веса n над $\mathbb{Z}_p$.

□

3 Подход Бена-Эзры–Зельманова, $p = 2, \Gamma\Delta = 2$

Список литературы

[1] Y. Barnea и M. Larsen. “A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field”. В: *Journal of Algebra* 214 (1999), с. 338—341.

[2] D. Ben-Ezra и E. Zelmanov. “On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups”. В: *arXiv:1910.05805v2* (2020).

[3] L. Centrone и др. “Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture”. В: *researchgate net* (2022).

[4] J. Dixon и др. “Analytic pro-p-groups”. В: *London Mathematical Society Lecture Note Series* (1991).

[5] B. Feigin, A. Kanel-Belov и A. Khoroshkin. “On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields”. В: *arXiv:2211.08510v1* (2022).

[6] I.M. Gelfand. “The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry”. В: *Proceedings of ICM* T.1 (1970), с. 95—111.

[7] A. Grishin. “On finitely based systems of generalized polynomials”. В: *Math. USSR-Izv.* 37.2 (1991), с. 243—272.

[8] A. Lubotzky. “Combinatorial group theory for PRO-p groups”. В: *Pure and Applied Algebra* 25, (1982), с. 311—325.

[9] R. Pink. “Compact subgroups of linear algebraic groups”. В: *Journal of Algebra* 206 (1998), с. 438—504.

[10] E. Zelmanov. “Groups with identities”. В: *Note. Mat.* 36 (2016), с. 101—113.

[11] E. Zelmanov. “Infinite algebras and pro-p groups”. В: *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* 248 (2005), с. 403—413.

[12] A. Zubkov. “Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices”. В: *Siberian Mathematical Journal* 28 (1987), с. 742—747.