

# Проблема Шпехта и Гипотеза Гельфанда

Воробьев Иван Евгеньевич

Научный руководитель, доктор физ.-мат. наук, профессор  
Алексей Яковлевич Канель-Белов

Соруководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент  
Антон Сергеевич Хорошкин

Рецензент, доктор физ.-мат. наук, профессор  
Сергей Олегович Горчинский

20 июня 2024 г.

# Структура работы

Мы рассмотрим два применения PI-теории:

- Нелинейность свободных про- $p$  групп
- Гипотеза Гельфанда

Структура:

- 1 Предварительные сведения
- 2 Историческая справка
- 3 Постановка задачи (о нелинейности свободной про- $p$  группы)
- 4 Обзор подхода А.Н. Зубкова ( $d = 2, p > 2$ )
- 5 Обзор подхода Бена-Эзры—Зельманова ( $p = 2, d = 2, \text{char}(\Delta) = 2$ )
- 6 Случай  $p = 2, d = 2, \text{char}(\Delta) = 4$
- 7 Методы Гришина
- 8 Гипотеза Гельфанда
- 9 Связь гипотезы Гельфанда с методами А.В. Гришина

## Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных групп называется проконечной группой.

## Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных  $p$ -групп называется про- $p$  группой.

## Definition

Коммутативное нетерово  $I$ -полное локальное кольцо  $\Delta$  с максимальным идеалом  $I$  называется про- $p$  кольцом, если  $\Delta/I$  конечное поле характеристики  $p$ .

$$\Delta = \varprojlim \Delta/I^n$$

## Definition

Пусть  $F$  свободная группа порожденная алфавитом  $\mathcal{S}$ . Рассмотрим пополнение  $\tilde{F}_p$  группы  $F$  относительно топологии, определенной всеми нормальными подгруппами индекса  $p^l$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\tilde{F}_p$  называется свободной про- $p$  группой.

## Remark

*Здесь и далее под подобным пополнением мы имеем в виду обратный предел факторгрупп.*

Пусть  $\Delta$  про- $p$  кольцо.

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left( GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

является про- $p$  группой.

## Conjecture

*Некоммутативная свободная про- $p$  группа  $\tilde{F}_p$  не может быть непрерывно вложена в  $GL_d^1(\Delta)$  для любого про- $p$  кольца  $\Delta$ .*

Существует множество частичных результатов для различных  $\tilde{F}_p, \Delta, p$ , которые дают надежду на положительный результат и в общем случае:

- В 1987, А.Н. Зубков ([3]) доказал гипотезу для  $d = 2, p \neq 2$ .
- В 1991, J.D. Dixon, A. Mann, M.P.F. du Sautoy, D. Segal ([6]) доказали гипотезу для  $\Delta = \mathbb{Z}_p$ ,  
$$GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker \left( GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p) \right)$$
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([4]), Y. Barnea, M. Larsen ([5]) доказали гипотезу для  $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$ .
- В 2005, E. Zelmanov ([8]) анонсировал доказательство гипотезы для  $p \gg d$ .
- В 2020, D. Ben-Ezra, E. Zelmanov доказали ([7]) гипотезу для  $d = 2, p = 2$  и  $\text{char}(\Delta) = 2$ .

## Theorem (А.Н. Зубков, 1989)

*Некоммутативная свободная про- $p$  группа не может быть непрерывно вложена в  $GL_2^1(\Delta)$  для  $p \neq 2$ .*

Обозначения:

- $S = \mathbb{Z}_p[[x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2}]]$
- $S_k = \{\sum_k^{\infty} f_i\}$
- $B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$

Матричное кольцо  $M_2(S)$  — про- $p$  кольцо с топологией конгруэнц-идеалов

$$\ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/B_{k,n}))$$

Рассмотрим общие матрицы  $X, Y \in \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$



Зубков рассматривает естественный гомоморфизм в алгебру общих матриц:

Пусть  $x, y \in \tilde{F}_p$  — образующие,

$$\pi : x \mapsto 1 + X, y \mapsto 1 + Y$$

где  $X, Y$  общие матрицы над  $\mathbb{Z}_p$ .

Можно продолжить  $\pi$  на замыкание  $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ , и оно отображится на замыкание  $\langle 1 + x^*, 1 + y^* \rangle$ .

# Универсальное представление

Гомоморфизм  $\pi$  называется универсальным представлением:

Theorem (А.Н. Зубков, 1987)

*Пусть  $F$  — свободная про- $p$  группа порожденная  $x, y$ . Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм  $\varphi : F \rightarrow GL_2^1(\Delta)$ , то и универсальное представление  $\pi$  инъективно.*

Theorem

*Универсальное представление не инъективно для  $p \neq 2$ .*

## Обозначения:

- $\mathbf{S}$  — кольцо степенных рядов от общих матриц  $X, Y$  над  $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$  — алгебра Ли порожденная общими матрицами  $X, Y$  над  $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$  — алгебра Ли порожденная общими матрицами  $X, Y$  над  $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$  — векторное пространство над  $\mathbb{Q}_p$  однородных элементов степени  $n$  в алгебре  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ .
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$  —  $\mathbb{Z}_p$ -модуль однородных элементов степени  $n$  в алгебре  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ .
- Для  $g \in 1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$ :  $\min g$  — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать  $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \dots$ )

## План доказательства

- 1 Определим  $G \supseteq G^{(n)} = G \cap \ker(GL(S) \rightarrow GL(S/S_n))$ . Докажем, что для любого  $g \in G^{(n)}$

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

- 2 Таким образом, можно изучать  $G^{(n)}/G^{(n+1)}$  как  $\mathbb{Z}_p$ -модуль  $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ .  
Докажем, что  $\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = \text{rank}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} = f(n)$  для некоторой  $f$ .
- 3 Доказав, что  $G^{(n)}$  — нижний центральный ряд  $G$  получим противоречие с формулой Э. Витта (см. [6]):

### Formula (Э. Витт, [6])

Пусть  $F$  — свободная про- $p$  группа порожденная  $m$  образующими, тогда  $n$ -ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как  $\mathbb{Z}_p$ -модуль)

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d}$$

где  $\mu$  — функция Мебиуса.

## Theorem (Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов, 2020)

*Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в  $GL_2^1(\Delta)$  для про-2 кольца  $\Delta$  характеристики 2.*

Авторы изменяют универсальное представление Зубкова для случая  $p = 2$ : аналогичный гомоморфизм  $\pi$  в общие матрицы над  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (вместо  $\mathbb{Z}_2$ ).

Все так же верна следующая лемма об универсальности:

## Theorem

*Пусть  $F$  — свободная про-2 группа порожденная  $x, y$ . Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм  $\varphi : F \rightarrow GL_2^1(\Delta)$  для про-2 кольца  $\Delta$  характеристики 2, то и универсальное представление  $\pi$  инъективно.*

# Редукция к псевдо-общим матрицам

Авторы вводят новые матрицы  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ , такие что  $\det \tilde{X} = \det \tilde{Y} = 0$ , называемые псевдо-общими (pseudo generic matrices), аналогичная идея встречается и в PI-теории.

Несложно показать, что  $[G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$  и из этого следует, что достаточно доказать следующую теорему:

## Theorem

*Определим гомоморфизм  $\tilde{\pi}$  из  $F$  в  $\tilde{G}$ :  $x \mapsto 1 + \tilde{X}, y \mapsto 1 + \tilde{Y}$ , тогда ограничение  $\tilde{\pi} : [F, F] \rightarrow [\tilde{G}, \tilde{G}]$  не инъективно.*

# Кольцо псевдо-общих матриц

Авторы изучают кольца

$$S = \langle \text{trace}(\tilde{X}), \text{trace}(\tilde{Y}), [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2 \rangle \subseteq \tilde{S}$$

$$T = \langle \text{trace}(\tilde{X}), \text{trace}(\tilde{Y}), \text{trace}(\tilde{X}\tilde{Y}) \rangle \subseteq \tilde{S}$$

$$R = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, T \rangle$$

И  $T$ -модуль  $J$  порожденный

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]^2, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\tilde{X}\tilde{Y}$$

Доказав множество структурных теорем, получается описать вторую производную подгруппу  $\tilde{G}$

## Lemma

*Замыкание модуля  $J$  содержит вторую производную подгруппу  $\tilde{G}$ :*

$$\tilde{G}'' \subseteq \hat{J}$$

# Кольцо псевдо-общих матриц

Кроме того, доказывается структурная теорема для  $\hat{J}$ :

## Proposition

*Каждый элемент  $\hat{J}$  единственным образом представляется в виде*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$$

*здесь  $u_{n,i}, v_{n,i}, w_{n,i}$  специального вида.*

Пусть  $g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$ . Тогда

$$n(g) = \min \{n \mid \exists i : u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i} \neq 0\}$$

$$\bar{n}(g) = \min \{n \mid \exists i : u_{n,i} \neq 0\}$$

$$\bar{i}(g) = \min \{i \mid \exists n : u_{\bar{n}(g),i} \neq 0\}$$



# Основная лемма

Следующая лемма позволяет провести тонкие индуктивные топологические рассуждения и завершить доказательство теоремы (однако сами рассуждения в целом похожи на те, что были у А.Н. Зубкова)

## Лемма

Для каждого нетривиального элемента  $g \in \tilde{G}^{(3)}$  и целого неотрицательного числа  $k$  существует  $\rho \in \mathbb{N}$ , такое что если

$$\begin{cases} \bar{n}(g_x) \geq \rho \\ \bar{i}(g_x) \geq \rho + 8k \end{cases}$$

существует  $h \in \tilde{G}^{(3)} \cap \tilde{G}_k$  такой, что

$$\bar{n}((gh)_x) \geq \bar{n}(g_x)$$

Причем равенство достигается только при  $\bar{i}((gh)_x) > \bar{i}(g_x)$

## Remark

*Доказательство основной леммы весьма нетривиально, однако идейное ядро заключается в применении леммы Артина-Риса подобно тому, как она применялась в  $PI$ -теории в работах [2], [9] (а также это применение было описано в курсовой работе докладчика прошлого года)*

$$\text{char}(\Delta) = 4$$

## Conjecture

*Let  $F$  be a free non-abelian pro-2 group,  $\Delta$  is a pro-2 ring.  $F$  cannot be continuously embedded in  $GL_2^1(\Delta)$ , when  $\text{char}\Delta = 4$ .*

We intend to prove it using the similar approaches, and believe that one can prove it even for the case  $\text{char}\Delta = 2^l$ .

Furthermore, maybe the case  $\text{char}\Delta = 0$  can be investigated if the above statement will be proved.

Пусть  $k$  — поле характеристики ноль, а  $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$  — свободная, счётно порождённая ассоциативная алгебра над полем  $k$ . Пусть  $T$  — полугруппа эндоморфизмов (подстановок)  $F$ .

## Definition

Эндоморфизм  $\tau$  алгебры  $F$ , определяемый правилом  $x_i \mapsto g_i$ , где  $g_i \in F$ , называется подстановкой типа  $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i, \dots)$ .

## Definition

$T$ -пространство в  $F$  — это векторное подпространство  $F$ , замкнутое относительно подстановок.

## Definition

$T$ -идеал в  $F$  — это идеал  $F$ , который одновременно является  $T$ -пространством.

Ограничимся подстановками вида  $x_i \mapsto p(x_i)$  и в этом смысле будем использовать понятие  $T$ -пространства.

Следующая теорема (а вернее, метод ее доказательства) очень полезна при изучении гипотезы Гельфанда:

## Theorem

*Пусть  $M$  — подмножество кольца многочленов от  $n$  переменных над полем характеристики 0. Тогда существует конечное подмножество  $M_0 \subseteq M$ , такое что  $M$  содержится в  $T$ -пространстве порожденном  $M_0$ .*

## Remark

*Данная теорема является важным шагом в альтернативном доказательстве проблемы Шпехта. Она доказывает базу индукции, а переход (как раз с помощью леммы Артина-Риса) описан в курсовой работе докладчика прошлого года.*

- 1 Можно выделить из многочлена его однородные компоненты, подействовав на многочлен подстановками  $x_i \mapsto \lambda x_i$
- 2 Разрешим применять только такую последовательность операций, которая из однородного многочлена получает однородный
- 3 Можем считать, что изначальное множество замкнуто относительно однородных подстановок

# Ключевая подстановка

Следующая подстановка является ключевой:

$$P(x_1, \dots, x_n) \mapsto P_{(t,1)}(x_1 + t(x_1)x_1, \dots, x_n + t(x_n)x_n)$$

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mapsto \sum_{i=1}^n t(x_i)(\alpha_i \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$$

## Remark

Заметим, что это соответствует действию диагонального векторного поля  $\sum t(x_i) \cdot x_i \cdot \partial_i$ . Это будет полезно для гипотезы Гельфанда.

$$\sum_{i=1}^n t(x_i) P_i(x_1, \dots, x_n)$$

По индукции по количеству переменных можно доказать следующую теорему:

## Theorem

*Пусть  $M$  — множество многочленов от  $n$  переменных над нетеровым кольцом  $R$ , содержащем подкольцо изоморфное  $\mathbb{Q}$ . Тогда  $M$  конечно базировано относительно линейных комбинаций и ключевых подстановок.*

Переход во многом основан на идеи рассмотрения *ширины*:

$$(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}) = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$



# Gelfand conjecture

## Conjecture (Gelfand, 1970, [?])

*The homology of the Lie subalgebra of finite codimension in the Lie algebra of algebraic vector fields on an affine algebraic manifold are finite-dimensional in each homological degree.*

We denote by  $\mathcal{W}_n$  the Lie algebra of formal vector fields on an  $n$ -dimensional plane  $V$ .

$$\mathcal{W}_n \simeq \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

The subalgebras  $\prod_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$  of a finite codimension are denoted by  $L_d(n)$ .

# Gelfand conjecture

Using the classical considerations of homological algebra, one can reduce Gelfand conjecture to the following lemma:

## Lemma

*Any finitely generated  $L_d(n)$ -module is noetherian.*

Then we will observe how to use Grishin's methods to prove this lemma.



I. Sanov, *The property of one free group representation*, *Doklady Akademii Nauk USSR*, vol. 57, no. 7, pp. 657–659, 1947.



A. Kanel-Belov, *Local finite basability and local representability of varieties of associative rings*, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 432, no. 6, pp. 727–731, 2010.



A. Zubkov, *Non-abelian free pro- $p$ -groups cannot be represented by 2-by-2 matrices*, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, pp. 742–747, 1987.



R. Pink, *Compact subgroups of linear algebraic groups*, *Journal of Algebra*, vol. 206, pp. 438–504, 1998.



Y. Barnea and M. Larsen, *A non-abelian free pro- $p$  group is not linear over a local field*, *Journal of Algebra*, vol. 214, pp. 338–341, 1999.



J. Dixon, A. Mann, M. du Sautoy, and D. Segal, *Analytic pro- $p$ -groups*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1991.



D. Ben-Ezra and E. Zelmanov, *On Pro-2 Identities of  $2 \times 2$  Linear Groups*, *arXiv:1910.05805v2*, 2020.



E. Zelmanov, *Infinite algebras and pro- $p$  groups*, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, *Progr. Math.*, vol. 248, pp. 403–413, 2005.



E. Zelmanov, *Groups with identities*, *Note. Mat.*, vol. 36, pp. 101–113, 2016.



I.M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry*, *Proceedings of ICM*, vol. T.1, p. 106, 1970.



B. Feigin, A. Kanel-Belov, and A. Khoroshkin, *On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields*, *arXiv:2211.08510v1*, 2022.



L. Centrone, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin, and I. Vorobiov, *Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture*, [https://www.researchgate.net/publication/355916110\\_Gelfand\\_conjecture\\_and\\_the\\_method\\_of\\_proof\\_of\\_Specht\\_problem](https://www.researchgate.net/publication/355916110_Gelfand_conjecture_and_the_method_of_proof_of_Specht_problem), 2022.



A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, *Algebra and Logics*, vol. 26, no. 5, pp. 597–641, 1987.



C. Procesi, *The geometry of polynomial identities*, *Izv. Math.*, vol. 80, no. 5, pp. 910–953, 2016.



A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.



V. Shchigolev, *Finite-basis property of T-spaces over fields of characteristic zero*, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, vol. 65, no. 5, pp. 1041–1071, 2001.



A. Lubotzky, *Combinatorial group theory for PRO-p groups*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 25, pp. 311–325, 1982.



E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, and Y. Karasik, *Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 220, pp. 2771–2808, 2016.



A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.



A. Grishin and V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, *Math. Sci., New York*, vol. 134, no. 1, pp. 1799–1878, 2004.



I. Benediktovich and A. Zalesskii, *T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensions*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences*, vol. 3, pp. 5–10, 1980.



A. Vais and E. Zelmanov, *Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras*, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.*, vol. 33, no. 6, pp. 42–51, 1989. Note: Translation: *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 33(6) (1989), 38–47.



L. Centrone, A. Estrada, and A. Ioppolo, *On PI-algebras with additional structures: rationality of Hilbert series and Specht's problem*, *J. Algebra*, vol. 592, pp. 300–356, 2022.



A. Kanel-Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 3, pp. 13–24, 2000. Note: Translation: *Sb. Math.* 131(3-4) (2000), 329–340.



A. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 101–118, 1999.



V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 307–312, 1999.



E. Aljadeff and A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, *Adv. Math.*, vol. 225, no. 5, pp. 2391–2428, 2010.



I. Sviridova, *Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group*, *Comm. Algebra*, vol. 39, no. 9, pp. 3462–3490, 2011.



D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Springer Science & Business Media, 2012.