Проблема Шпехта и Гипотеза Гельфанда

Воробьев Иван Евгеньевич

Научный руководитель, доктор физ.-мат. наук, профессор
Алексей Яковлевич Канель-Белов

Соруководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Антон Сергеевич Хорошкин

Рецензент, доктор физ.-мат. наук, профессор
Сергей Олегович Горчинский

19 июня 2024 г.

Структура работы

Мы рассмотрим два применения PI-теории:

- Нелинейность свободных про-p групп
- Гипотеза Гельфанда

Структура:

1. Предварительные сведения
2. Историческая справка
3. Постановка задачи (о нелинейности свободной про-p группы)
4. Обзор подхода А.Н. Зубкова ($d = 2, p > 2$)
5. Обзор подхода Бена-Эзры—Зельманова ($p = 2, d = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 2$)
6. Случай $p = 2, d = 2, \mathrm{char}(\Delta) = 4$
7. Методы Гришина
8. Гипотеза Гельфанда
9. Связь гипотезы Гельфанда с методами А.В. Гришина

Предварительные сведения

Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных групп называется проконечной группой.

Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных p-групп называется про-p группой.

Definition

Коммутативное нетерово I-полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про-p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p.

$$\Delta = \varprojlim \Delta/I^n$$

Предварительные сведения

Definition

Пусть F свободная группа порожденная алфавитом $\mathcal{S}$. Рассмотрим пополнение $\widetilde{F}_p$ группы F относительно топологии, определенной всеми нормальными подгруппами индекса p^l, $\forall l \in \mathbb{N}$. Тогда $\widetilde{F}_p$ называется свободной про-p группой.

Remark

Здесь и далее под подобным пополнением мы имеем в виду обратный предел факторгрупп.

Пусть Δ про-p кольцо.

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \to \Delta/I} GL_d(\Delta/I)\right)$$

является про-p группой.

Основная гипотеза

Conjecture

Некоммутативная свободная про-p группа $\widetilde{F}_p$ *не может быть непрерывно вложена в* $GL_d^1(\Delta)$ *для любого про-p кольца* Δ*.*

Историческая справка

Существует множество частичных результатов для различных $\widetilde{F}_p, \Delta, p$, которые дают надежду на положительный результат и в общем случае:

- В 1987, А.Н. Зубков ([3]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1991, J.D. Dixon, A. Mann, M.P.F. du Sautoy, D. Segal ([6]) доказали гипотезу для $\Delta = \mathbb{Z}_p$,
$$GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker\left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p)\right)$$
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([4]), Y. Barnea, M. Larsen ([5]) доказали гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$.
- В 2005, E. Zelmanov ([8]) анонсировал доказательство гипотезы для $p \gg d$.
- В 2020, D. Ben-Ezra, E. Zelmanov доказали ([7]) гипотезу для $d = 2, p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 2$.

Подход Зубкова

Theorem (А.Н. Зубков, 1989)

Некоммутативная свободная про-р группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.

Общие матрицы

Обозначения:

- $S = \mathbb{Z}_p[[x_{1,1}, y_{1,1}, \ldots, x_{2,2}, y_{2,2}]]$
- $S_k = \{\sum\limits_k^\infty f_i\}$
- $B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$

Матричное кольцо $M_2(S)$ — про-p кольцо с топологией конгруэнц-идеалов

$$\ker\left(M_2(S) \to M_2(S/B_{k,n})\right)$$

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Универсальное представление

Зубков рассматривает естественный гомоморфизм в алгебру общих матриц:
Пусть $x, y \in \widetilde{F}_p$ — образующие,

$$\pi : x \mapsto 1 + X, y \mapsto 1 + Y$$

где X, Y общие матрицы над $\mathbb{Z}_p$.
Можно продолжить π на замыкание $\langle\langle x, y\rangle\rangle$, и оно отобразится на замыкание $\langle 1 + x^*, 1 + y^*\rangle$.

Универсальное представление

Гомоморфизм π называется универсальным представлением:

Theorem (А.Н. Зубков, 1987)

Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$, то и универсальное представление π инъективно.

Theorem

Универсальное представление не инъективно для $p \neq 2$.

Обозначения

Обозначения:

- **S** — кольцо степенных рядов от общих матриц X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Q}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над $\mathbb{Z}_p$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$ однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ — $\mathbb{Z}_p$-модуль однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$.
- Для $g \in 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$: $\min g$ — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \dots$)

План доказательства

1. Определим $G \supseteq G^{(n)} = G \cap \ker\left(GL(S) \to GL(S/S_n)\right)$. Докажем, что для любого $g \in G^{(n)}$
$$\min g \in \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$$
2. Таким образом, можно изучать $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ как $\mathbb{Z}_p$-модуль $\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p}$. Докажем, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Z}_p} = \mathrm{rank}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{L}^{(n)}_{\mathbb{Q}_p} = f(n)$ для некоторой f.
3. Доказав, что $G^{(n)}$ — нижний центральный ряд G получим противоречие с формулой Э. Витта (см. [6]):

Formula (Э. Витт, [6])

Пусть F — свободная про-p группа порожденная m образующими, тогда n-ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как $\mathbb{Z}_p$-модуль)

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)m^{n/d}$$

где μ — функция Мебиуса.

Подход Бена-Эзры—Зельманова

Theorem (Д. Бен-Эзра, Е.И. Зельманов, 2020)

Некоммутативная свободная про-2 группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2.

Авторы изменяют универсальное представление Зубкова для случая $p = 2$: аналогичный гомоморфизм π в общие матрицы над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (вместо $\mathbb{Z}_2$).
Все так же верна следующая лемма об универсальности:

Theorem

Пусть F — свободная про-2 группа порожденная x, y. Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \to GL_2^1(\Delta)$ для про-2 кольца Δ характеристики 2, то и универсальное представление π инъективно.

Редукция к псевдо-общим матрицам

Авторы вводят новые матрицы $\tilde{X}, \tilde{Y}$, такие что $\det \tilde{X} = \det \tilde{Y} = 0$, называемые псевдо-общими (pseudo generic matrices), аналогичная идея встречается и в PI-теории.
Несложно показать, что $[G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ и из этого следует, что достаточно доказать следующую теорему:

Theorem

Определим гомоморфизм $\tilde{\pi}$ из F в $\tilde{G}$: $x \mapsto 1 + \tilde{X}, y \mapsto 1 + \tilde{Y}$, тогда ограничение $\tilde{\pi} : [F, F] \to [\tilde{G}, \tilde{G}]$ не инъективно.

Кольцо псевдо-общих матриц

Рассмотрим дискретное кольцо

$$T = \quad \langle \mathrm{trace}(\tilde{X}), \quad \mathrm{trace}(\tilde{Y}), \quad \mathrm{trace}(\tilde{X}\tilde{Y}) \rangle$$

Исследуя кольцо общих матриц полезным оказывается рассмотреть
J — T-модуль порожденный
$[\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{X}, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{Y}, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]^2, \quad [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{X}\tilde{Y}$

Proposition

Каждый элемент J единственным образом представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{n,i} + v_{n,i} + w_{n,i}$$

$$u_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot (\mathring{T} \cdot [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{X} + \mathring{T} \cdot [\tilde{X},\tilde{Y}]\tilde{Y})$$
$$v_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot \mathring{T} \cdot [\tilde{X},\tilde{Y}]^2$$
$$w_{n,i} \in (\mathrm{trace}(\tilde{X}))^n \cdot \mathring{T} \cdot [\tilde{X},\tilde{Y}] \cdot \tilde{X} \cdot \tilde{Y}$$

$\mathrm{char}\Delta = 4$

Conjecture

Let F be a free non-abelian pro-2 group, Δ is a pro-2 ring. F cannot be continuously embedded in $GL_2^1(\Delta)$, when $\mathrm{char}\Delta = 4$.

We intend to prove it using the similar approaches, and believe that one can prove it even for the case $\mathrm{char}\Delta = 2^l$.

Furthermore, maybe the case $\mathrm{char}\Delta = 0$ can be investigated if the above statement will be proved.

PI-theory, preliminaries

Let T be the endomorphism (substitution) semigroup of the free algebra $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$.

Definition

An endomorphism τ of F defined by the rule $x_i \mapsto g_i, g_i \in F$, is called a substitution of type $(x_1, \ldots, x_i, \ldots) \mapsto (g_1, \ldots, g_i, \ldots)$.

Definition

T-space in F is a vector subspace of F, that is closed under substitutions.

Definition

T-ideal in F is an ideal of F that is at the same time a T-space.

PI-theory, preliminaries

Following theorem (the special case of Shchigolev's [?]) is proved in author's last year coursework.

Theorem

Any T-space in algebra $k[x_1, \dots, x_n]$ is finitely based.

Furthermore, one can prohibit some of the substitutions and show that T-spaces are finitely based using some $\widetilde{T} \subset T$
The main idea is to use substitutions:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, 1 + \alpha_i P(x_i), \dots, x_n)$$

And then we linearize it on α_i.

Gelfand conjecture

Conjecture (Gelfand, 1970, [?])

The homology of the Lie subalgebra of finite codimension in the Lie algebra of algebraic vector fields on an affine algebraic manifold are finite-dimensional in each homological degree.

We denote by $\mathcal{W}_n$ the Lie algebra of formal vector fields on an n-dimensional plane V.

$$\mathcal{W}_n \simeq \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

The subalgebras $\prod_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$ of a finite codimension are denoted by $L_d(n)$.

Using the classical considerations of homological algebra, one can reduce Gelfand conjecture to the following lemma:

Lemma

Any finitely generated $L_d(n)$-module is noetherian.

Then we will observe how to use Grishin's methods to prove this lemma.

Библиография

I. Sanov, *The property of one free group representation*, *Doklady Akademii Nauk USSR*, vol. 57, no. 7, pp. 657–659, 1947.

A. Kanel-Belov, *Local finite basability and local representability of varieties of associative rings*, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 432, no. 6, pp. 727–731, 2010.

A. Zubkov, *Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices*, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, pp. 742–747, 1987.

R. Pink, *Compact subgroups of linear algebraic groups*, *Journal of Algebra*, vol. 206, pp. 438–504, 1998.

Y. Barnea and M. Larsen, *A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field*, *Journal of Algebra*, vol. 214, pp. 338–341, 1999.

J. Dixon, A. Mann, M. du Sautoy, and D. Segal, *Analytic pro-p-groups*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1991.

D. Ben-Ezra and E. Zelmanov, *On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups*, *arXiv:1910.05805v2*, 2020.

E. Zelmanov, *Infinite algebras and pro-p groups*, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, Progr. Math., vol. 248, pp. 403–413, 2005.

E. Zelmanov, *Groups with identities*, *Note. Mat.*, vol. 36, pp. 101–113, 2016.

I.M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry*, *Proceedings of ICM*, vol. T.1, p. 106, 1970.

B. Feigin, A. Kanel-Belov, and A. Khoroshkin, *On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields*, *arXiv:2211.08510v1*, 2022.

Библиография

L. Centrone, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin, and I. Vorobiov, *Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture*, https://www.researchgate.net/publication/355916110_Gelfand_conjecture_and_the_method_of_proof_of_Specht_problem, 2022.

A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, *Algebra and Logics*, vol. 26, no. 5, pp. 597–641, 1987.

C. Procesi, *The geometry of polynomial identities*, *Izv. Math.*, vol. 80, no. 5, pp. 910–953, 2016.

A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.

V. Shchigolev, *Finite-basis property of T-spaces over fields of characteristic zero*, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, vol. 65, no. 5, pp. 1041–1071, 2001.

A. Lubotzky, *Combinatorial group theory for PRO-p groups*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 25, pp. 311–325, 1982.

E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, and Y. Karasik, *Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 220, pp. 2771–2808, 2016.

A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.

A. Grishin and V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, *Math. Sci., New York*, vol. 134, no. 1, pp. 1799–1878, 2004.

I. Benediktovich and A. Zalesskii, *T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensions*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences*, vol. 3, pp. 5–10, 1980.

Библиография

A. Vais and E. Zelmanov, *Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras*, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.*, vol. 33, no. 6, pp. 42–51, 1989. Note: Translation: Soviet Math. (Iz. VUZ) 33(6) (1989), 38–47.

L. Centrone, A. Estrada, and A. Ioppolo, *On PI-algebras with additional structures: rationality of Hilbert series and Specht's problem*, *J. Algebra*, vol. 592, pp. 300–356, 2022.

A. Kanel-Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 3, pp. 13–24, 2000. Note: Translation: Sb. Math. 131(3-4) (2000), 329–340.

A. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 101–118, 1999.

V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 307–312, 1999.

E. Aljadeff and A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, *Adv. Math.*, vol. 225, no. 5, pp. 2391–2428, 2010.

I. Sviridova, *Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group*, *Comm. Algebra*, vol. 39, no. 9, pp. 3462–3490, 2011.

D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Springer Science & Business Media, 2012.