

# Проблема Шпехта и Гипотеза Гельфанда

Воробьев Иван Евгеньевич

Научный руководитель, доктор физ.-мат. наук, профессор  
Алексей Яковлевич Канель-Белов

Соруководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент  
Антон Сергеевич Хорошкин

Рецензент, доктор физ.-мат. наук, профессор  
Сергей Олегович Горчинский

19 июня 2024 г.

# Structure of the work

Мы рассмотрим два применения PI-теории:

- Нелинейность свободных про- $p$  групп
- Гипотеза Гельфанда

Структура:

- 1 Предварительные сведения
- 2 Историческая справка
- 3 Постановка задачи (о нелинейности свободной про- $p$  группы)
- 4 Обзор подхода А.Н. Зубкова ( $d = 2, p > 2$ )
- 5 Обзор подхода Бена-Эзры—Зельманова ( $p = 2, d = 2, \text{char}(\Delta) = 2$ )
- 6 Случай  $p = 2, d = 2, \text{char}(\Delta) = 4$
- 7 Методы Гришина
- 8 Гипотеза Гельфанда
- 9 Связь гипотезы Гельфанда с методами А.В. Гришина

## Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных групп называется проконечной группой.

## Definition

Обратный (проективный) предел проективной системы конечных  $p$ -групп называется про- $p$  группой.

## Definition

Коммутативное нетерово  $I$ -полное локальное кольцо  $\Delta$  с максимальным идеалом  $I$  называется про- $p$  кольцом, если  $\Delta/I$  конечное поле характеристики  $p$ .

$$\Delta = \varprojlim \Delta/I^n$$

## Definition

Пусть  $F$  свободная группа порожденная алфавитом  $\mathcal{S}$ . Рассмотрим пополнение  $\tilde{F}_p$  группы  $F$  относительно топологии, определенной всеми нормальными подгруппами индекса  $p^l$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\tilde{F}_p$  называется свободной про- $p$  группой.

## Remark

*Здесь и далее под подобным пополнением мы имеем в виду обратный предел факторгрупп.*

Пусть  $\Delta$  про- $p$  кольцо.

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left( GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

является про- $p$  группой.

## Conjecture

*Некоммутативная свободная про- $p$  группа  $\tilde{F}_p$  не может быть непрерывно вложена в  $GL_d^1(\Delta)$  для любого про- $p$  кольца  $\Delta$ .*

Существует множество частичных результатов для различных  $\tilde{F}_p, \Delta, p$ , которые дают надежду на положительный результат и в общем случае:

- В 1987, А.Н. Зубков ([3]) доказал гипотезу для  $d = 2, p \neq 2$ .
- В 1991, J.D. Dixon, A. Mann, M.P.F. du Sautoy, D. Segal ([6]) доказали гипотезу для  $\Delta = \mathbb{Z}_p$ ,  
$$GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker \left( GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p) \right)$$
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([4]), Y. Barnea, M. Larsen ([5]) доказали гипотезу для  $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$ .
- В 2005, E. Zelmanov ([8]) анонсировал доказательство гипотезы для  $p \gg d$ .
- В 2020, D. Ben-Ezra, E. Zelmanov доказали ([7]) гипотезу для  $d = 2, p = 2$  и  $\text{char}(\Delta) = 2$ .

## Theorem (А.Н. Зубков, 1989)

*Некоммутативная свободная про- $p$  группа не может быть непрерывно вложена в  $GL_2^1(\Delta)$  для  $p \neq 2$ .*

Зубков рассматривает естественный гомоморфизм в алгебру общих матриц:

Пусть  $x, y \in \tilde{F}_p$  — образующие,  $\pi : x \mapsto 1 + x^*, y \mapsto 1 + y^*$ , где  $x^*, y^*$  общие матрицы  $\mathbb{Z}_p$ . Можно продолжить  $\pi$  на замыкание  $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ , и оно отображится на замыкание  $\langle 1 + x^*, 1 + y^* \rangle$ .

Гомоморфизм  $\pi$  называется универсальным представлением:

## Theorem (А.Н. Зубков, 1987)

*Пусть  $F$  — свободная про- $p$  группа порожденная  $x, y$ . Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм  $\varphi : F \rightarrow GL_2^1(\Delta)$ , то и универсальное представление  $\pi$  инъективно.*

## Theorem

*The universal representation of the degree 2 is not injective for  $p \neq 2$ .*

So we need to construct the pro- $p$  identity for generic matrices.



Zubkov investigated the lower central series of Lie algebra of generic matrices.

And he encountered a contradiction with the classical Witt's formula:

## Formula (Witt)

*Rank of  $r$ -th factor of the lower central series of  $\tilde{F}_p$  (as a  $\mathbb{Z}_p$  - module):*

$$\frac{1}{r} \sum_{m|r} \mu(m) \cdot 2^{\frac{r}{m}}$$

# Ben-Ezra, Zelmanov's approach

## Theorem (Ben-Ezra, Zelmanov, 2020)

*Let  $F$  be a free non-abelian pro-2 group,  $\Delta$  is a pro-2 ring.  $F$  cannot be continuously embedded in  $GL_2^1(\Delta)$ , when  $\text{char}\Delta = 2$ .*

Ben-Ezra and Zelmanov modified Zubkov's universal representation for the case  $p = 2$ : analogous homomorphism to generic matrices over  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (instead of  $\mathbb{Z}_2$ ).

Then the following lemma still holds and has a pretty simple proof:

## Lemma

*Each  $1 \neq z \in \ker \pi$  is a pro-2 identity of  $GL_2^1(\Delta)$  for all pro-2 rings  $\Delta$  with  $\text{char}\Delta = 2$ .*

And the last theorem has a very hard proof: authors investigated Lie algebra using PI-theory approaches:

## Theorem

*The universal representation of the degree 2 is not injective.*

$$\text{char}\Delta = 4$$

## Conjecture

*Let  $F$  be a free non-abelian pro-2 group,  $\Delta$  is a pro-2 ring.  $F$  cannot be continuously embedded in  $GL_2^1(\Delta)$ , when  $\text{char}\Delta = 4$ .*

We intend to prove it using the similar approaches, and believe that one can prove it even for the case  $\text{char}\Delta = 2^l$ .

Furthermore, maybe the case  $\text{char}\Delta = 0$  can be investigated if the above statement will be proved.

Let  $T$  be the endomorphism (substitution) semigroup of the free algebra  $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ .

## Definition

An endomorphism  $\tau$  of  $F$  defined by the rule  $x_i \mapsto g_i, g_i \in F$ , is called a substitution of type  $(x_1, \dots, x_i, \dots) \mapsto (g_1, \dots, g_i, \dots)$ .

## Definition

$T$ -space in  $F$  is a vector subspace of  $F$ , that is closed under substitutions.

## Definition

$T$ -ideal in  $F$  is an ideal of  $F$  that is at the same time a  $T$ -space.

Following theorem (the special case of Shchigolev's [?]) is proved in author's last year coursework.

## Theorem

*Any  $T$ -space in algebra  $k[x_1, \dots, x_n]$  is finitely based.*

Furthermore, one can prohibit some of the substitutions and show that  $T$ -spaces are finitely based using some  $\tilde{T} \subset T$

The main idea is to use substitutions:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, 1 + \alpha_i P(x_i), \dots, x_n)$$

And then we linearize it on  $\alpha_i$ .

## Conjecture (Gelfand, 1970, [?])

*The homology of the Lie subalgebra of finite codimension in the Lie algebra of algebraic vector fields on an affine algebraic manifold are finite-dimensional in each homological degree.*

We denote by  $\mathcal{W}_n$  the Lie algebra of formal vector fields on an  $n$ -dimensional plane  $V$ .

$$\mathcal{W}_n \simeq \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

The subalgebras  $\prod_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$  of a finite codimension are denoted by  $L_d(n)$ .

# Gelfand conjecture

Using the classical considerations of homological algebra, one can reduce Gelfand conjecture to the following lemma:

## Lemma

*Any finitely generated  $L_d(n)$ -module is noetherian.*

Then we will observe how to use Grishin's methods to prove this lemma.



I. Sanov, *The property of one free group representation*, *Doklady Akademii Nauk USSR*, vol. 57, no. 7, pp. 657–659, 1947.



A. Kanel-Belov, *Local finite basability and local representability of varieties of associative rings*, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 432, no. 6, pp. 727–731, 2010.



A. Zubkov, *Non-abelian free pro- $p$ -groups cannot be represented by 2-by-2 matrices*, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, pp. 742–747, 1987.



R. Pink, *Compact subgroups of linear algebraic groups*, *Journal of Algebra*, vol. 206, pp. 438–504, 1998.



Y. Barnea and M. Larsen, *A non-abelian free pro- $p$  group is not linear over a local field*, *Journal of Algebra*, vol. 214, pp. 338–341, 1999.



J. Dixon, A. Mann, M. du Sautoy, and D. Segal, *Analytic pro- $p$ -groups*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1991.



D. Ben-Ezra and E. Zelmanov, *On Pro-2 Identities of  $2 \times 2$  Linear Groups*, *arXiv:1910.05805v2*, 2020.



E. Zelmanov, *Infinite algebras and pro- $p$  groups*, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, *Progr. Math.*, vol. 248, pp. 403–413, 2005.



E. Zelmanov, *Groups with identities*, *Note. Mat.*, vol. 36, pp. 101–113, 2016.



I.M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry*, *Proceedings of ICM*, vol. T.1, p. 106, 1970.



B. Feigin, A. Kanel-Belov, and A. Khoroshkin, *On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields*, *arXiv:2211.08510v1*, 2022.





L. Centrone, A. Kanel-Belov, A. Khoroshkin, and I. Vorobiov, *Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture*, [https://www.researchgate.net/publication/355916110\\_Gelfand\\_conjecture\\_and\\_the\\_method\\_of\\_proof\\_of\\_Specht\\_problem](https://www.researchgate.net/publication/355916110_Gelfand_conjecture_and_the_method_of_proof_of_Specht_problem), 2022.



A. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, *Algebra and Logics*, vol. 26, no. 5, pp. 597–641, 1987.



C. Procesi, *The geometry of polynomial identities*, *Izv. Math.*, vol. 80, no. 5, pp. 910–953, 2016.



A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.



V. Shchigolev, *Finite-basis property of T-spaces over fields of characteristic zero*, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, vol. 65, no. 5, pp. 1041–1071, 2001.



A. Lubotzky, *Combinatorial group theory for PRO-p groups*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 25, pp. 311–325, 1982.



E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, and Y. Karasik, *Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, *Pure and Applied Algebra*, vol. 220, pp. 2771–2808, 2016.



A. Grishin, *On finitely based systems of generalized polynomials*, *Math. USSR-Izv.*, vol. 37, no. 2, pp. 243–272, 1991.



A. Grishin and V. Shchigolev, *T-spaces and their applications*, *Math. Sci., New York*, vol. 134, no. 1, pp. 1799–1878, 2004.



I. Benediktovich and A. Zalesskii, *T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensions*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Mathematical Sciences*, vol. 3, pp. 5–10, 1980.



A. Vais and E. Zelmanov, *Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras*, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.*, vol. 33, no. 6, pp. 42–51, 1989. Note: Translation: *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 33(6) (1989), 38–47.



L. Centrone, A. Estrada, and A. Ioppolo, *On PI-algebras with additional structures: rationality of Hilbert series and Specht's problem*, *J. Algebra*, vol. 592, pp. 300–356, 2022.



A. Kanel-Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, *Sb. Math.*, vol. 191, no. 3, pp. 13–24, 2000. Note: Translation: *Sb. Math.* 131(3-4) (2000), 329–340.



A. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 101–118, 1999.



V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-ideals*, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 307–312, 1999.



E. Aljadeff and A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G-graded algebras*, *Adv. Math.*, vol. 225, no. 5, pp. 2391–2428, 2010.



I. Sviridova, *Identities of pi-algebras graded by a finite abelian group*, *Comm. Algebra*, vol. 39, no. 9, pp. 3462–3490, 2011.



D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Springer Science & Business Media, 2012.