Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Воробьев Иван Евгеньевич

Проблема Шпехта и гипотеза Гельфанда

Выпускная квалификационная работа студента 4 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Доктор физико-математических
наук, профессор
Канель-Белов Алексей Яковлевич

Научный соруководитель:
Кандидат физико-математических
наук,
Хорошкин Антон Сергеевич

Москва 2024

Аннотация

Пусть F свободная некоммутативная про-p группа, и пусть Δ коммутативное нетерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом I, такое что Δ/I конечное поле характиристики p Определим группу

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \to \Delta/I} GL_2(\Delta/I)\right)$$

А.Н. Зубков доказал, что F не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.
Д. Бен-Эзра и Е. Зельманов, показали, что и для $p = 2$, $\mathrm{char}(\Delta) = 2$ имеет место такой же результат.
Цель данной статьи обобщить подход для $p = 2$ и $\mathrm{char}(\Delta) = 4$.
Кроме того, Зельманов показал в [10], что гипотеза о нелинейности про-p групп тесно связана с PI-теорией.

Во второй части данной статьи мы изучаем связь между PI-теорией и гипотизей Гельфанда о конечномерности гомологий алгебр Ли векторных полей.

Таким образом, можно видеть, что работа в основном посвящена изучению комбинаторики подстановок.

Содержание

1 Введение

Мы рассмотрим применения теории полиномиальных тождеств (PI-теории для краткости) в двух, казалось бы, несвязанных с ней областях:

- В 2005, Е. Зельманов представил набросок доказательства нелинейности некоторых свободных про-p групп. Доказательство во многом опирается на стандартные подходы PI-теории (см. [10]).

- Дополнительно мы рассмотрим неожиданную связь между гипотезой Гельфанда и PI-теорией, а именно с методами Гришина ([7]).

Приведем краткую историческую справку и формулировку основных проблем.

1.1 О нелинейности свободных про-p-групп

Проблема линейности топологических групп изучалась много лет. Одной из естественных топологий, наряду с $\mathbb{R}^n$ и дискретной, является про-p топология.
Сформулируем центральную гипотезу данной теории, а далее приведем все необходимые определения:

Гипотеза 1.1.1. *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть вложена в $GL_d(\Delta)$ ни для какого про-p кольца Δ.*

Определение 1.1.1. *Обратный (проективный) предел конечных p-групп называется про-p группой.*

Топология индуцируется с топологии тихоновского произведения.

Определение 1.1.2. *Коммутативное нетерово полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про-p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p.*

Таким образом:

$$\Delta \cong \varprojlim \Delta/I^n$$

Рассмотрим конгуренц-подгруппу:

$$GL_d^1(\Delta) = \ker\left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta\to\Delta/I} GL_d(\Delta/I)\right)$$

Можно видеть, что это про-p группа.
Основной вопрос состоит в том, может ли свободная про-p группа быть непрерывна вложена в $GL_d^1(\Delta)$.
Свободную про-p группу можно определить классическим способом через универсальное свойство или конструктивно:

Определение 1.1.3. *Свободная про-p группа $F_p(X)$ является пополнением дискретной свободной группы $F(X)$ относительно топологии всех нормальных подгрупп индекса степени p.*

Существует множество частичных результатов:

- В 1987, А.Н. Зубков ([11]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([8]), Й. Барнеа, М. Ларсен ([1]) подтвердили гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$

- В 1991, Д. Диксон, А. Манн, М.П.Ф. Ду Сатой, Д. Сигал ([4]) доказали гипотезу для всех размеров матриц для целых p-адических чисел $\Delta = \mathbb{Z}_p$, $GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker\left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p)\right)$

- В 2005, Е. Зельманов ([10], [9]) анонсировал доказательство гипотезы для $p \gg d$, однако до сих пор существует только набросок доказательства.

- В 2020, Д. Бен-Эзра, Е. Зельманов ([2]) обобщили результат Зубкова для $d = 2, p = 2$ и $\operatorname{char}(\Delta) = 2$.

Мы сконцентрируемся на случае 2×2 матриц, то есть на результатах Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.
Сейчас опишем общий план доказательства, он отчасти реализован для произвольных размеров матриц в [10], [9]:
Первое, что нужно сделать — сузить множество рассматриваемых колец. Можно построить, так называемое, универсальное представление в общие матрицы. Оказывается, что классическими алгебраическими рассуждениями можно показать, что если какое-то представление точно, то и это универсальное представление точно.
Таким образом, остается исследовать это универсальное представление. Это делается путем изучения алгебры Ли общих матриц, которая множество раз возникала в PI-теории. В завершение строится связь между этой алгеброй Ли и образом нашего представления — подобно связи между группой Ли и алгеброй Ли.

1.2 Гипотеза Гельфанда

В 2022 была обнаружена замечательная связь между PI-теорией (точнее методами Гришина) и гипотезой Гельфанда сформулированной на ICM'70 (см [6]).

Гипотеза 1.2.1 (Гельфанд, 1970)**.** *Гомологии подалгебры Ли конечной коразмерности алгебры Ли алгебраических векторных полей на афинном алгебраическом многообразии конечномерны.*

Эта интересная связь была найдена в результате совместной работы А.С. Хорошкина, А.Я. Канель-Белова с некоторым участием автора. Можно найти набросок доказательства Хорошкина в [5], [3].
Дополнительно, мы заметим, что именно результат из последней курсовой работы автора (частный случай методов Гришина [7]) помогает в доказательстве гипотезу Гельфанда.

2 О нелинейности свободных про-p групп

Для начала необходимо привести полные доказательства Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова. В некоторых местах они полностью соответствует авторским, а в некоторых — упрощены.

2.1 Подход Зубкова

Теорема 2.1.1 (Зубков, 1989)**.** *Некоммутативная свободная про-p группа не может быть непрерывно вложена в* $GL_2^1(\Delta)$ *для* $p \neq 2$.

2.1.1 Универсальное представление

Определим алгебру общих матриц над p-адическими числами.
Мы будем работать с матрицами 2×2, однако все результаты и конструкции этого параграфа дословно переносятся на матрицы произвольного размера.
Рассмотрим формальные степенные ряды от свободных коммутирующих переменных $x_{i,j}, y_{i,j}$ для $i, j \in \{1, 2\}$:

$$S = \mathbb{Z}_p\langle x_{1,1}, y_{1,1}, \ldots, x_{2,2}, y_{2,2}\rangle$$

Введем стандартную градуировку deg: любой элемент S записывается в виде $\sum f_i$ где $\deg(f_i) = i$.
Рассмотрим идеалы вида

$$S_k = \{\sum_k^{\infty} f_i\}$$

Предложение 2.1.1. *Следующие идеалы*

$$B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$$

являются идеалами конечного индекса

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{Z}_p/(p^n)$ — конечное кольцо.

$$\ker(\mathbb{Z}_p \to Z_p/(p^n)) = (p_n) = \{0, \ldots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$$

Ясно, что множество целых p-адических чисел отличающихся на элементы такого вида конечно и $\mathbb{Z}_p/(p^n) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ □

Снабдим S топологией с базой окрестностей нуля состоящей из идеалов $B_{k,n}$. S является про-p кольцом:

$$S/B_{1,1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Наконец, рассмотрим матричное кольцо $M_2(S)$. Наделив его топологией с базой окрестностей нуля конгруэнц-идеалов

$$\ker\left(M_2(S) \to M_2(S/B_{k,n})\right)$$

получим, что $M_2(S)$ — про-p кольцо.

Предложение 2.1.2. *Множество*

$$1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

является про-p группой.

Доказательство. Заметим, что $\ker\left(S \to S/S_1\right)$ состоит из рядов без свободного члена. Получается, что $1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$ является группой, так как ряд обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим.
Также можно заметить, что эта группа полна относительно определенной выше топологии, то есть является про-p группой. □

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Пусть F — свободная про-p группа порожденная x, y.
Наконец определим универсальное представление:

$$\pi : \begin{cases} x \mapsto 1 + X \\ y \mapsto 1 + Y \end{cases}$$

Алгебраически продолжим на дискретную подгруппу, порожденную x, y:

$$\pi : \quad \langle x, y\rangle \to \langle 1 + X, 1 + Y\rangle \subseteq 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

А затем можно непрерывно доопределить π на всей F, построив замыкание $\langle 1 + X, 1 + Y\rangle$ в топологии $1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$:

$$\pi : \quad F \to G \subseteq 1 + \ker\left(M_2(S) \to M_2(S/S_1)\right)$$

Итак, следующая теорема позволяет нам изучать свойства только универсального представления, не задумываясь о других про-p кольцах.

Теорема 2.1.2 (Зубков, 1987)**.** *Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $F \to GL_2^1(\Delta)$ для некоторого про-p кольца Δ, то и универсальное представление инъективно.*

Доказательство. □

Список литературы

[1] Y. Barnea и M. Larsen. “A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field”. В: *Journal of Algebra* 214 (1999), с. 338—341.

[2] D. Ben-Ezra и E. Zelmanov. “On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups”. В: *arXiv:1910.05805v2* (2020).

[3] L. Centrone и др. “Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture”. В: *researchgate net* (2022).

[4] J. Dixon и др. “Analytic pro-p-groups”. В: *London Mathematical Society Lecture Note Series* (1991).

[5] B. Feigin, A. Kanel-Belov и A. Khoroshkin. “On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields”. В: *arXiv:2211.08510v1* (2022).

[6] I.M. Gelfand. “The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry”. В: *Proceedings of ICM* Т.1 (1970), с. 95—111.

[7] A. Grishin. “On finitely based systems of generalized polynomials”. В: *Math. USSR-Izv.* 37.2 (1991), с. 243—272.

[8] R. Pink. “Compact subgroups of linear algebraic groups”. В: *Journal of Algebra* 206 (1998), с. 438—504.

[9] E. Zelmanov. “Groups with identities”. В: *Note. Mat.* 36 (2016), с. 101—113.

[10] E. Zelmanov. “Infinite algebras and pro-p groups”. В: *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* 248 (2005), с. 403—413.

[11] A. Zubkov. “Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices”. В: *Siberian Mathematical Journal* 28 (1987), с. 742—747.