

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Воробьев Иван Евгеньевич

Проблема Шпехта и гипотеза Гельфанда

Выпускная квалификационная работа студента 4 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Доктор физико-математических
наук, профессор
Канель-Белов Алексей Яковлевич

Научный соруководитель:
Кандидат физико-математических
наук,
Хорошкин Антон Сергеевич

Москва 2024

Аннотация

Пусть F свободная некоммутативная про- p группа, и пусть Δ коммутативное нетерово полное локальное кольцо с максимальным идеалом I , такое что Δ/I конечное поле характеристики p . Определим группу

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

А.Н. Зубков доказал, что F не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.

Д. Бен-Эзра и Е. Зельманов, показали, что и для $p = 2$, $\text{char}(\Delta) = 2$ имеет место такой же результат.

Цель данной статьи обобщить подход для $p = 2$ и $\text{char}(\Delta) = 4$.

Кроме того, Зельманов показал в [11], что гипотеза о нелинейности про- p групп тесно связана с PI-теорией.

Во второй части данной статьи мы изучаем связь между PI-теорией и гипотезой Гельфанда о конечномерности гомологий алгебр Ли векторных полей.

Таким образом, можно видеть, что работа в основном посвящена изучению комбинаторики подстановок.

Содержание

1	Введение	2
1.1	О нелинейности свободных про- p -групп	3
1.2	Гипотеза Гельфанда	4
2	О нелинейности свободных про-p групп	5
2.1	Подход Зубкова	5
2.1.1	Универсальное представление	5
2.1.2	Неточность универсального представления	7

1 Введение

Мы рассмотрим применения теории полиномиальных тождеств (PI-теории для краткости) в двух, казалось бы, несвязанных с ней областях:

- В 2005, Е. Зельманов представил набросок доказательства нелинейности некоторых свободных про- p групп. Доказательство во многом опирается на стандартные подходы PI-теории (см. [11]).

- Дополнительно мы рассмотрим неожиданную связь между гипотезой Гельфанда и PI-теорией, а именно с методами Гришина ([7]).

Приведем краткую историческую справку и формулировку основных проблем.

1.1 О нелинейности свободных про- p -групп

Проблема линейности топологических групп изучалась много лет. Одной из естественных топологий, наряду с \mathbb{R}^n и дискретной, является про- p топология.

Сформулируем центральную гипотезу данной теории, а далее приведем все необходимые определения:

Гипотеза 1.1.1. *Некоммутативная свободная про- p группа не может быть вложена в $GL_d(\Delta)$ ни для какого про- p кольца Δ .*

Определение 1.1.1. *Обратный (проективный) предел конечных p -групп называется про- p группой.*

Топология индуцируется с топологии тихоновского произведения.

Определение 1.1.2. *Коммутативное нетерово полное локальное кольцо Δ с максимальным идеалом I называется про- p кольцом, если Δ/I конечное поле характеристики p .*

Таким образом:

$$\Delta \cong \varprojlim \Delta/I^n$$

Рассмотрим конгруенц-подгруппу:

$$GL_d^1(\Delta) = \ker \left(GL_d(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \Delta/I} GL_d(\Delta/I) \right)$$

Можно видеть, что это про- p группа.

Основной вопрос состоит в том, может ли свободная про- p группа быть непрерывно вложена в $GL_d^1(\Delta)$.

Свободную про- p группу можно определить классическим способом через универсальное свойство или конструктивно:

Определение 1.1.3. *Свободная про- p группа $F_p(X)$ является пополнением дискретной свободной группы $F(X)$ относительно топологии всех нормальных подгрупп индекса степени p .*

Существует множество частичных результатов:

- В 1987, А.Н. Зубков ([12]) доказал гипотезу для $d = 2, p \neq 2$.
- В 1999, используя глубокие результаты Пинка ([9]), Й. Барнеа, М. Ларсен ([1]) подтвердили гипотезу для $\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[[t]]$
- В 1991, Д. Диксон, А. Манн, М.П.Ф. Ду Сатой, Д. Сигал ([4]) доказали гипотезу для всех размеров матриц для целых p -адических чисел $\Delta = \mathbb{Z}_p, GL_d^1(\mathbb{Z}_p) = \ker \left(GL_2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p} GL_2(\mathbb{F}_p) \right)$
- В 2005, Е. Зельманов ([11], [10]) анонсировал доказательство гипотезы для $p \gg d$, однако до сих пор существует только набросок доказательства.
- В 2020, Д. Бен-Эзра, Е. Зельманов ([2]) обобщили результат Зубкова для $d = 2, p = 2$ и $\text{char}(\Delta) = 2$.

Мы сконцентрируемся на случае 2×2 матриц, то есть на результатах Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.

Сейчас опишем общий план доказательства, он отчасти реализован для произвольных размеров матриц в [11], [10]:

Для начала сузим множество рассматриваемых колец. Можно построить, так называемое, универсальное представление в общие матрицы. Оказывается, что классическими алгебраическими рассуждениями можно показать, что если какое-то представление точно, то и это универсальное представление точно.

Таким образом, остается исследовать это универсальное представление. Это делается путем изучения алгебры Ли общих матриц, которая множество раз возникала в РІ-теории. В завершение строится связь между этой алгеброй Ли и образом нашего представления — подобно связи между группой Ли и алгеброй Ли.

1.2 Гипотеза Гельфанда

В 2022 была обнаружена замечательная связь между РІ-теорией (точнее методами Гришина) и гипотезой Гельфанда сформулированной на ICM'70 (см [6]).

Гипотеза 1.2.1 (Гельфанд, 1970). *Гомологии подалгебры Ли конечной коразмерности алгебры Ли алгебраических векторных полей на аффинном алгебраическом многообразии конечномерны.*

Эта интересная связь была найдена в результате совместной работы А.С. Хорошкина, А.Я. Канель-Белова с некоторым участием автора. Можно найти набросок доказательства Хорошкина в [5], [3].

Дополнительно, мы заметим, что именно результат из последней курсовой работы автора (частный случай методов Гришина [7]) помогает в доказательстве гипотезы Гельфанда.

2 О нелинейности свободных про- p групп

Для начала необходимо привести полные доказательства Зубкова и Бен-Эзры-Зельманова.

2.1 Подход Зубкова

Теорема 2.1.1 (Зубков, 1989). *Некоммутативная свободная про- p группа не может быть непрерывно вложена в $GL_2^1(\Delta)$ для $p \neq 2$.*

2.1.1 Универсальное представление

Определим алгебру общих матриц над p -адическими числами.

Мы будем работать с матрицами 2×2 , однако все результаты и конструкции этого параграфа дословно переносятся на матрицы произвольного размера.

Рассмотрим формальные степенные ряды от свободных коммутирующих переменных $x_{i,j}, y_{i,j}$ для $i, j \in \{1, 2\}$:

$$S = \mathbb{Z}_p \langle x_{1,1}, y_{1,1}, \dots, x_{2,2}, y_{2,2} \rangle$$

Введем стандартную градуировку \deg : любой элемент S записывается в виде $\sum f_i$ где $\deg(f_i) = i$.

Рассмотрим идеалы вида

$$S_k = \left\{ \sum_k^{\infty} f_i \right\}$$

Предложение 2.1.1. *Следующие идеалы*

$$B_{k,n} = S \cdot p^n + S_k$$

являются идеалами конечного индекса

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p$ — конечное кольцо.

$$\ker(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p p^n = (0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

Ясно, что множество целых p -адических чисел отличающихся на элементы такого вида конечно и $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p p^n \cong \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ \square

Снабдим S топологией с базой окрестностей нуля состоящей из идеалов $B_{k,n}$. S является про- p кольцом:

$$S/B_{1,1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Наконец, рассмотрим матричное кольцо $M_2(S)$. Наделив его топологией с базой окрестностей нуля конгруэнц-идеалов

$$\ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/B_{k,n}))$$

получим, что $M_2(S)$ — про- p кольцо.

Предложение 2.1.2. *Множество*

$$1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

является про- p группой.

Доказательство. Заметим, что $\ker(S \rightarrow S/S_1)$ состоит из рядов без свободного члена. Получается, что $1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$ является группой, так как ряд обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим.

Также можно заметить, что эта группа полна относительно определенной выше топологии, то есть является про- p группой. \square

Рассмотрим общие матрицы $X, Y \in \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}$$

Пусть F — свободная про- p группа порожденная x, y .

Наконец определим универсальное представление:

$$\pi : \begin{cases} x \mapsto 1 + X \\ y \mapsto 1 + Y \end{cases}$$

Продолжим его на дискретную подгруппу, порожденную x, y :

$$\pi : \langle x, y \rangle \rightarrow \langle 1 + X, 1 + Y \rangle \subseteq 1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

А затем можно непрерывно доопределить π на всей F , построив замыкание $\langle 1 + X, 1 + Y \rangle$ в топологии $1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$:

$$\pi : F \rightarrow G \subseteq 1 + \ker(M_2(S) \rightarrow M_2(S/S_1))$$

Итак, следующая теорема позволяет нам изучать только универсальное представление, не задумываясь о других про- p кольцах.

Теорема 2.1.2 (Зубков, 1987). Пусть F — свободная про-р группа порожденная x, y . Если существует инъективный непрерывный гомоморфизм $\varphi : F \rightarrow GL_2^1(\Delta)$, то и универсальное представление π инъективно.

Доказательство. Напомним

$$GL_2^1(\Delta) = \ker (GL(\Delta \rightarrow \Delta/I))$$

Рассмотрим образы x, y :

$$\varphi(x) = 1 + A, \quad \varphi(y) = 1 + B$$

Заметим, что

$$A, B \in \ker (M_2(\Delta) \rightarrow M_2(\delta/I))$$

так как $1 + A, 1 + B \in \ker (GL(\Delta \rightarrow \Delta/I))$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\lim a_{i,j}^n = \lim b_{i,j}^n = 0$. Тогда можно построить гомоморфизм $\zeta : x_{i,j} \mapsto a_{i,j}, y_{i,j} \mapsto b_{i,j}$, он индуцирует эпиморфизм $\hat{\zeta} : G \rightarrow \text{Im } \varphi$. Наконец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow \pi & & \searrow \varphi \\ G & \xrightarrow{\hat{\zeta}} & GL_2^1(\Delta) \end{array}$$

Следовательно:

$$\ker \pi \subseteq \ker \varphi$$

□

2.1.2 Неточность универсального представления

Введем обозначения:

- \mathbf{S} — кольцо степенных рядов от общих матриц X, Y над \mathbb{Z}_p
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над \mathbb{Q}_p
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$ — алгебра Ли порожденная общими матрицами X, Y над \mathbb{Z}_p

- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ — векторное пространство над \mathbb{Q}_p однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}$.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$ — \mathbb{Z}_p -модуль однородных элементов степени n в алгебре $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}$.
- Для $g \in G$: $\min g$ — однородная компонента наименьшей ненулевой степени (можно записать $g = 1 + a_n + a_{n+1} + \dots$)
- Будем записывать коммутатор веса n следующим образом $[l_1, \dots, l_n] = [[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}], l_n]$

Приведем сначала план доказательства, чтобы была понятна мотивация каждой леммы:

1. Определим $G \supseteq G^{(n)}$, вложенную последовательность нормальных подгрупп попадающую в любую окрестность единицы, такую что для любого $g \in G^{(n)}$

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

2. Таким образом, можно изучать $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ как \mathbb{Z}_p -модуль $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$. Докажем, что $\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = f(n)$ для некоторой f .
3. Доказав, что $G^{(n)}$ — нижний центральный ряд G получим противоречие с формулой Витта (см. [8]):

Предложение 2.1.3 (Витт, [8]). *Пусть F — свободная про- p группа порожденная m образующими, тогда n -ый фактор нижнего центрального ряда имеет ранг (как \mathbb{Z}_p -модуль)*

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d}$$

где μ — функция Мебиуса.

Итак, докажем следующее техническое утверждение:

Предложение 2.1.4. *При $p \neq 2$:*

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S} = \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

Замечание 2.1.1. *Данное предложение не верно для $p = 2$, что влечет существенные сложности, возникающие для $p = 2$.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} a &= 4x_{1,2}x_{2,1} + (x_{1,1} - x_{2,2})^2 \\ b &= 2(y_{1,2}x_{2,1} + x_{1,2}y_{2,1}) + (x_{1,1} - x_{2,2})(y_{1,1} - y_{2,2}) \\ c &= 4y_{1,2}y_{2,1} + (y_{1,1} - y_{2,2})^2 \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} [x, y, x, x] &= a[x, y] \\ [x, y, y, x] &= b[x, y] \\ [x, y, y, y] &= c[x, y] \\ [x, y, x, y] &= [x, y, y, x] \end{aligned}$$

Получаем, что любой $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$ имеет вид

$$l = \begin{cases} \sum_{i_a+i_b+i_c=(n-2)/2} \lambda_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y], & \text{если } n \text{ четно} \\ \sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} \alpha_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, x] + \beta_{i_a, i_b, i_c} a^{i_a} b^{i_b} c^{i_c} [x, y, y], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda_{i_a, i_b, i_c}, \alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c} \in \mathbb{Q}_p$

Разберем случай нечетного n . Рассмотрим какое-то $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \cap \mathbf{S}$ с нецелыми p -адическими $\alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c}$.

Далее рассуждение аналогично классическому доказательству теоремы Гильберта о базисе. Введем лексикографический порядок на мономах порожденный отношением

$$x_{1,2} > x_{1,1} > y_{1,2} > y_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > y_{2,1} > y_{2,2}$$

Старшие члены у a, b, c : $4x_{1,2}x_{2,1}, 2x_{1,2}y_{2,1}, 4y_{1,2}y_{2,1}$ соответственно. Тогда старший член элемента, стоящего в левом верхнем углу l равен старшему члену выражения

$$\sum_{i_a+i_b+i_c=(n-3)/2} 2^{2i_a+2i_c+i_b} (\alpha_{i_a, i_b, i_c} x_{1,1} y_{1,2}^{i_c} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1} + \beta_{i_a, i_b, i_c} y_{1,2}^{i_c} y_{1,1} x_{2,1}^{i_a} y_{2,1}^{i_b+i_c+1})$$

Старшие члены различны и 2^k обратим в кольце \mathbb{Z}_p (при $p \neq 2$!).

Следовательно, так как $\alpha_{i_a, i_b, i_c}, \beta_{i_a, i_b, i_c} \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, а значит старший член левого верхнего угла l не лежит в \mathbb{Z}_p . Получаем противоречие с тем, что $l \in \mathbf{S}$.

Случай четного n разбирается аналогично.

Замечание 2.1.2. Попутно мы доказали, что суммы в формуле (1) на самом деле прямые.

□

Сразу же получаем следствие

Следствие 2.1.1.

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} = \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{8}, & \text{при четном } n \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

Итак, пусть

$$G^{(n)} = G \cap \ker (GL(S) \rightarrow GL(S/S_n))$$

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2.1.1. Пусть $g \in G^{(n)}$, тогда

$$\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}$$

Доказательство. В силу предложения 2.1.4 достаточно доказать, что $\min g \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$.

□

Пусть $G = G_1, \dots, G_n, \dots$ — нижний центральный ряд.

Следующее предложение завершает доказательство теоремы 2.1.1

Предложение 2.1.5. Нижний центральный ряд совпадает с пересечениями группы G с конгруэнц-подгруппами по идеалу S_n , то есть

$$G_n = G^{(n)}$$

Доказательство. Ясно, что $G_n \subseteq G^{(n)}$, так как коммутаторы веса n конечно лежат в $\ker (GL(S) \rightarrow GL(S/S_n))$ по определению S_n . С другой стороны, пусть $g \in G^{(n)}$:

$$g = 1 + v_n(X, Y) + \text{старшие члены}$$

□

Список литературы

- [1] Y. Barnea и M. Larsen. “A non-abelian free pro-p group is not linear over a local field”. В: *Journal of Algebra* 214 (1999), с. 338—341.
- [2] D. Ben-Ezra и E. Zelmanov. “On Pro-2 Identities of 2×2 Linear Groups”. В: *arXiv:1910.05805v2* (2020).

- [3] L. Centrone и др. “Specht property for systems of commutative polynomials and Gelfand conjecture”. B: *researchgate net* (2022).
- [4] J. Dixon и др. “Analytic pro-p-groups”. B: *London Mathematical Society Lecture Note Series* (1991).
- [5] B. Feigin, A. Kanel-Belov и A. Khoroshkin. “On finite dimensionality of homology of subalgebras of vector fields”. B: *arXiv:2211.08510v1* (2022).
- [6] I.M. Gelfand. “The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; Some questions of integral geometry”. B: *Proceedings of ICM T.1* (1970), с. 95—111.
- [7] A. Grishin. “On finitely based systems of generalized polynomials”. B: *Math. USSR-Izv.* 37.2 (1991), с. 243—272.
- [8] A. Lubotzky. “Combinatorial group theory for PRO-p groups”. B: *Pure and Applied Algebra* 25, (1982), с. 311—325.
- [9] R. Pink. “Compact subgroups of linear algebraic groups”. B: *Journal of Algebra* 206 (1998), с. 438—504.
- [10] E. Zelmanov. “Groups with identities”. B: *Note. Mat.* 36 (2016), с. 101—113.
- [11] E. Zelmanov. “Infinite algebras and pro-p groups”. B: *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* 248 (2005), с. 403—413.
- [12] A. Zubkov. “Non-abelian free pro-p-groups cannot be represented by 2-by-2 matrices”. B: *Siberian Mathematical Journal* 28 (1987), с. 742—747.