

Опционы и Математика

Ваня Воробьев

t.me/v0r0bi0v | +79779996957 | IEVorobyev@sberbank.ru

24 июля 2024 г.

Базовые понятия

Случайная величина

Базовые понятия

Случайная величина

- ▶ *Математическое ожидание*

$$\mathbb{E} \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx \left(= \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i) \right)$$

- ▶ *Дисперсия*

$$\mathbb{D} \xi = \mathbb{E} [(\xi - \mathbb{E} \xi)^2]$$

Какие бывают активы

Базовый актив

Какие бывают активы

Базовый актив

- ▶ *Валюта*
- ▶ *Товары*
- ▶ *Ценные бумаги*
- ▶ *Процентная ставка*
- ▶ *Что угодно численное*

Деривативы

Дериватив (Производный финансовый инструмент)

Соглашение между двумя сторонами, по которому они принимают на себя обязательство или приобретают право купить или продать базовый актив в установленный срок (или до его наступления) по согласованной цене.

Фьючерсы

Фьючерс

Контракт, по которому стороны обязуются купить или продать определенное количество товара по заранее установленной цене в определенную дату в будущем.

Опционы

Опцион

Контракт, дающий право (но не обязательство) купить (колл-опцион) или продать (пут-опцион) базовый актив по заранее установленной цене в определенную дату в будущем.

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины
- ▶ Фьючерс на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[p_1]$$

- ▶ Колл опцион на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[\max(p_1 - p_c, 0)]$$

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины
- ▶ Фьючерс на год

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины
- ▶ Фьючерс на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[p_1]$$

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины
- ▶ Фьючерс на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[p_1]$$

- ▶ Колл опцион на год

Расчет стоимости

- ▶ Выплата по деривативу является случайной величиной
- ▶ Нам нужно найти параметры этой случайной величины
- ▶ Фьючерс на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[p_1]$$

- ▶ Колл опцион на год

$$\text{Price} = \mathbb{E}[\max(p_1 - s, 0)]$$

Опционы в реальной жизни

Предположим мы тренер хоккейной команды и нашей команде хватает ничьи для победы в турнире.

Опционы в реальной жизни

Предположим мы тренер хоккейной команды и нашей команде хватает ничьи для победы в турнире. Проведем аналогию с финансами:

- ▶ Разница в счете — базовый актив
- ▶ При ничьей или победе мы заработаем 1, при поражении 0

Опционы в реальной жизни

Предположим мы тренер хоккейной команды и нашей команде хватает ничьи для победы в турнире. Проведем аналогию с финансами:

- ▶ Разница в счете — базовый актив
- ▶ При ничьей или победе мы заработаем 1, при поражении 0

Мы проигрываем -1 на последних минутах матча.

Опционы в реальной жизни

Предположим мы тренер хоккейной команды и нашей команде хватает ничьи для победы в турнире. Проведем аналогию с финансами:

- ▶ Разница в счете — базовый актив
- ▶ При ничьей или победе мы заработаем 1, при поражении 0

Мы проигрываем -1 на последних минутах матча.

Меняем вратаря на полевого игрока. Проанализируем это решение в нашей терминологии.

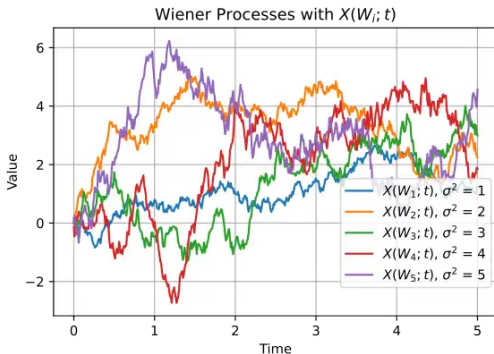
Как устроен прайсинг деривативов в банке

1. Математически находим “наиболее подходящие” свойства случайной величины цены базового актива
2. Считаем соответствующее данному деривативу матожидание — либо аналитически, либо численно

Примеры случайных процессов

Цены базовых активов моделируются как случайные процессы:

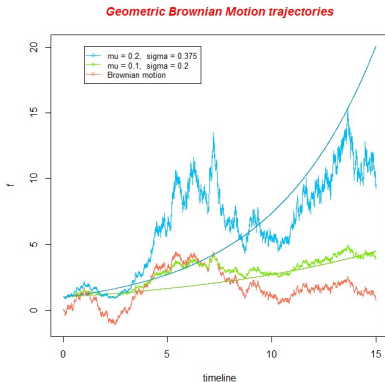
- ▶ Винеровский процесс (броуновское движение)



Примеры случайных процессов

Цены базовых активов моделируются как случайные процессы:

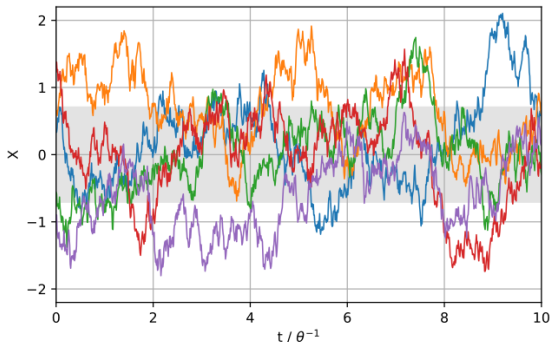
- ▶ Геометрическое броуновское движение



Примеры случайных процессов

Цены базовых активов моделируются как случайные процессы:

- ▶ Процесс Орнштейна-Уленбека



Исторические цены

► Евро/Доллар

\$1.60 per euro



Исторические цены

► Золото/Доллар



Прайсинг для конкретного случайного процесса

Бывает, что хоть случайный процесс и подобран, и матожидание можно написать матожидание, но аналитически его вычислить не получается.

В таком случае достаточно написать одну строчку кода:

```
import numpy as np

def sample(): return np.random.normal(0, 1)
def payoff(x): return max(x, 0)

np.mean([payoff(sample()) for i in range(1_000_000)])

0.3986359445406129
```

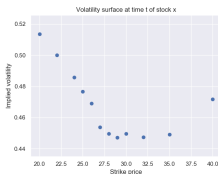
Однако, конечно бывают и куда более сложные случаи на которые уходят месяцы разработки.

Проблема “простых” процессов

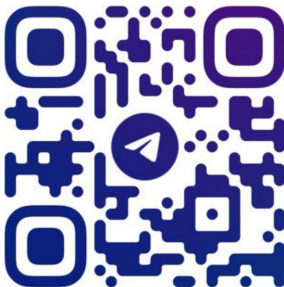
Для простых процессов, таких как GBM можно аналитически посчитать цену европейского колл-опциона.

$$\text{Price}(\sigma, \text{Strike})$$

Можно посмотреть на цены опционов на рынке и выразить σ



через Strike:



@VOROBIOV