Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

29. September 2008

Inhaltsverzeichnis

4 Analyse linearer Gleichstromnetzwerke

Betrachtet man die Strom/Spannungsbeziehungen energiespeichernder Netzwerkelemente, also von Kondensatoren und Spulen, so erscheinen darin *Zeitableitungen* der Spannungen bzw. der Ströme. Eine Analyse des Netzwerkes führt daher immer zu *Integrodifferentialgleichungen.* Für das Verstehen der grundsätzlichen Methoden zur Behandlung von Netzwerken kann dies vermieden werden, indem man zunächst nur Netzwerke mit Quellen und ohmschen Widerständen, das heißt *resistive Netzwerke* betrachtet. Beschränkt man sich weiters auch auf Quellen mit Gleichspannungen und Gleichströmen, so erhält man letztendlich reelle algebraische Gleichungssysteme, die dann noch mit geeigneten Methoden zu lösen sind. In diesem Fall werden alle im Netzwerk vorkommenden Ströme und Spannungen, die ja *zeitlich konstant* sind, durch Großbuchstaben dargestellt ($U_{R_1}, I, ...$).

4.1 Äquivalenz von Quellen

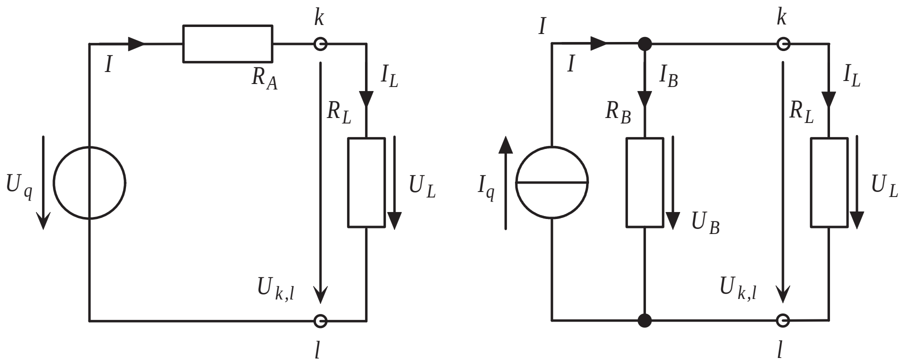


Abbildung 4.1: Äquivalenz von realen Quellen.

$$U_{k,l} = U_q \frac{R_L}{R_A + R_L} \qquad I_L = I_q \frac{R_B}{R_B + R_L}$$

$$I_L = \frac{U_{k,l}}{R_L} = \frac{U_q}{R_A + R_L} \qquad U_{k,l} = R_L I_L = R_B I_q \frac{R_L}{R_B + R_L}$$

$$\begin{aligned} \text{Äquivalenz, wenn} \quad R_A &= R_B = R_i \\ \text{und} \quad U_q &= R_i I_q \end{aligned}$$

$$I_L = I_q \frac{R_i}{R_i + R_L} \qquad U_{k,l} = U_q \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

Eine Spannungsquelle U_q mit einem Innenwiderstand R_i in Serie ist äquivalent zu einer Stromquelle I_q und einem parallelen Innenwiderstand R_i, wenn bei Verwendung des Verbraucherzählpfeilsystems (VZS) folgender Zusammenhang gilt.

$$U_q = R_i I_q \tag{4.1}$$

4.2 Zusammenschaltung von Quellen

Treten mehrere Quellen in einem Netzwerk auf, so können diese zusammengefaßt werden. Liegen mehrere Spannungsquellen in Serie, so werden die Teilspannungen unter Berücksichtigung der Zählpfeile addiert (Abb. 4.2(a)). Liegen mehrere Stromquellen parallel, so könne diese, wieder unter Berücksichtigung der Zählpfeile, zu einer Stromquelle zusammengefaßt werden(Abb. 4.2(b)).

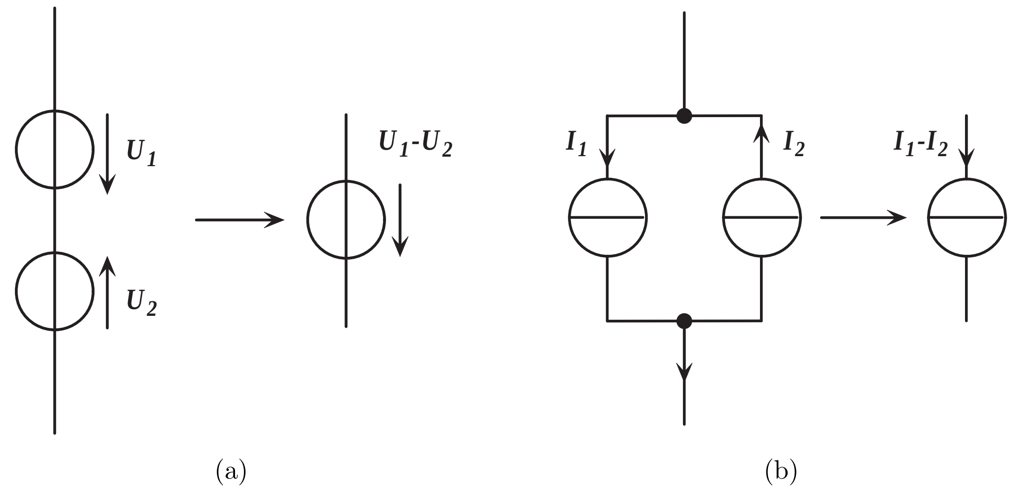


Abbildung 4.2: (a) Serienschaltung (b) Parallelschaltung

4.2.1 Quellenvervielfachung

Spannungsquellen können nur dann *parallel* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Quellenspannung besitzen (Abb. 4.3(a)). Stromquellen können nur dann in *Serie* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Stromstärke besitzen (Abb. 4.3(b)).

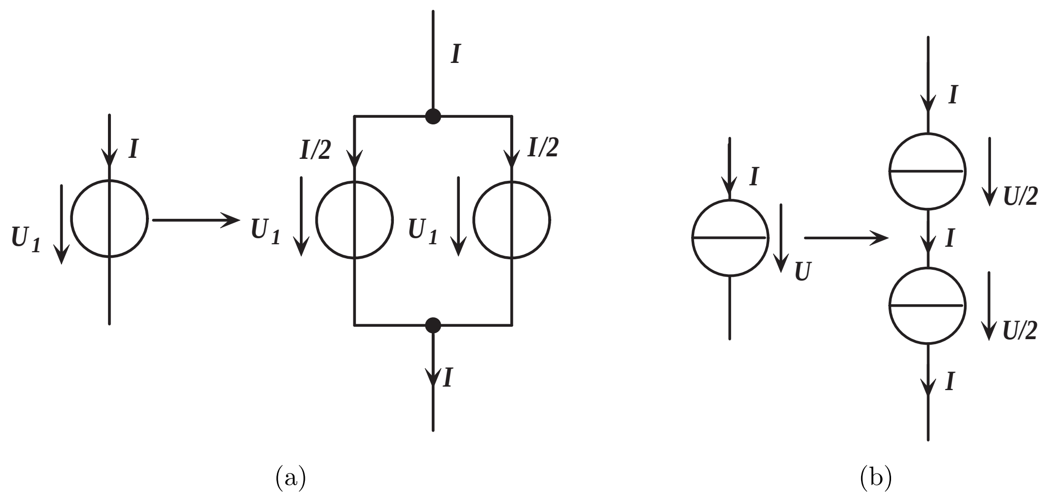


Abbildung 4.3: Quellenvervielfachung (a) Spannungsquellen (b) Stromquellen

4.3 Ersatzquellenverfahren

Sind in einem Netzwerk mehrere Quellen und Widerstände vorhanden, so können diese bezüglich zweier Knoten (k, l) im Netzwerk durch

- eine Spannunngsquelle U_{qA} mit einem seriellen Innenwiderstand R_A (*Thevenin-quelle*)
- eine Stromquelle I_{qA} mit einem parallelen Innenwiderstand R_A (*Nortonquelle*)

ersetzt werden (Abb. 4.4). Dabei ermittelt man die Quellenspannung U_{qA} der Erstzspan-

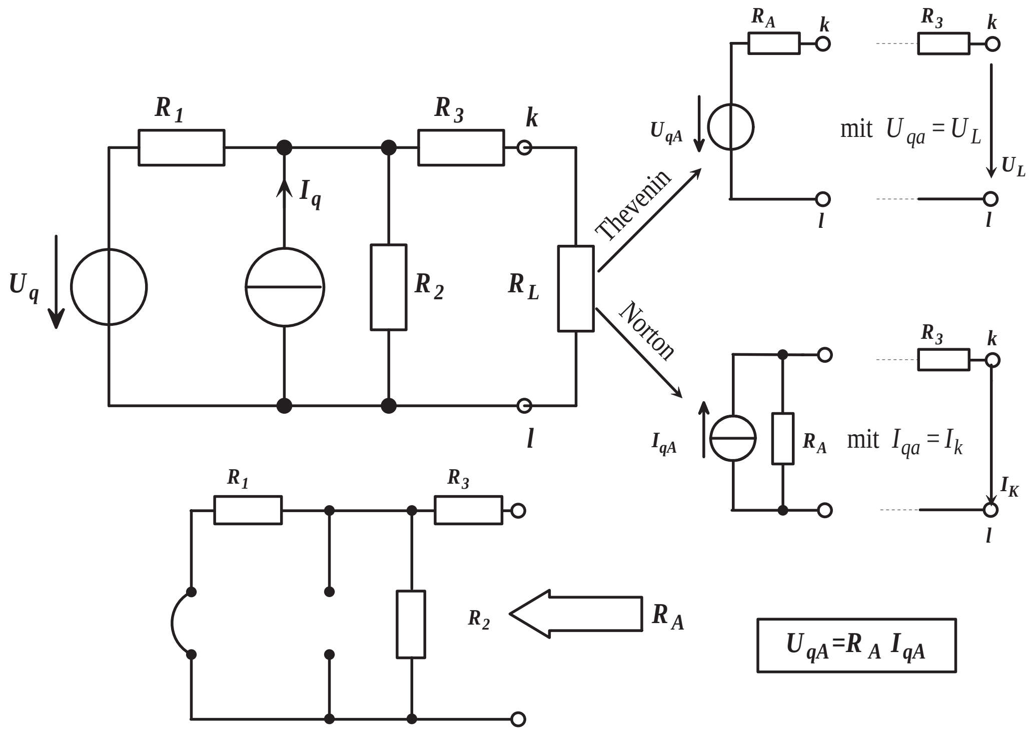


Abbildung 4.4: Thevenin- und Nortonquelle.

nungsquelle als *Leerlaufspannung* bezüglich der Klemmen (k, l), den Quellenstrom I_{qA} der Ersatzstromquelle als den *negativen Kurzschlußstrom* über die Klemmen (k, l) und den Innenwiderstand der Quelle als Gesamtwiderstand der zu ersetzenden Schaltung, wobei alle Spannungsquellen durch *Kurzschlüsse*, alle Stromquellen durch *Leerläufe* ersetzt werden. Zwischen diesen Größen gilt natürlich wieder der Zusammenhang.

$$U_{qA} = R_i I_{qA} \tag{4.2}$$

4.4 Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip

Sind in einem *linearen* Netzwerk mehrere Quellen (=Ursachen) vorhanden, die an irgendeiner Stelle des Netzwerkes einen Strom oder eine Spannung (=Gesamtwirkung) erzeugen, so läßt sich diese Gesamtwirkung auch als Summe der Einzelwirkungen, die jede Quelle für sich erzeugt, ermitteln (Abb. 4.5). In diesem Falle werden alle anderen Quellen durch ihre Innenwiderstände (Kurzschluß bei Spannungsquellen, Leerlauf bei Stromquellen) ersetzt.

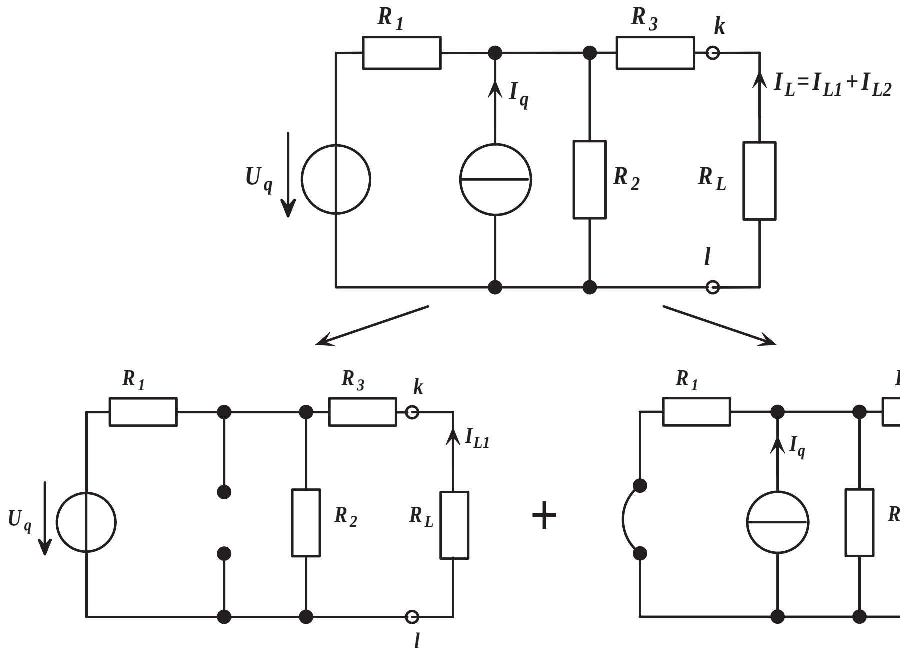


Abbildung 4.5: Überlagerungsprinzip.

Allgemein läßt sich z.B. die Gesamtspannung U_{R_j} an einem Widerstand R_j folgendermaßen als Summe der Wirkungen aller Quellen (n Spannungsquellen U_q, m Stromquellen I_q) darstellen

$$U_{R_j} = \sum_{k=1}^{n} c_k U_{qk} + \sum_{l=1}^{m} c_l I_{ql}, \tag{4.3}$$

wobei c_k und c_l entsprechende konstante Koeffizienten darstellen.

4.5 Das elektrische Netzwerk als Graph

4.5.1 Topologische Grundbegriffe

Die Lehre der Anordnung geometrischer Gebilde im Raum wird *Topologie* genannt. Die im Gleichstromfalle aus den Zweipolen *Widerstand*, *reale Quelle* und *ideale Quelle* zusammengesetzten elektrischen Netzwerke können meist zweidimensional dargestellt werden (*planare* Netzwerke).

Abbildung 4.6 zeigt ein Gleichspannungsnetzwerk mit 4 Quellen und 7 ohmschen Widerständen. Man erkennt in diesem Netzwerk k=5 Knoten und z=7 Zweige.

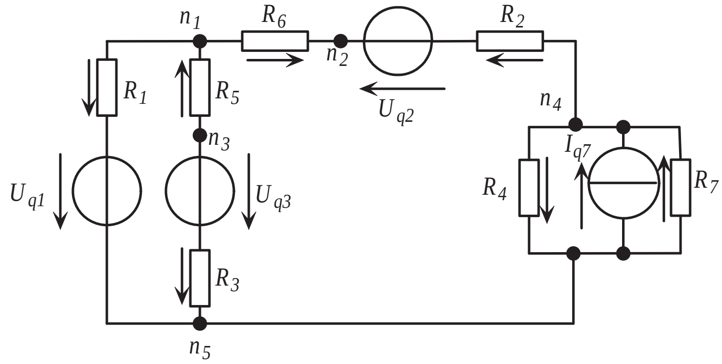


Abbildung 4.6: Gleichspannungsnetzwerk.

Zeichnet man nun nur diese Knoten und Zweige ohne elektrische Bauelemente, so erhält man den *Graphen* des Netzwerkes (Abb. 4.7 (a)). Ordnet man den Zweigen auch noch eine Richtung zu, so erhält man den *gerichteten Graphen* des Netzwerkes mit k=5 Knoten und z=7 Zweigen (Abb. 4.7 (b)).

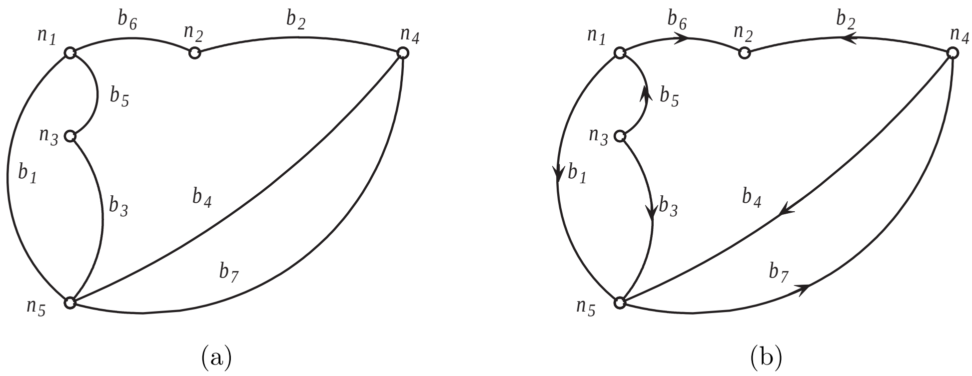


Abbildung 4.7: (a) Graph (b) gerichter Graph.

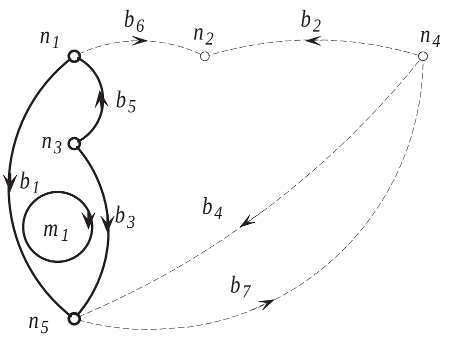
In einem *Knoten* beginnen oder enden Zweige. (Ausnahme: *isolierter Knoten*)

Der *Grad* eines Knotens entspricht der Anzahl der Zweige, die in ihm beginnen oder enden. Der Grad des Knotens n_1 in Abb. 4.7 (a) ist gleich 3.

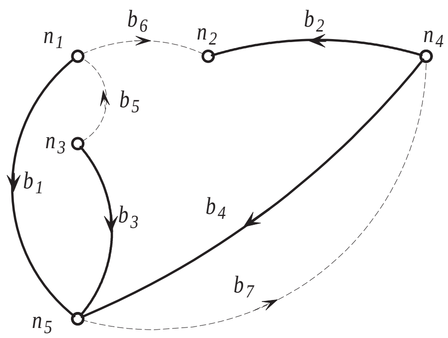
Ein *Pfad* ist ein Teilgraph.

Eine *Masche* m (Maschen m_1 in Abb. 4.8 (a)) ist ein Pfad, der geschlossen ist (Anfangs- und Endknoten sind identisch).

Ein *vollständiger Baum* t des Graphen (Abb. 4.8 (b)) ist zusammenhängend, verbindet alle Knoten und bildet keine Maschen. Es gibt mehr als einen vollständigen Baum. Die Zweige des Baumes nennt man *Baumzweige* (b_1, b_2, b_3 und b_4), die verbleibenden Zweige nennt man *Co-Baumzweige* oder *Maschenzweige* (b_5, b_6 und b_7). Man erhält immer $k-1$ Baumzweige und $z-(k-1)$ Co-Baumzweige.



(a)



(b)

Abbildung 4.8: (a) Masche m (b) vollständiger Baum t.

Eine *Schnittmenge* c (Abb. 4.9) teilt den Graphen in zwei, nicht zusammenhängende Teilgraphen, indem eine minimale Anzahl an Zweigen geschnitten wird. Jeder Schnittmenge wird eine Richtung zugeordent.

4.5.2 Fundamentales Schnittmengensystem und fundamentales Maschensystem

Fundamentale Schnittsysteme und fundamentale Maschensysteme lassen sich am einfachsten mit Hilfe eines *vollständigen Baumes* und des dazugehörigen *Co-Baumes* bilden.

Eine *fundamentale Schnittmenge* schneidet genau einen *Baumzweig* und sonst lauter Co-Baumzweige (Abb. 4.10 (a)). Mit diesem Baumzweig dürfen keine weiteren Schnittmengen gebildet werden. Das System dieser $(k-1)$ Schnittmengen ($(k-1)$ ist die Anzahl der Baumzweige) ist ein *fundamentales Schnittmengensystem.*

Eine fundamentale Masche besitzt genau einen *Co-Baumzweig* und sonst lauter Baum-

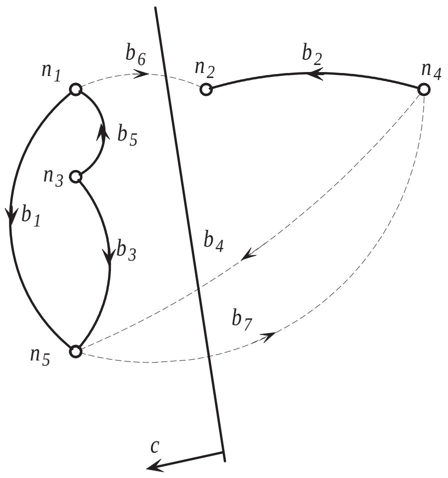
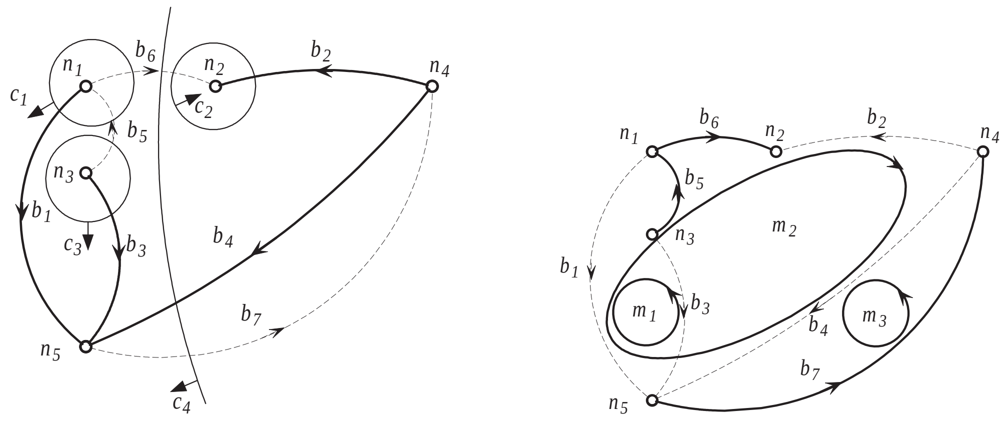


Abbildung 4.9: Schnittmenge c.

zweige (Abb. 4.10 (b)). Mit diesem Co-Baumzweig dürfen keine weiteren Machen gebildet werden. Das System dieser $z-(k-1)$ Maschen ($z-(k-1)$) ist die Anzahl der Co-Baumzweige) ist ein *fundamentales Maschensystem*.

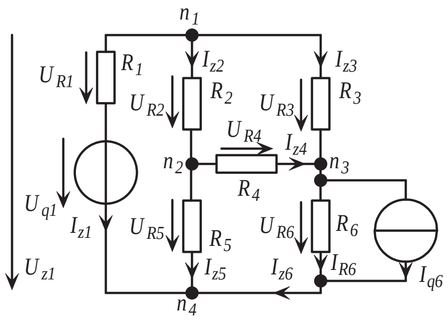


(a) (b)

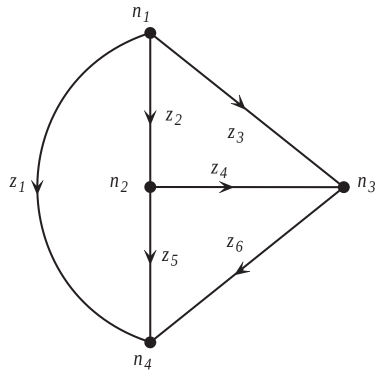
Abbildung 4.10: (a) fundamentale Schnittmengen (b) fundamentale Maschen.

4.6 Die Zweigstromanalyse

In einem Netzwerk mit z Zweigen (und k Knoten) gibt es in jedem Zweig j zwei unbekannte elektrische Größen, die Zweigspannung U_{zj} und den Zweigstrom I_{zj}. Im gesamten Netzwerk gibt es daher $2 \times z$ unbekannte Größen, zu deren Lösung man $2 \times z$ linear unabhängige Gleichungen benötigt. Abbildung 4.11 (a) zeigt ein Netzwerk mit vier Knoten (k=4) und sechs Zweigen (z=6), Abbildung 4.11 (b) zeigt den gerichteten Graphen dieses Netzwerkes. Im Zweig z_1 befindet sich eine Spannungsquelle U_{q1}, im Zweig z_6 eine Stromquelle I_{q6}.



(a)



(b)

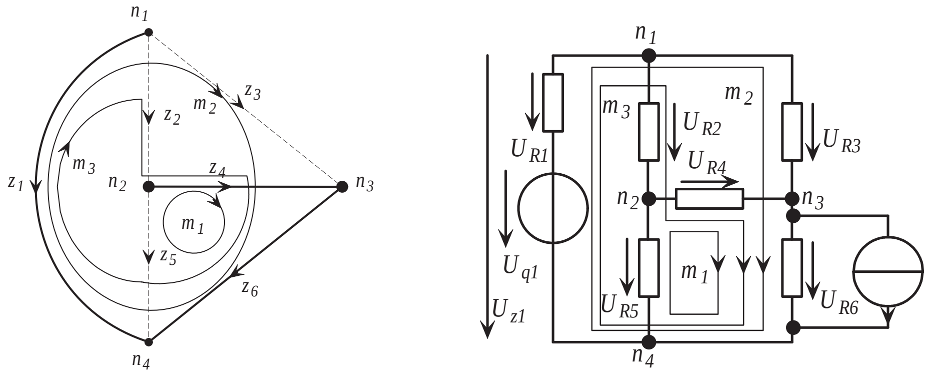
Abbildung 4.11: (a) Netzwerk (b) gerichteter Graph.

Zunächst wird der Knoten n_4 als Bezugsknoten gewählt (beliebig). Danach werden in den restlichen $k-1$ Knoten die Kirchhoff'schen Knotengleichungen formuliert.

$$
\begin{aligned}
n_1 &: \quad I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = 0 \\
n_2 &: \quad -I_{z2} + I_{z4} + I_{z5} = 0 \\
n_3 &: \quad -I_{z3} - I_{z4} + I_{z6} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Dann stellt man in den $z-(k-1)$ unabhängigen Maschen die Kirchhoff'schen Maschengleichungen auf. Um zu linear unabhängigen Maschen zu gelangen, ermittelt man zunächst einen vollständigen Baum. Danach verwendet man die fundamentalen Maschen (enthalten einen exklusiven Co-Baumzweig, sonst lauter Baumzweige), um zu den Maschengleichungen zu kommen (Abb. 4.12).

$$m_1 \quad : \quad U_{R4} - U_{R5} + U_{R6} = 0$$



(a) (b)

Abbildung 4.12: (a) Baum und fundamentale Maschen (b) Netzwerk mit Maschen.

$$
\begin{aligned}
m_2 &: \quad -U_{R1} + U_{R3} + U_{R6} = U_{q1} \\
m_3 &: \quad -U_{R1} + U_{R2} + U_{R4} + U_{R6} = U_{q1}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

In diesen Gleichungen wurde die Quellspannung U_{q1} bereits auf die rechte Seite gebracht. Verwendet man noch die Strom/Spannungsbeziehungen an den passiven Elementen

$$U_{Rj} = R_j I_{Rj} \quad j = 1, \cdots, 6 \tag{4.6}$$

in den Maschengleichungen, so erhält man nachfolgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 &: \quad R_4 I_{R4} - R_5 I_{R5} + R_6 I_{R6} = 0 \\
m_2 &: \quad -R_1 I_{R1} + R_3 I_{R3} + R_6 I_{R6} = U_{q1} \\
m_3 &: \quad -R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} + R_6 I_{R6} = U_{q1}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Um auch in den Gleichungen (4.7) die Zweigströme I_{zj} als unbekannte Größen zu erhalten, verwendet man die Knotenregel im Zweig z_6

$$I_{z6} = I_{q6} + I_{R6}, \tag{4.8}$$

ersetzt in den restlichen Zweigen

$$I_{zj} = I_{Rj} \quad j = 1, \cdots, 5 \tag{4.9}$$

und erhält folgende Maschengleichungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 &: \quad R_4 I_{z4} - R_5 I_{z5} + R_6 I_{z6} = R_6 I_{q6} \\
m_2 &: \quad -R_1 I_{z1} + R_3 I_{z3} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6} \\
m_3 &: \quad -R_1 I_{z1} + R_2 I_{z2} + R_4 I_{z4} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Schreibt man (4.10) und (3.18) als Gleichungssystem, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur eindeutigen Berechnung der gesuchten Zweigströme $\mathbf{I}_z = \{I_{z1}, \cdots, I_{z6}\}^T$.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & R_6 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \\ -R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} I_{z1} \\ I_{z2} \\ I_{z3} \\ I_{z4} \\ I_{z5} \\ I_{z6} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} R_6 I_{q6} \\ U_{q1} + R_6 I_{q6} \\ U_{q1} + R_6 I_{q6} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

4.7 Das Knotenspannungsverfahren

Die Knotenspannungsanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von z Gleichungen auf $k-1$ Gleichungen. Ausgangspunkt ist das nachfolgend dargestellte Netzwerk.

Das Netzwerk wird von drei realen Spannungsquellen $((U_{q1}, R_1), (U_{q4}, R_4), (U_{q6}, R_6))$ und einer realen Stromquelle (I_{q8}, R_8) versorgt. Im ersten Schritt werden alle Zweigströme $(I_{z1}, I_{z2}, \cdots I_{z9})$ festgelegt.

Im Anschluß werden alle Spannungsquellen (nur für die realen möglich) in Stromquellen umgewandelt. Wie bei der Quellenäquivalenz gezeigt, wird die *Richtung* der neuen Quelle geändert und es gilt folgender Zusammenhang: $U_{qi} = R_i I_{qi}$.

Quelle 1:	$I_{q1} = U_{q1}/R_1$	Quelle 4:	$I_{q4} = U_{q4}/R_4$
Quelle 6:	$I_{q6} = U_{q6}/R_6$	Quelle 8:	I_{q8}

Danach wird ein Knoten des Netzwerkes zum Bezugsknoten erklärt (Knoten 5 in Abbildung 4.13, oben). Von jedem verbleibenden Knoten zu diesem Bezugsknoten wird nun eine sogenannte *Knotenspannung* definiert $(U_{n1} - U_{n4})$. Nun stellt man in jedem dieser $k-1$ Knoten die Kirchhoffsche Knotengleichung auf.

$$\begin{aligned} -I_{q1} - I_1 + I_{z2} + I_{z3} &= 0 \\ -I_{z3} - I_{q4} - I_4 + I_{z5} &= 0 \\ -I_{z2} + I_{q6} + I_6 + I_{z7} &= 0 \\ -I_{q6} - I_6 - I_{z7} - I_{q8} - I_8 + I_{z9} &= 0 \end{aligned}$$

Die Ströme, die über die Widerstände fließen, werden durch die Spannungsabfälle an den Widerständen ausgedrückt, die bekannten Quellstöme auf die rechte Seite gebracht.

$$-\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_{z3}}{R_3} = I_{q1}$$

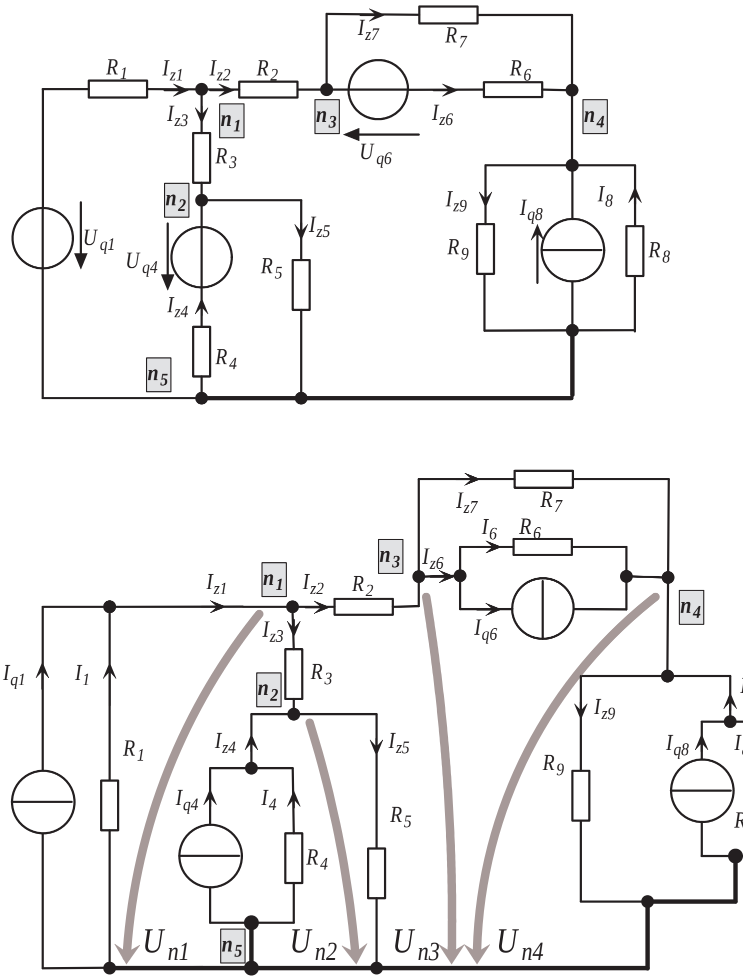


Abbildung 4.13: Ausgangsschaltung und Schaltbild nach Umwandlung der realen Spannungsquellen.

$$\begin{aligned}
-\frac{U_{z3}}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_{z5}}{R_5} &= I_{q4} \\
-\frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_6}{R_6} + \frac{U_{z7}}{R_7} &= -I_{q6} \\
-\frac{U_6}{R_6} - \frac{U_{z7}}{R_7} - \frac{U_{z8}}{R_8} + \frac{U_{z9}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
\end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Spannungsabfälle an den Widerständen durch die Knotenspannungen ersetzt.

$$\begin{aligned}
U_1 &= -U_{n1} \\
U_{z2} &= U_{n1} - U_{n3} \\
U_{z3} &= U_{n1} - U_{n2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_4 &= -U_{n2}\\
U_{z5} &= U_{n2}\\
U_6 &= U_{n3} - U_{n4}\\
U_{z7} &= U_{n3} - U_{n4}\\
U_{z8} &= -U_{n4}\\
U_{z9} &= U_{n4}
\end{aligned}$$

Die Knotenspannungen werden danach in die Knotengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} &= I_{q1}\\
-\frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} + \frac{U_{n2}}{R_4} + \frac{U_{n2}}{R_5} &= I_{q4}\\
-\frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} &= -I_{q6}\\
-\frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} - \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} + \frac{U_{n4}}{R_8} + \frac{U_{n4}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
\end{aligned}$$

Faßt man die Koeffizienten bei den einzelnen Knotenspannungen zusammen, so erhält man folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned}
U_{n1}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) - U_{n2}\frac{1}{R_3} - U_{n3}\frac{1}{R_2} &= I_{q1}\\
-U_{n1}\frac{1}{R_3} + U_{n2}(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}) &= I_{q4}\\
-U_{n1}\frac{1}{R_2} + U_{n3}(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) - U_{n4}(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) &= -I_{q6}\\
-U_{n3}(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) + U_{n4}(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}) &= I_{q6} + I_{q8}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden.

$$\begin{bmatrix}
(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0\\
-\frac{1}{R_3} & (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}) & 0 & 0\\
-\frac{1}{R_2} & 0 & (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) & -(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7})\\
0 & 0 & -(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) & (\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9})
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U_{n1}\\ U_{n2}\\ U_{n3}\\ U_{n4} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} I_{q1}\\ I_{q4}\\ -I_{q6}\\ I_{q6} + I_{q8} \end{Bmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix auf der rechten Seite wird als *Knotenadmittanzmatrix* $[G_n]$ bezeichnet. In dem Fall, wenn keine idealen Spannungsquellen vorhanden sind oder gesteuerte Quellen noch nicht berücksichtigt wurden, können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden.

- Die Matrix ist quadratisch und symmetrisch
- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Leitwerte an dem Knoten, der dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: negative Koppelleitwerte zwischen zwei Knoten

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Stromquellen, die zum entsprechenden Knoten gehören, und zwar

- + I_q, wenn der Quellenstrom zum betreffenden Knoten hinfließt
- - I_q, wenn der Quellenstrom vom betreffenden Knoten wegfließt

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von z (= Anzahl der Zweige) auf $k - 1$ (= Anzahl der Knoten weniger eins) reduziert, da die *Knotenspannungen* die Maschengleichungen implizit erfüllen.

4.8 Maschenstromverfahren

Die Maschenstromanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von z Gleichungen auf $z - (k - 1)$ Gleichungen. Als Beispiel dient das in Abb. 4.14 dargestellte Netzwerk, indem die Stromquelle I_{q8} bereits in eine Spannungsquelle umgewandelt wurde. Die *Richtung* der neuen Quelle wurde geändert und für die Umrechnung wurde $U_{q8} = R_8 I_{q8}$ verwendet. Im nächsten Schritt werden alle Zweigströme $(I_{z1}, I_{z2}, \cdots I_{z9})$ festgelegt. Für

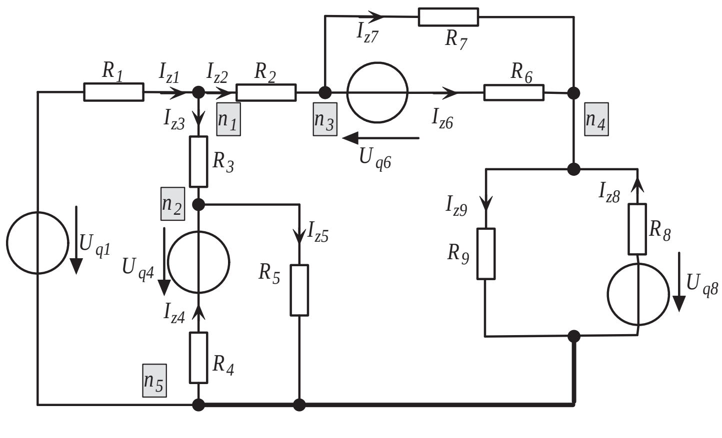


Abbildung 4.14: Netzwerk zum Maschenstromverfahren.

die Quellen gilt:

Quelle 1: U_{q1} Quelle 4: U_{q4}
Quelle 6: U_{q6} Quelle 8: $U_{q8} = I_{q8} * R_8$.

Danach müssen solche Maschen im Netzwerk definiert werden, dass die daraus resultierenden Maschengleichungen linear unabhängig werden. Dazu stellt man am besten den Graphen des Netzwerkes (Abb. 4.15) auf, bestimmt einen Baum und den zugehörigen Co-Baum und legt die Maschen derart fest, daß jede von ihnen *einen Co-Baumzweig* exklusiv und sonst lauter Baumzweige beinhaltet. Jeder Masche wird danach ein Machenstrom zugeordnet (I_{m1} bis I_{m5}).

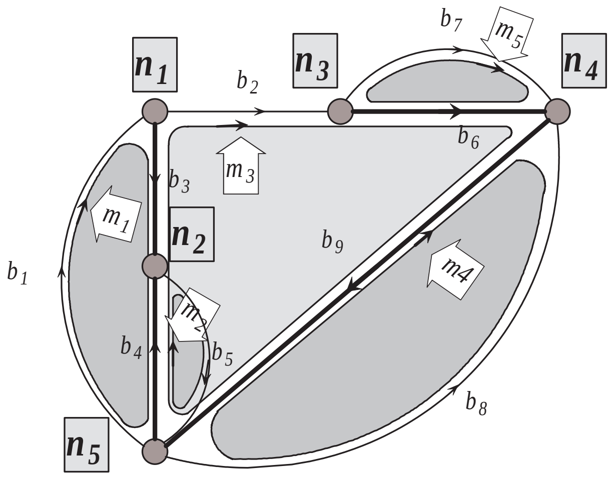


Abbildung 4.15: Vollständiger Graph, Baum t und Maschen m_1 - m_5.

Zunächst können in allen Zweigen die Zweigströme I_{zj} durch die Ströme I_j, die über die Widerstände R_j fließen, ersetzt werden. Nun stellt man in jeder dieser $z-(k-1)$ Maschen die Kirchhoff'sche Maschengleichung auf. Dabei sind die Spannungsabfälle an den Widerständen bereits als Funktion der Ströme I_j ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
-U_{q1} + U_{q4} + R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 &= 0\\
-U_{q4} + R_4 I_4 + R_5 I_5 &= 0\\
-U_{q4} - U_{q6} + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_9 I_9 &= 0\\
U_{q8} - R_8 I_8 - R_9 I_9 &= 0\\
U_{q6} - R_6 I_6 + R_7 I_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Ströme an den Widerständen durch die Maschenströme I_{m1} bis I_{m5} ersetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{m1} & & \\ I_2 &= I_{m3} & I_6 &= I_{m3} - I_{m5} \\ I_3 &= I_{m1} - I_{m3} & I_7 &= I_{m5} \\ I_4 &= -I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} & I_8 &= -I_{m4} \\ I_5 &= I_{m2} & I_9 &= I_{m3} - I_{m4}. \end{aligned}$$

Die Maschenströme werden danach in die Maschengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned} R_1 I_{m1} + R_3(I_{m1} - I_{m3}) - R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) &= U_{q1} - U_{q4} \\ R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + R_5 I_{m2} &= U_{q4} \\ R_2 I_{m3} - R_3(I_{m1} - I_{m3}) + R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + & \\ + R_6(I_{m3} - I_{m5}) + R_9(I_{m3} - I_{m4}) &= U_{q4} + U_{q6} \\ -R_8(-I_{m4}) - R_9(I_{m3} - I_{m4}) &= -U_{q8} \\ -R_6(I_{m3} - I_{m5}) + R_7 I_{m5} &= -U_{q6}. \end{aligned}$$

Fasst man die Koeffizienten für die einzelnen Maschenströme zusammen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_{m1}(R_1 + R_3 + R_4) - I_{m2}R_4 + I_{m3}(-R_3 - R_4) &= U_{q1} - U_{q4} \\ -I_{m1}R_4 + I_{m2}(R_4 + R_5) + I_{m3}R_4 &= U_{q4} \\ I_{m1}(-R_3 - R_4) + I_{m2}R_4 + I_{m3}(R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9) - & \\ -I_{m4}R_9 - I_{m5}R_6 &= U_{q4} + U_{q6} \\ -I_{m3}R_9 + I_{m4}(R_8 + R_9) &= -U_{q8} \\ -I_{m3}R_6 + I_{m5}(R_6 + R_7) &= -U_{q6}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -(R_3 + R_4) & 0 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 & 0 & 0 \\ -(R_3 + R_4) & R_4 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9 & -R_9 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_9 & R_8 + R_9 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 & R_6 + R_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \\ I_{m4} \\ I_{m5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{q1} - U_{q4} \\ U_{q4} \\ U_{q4} + U_{q6} \\ -U_{q8} \\ -U_{q6} \end{Bmatrix}. \tag{4.12}$$

Die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite wird als *Maschenimpedanzmatrix* $[\mathrm{Z}_m]$ bezeichnet. Sind keine idealen Spannungsquellen vorhanden, so können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden:

- die Matrix ist quadratisch und symmetrisch

- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Widerstände in der Masche, die dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: Koppelwiderstände zwischen zwei Maschen
  - positiv, wenn die Maschen in dieselbe Richtung zeigen
  - negativ, wenn die Maschen in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Spannungsquellen, die zur entsprechenden Masche gehören, und zwar

- $+ U_q$, wenn die Quellspannung entgegengesetzt zur Maschenrichtung zeigt
- - U_q, wenn die Quellspannung in Maschenrichtung zeigt.

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von z (= Anzahl der Zweige) auf $z - (k - 1)$ (=Anzahl der unabhängigen Maschen) reduziert, da die *Maschenströme* die Knotengleichungen implizit erfüllen.