Analysis 1 für Informatikstudien

3. Übungsblatt

1. Das Polynom

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120$$

besitzt vier reelle Nullstellen. Zwei der Nullstellen sind x = -2 und x = 4. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die beiden anderen Nullstellen. Hinweis: Polynomdivision.¹

2. Bestimmen Sie jene $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$, für die gilt

$$\frac{x-2}{x-1} < 3.$$

- 3. Im Skriptum auf S.24/25 wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist (anders gesagt: dass es keinen Buch p/q gibt so dass $(p/q)^2 = 2$ ist). Wenn man mit einem Beweis von genau derselben Struktur beweisen will dass $\sqrt{4}$ nicht rational ist (was natürlich schiefgehen muss), warum klappt das dann nicht (an welcher Stelle exakt scheitert der "Beweis"?).
- 4. Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$ für $n \ge 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3 . Beweisen Sie außerdem unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes²

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$

5. Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ für $n \ge 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3 . Beweisen Sie außerdem unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Hinweis: Skriptum S. 12 (Beispiel 7 und Beispiel 8).

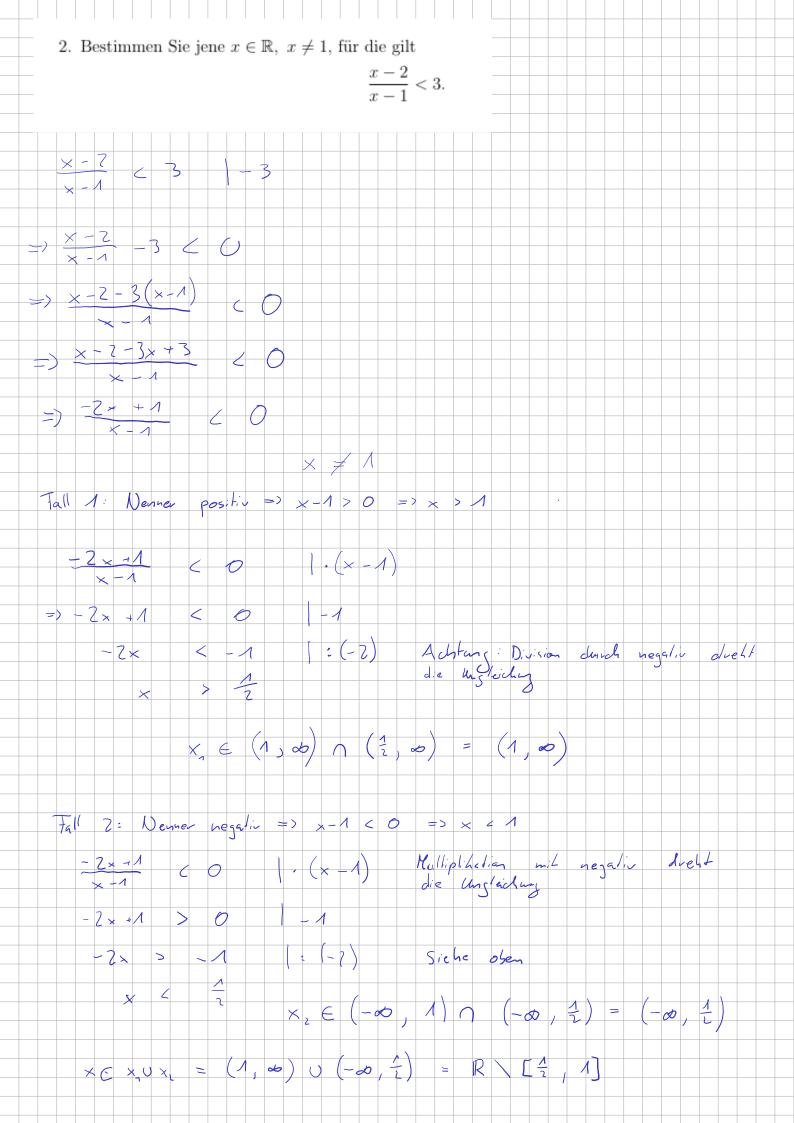
6. Beweisen Sie unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes dass

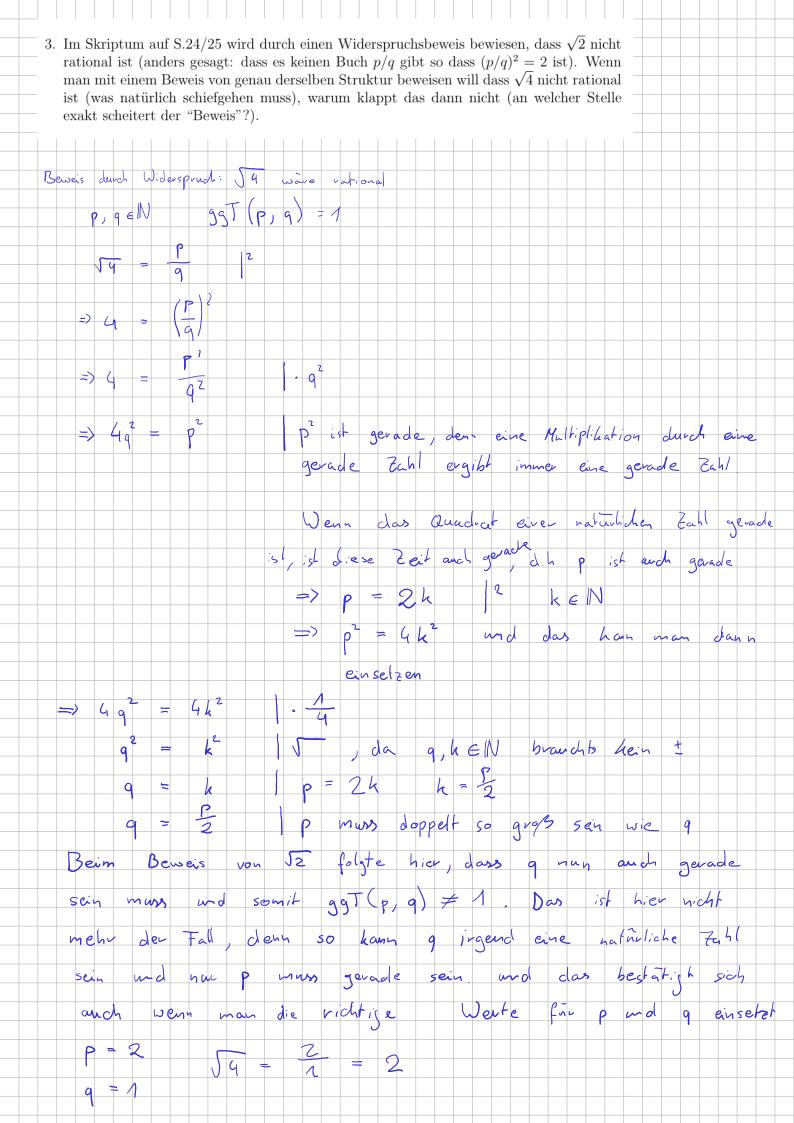
$$\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^3 = 8.$$

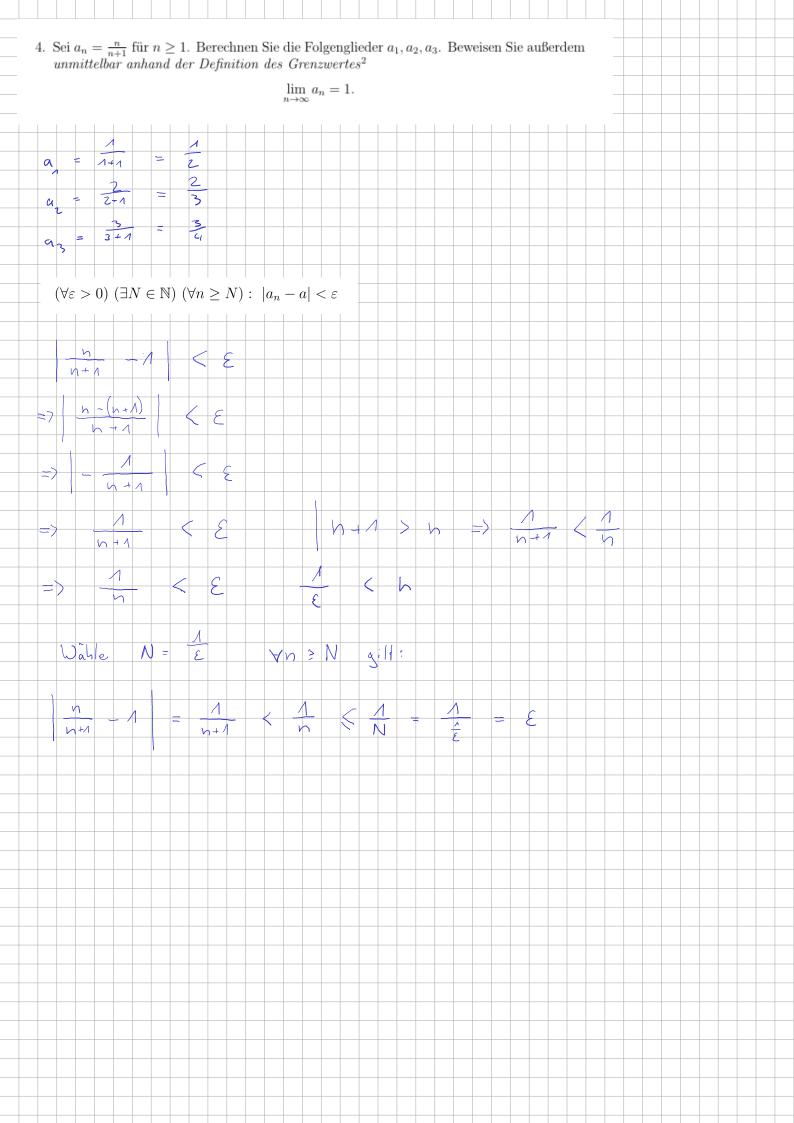
¹Polynomdivision wird in der Vorlesung nicht unterrichtet, wenn Sie das nicht können müssen Sie es selbstständig erlernen. Wir werden es immer wieder brauchen. Verwenden Sie für Bsp. 1 folgende Tatsache: Wenn α eine Nullstelle eines Polynoms p(x) ist, dann ist p(x) ohne Rest durch den Linearfaktor $(x - \alpha)$ teilbar.

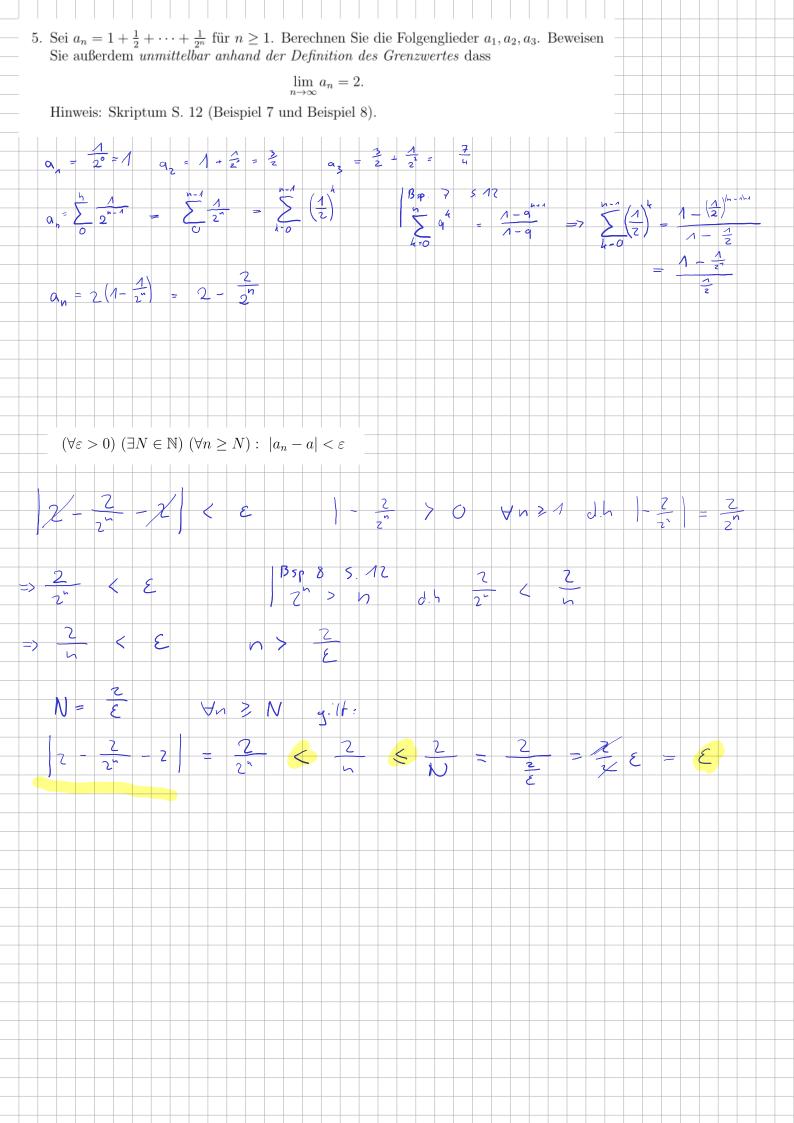
² "Unmittelbar anhand der Definition" (Definition 2.6.2) heißt: gegeben $\varepsilon > 0$, ich zeige dass es eine Zahl N gibt (indem ich einen geeigneten Wert von N angebe) so dass der Abstand von a_n zum Grenzwert kleiner als ε ist, für alle $n \geq N$.

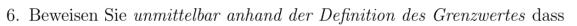
1. Das Polynom $p(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120$ besitzt vier reelle Nullstellen. Zwei der Nullstellen sind x = -2 und x = 4. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die beiden anderen Nullstellen. Hinweis: Polynomdivision.¹ x = -2 x = 4 Nullstellen bei $(x - 2)(x - 4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$ O Rest d.h. es gibt Nullstelle bei x = {-2, 4, (5, -3)}











$$\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^3 = 8.$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall n \ge N) : \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Fall 1: In genade
$$\Rightarrow$$
 $(-1)^3 = 1$

$$(2n + 1)^3 \quad 8 \quad \epsilon \quad \Rightarrow \quad |8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 - 8n^3| \quad \epsilon \quad \epsilon$$

$$= \frac{1}{h} + \frac{6}{h^2} + \frac{1}{h^3} \times \frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{h} \times \frac{\epsilon}{h} + \frac{1}{h} \times \frac{6}{h} \times \frac{6}{h} \times \frac{6}{h} \times \frac{6}{h} \times \frac{1}{h} \times \frac{1}{h}$$

Fall 2: n ungerade
$$\Rightarrow$$
 $(-1)^n = -1$

$$\frac{1(2n-1)^{3}-8}{n} < \varepsilon \implies \frac{8n^{3}-12n^{2}+6n-1-8n^{3}}{n^{3}} < \varepsilon \implies \frac{12n^{2}-6n+1}{n^{3}} < \varepsilon$$

$$-> 12^{2} - 6^{2} + 1$$

$$-> 12^{2} - 6^{2} + 1$$

$$-> 12 - 6 + 1$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$-> 12 + 13$$

$$\Rightarrow \frac{12}{h} + \frac{1}{h^2} + \frac{6}{h} + \frac{12}{h} + \frac{1}{h} + \frac{13}{h} \in \mathcal{E}$$

$$\left(2 + \frac{(+1)^{4}}{n}\right)^{3} - 8 = \frac{12n^{2} - 6n + 1}{n^{3}} < \frac{13}{n} < \frac{13}{n} = \frac{13}{13} \cdot \epsilon = \epsilon$$