

**Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung
Grundlagen der Elektrotechnik
(437.201) für
Elektrotechnik-Studierende und
Biomedical Engineering-Studierende**

Renhart Werner

29. September 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Das elektrische Feld	1
1.1	Die elektrische Ladung	1
1.2	Wirkung elektrischer Ladungen	2
1.3	Arbeit, Potential und Spannung	5
1.4	Materie im elektrischen Feld	7
1.5	Energie im elektrostatischen Feld	15
2	Gleichförmig bewegte Ladungen	17
2.1	Der elektrische Strom	17
2.2	Das Ohmsche Gesetz	20
2.3	Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes	24
2.4	Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld	25
2.5	Die Leistung im stationären Strömungsfeld	26
3	Gleichstromschaltungen	28
3.1	Der einfache elektrische Stromkreis	28
3.2	Zweipole	29
4	Analyse linearer Gleichstromnetzwerke	44
4.1	Äquivalenz von Quellen	45
4.2	Zusammenschaltung von Quellen	45
4.3	Ersatzquellenverfahren	47
4.4	Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip	48
4.5	Das elektrische Netzwerk als Graph	49
4.6	Die Zweigstromanalyse	52
4.7	Das Knotenspannungsverfahren	54
4.8	Maschenstromverfahren	57
5	Ungleichförmig bewegte Ladungen	61
5.1	Allgemeines	61
5.2	Periodische Wechselgrößen	61
5.3	Kennwerte sinusförmiger Größen	62
5.4	Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen	66

6	Das magnetische Feld	72
6.1	Grunderscheinungen	72
6.2	Kraft auf bewegte Ladungen	75
6.3	Magnetische Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter	77
6.4	Die Erregung des magnetischen Feldes	78
6.5	Materie im magnetischen Feld	83
6.6	Das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise	87
6.7	Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld	87
6.8	Wirkungen im Magnetfeld	88

6 Das magnetische Feld

6.1 Grunderscheinungen

Bereits im Altertum war die anziehende bzw. abstoßende Wirkung von in der Natur vorkommenden Eisenerzen bekannt (Magnetkies, Magnetstein). Der Name der **magnetischen** Wirkung entstand nach der Stadt *Magnesia* in Kleinasien, in deren Nähe derartige Erze gefunden wurden. Die Erde selbst ist ein weiterer natürlicher Magnet, dessen Wirkung beispielsweise bei der Magnetnadel eines Kompasses ausgenutzt wird. In Versuchen zeigte sich die stärkste Wirkung eines magnetischen Stabes (Anziehung, Abstoßung) an dessen beiden Enden. In der Mitte eines Stabes ist praktisch keine Wirkung festzustellen. Man spricht von einer neutralen Zone des Stabes. Die beiden Enden werden als **Pole** bezeichnet. Gemäß der Drehung der Magnetnadel eines Kompasses wird jenes Ende der Nadel, welches zum geografischen Nordpol zeigt, als Nordpol bezeichnet und vice versa. Bei Annäherung zweier Magnete kann folgendes festgestellt werden:

Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an!

Die magnetische Kraftwirkung ist davon unabhängig, ob sich der Magnet im Vakuum oder in Luft befindet. Überall im Raum kann jedoch eine Kraftwirkung festgestellt werden. Der Zustand des Raumes wird durch das **magnetische Feld** beschrieben.

6.1.1 Elektromagnetismus

Eine wesentliche Entdeckung machte der dänische Physiker Oerstedt 1820. Er erkannte, daß eine Magnetnadel, welche sich in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters befindet, abgelenkt wird. Damit gelangte man zu einem der wichtigsten Erkenntnisse der Elektrotechnik, daß nämlich eine bewegte elektrische Ladung (Strom) immer von einem Magnetfeld begleitet wird. Das magnetische Feld kann dabei vergrößert werden, wenn man die Stromstärke durch den Leiter erhöht. Ebenso erkannte man, daß die Stromumkehr im Leiter zu einer Umkehrung der Kraftwirkung führt. Das bedeutet, daß das magnetische Feld durch gerichtete Größen beschrieben werden muß.

6.1.2 Feldvektoren und Feldbilder

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß neben stromführenden elektrischen Leitern nur luftleerer Raum bzw. Luft vorhanden ist. Das magnetische Feld kann durch einen Vektor, welcher **magnetische Induktion** genannt und mit dem Symbol \vec{B} bezeichnet wird, beschrieben werden. Wie im Falle des elektrischen Feldes, kann auch die Darstellung des magnetischen Feldes mit Hilfe von Feldlinien in übersichtlicher Weise erfolgen. In Abbildung 6.1 ist die Magnetfeldverteilung eines stromdurchflossenen Leiters mit den Feldlinien dargestellt.

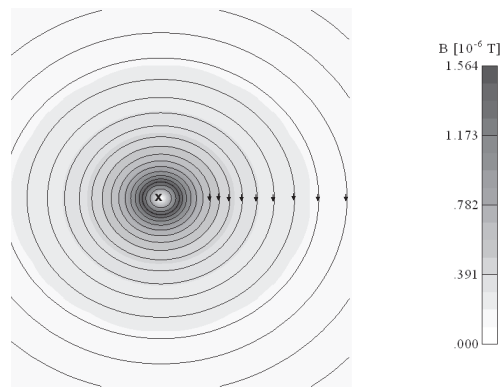


Abbildung 6.1: Magnetfeld einer stromführenden Leiters.

Zur Darstellung des Stromflusses im Leiter gilt folgende Konvention:

- ⊗ Der Strom fließt in die Zeichenebene hinein.
- ⊙ Der Strom fließt aus der Zeichenebene heraus.

Je dunkler die Hintergrundfarbe ist, umso größer ist der Betrag der magnetischen Induktion \vec{B} . Es besteht ein definierter Zusammenhang zwischen der Stromrichtung durch den Leiter und der Richtung der Feldlinien.

Dreht man eine Rechtsschraube in Richtung der bei den Feldlinien angegebenen Pfeile, so bewegt sich die Schraube in Richtung des Stromes (Rechtsschraubenregel)!

In Abbildung 6.2 ist für eine kreisförmige Stromschleife ein entsprechendes Feldbild dargestellt.

Das magnetische Feld einer Spule mit mehreren Windungen ergibt sich nachfolgend (Abbildung 6.3):

Auch Im Falle des magnetischen Feldes gibt es den Begriff Homogenität des Feldes. Im Vergleich zwischen den Abbildungen 6.2 und 6.3 ersieht man schon, daß durch die

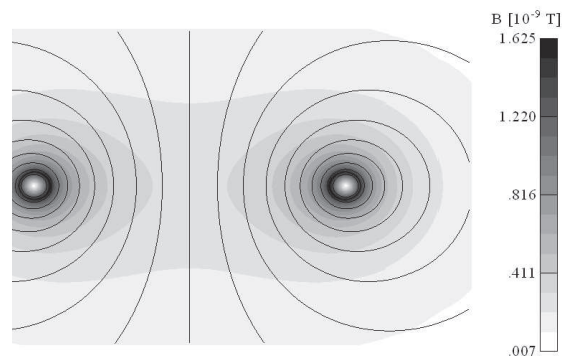


Abbildung 6.2: Magnetfeld einer kreisförmigen Stromschleife.

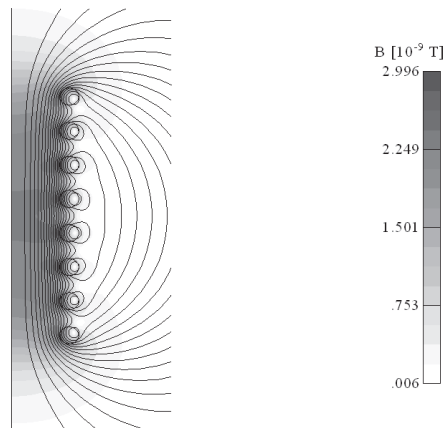


Abbildung 6.3: Magnetfeld einer Spule mit mehreren Windungen.

Verlängerung der Spule (von einer Windung auf acht Windungen) das Feld im Inneren der Spule dem homogenen Fall immer näher kommt. Je Länger die Spule, je dichter bewickelt und je dünner sie ist, umso *homogener* wird das Feld werden.

6.1.3 Vergleich zum elektrischen Feld

Aus den Felddarstellungen kann man einen wesentlichen Unterschied zu den Feldbildern des elektrischen Feldes erkennen. Im elektrischen Feld beginnen und enden die Feldlinien bei den Ladungen (Quellen und Senken).

Die Feldlinien der magnetischen Induktion \vec{B} sind immer in sich geschlossen !

Man kann daraus ableiten, daß es im Gegensatz zum elektrischen Feld keine magnetischen Ladungen gibt. Das magnetische Feld ist stets **quellenfrei**.

6.2 Kraft auf bewegte Ladungen

Der magnetische Feldvektor \vec{B} wird aus der Kraftwirkung des Feldes abgeleitet. Dazu betrachte man folgendes Experiment. Unter der Annahme, daß kein elektrisches Feld \vec{E} vorhanden ist, wird ein Probelteilchen mit der positiven Ladung Q_0 in ein homogenes magnetisches Feld \vec{B} mit einer Geschwindigkeit \vec{v} eingebracht (Abbildung 6.4):

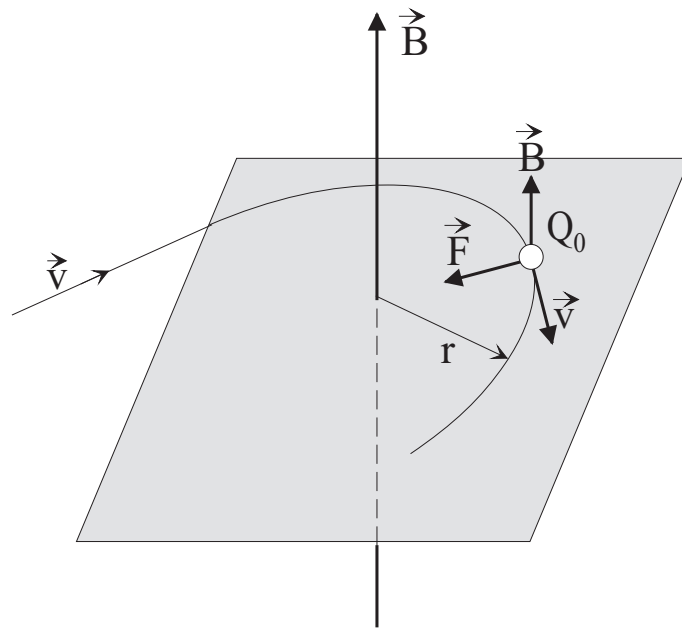


Abbildung 6.4: Kraftwirkung auf eine bewegte Ladung Q_0 .

Man stellt nun fest, daß die Probeladung Q_0 unter dem Einfluß des magnetischen Feldes eine Ablenkung aus der ursprünglich geraden Bahn in eine Kreisbahn erfährt. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt dabei immer gleich. Auf die Probeladung Q_0 wirkt folglich eine Kraft gleichbleibender Größe in radialer Richtung zur Mitte eines gedachten Kreismittelpunktes. Schießt man hingegen die Probeladung Q_0 in gleicher oder gegengleicher Richtung zur Richtung des Magnetfeldes ein, so erfolgt **keine** Kraftwirkung auf Q_0 . Die Größe der Kraft \vec{F} kann aus dem Radius r der Bahnkurve zusammen mit der Geschwindigkeit \vec{v} der Ladung und deren Masse m bestimmt werden. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$|\vec{F}| = m \frac{|\vec{v}|^2}{r}. \quad (6.1)$$

Aus diesem Experiment wird deutlich, daß bei bekannter Masse und bekannter Geschwindigkeit eines Teilchens durch die Messung des Halbmessers r der Bahnkurve die Größe der Kraft F bestimmt werden kann. Weitere Versuche mit demselben Teilchen (gleichbleibende Masse m), mit jedoch unterschiedlicher Ladung und verschiedenen Geschwindigkeiten ergeben folgende Proportionalität:

$$|\vec{F}| = Q_0 |\vec{v}| |\vec{B}|. \quad (6.2)$$

Mit dem Wissen der sich ergebenden Richtung der Kraft aus dem Experiment kann unter Verwendung des vektoriellen Kreuzproduktes die Definitionsgleichung für den magnetischen Vektor \vec{B} gefunden:

$$\vec{F} = Q_0(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.3)$$

In der folgenden Abbildung wird nochmals die Richtung der Kraftwirkung verdeutlicht: Die Einheit der magnetischen Induktion \vec{B} ergibt sich aus

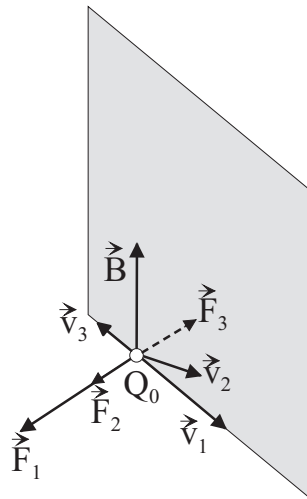


Abbildung 6.5: Bestimmung der Kraftrichtung auf eine Ladung Q_0 in einem Punkt P.

$$\begin{aligned} [\vec{B}] &= \frac{[\vec{F}]}{[Q][\vec{v}]} = \left[\frac{N}{As \frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{VAs}{Am} = \frac{Vs}{m^2} \right] \\ [\vec{B}] &= \left[\frac{Vs}{m^2} = T \right] \quad \dots \quad Tesla \\ [1 T] &\hat{=} [10^4 G] \quad \dots \quad Gau\beta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die Einheit *Gauß* wird nicht mehr häufig verwendet. In der Größenordnung von einem *Gauß* liegt das Magnetfeld der Erde. Im Elektromaschinenbau werden magnetische Induktionswerte im Bereich um 1 *Tesla* verwendet. Bei supraleitenden Luftspulen erreicht

man bis zu 4 *Tesla*. Aufgrund der Tatsache, daß die magnetische Kraft stets senkrecht zur Richtung der Bewegung des geladenen Teilchens steht, wird keine Arbeit an der Ladung verrichtet. Andernfalls müßte sich der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ändern. Folglich gilt:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (6.5)$$

Bei Vorhandensein einer elektrischen Feldstärke \vec{E} und eines Magnetfeldes \vec{B} überlagern sich die Kraftwirkungen aus den unterschiedlichen Feldern zu

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E} + Q_0 (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.6)$$

Diese Beziehung wird als **Lorentz-Gleichung** bezeichnet [Hendrick A. Lorentz, holländischer Physiker]. In dieser Beziehung wird der erste Ausdruck Coulomb-Kraft, der zweite als Lorentz-Kraft benannt. Mit den nun bekannten Beziehungen der magnetischen Kraftauswirkung auf bewegte Ladungen kann die Auswirkung auf stromdurchflossene Leiter beschrieben werden.

6.3 Magnetische Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter

Ein zylinderförmiger Draht wird von einem Strom I durchflossen, wobei sich der Leiter in einem Magnetfeld \vec{B} befindet (Abbildung 6.6). Auf jede, sich mit der Driftgeschwin-

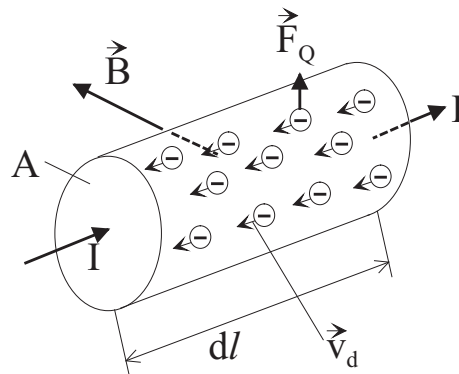


Abbildung 6.6: Teil eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld.

digkeit \vec{v}_d bewegendes Ladung der Größe $Q = -e$ wird eine Kraft \vec{F}_q ausgeübt.

$$\vec{F}_q = -e (\vec{v}_d \times \vec{B}). \quad (6.7)$$

Bei einer Ladungsträgerdichte N [Ladungen pro Volumseinheit] und dem Drahtstück der differentiellen Länge dl mit dem Querschnitt A ergibt sich die Summe aller Einzelkräfte \vec{F}_q zu

$$d\vec{F} = NA dl \vec{F}_q = -NAe (\vec{v}_d \times \vec{B}) dl. \quad (6.8)$$

Mit den bekannten Größen

$$\begin{aligned} \rho &= -Ne \\ \vec{J} &= \rho \vec{v}_d \\ dV &= A dl \end{aligned}$$

folgt daraus:

$$d\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B}) dV. \quad (6.9)$$

Die Kraft pro Volumseinheit des Drahtes ergibt sich damit aus dem Kreuzprodukt der Stromdichte \vec{J} mit der magnetischen Induktion \vec{B} . Unter Zuhilfenahme des Richtungsvektors $d\vec{l}$ der Länge dl , in Richtung der Stromdichte \vec{J} zeigend und der Berücksichtigung, daß die Flächenrichtung von \vec{A} in dieselbe Richtung wie $d\vec{l}$ weist, kann Gleichung 6.9 folgend umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} dV \vec{J} &= \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} &= I d\vec{l} \\ d\vec{F} &= I(d\vec{l} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Bezieht man Gleichung 6.11 auf den Betrag dl , erhält man schließlich:

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = I\left(\frac{d\vec{l}}{dl} \times \vec{B}\right) = I(\vec{e}_l \times \vec{B}). \quad (6.11)$$

6.4 Die Erregung des magnetischen Feldes

Aus dem Bisherigen haben wir die qualitative Wirkung, die Kraftwirkung des Magnetfeldes diskutiert und daraus die magnetische Induktion definiert. Die Abhängigkeit der Größe des Magnetfeldes vom verursachenden Strom wird im Folgenden anhand eines geraden Stromfadens gefunden.

6.4.1 Das magnetische Feld eines Stromfadens

Ist die Annahme gültig, daß ein stromführender Leiter einen sehr kleinen Durchmesser hat im Verhältnis zu dessen Länge, so spricht man von einem **Stromfaden**. Von einem derartigen Leiter wissen wir bereits, daß die Feldlinien durch konzentrische Kreise um den Stromfaden nachgebildet werden können. Die Richtung wurde der Rechtsschraubenregel entsprechend zugeordnet. In der folgenden Untersuchung wird noch der Einfluß der Stromstärke I auf die Größe des Feldes und dessen Abhängigkeit vom Radius r im Experiment ermittelt. Die prinzipielle Anordnung ist in Abbildung 6.7 dargestellt: Drei

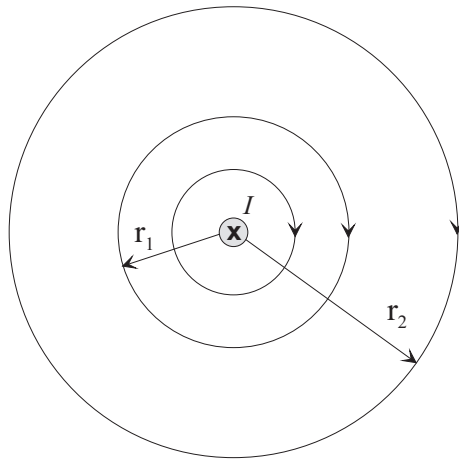


Abbildung 6.7: Magnetfeld eines Stromfadens.

wichtige Aussagen können aus dieser Anordnung erkannt werden:

1. Entlang der konzentrischen Kreise ist der Betrag der magnetischen Induktion $|\vec{B}|$ immer gleich. Dies kann beispielsweise durch eine Magnetnadel nachvollzogen werden.
2. Auf den unterschiedlichen Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 sind die Beträge der $|\vec{B}|$ magnetischen Induktion umgekehrt proportional den Radien.
3. Eine Änderung des Stromes I hat eine proportionale Änderung der magnetischen Induktion zur Folge.

Zusammenfassend können diese Erfahrungstatsachen in der Beziehung

$$|\vec{B}| = k \frac{I}{r}. \quad (6.12)$$

Der Proportionalitätsfaktor wird unter Einführung der sogenannten **Permeabilitätskonstanten** μ_0 definiert und für den Betrag der magnetischen Induktion ergibt sich

hernach:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am} \right] \\ k &= \frac{\mu_0}{2\pi} \\ |\vec{B}| &= \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\end{aligned}\tag{6.13}$$

In ähnlicher Weise zum elektrischen Feld wird auch hier eine weitere vektorielle Größe definiert, um später auch die Materialeigenschaften des Raumes, welche ungleich denen von Vakuum bzw. Luft sind, berücksichtigen zu können. Dazu wird die magnetische Erregung \vec{H} definiert

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.\tag{6.14}$$

Der Vektor \vec{H} wird, historisch bedingt, häufig als magnetische Feldstärke, analog zur elektrischen Feldstärke \vec{E} bezeichnet. An einem beliebigen Ort können somit die Ursache durch die magnetische Erregung \vec{H} und die Wirkung durch die magnetische Induktion \vec{B} beschrieben werden. Aus der Definitionsgleichung für \vec{H} ergibt sich die magnetische Erregung des Fadenstromes zu

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r} \left[\frac{A}{m} \right].\tag{6.15}$$

6.4.2 Magnetische Spannung und Durchflutung

In Analogie zum elektrischen Feld kann auch hier eine Spannung, die **magnetische Spannung** U_{mag} aus dem Integral der magnetischen Erregung \vec{H} entlang des Weges l

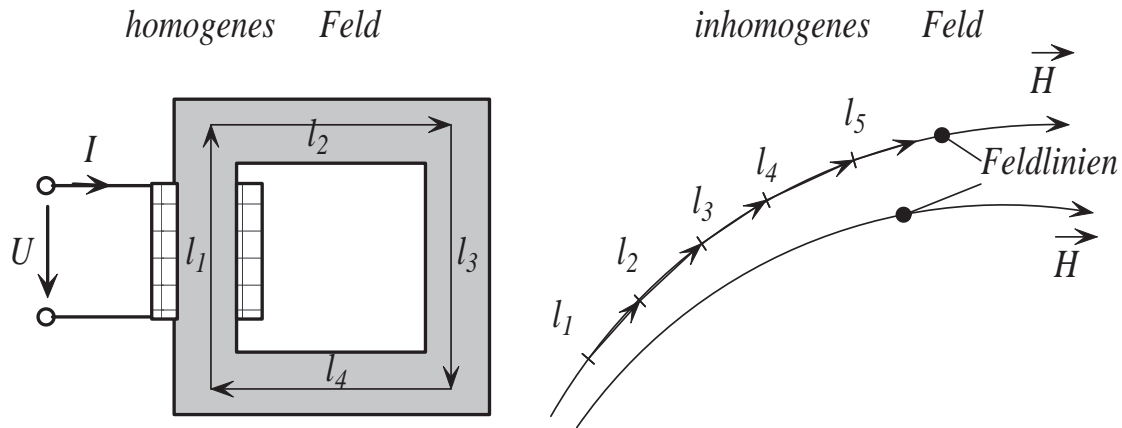
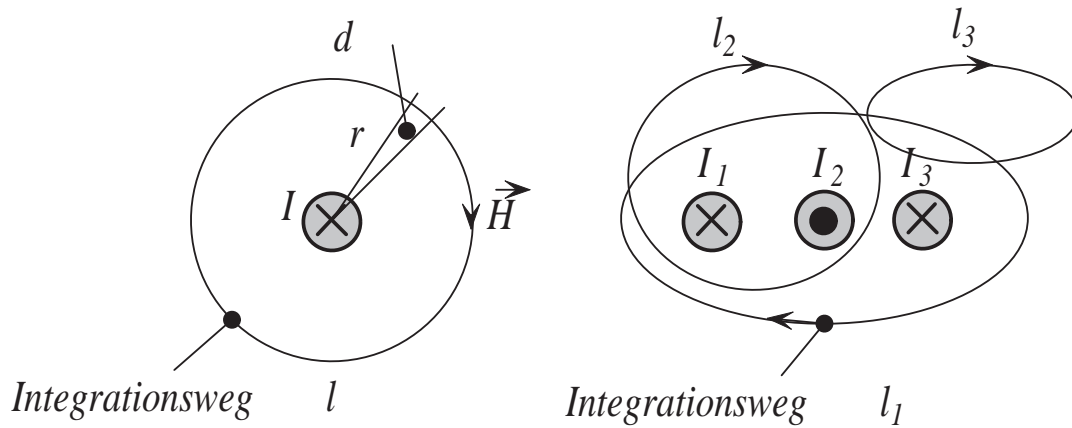
$$U_{mag} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{s}\tag{6.16}$$

berechnet werden. Im Falle eines homogenen Magnetfeldes kann, bei Integration entlang einer Feldlinie, das vektorielle In-Produkt durch die Skalare der parallel gerichteten Größen ersetzt werden, sodaß für n Wegstücke

$$U_{mag} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \sum_{i=1}^n H_i l_i\tag{6.17}$$

gilt (Abbildung 6.8, links). Die Einheit der magnetischen Spannung ist das Ampere [A].

Betrachtet man beispielsweise die schon beschriebene Magnetfeldverteilung eines Stromfadens und integriert dabei entlang einer **geschlossenen** Feldlinie (ist **nur** in diesem Falle ein Kreis), so erhält man den Strom I (Abb. 6.9, links).


 Abbildung 6.8: Integration von \vec{H} entlang eines Weges l .

 Abbildung 6.9: Integration von \vec{H} entlang eines Weges l , Durchflutungssatz.

Mit Gleichung 6.15 wird

$$\oint_{\varphi=0}^{2\pi} H_{\varphi} r d\varphi = \oint_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = I \quad (6.18)$$

Legt man nun N Stromfäden zusammen und führt wieder die Integration über eine geschlossene Feldlinie aus, so erhält man daraus $N I$. Dieses Produkt aus $N I$ wird als Durchflutung Θ bezeichnet.

$$\Theta = \Sigma I = N I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad [A] \quad (6.19)$$

Bei Leitern mit endlichem Radius bzw. endlichem Querschnitt ergibt sich der Gesamtstrom I auch aus dem Integral der Stromdichte \vec{J} über den Querschnitt A .

6.4.3 Der Durchflutungssatz

Mit dem **Durchflutungssatz** wird das geschlossene Wegintegral oder Umlaufintegral über die magnetische Erregung \vec{H} allgemein beschrieben:

$$U_{mag} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{eingeschl.}} I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (6.20)$$

Wendet man dies auf die in der Abb. 6.9, rechts dargestellten, beliebig gewählten geschlossenen Wege l_1 , l_2 und l_3 an so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_1 + I_3 - I_2 \\ \oint_{l_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_1 - I_2 \\ \oint_{l_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= 0 \end{aligned}$$

Integriert man über einen geschlossenen Weg, welcher keinen stromführenden Leiter umfaßt, so ergibt dieses Integral stets den Wert **N U L L** !

Der Durchflutungssatz gilt immer, sowohl für homogene als auch inhomogene Felder und auch bei Anwesenheit beliebiger Materie. Gleichung 6.20 besagt weiter, daß die magnetische Erregung die Durchflutung wie Wirbel umschließt. **Die Durchflutung Θ stellt die Wirbel des magnetischen Feldes dar.**

6.4.4 Der magnetische Fluß Φ

In völliger Analogie zum elektrischen Strömungsfeld ist es auch hier sinnvoll, eine integrale Größe zur Beschreibung der magnetischen Strömung zu definieren. Der **magnetische Fluß Φ** , ist folgend definiert:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \left[\frac{Vs}{m^2} m^2 = Vs = Wb \right] \quad \dots \quad \text{Weber} \quad (6.21)$$

Der magnetische Fluß durch einen Querschnitt A entspricht der Integration der magnetischen Induktion über diesen Querschnitt A . Die magnetische Induktion \vec{B} wird daher oftmals als **magnetische Flußdichte** bezeichnet. Der magnetische Fluß Φ ist eine **skalare** Größe!

6.5 Materie im magnetischen Feld

Bei sehr vielen praktischen Anwendungen ist es nicht ausreichend, den magnetischen Fluß nur in Luftgebiet strömen zu lassen. Es ist vielmehr vorteilhaft, den magnetischen Fluß mit Materialien, welche wesentlich bessere magnetische Eigenschaften als Luft oder Vakuum aufweisen, zu führen. Für diesen Fall kann der Erregerbedarf (die Durchflutung oder die Amperewindungen) wesentlich verringert werden. Analog zum elektrischen Feld wird hier eine Größe, die **relative Permeabilitätszahl** eingeführt, welche das Materialverhalten repräsentativ beschreiben kann. Aus Gleichung 6.14 wird dadurch

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (6.22)$$

μ_0 Permeabilitätskonstante $4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{Vs}{Am}]$
 μ_r relative Permeabilitätszahl, **dimensionslos**
 μ Permeabilität $[\frac{Vs}{Am}]$

Entsprechend der Größe der relativen Permeabilitätszahl gibt es folgende Fallunterscheidungen:

- Stoffe mit ferromagnetischen Eigenschaften, $10^2 \leq \mu_r \leq 10^6$ z.B.: Fe, Ko, Ni.
- Stoffe mit diamagnetischen Eigenschaften, $\mu_r < 1$ z.B.: Cu, Ag, H, H_2O , Glas.
- Stoffe mit paramagnetischen Eigenschaften, $\mu_r > 1$ z.B.: Si, Al, Luft.

Sehr viele Materialien weisen in den einzelnen geometrischen Richtungen ein unterschiedliches Feldverhalten auf. Diese Eigenschaft wird als **Anisotropie** bezeichnet. Richtungsunabhängige Materialeigenschaften werden als **isotrop** bezeichnet. Zudem kann das Magnetfeldverhalten **nichtlinear** sein, das heißt, eine Erhöhung der magnetischen Erregung wird keine proportionale Erhöhung der magnetischen Induktion bzw. des Flusses zur Folge haben. Nichtlineare, ferromagnetische Stoffe (Eisen, Stahlbleche,...) kommen industriell sehr häufig zur Anwendung.

6.5.1 Ferromagnetisches Material im Magnetfeld

Es ist sehr schwierig, genaue Aussagen über die Materialeigenschaften von ferritischen Stoffen zu treffen. Zum einen zeigt das Feldverhalten einen nichtlinearen Verlauf, welcher nur indirekt durch Messungen gefunden werden kann. Andererseits spielt die Vorgeschichte des Materials eine bedeutende Rolle. Man kann sich dies folgend vorstellen. Bei ferromagnetischen Stoffen weisen einige Atome und Molekülgruppen einen nicht neutralen Zustand auf. Die sogenannten *Weißschen Bezirke* sind bereits in eine bestimmte

Richtung orientiert. Erst oberhalb einer Temperatur von 763° Grad Celsius, dem Curie-Punkt, geht diese Orientierung verloren. Die Orientierung der einzelnen Bezirke ist dann völlig unregelmäßig, sodaß keine bevorzugte Magnetisierung feststellbar ist. Legt man hingegen eine magnetische Erregung \vec{H} an, so wird durch Wandverschiebungen und Drehungen der Weißschen Bezirke entsprechend der äußeren Erregung ein Magnetisierungszustand erreicht (Abbildung 6.10). Der Vorgang der Magnetisierung ist reversibel.

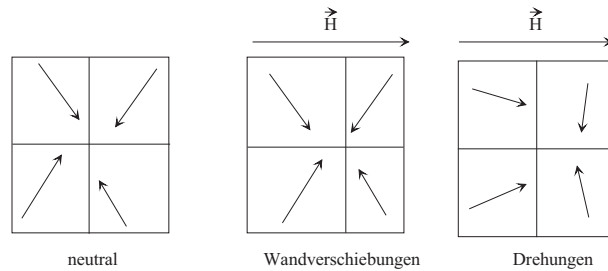


Abbildung 6.10: Illustration zur Magnetisierung.

Man denke sich einen unmagnetisierten ferritischen Eisenring, um welchen Windungen sehr eng bewickelt sind (Abbildung 6.11). Erhöht man nun die elektrische Stromstärke

Strom I , N Windungen

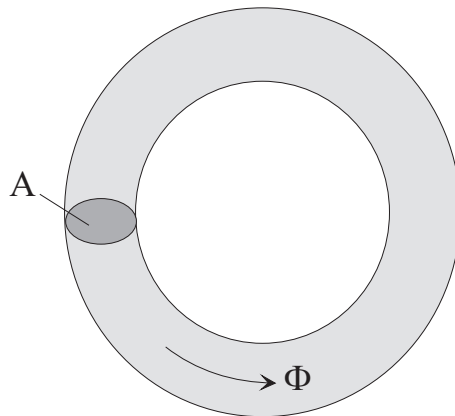


Abbildung 6.11: Bewickelter Ringkern.

durch diese Spule sukzessive, so wird die magnetische Erregung in gleichem Maße erhöht werden. Mißt man zu jedem Stromwert I die magnetische Flußdichte im Eisenkern, so erkennt man, daß ab einer bestimmten magnetischen Erregung der Zuwachs der Induktion B nicht mehr proportional mit der Erregung H wächst. Das Material erreicht eine Sättigungszustand. Dabei sind die Weißschen Bezirke schon bis zu einem sehr hohen Grad ausgerichtet. Verringert man nun den Strom wieder auf Null und erhöht ihn in

die andere Richtung, so wird eine, wie in Abbildung 6.12 dargestellte Schleife durchlaufen. Nachdem auch im negativen Bereich eine Sättigung erreicht wurde, regelt man den Strom wieder zurück und in die andere Richtung wieder auf. Die so vervollständigte Schleife wird als Hysteresisschleife bezeichnet. Der dargestellte Kurvenverlauf ist für je-

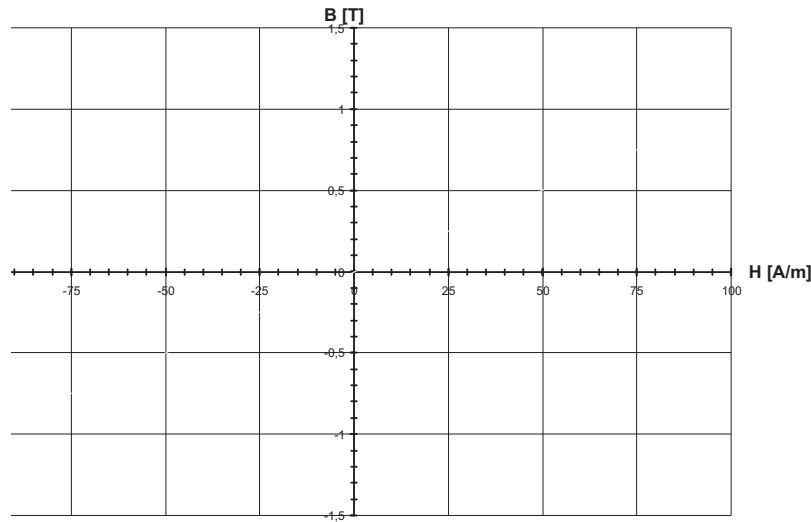


Abbildung 6.12: Magnetisierungskennlinie.

des ferritische Material unterschiedlich. Schaltet man beim Stromdurchlauf genau dann ab, wenn die Erregung H Null ist, so wird trotzdem eine magnetische Flußdichte, die Remanenzflußdichte B_r , verbleiben. Jenachdem, ob man vom positiven oder vom negativen Sättigungspunkt kommt, wird das Vorzeichen von B_r entsprechend positiv oder negativ sein. Andererseits wird man beim Durchlaufen der Schleife feststellen, daß beim Nulldurchgang der magnetischen Induktion B eine magnetische Erregung, die sogenannte **Koerzitivfeldstärke** H_c vorhanden sein wird. Zum Erreichen eines induktionsfreien Zustandes im Eisen muß daher eine magnetische Erregung aufgebracht werden, welche die Remanenzflußdichte kompensiert. Die Neukurve wird nur beim erstmaligen Aufmagnetisieren eines ferritischen Stoffes durchschritten. Für die Berechnung magnetischer Kreise ist es notwendig, die Hysteresis-Kurven genau zu kennen. Magnetische Stoffe, die eine sehr breite Hysteresisschleife aufweisen werden als **hartmagnetisch**, solche die eine sehr schmale Schleife aufweisen als **weichmagnetisch** bezeichnet.

Wandelt man die Beziehung 6.22 um, so erhält man für kleine Änderungen der Feldgrößen

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (6.23)$$

und für infinitesimale Änderungen folgt

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}. \quad (6.24)$$

Die Ableitung der B(H)-Kennlinie (Abbildung 6.13) ist somit ein Maß für die relative Permeabilität im betrachteten Erregungszustand. Zeichnet man diese Ableitung in ein eigenes Diagramm, so erkennt man, daß nach dem Erreichen eines Maximums ab einem gewissen Erregungszustand fast keine Änderung mehr vorkommt. Die Eigenschaft, daß nach dem

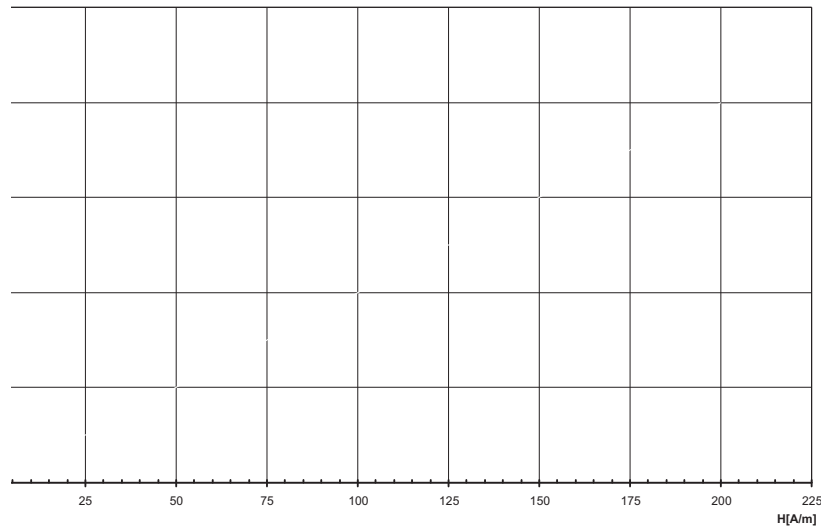


Abbildung 6.13: Relative Permeabilität μ_r .

Abschalten des Erregerstromes (bei $H = 0$) noch eine Remanenzinduktion vorhanden bleibt, macht man sich bei einigen Werkstoffen gezielt zunutze. Bei den sogenannten **Dauermagneten** oder auch **Permanentmagneten** (Eisen,- Kobald- und Nickellegerungen, Seltene Erd- Verbindungen, wie Neodym-Eisen-Bor Legierung $Nd_{12}Fe_{14}B$) lassen sich Remanenzfeldstärken B_r von bis zu 1,3 Tesla bzw. H_c von etwa -2000 [kA/m] verwirklichen. Die hohen Koerzitivfeldstärken sind notwendig, um nicht ein sofortiges Entmagnetisieren durch Anlegen einer Durchflutung Θ zu erwirken. Die Aufmagnetisierung von Dauer- oder Permanentmagneten erfolgt einmalig mittels einer äußerst hohen magnetischen Erregung. Der Arbeitspunkt von magnetischen Kreisen mit Dauermagneten ist in der Regel im zweiten Quadranten der Hysteresis-Kennlinie.

6.6 Das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise

Es wurde erläutert, daß die Durchflutung Θ ein Maß für die Ursache des magnetischen Feldes ist. Betrachten wir den Ringkern aus Abbildung 6.11 mit dem kreisförmigen Querschnitt A . Da der Querschnitt überall gleich ist wird im gesamten magnetischen Kreis ein gleichbleibender magnetischer Fluß Φ fließen. Demzufolge ist auch die magnetische Induktion B dem Betrage nach überall gleich. Die mittlere Länge der Feldlinien sei l . Der magnetische Fluß Φ errechnet sich aus

$$\Phi = B A = \mu H A = \mu \frac{N I}{l} A = \frac{\mu A}{l} \Theta = \Lambda \Theta. \quad (6.25)$$

Mit Λ ist darin der magnetische Leitwert, der Kehrwert des magnetischen Widerstandes R_{mag} bezeichnet.

$$R_{mag} = \frac{1}{\Lambda} = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \left[\frac{m}{\frac{V_s}{Am} m^2} = \frac{A}{V_s} = \frac{1}{H} \right] \cdots \text{Henry} \quad (6.26)$$

Mit dieser Definition des magnetischen Widerstandes R_{mag} kann das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise folgend ausgedrückt werden:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{mag}} = \Theta \Lambda \quad \longrightarrow \quad \Theta = \Phi R_{mag}. \quad (6.27)$$

Für die Berechnung magnetischer Kreise mit n hintereinanderliegenden unterschiedlichen Abschnitten ergibt sich:

$$\Theta = \Phi (R_{mag,1} + R_{mag,2} + R_{mag,3} + \cdots + R_{mag,n}) = \Phi \sum_{i=1}^n R_{mag,i}. \quad (6.28)$$

6.7 Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld

In der nachfolgenden Tabelle sind die analogen elektrischen und magnetischen Größen gegenübergestellt.

elektrische Größe	analoge magnetische Größe
Spannung U	magnetische Spannung U_{mag}
Quellenspannung U_q	Durchflutung Θ
Strom I	Fluß Φ
Widerstand R	magnetischer Widerstand R_{mag}
elektrische Leitfähigkeit γ	magnetische Permeabilität μ
elektrische Erregung \vec{D}	magnetische Erregung \vec{H}

6.8 Wirkungen im Magnetfeld

Durch die gezielte Führung des magnetischen Flusses durch magnetisch gut leitende Werkstoffe (z.B. Eisen) ist es möglich, an entsprechenden Stellen des Magnetkreises - meist in Luftspalten - äußerst hohe magnetische Felder zu erreichen. Damit läßt sich in derartigen Gebieten gezielt eine sehr effiziente Umwandlung elektrischer in mechanische Energie oder umgekehrt durchführen. So wird zum einen die schon besprochene Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld angewandt (**motorisches Prinzip**), zum anderen kommt das **generatorische Prinzip**, beruhend auf dem Induktionsgesetz zum tragen.

6.8.1 Das Induktionsgesetz

Die Erzeugung elektrischer Spannung, das heißt, der Ladungstrennung von positiven und negativen Ladungen unter Zuhilfenahme des magnetischen Feldes kann auf zweierlei Weise erfolgen. Eine Leiterschleife kann mechanisch in einem Magnetfeld bewegt werden. Erfolgt dabei eine Zu- oder Abnahme des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife, so kann eine elektrische Spannung an den Enden der Leiterschleife festgestellt werden. Man spricht von der sogenannten **Bewegungsinduktion**. Bei der zweiten Möglichkeit der Spannungserzeugung mit dem Magnetfeld ist eine ruhende, ortsfeste Leiterschleife gegeben. Tritt nun durch diese Schleife ein zeitlich nicht gleichbleibender magnetischer Fluß, so kann an den Schleifenenden wiederum eine elektrische Spannung festgestellt werden. Diese Wirkung bezeichnet man als **Ruheinduktion**. Nachfolgend werden diese beiden Grundprinzipien eingehend beschrieben. Beiden Induktionsarten ist die Änderung des magnetischen Flusses gemein, welche mathematisch durch das Induktionsgesetz

$$u_{ind} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.29)$$

beschrieben werden kann. Mit $\Delta\Phi$ wird die Flußänderung pro Zeitintervall Δt bzw. bei infinitesimalen Änderungen deren Differentialquotient bezeichnet. Nimmt der Fluß Φ zeitlich ab ($\frac{d\Phi}{dt} < 0$), so entsteht eine Kraftwirkung auf die positiven Ladungen entsprechend einer Rechtsschraubenregel zu \vec{B} .

6.8.2 Die Bewegungsinduktion

In Abbildung 6.14 ist eine entsprechende Anordnung dargestellt. Führt man eine gleichförmige Bewegung der Leiterschleife in eingezeichneter Richtung \vec{v} normal zu einem homogenen, gleichbleibenden Magnetfeld \vec{B} aus, so ergibt sich, dem Induktionsgesetz entspre-

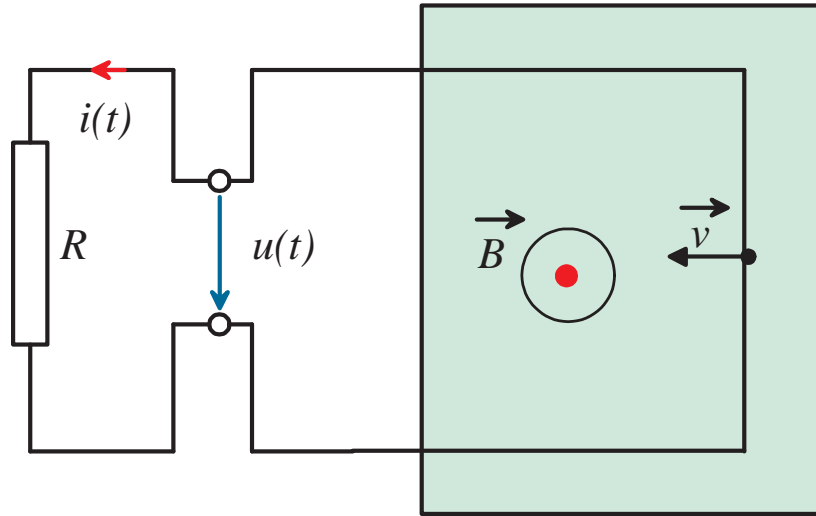


Abbildung 6.14: Bewegung eines Leiters im Magnetfeld.

chend eine Quellenspannung u_q :

$$u_q = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{-dA}{dt} = B l \frac{ds}{dt} = B l v. \quad (6.30)$$

Die Ladungstrennung erfolgt, wie in Abbildung 6.15 dargestellt: Aufgrund der Kraftwirkung des magnetischen Feldes auf die mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegten Ladungen im Leiter, entsprechend

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

werden die positiven Ladungen nach oben, die negativen nach unten gedrängt. Innerhalb des Stabes der Länge l wird sich daher eine elektrische Feldstärke \vec{E} und demgemäß eine elektrische Quellenspannung u_q zu

$$u_q = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (6.31)$$

einstellen. Diese wird über den geschlossenen Stromkreis mit dem Widerstand R einen Strom i treiben. Dieser wiederum hat ein magnetisches Feld zur Folge, welches den durch die Schleifenfläche hindurchtretenden Fluß Φ verringert. Ursache und Wirkung sind daher entgegengesetzt gerichtet. Mit der **Lenzschen Regel** wird genau dieses Verhalten beschrieben. Sie besagt daß die Wirkung, - in diesem Falle der Strom i - immer so gerichtet sein muß, daß sie der Ursache - in diesem Falle der Fluß Φ - entgegengerichtet

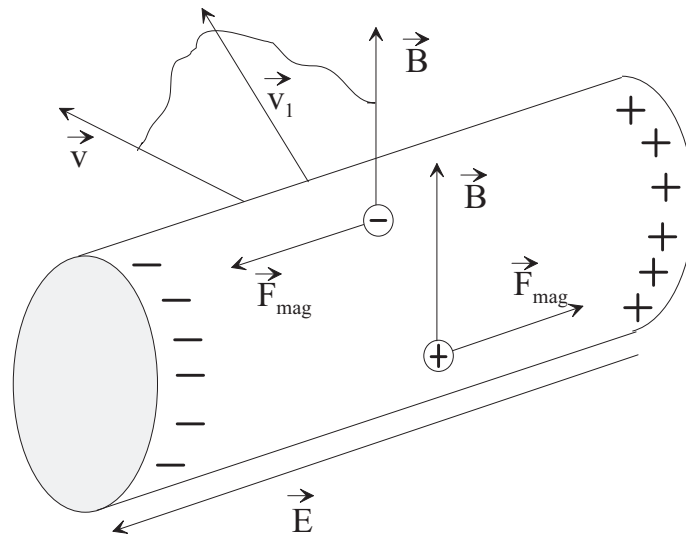


Abbildung 6.15: Kraftwirkungen und Feldgrößen.

ist. Stehen die Vektoren \vec{B} und \vec{v} in einem Winkel α zueinander, so muß die Gleichung 6.30 mit dem Sinus dieses Winkels multipliziert werden:

$$u_q = B l v \sin \alpha. \quad (6.32)$$

Diese Art der Induktion wird häufig bei Generatoren angewendet. In den meisten Fällen werden Leiterschleifen durch mechanische Kräfte in eine Rotationsbewegung versetzt. Dies geschieht beispielsweise durch ein wasser- oder dampfbetriebenes Turbinenrad. Die Leiterschleifen und der magnetische Kreis sind so ausgeführt, daß sich die Leiterschleifen in einem radialen Luftspalt bewegen 6.16. Aufgrund der Winkelabhängigkeit der Quel-

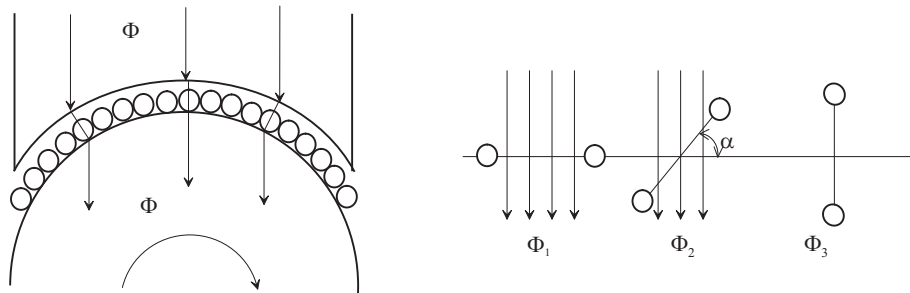


Abbildung 6.16: Drehbewegung von Leiterschleifen im Magnetfeld.

lenspannung u_q von α wird dabei eine sinusförmige elektrische Spannung zu erwarten sein. Der Fluß Φ durch die Schleifenfläche \vec{A} ergibt sich bei einer homogenen Induktion \vec{B} zu

$$\Phi = B A \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (6.33)$$

Daraus ergibt sich für die Quellenspannung aus dem Induktionsgesetz (Gleichung 6.29) ein sinusförmiger Verlauf. Die Zeitabhängigkeit des Winkels α kann dabei durch ωt ausgedrückt werden.

$$u_q = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B A \cos(\omega t))}{dt} = \omega B A \sin(\omega t). \quad (6.34)$$

Sind in einer Anordnung N Windungen in Reihe geschaltet und wird jede Schleife zu einem Zeitpunkt vom gleichen Fluß durchsetzt, so ergibt sich eine N -mal vergrößerte Quellenspannung u_q :

$$u_q = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(B A \cos(\omega t))}{dt} = N \omega B A \sin(\omega t). \quad (6.35)$$

6.8.3 Die Ruheinduktion

Induktion ist auch bei ruhenden Objekten immer dann möglich, wenn leitende Gebilde, zB. Stromschleifen in Bereichen sich zeitlich ändernder magnetischer Flüsse vorkommen. Ein typischer Anwendungsfall ist dabei der Transformator oder Übertrager. Im Prinzip sind dabei zwei, elektrisch voneinander getrennte Leiterschleifen über einen magnetischen, sich zeitlich ändernden Fluß (Wechselfluß) miteinander verkoppelt. Man spricht bei einer derartigen Trennung zweier elektrischer Kreise von einer **galvanischen** Trennung. Zum Zwecke einer besseren Kopplung zwischen beiden Leiterschleifen (im allgemeinen Spulen) wird der magnetische Fluß über einen magnetisch gut leitenden Eisenweg, dem Transformator Kern geführt. In Abbildung 6.17 ist das transformatorische Prinzip dargestellt. Legt man an Spule 1 eine zeitlich veränderliche Spannung $u_1(t)$ an,

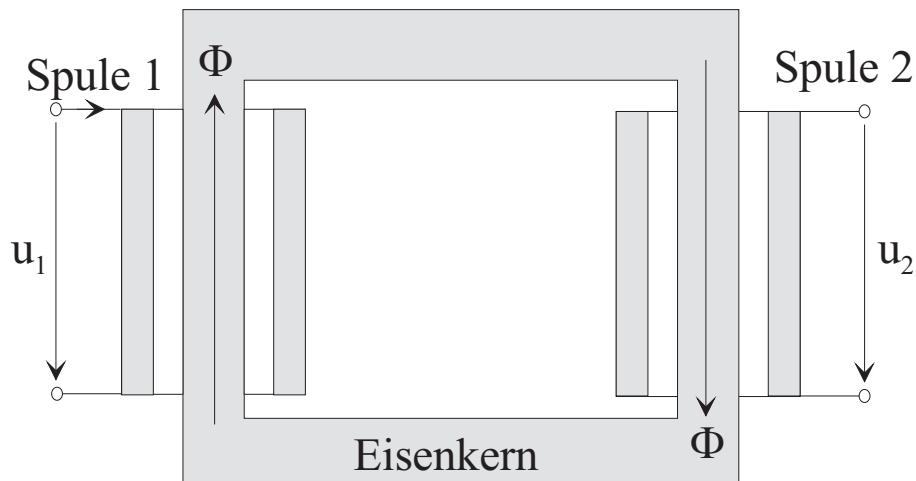


Abbildung 6.17: Grundprinzip eines Transformators.

so wird ein Strom durch die Spule 1 fließen. Dieser wird einen magnetischen Wechselfluß $\Phi(t)$ durch den Eisenweg treiben. Infolge der Flußänderung wird in der Spule 2, entsprechend ihrer Windungszahl N eine Spannung $u_2(t)$ induziert. Aus Gleichung 6.35 folgt für den Effektivwert der Spannung in Spule 2:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= N \omega \hat{\Phi} \sin(\omega t) = \hat{U}_2 \sin(\omega t) \\ U_2 &= \frac{\hat{U}_2}{\sqrt{2}} = \frac{N 2\pi f \hat{\Phi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi f N \hat{\Phi} \\ U_2 &= 4,44 f N \hat{\Phi}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die letzte Gleichung wird als Transformatorgleichung bezeichnet. Naturgemäß wird sich bei einem sich zeitlich ändernden Fluß Φ und bei Vorhandensein elektrisch leitfähiger Materialien **immer** ein zusätzlicher Effekt einstellen. Man denke sich die Spule 2 an deren Enden kurzgeschlossen. Es wird dann die in den Windungen induzierte Spannung $u_2(t)$ einen Strom $i_2(t)$ treiben. In gleicher Weise passiert dies auch im elektrisch zwar geringen, jedoch noch immer leitfähigen Eisenweg. Die solcherart entstehenden Ringströme werden als **Wirbelströme** bezeichnet. Um diese gering zu halten, werden die Eisenkerne sehr häufig aus dünnen Blechen, die gegenseitig elektrisch isoliert sind, gefertigt. Dadurch erreicht man einen für die Wirbelströme hohen elektrischen Widerstand bei gleichzeitig guten Eigenschaften zur Leitung des magnetischen Flusses.

6.8.4 Die Induktivität

Aus den prinzipiellen Betrachtungen der Wirkungsweise eines Transformators oder Übertragers wurde klar, daß eine Verkopplung zwischen den Spulen 1 und 2 über das magnetische Feld besteht. Diese Kopplung ist allgemein auch dann gegeben, wenn es sich nicht um zeitlich veränderliche Größen, also für stationäre Vorgänge handelt. Um diese Kopplung zu beschreiben wurde der Begriff der Induktivität eingeführt. Man betrachte dazu zwei Leiterschleifen s_1 und s_2 . Der Strom I_1 durch die Schleife s_1 erzeugt einen magnetischen Fluß Φ_1 durch diese Schleife. Ein Teil dieses Flusses wird auch die Schleife s_2 durchsetzen. Dieser Anteil wurde in Abbildung 6.18 mit Φ_{12} bezeichnet. Er ist proportional dem Strom I_1 in der Schleife s_1 .

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1 \quad (6.37)$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Strom i_1 und dem durch diesen Strom verursachten Fluß Φ_{12} in s_2 wird als **Koeffizient der gegenseitigen Induktion** oder **Gegeninduktionskoeffizient**, kurz auch als **Gegeninduktivität** bezeichnet. Es zeigt sich wenn der umgekehrte Weg eingeschlagen wird, nämlich wenn ein Strom i_2 durch die Schleife s_2 fließt, und dessen Flußanteil Φ_{21} durch die Schleife s_1 berechnet wird, daß ein

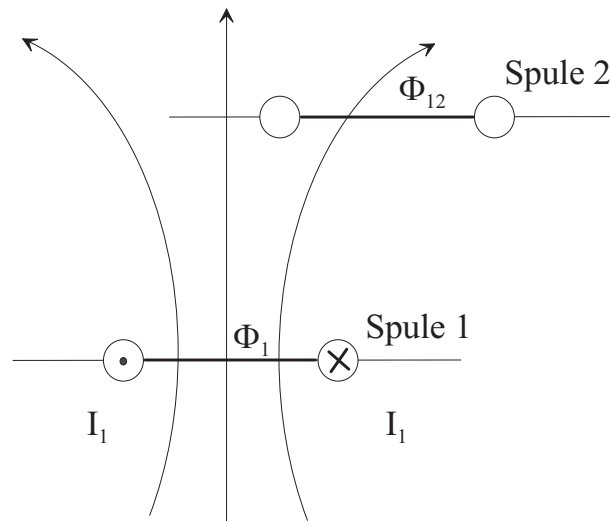


Abbildung 6.18: Gegeninduktion zweier Leiterschleifen.

Proportionalitätsfaktor derselben Größe erreicht wird. Es gilt somit:

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= M_{12} I_1 \\ \Phi_{21} &= M_{21} I_2 \\ M_{12} &= M_{21} = M \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{Vs}{A} = H \quad \dots \quad Henry \right]\end{aligned}\tag{6.38}$$

Betrachtet man hingegen die Verkopplung des Stromes I einer Schleife s und den durch diesen Strom hervorgerufenen Fluß Φ , der diese Schleife durchsetzt, so erhält man als Proportionalitätsfaktor den **Koeffizienten der Selbstinduktion** oder **Selbstinduktivitätskoeffizienten**, kurz auch die **Selbstinduktivität** L :

$$\Phi = L I; \longrightarrow L = \frac{\Phi}{I}.\tag{6.39}$$

Mit dieser beziehung kann das Induktionsgesetz zu

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}\tag{6.40}$$

umgeschrieben werden. Liegen zeitlich veränderliche Verhältnisse vor, so kann bei Kenntnis dieser Koeffizienten jederzeit die induzierte Spannung in einer entsprechenden Anordnung angegeben werden.

6.8.5 Energie im Magntefeld

Das magnetische Feld ist in der Lage Energie zu speichern. Schaltet man eine Spannungsquelle an zB. eine Spule, so wird, bedingt durch das Fließen des elektrischen Stromes teilweise elektrische Energie im magnetischen Feld gespeichert. Es zeigt sich, daß die Umwandlung von elektrischer Energie in magnetische Energie ein reversibler Vorgang ist. Das erkennt man, wenn man die Spannungsquelle abschaltet und an dessen Stelle eine kurzschließende Verbindung gibt. Nun wird das magnetische Feld nicht schlagartig zu Null werden. Bedingt durch die Abnahme des magnetischen Flusses durch das Wegschalten der Quelle wird ein negatives $\frac{d\Phi}{dt}$ entstehen. Dadurch wird eine Spannung induziert. Diese ergibt, nun über die kurzgeschlossene Spule einen Strom und die gespeicherte magnetische Energie wird wieder in elektrische Energie umgeformt. Zur quantitativen Beschreibung betrachte man einen Ausschnitt eines magnetischen Kreises mit einem Luftspalt. Im Luftspalt der Länge l_L sei ein homogener magnetischer Feldverlauf über

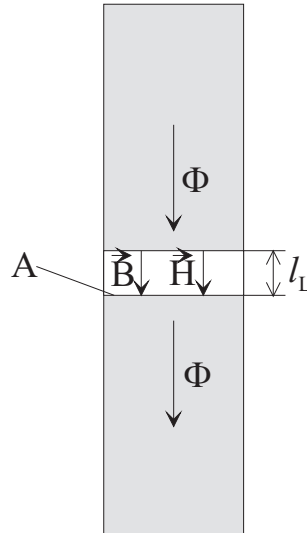


Abbildung 6.19: Zur magnetischen Energie.

den gesamten Querschnitt A gegeben. Damit können die Vektoren \vec{B} und \vec{H} als Skalare weiter behandelt werden. Der magnetische Fluß wird durch einen Strom $i(t)$ generiert. Ein größerwerdender Strom $i(t)$ hat ein proportionales Feld $H(t)$ bzw. bei linearen Materialeigenschaften $B(t)$ zur Folge. Die in einem infinitesimalen Zeitintervall dt zugeführte elektrische Energie errechnet sich aus

$$dW = u(t) i(t) dt. \quad (6.41)$$

Mit dem Induktionsgesetz folgt

$$dW = i(t) N d\Phi = i(t) N A dB. \quad (6.42)$$

Über den Durchflutungssatz folgt die Beziehung

$$H l_L = i(t) N, \quad (6.43)$$

wodurch Gleichung 6.42 zu

$$dW = H l_L A dB = H V_L dB. \quad (6.44)$$

wird. Die Energiedichte dw kann daher durch

$$dw = \frac{dW}{V_L} = H dB. \quad (6.45)$$

dargestellt werden. Die magnetische Energiedichte w errechnet sich daraus durch

$$w = \int_0^{B_m} H dB. \quad (6.46)$$

Setzt man nun die Materialbeziehungen zwischen B und H ein, so ergibt sich

$$w = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu}{2} H^2. \quad (6.47)$$

Integriert man die Energiedichte über das gesamte im Luftspaltvolumen V_L , so erhält man die in diesem Volumen gespeicherte magnetische Energie:

$$W = \int_{V_L} \left[\int_0^{B_m} H dB \right] dV. \quad (6.48)$$

Die Integration der magnetischen Energiedichte über das Volumen kann im vorliegenden Fall separiert durchgeführt werden. Entsprechend erhält man :

$$W = \frac{1}{2} \int_V H B dV = \frac{1}{2} \oint_{l_{\text{magn.}}} H dl \int_A B dA = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I L I = \frac{L I^2}{2}. \quad (6.49)$$