Ersatztermin Klausur 1, A

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme, Inverse von Matrizen, Determinanten)

(a) [4] Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -\beta & 10 & 42 \\ -1 & 0 & 1-\beta & 1 \\ 2 & \beta & \alpha & 3\alpha \end{array}\right).$$

Für welche reelle Werte von α und β hat das obige lineare System keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Anleitung: *In Matrixform auf ZSF bringen und Fallunterscheidungen.*

[**1 Bonus**] für geometrische Veranschaulichung des Lösungsverhalten mittels α, β-Ebene.

(b) [4] Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = (0), \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2-\lambda \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & c \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie an, welche Matrizen singulär bzw. regulär sind (a, b, c, λ und x sind reell).

Aufgabe 2 (Lineare Vektorräume, anschaulich und abstrakt)

(a) [3] Gegeben sind die Ebenen

$$\varepsilon_1: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

und

$$\varepsilon_2: \quad 3x + 2y + 2z = 12.$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Normalvektoren dieser beiden Ebenen.

(b) [4] Bestimmen Sie eine Basis des Spans der folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Wahr/Falsch) [**1 Punkt pro Behauptung.**] Begründung oder Gegenbeispiel.

(a) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen hat IMMER ∞ viele Lösungen.

(b) Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ sei invertierbar mit inverser Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$. Dann gilt: die i-te Zeile von $\boldsymbol{A}$ steht senkrecht auf die i-te Spalte von $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(c) Die Determinanten zweier ähnlicher quadratischer reeller Matrizen sind gleich. *Hinweis: Die $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{B}$ ist ähnlich zur $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$, wenn $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ für eine invertierbare $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{S}$ gilt.*

(d) Die Ebene $2x - y + 2z = 4$ teilt den Raum in drei Teile: "über" (wohin der Normalvektor zeigt), "auf" und "unter" der Ebene. Der Ursprung liegt hier "über" der Ebene.

(e) Die Vereinigung zweier Teilräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist wieder ein Teilraum von V.

(f) Die Menge der Polynome p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $p(1) = 0$, ist ein Teilraum von $C(\mathbb{R})$, dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen.