# Analysis 1 Mitschrift

Konstantin Krasser

November 28, 2023

## Contents

# 1 Grenzwertbegriff fuer Funktionen

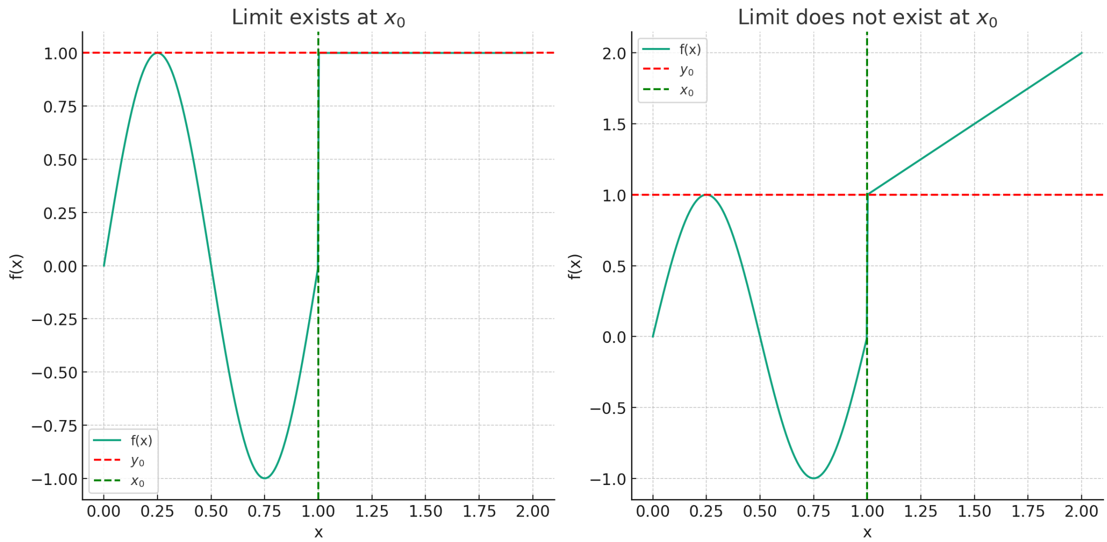
Wir wollen erklären, was „ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ist.

**Definition 1.1– "Epsilon-Delta und Folgenkriterium Definition der Grenzwerte** Sei $I$ ein Intervall und $x_0 \in I$ und $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, wenn:

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y_0| < \varepsilon$ oder
- Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ und $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$ gilt: $y_0 = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$

Diese beiden Definitionen sind äquivalent. Der Beweis ist der gleiche wie der für das $\varepsilon - \delta$ Kriterium.

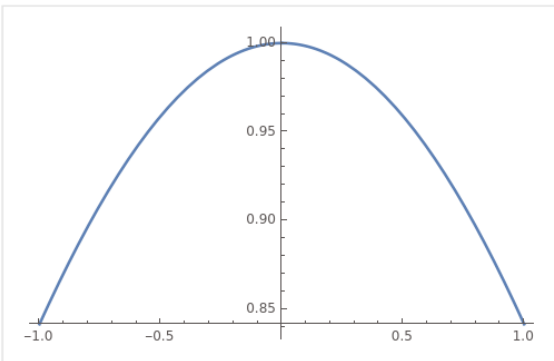
Das heisst: $y_0 \lim_{x \to x_0} f(x)$ bedeutet: Wenn ich $f(x_0)$ definieren kann, naemlich $f(x) = y_0$ dann ist $f$ an der Stelle $y_0$ **stetig**.




## 1.1 5 Beispiele zum Grenzwertbegriff

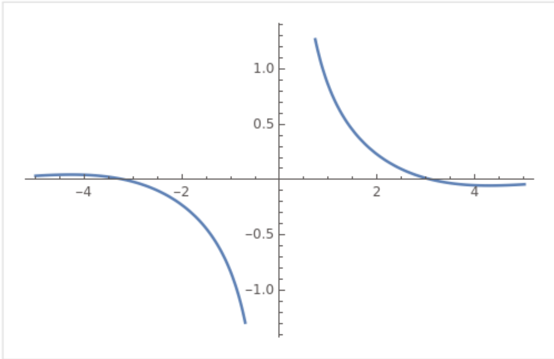
1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$
   Was ist $\lim_{x \to 0} f(x)$?

   $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$



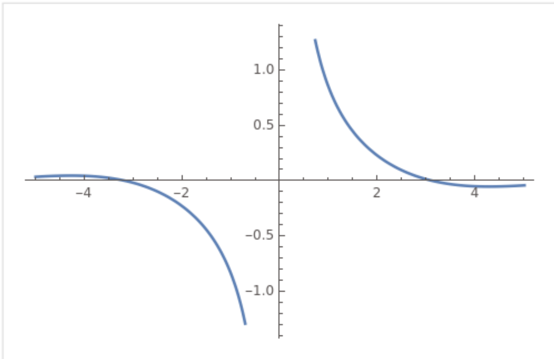
2. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x \neq 0$
Was ist $\lim_{x \to 0} f(x)$?

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht



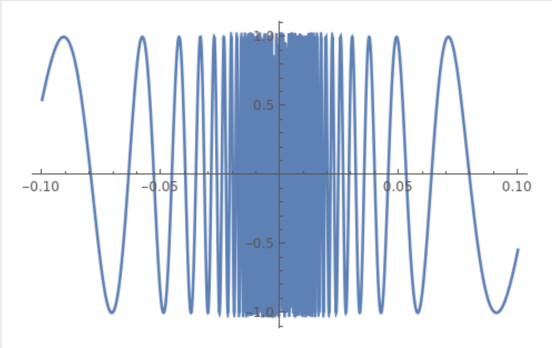

3. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad x \neq 0$
Was ist $\lim_{x \to 0} f(x)$?

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht



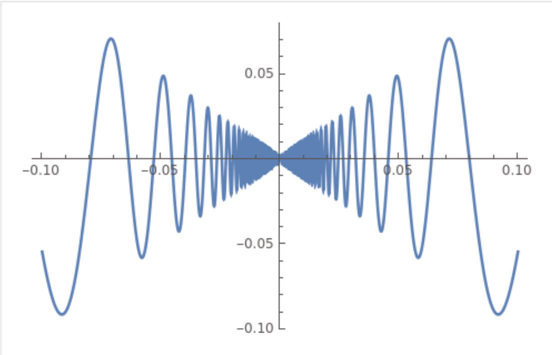
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$
   Was ist $\lim_{x \to 0} f(x)$?

   $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

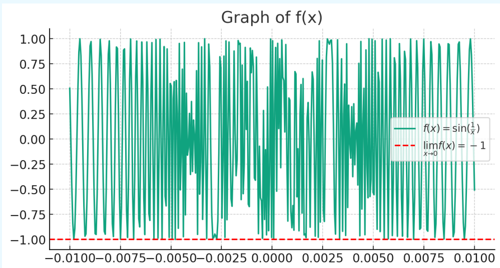



5. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$, Was ist $\lim_{x \to 0} f(x)$?

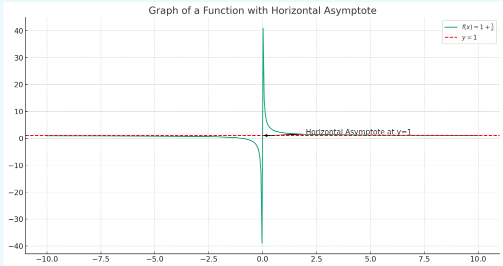
   $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$




**Definition 1.2 – Linksseitige / rechtsseitige Grenzwerte**
$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$
$Y_0 = \lim_{x \to x_0^+}$ Wenn $\forall \epsilon > 0 : \exists b > 0 :$ fuer alle x mit $|x - x_0| < b$ und $x > x_0$ gilt ...

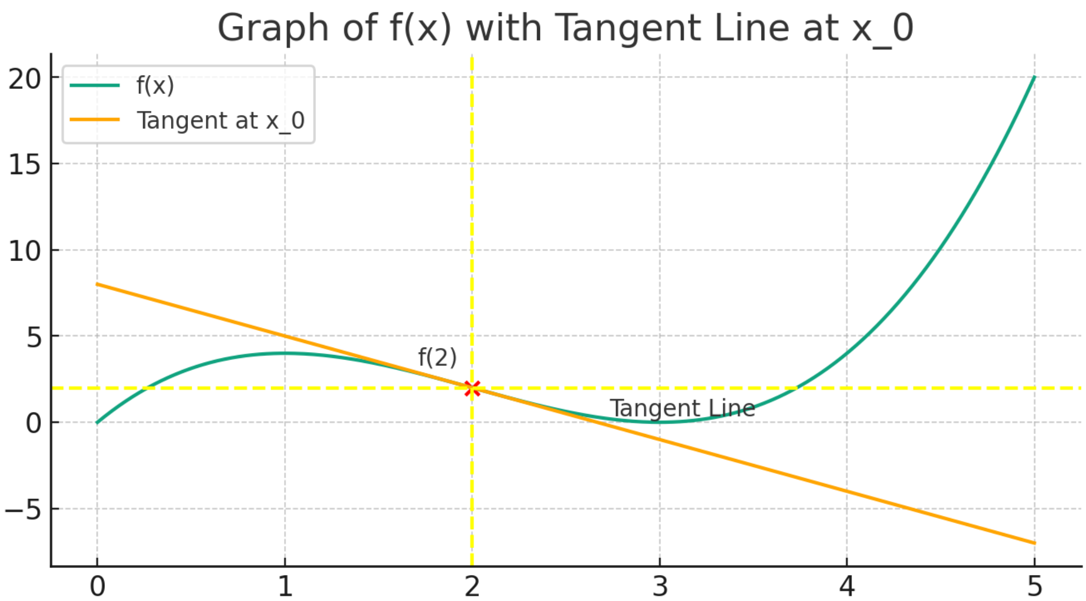


**Definition 1.3 − 3.6.3**
$y_0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$
wenn $\forall \epsilon > 0 : \exists M$ :
Immer wenn $x > M$ ,
dann gilt $|f(x) - y_0| < \epsilon$




**Definition 1.4 − 3.6.4**
$f$ heisst differnzierbar, in einem Punkt $x_0$ wenn der Grenzwert
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.
Falls der Grenzwert existiert, schreibt man **dif:** $f^{'}(x_0)$ *Eine andere Schreibweise:*

$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0+h)0f(x_0)}{k}$




Tangentengleichung: $g(x) = f(x_0) + \underbrace{f^{'}(x_0)}_{\text{Steigung der Funktion}} \cdot (x - x_0)$ r

# 2 Konversatorium 2023-11-21: Ableitungen

Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - \underbrace{x_0}_{\text{fix. meistens } x_0=0})^k$

Ist das **konvergent** Quotientenkriterium:

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k}\right| = \left|\overbrace{|x-x_0|\cdot\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}^{\text{Ist das } < 1 \text{ ?}}\right|$$

Konvergent wenn $|x-x_0| < \underbrace{\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}}_{\text{Konvergenzradius } R}$ Wenn $\limsup = +\infty \Rightarrow \quad R = 0.$

Wenn $\limsup = 0 \quad \Rightarrow R = +\infty$, die **Potenzreihe** ist fuer alle x konvergent.

## 2.1 Beispiel 1 Zu Konvergenzradius

$\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot x^k$ Konvergenzradius $= \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}$

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)}{k^k}(k+1)\right| = +\infty \quad R = 0$$

Fuer kein $x \neq x_0$ konvergent.

## 2.2 Beispiel 2 Zu Konvergenzradius

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\cdot x^k$$

Ich betrtachte $\limsup$

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{k^k\cdot(k+1)!}{(k+1)^{k+1}\cdot k!}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{k^k\cdot(k+1)}{(k+1)^{k+1}}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}\right| = \frac{1}{e}$$

Konvergenzradius $R = e$.

## 2.3 Definitionen zu Konvergenzradius

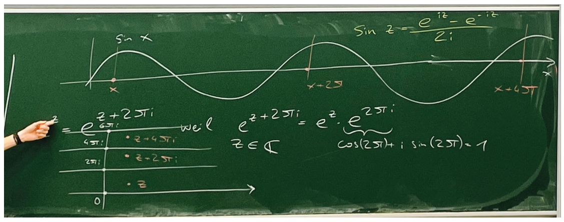
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Komplexe Zahl $z = a + ib$

Dann ist : $\frac{z+\vec{z}}{z} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{a} = a - Re \quad z$ .

Dann ist $\frac{z-\vec{z}}{zi} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = b-$

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, fuer alle x, y
$\Rightarrow e^x > 0$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$
$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktion ist **bijektiv** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
sin und cos sind periodisch mit reeller Periode $2\pi$




## 2.4 Definition zum Logarythmus

$\ln : \mathbb{R}^+ \leftarrow \mathbb{R}$
Was heisst $\ln y$?
*Ein Ding das ich in die Exponentialfunktion einsetzen kann so dass* $e^{\text{Ding}} = y$
Was ist $\ln a + \ln b$?

$$e^x = y$$

$$x = \ln y$$

$e^{(\ln a + \ln b)} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a \cdot b = e^{(\ln(ab))} \Rightarrow \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

Wir wissen $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x = (e^x)^2$

$\vdots$

Was ist $ln(a^b)$

$$ln(2^{100}) = 100 \cdot \underbrace{\ln(2)}_{\approx 0{,}61} \approx 61$$

Wie gross ist $2^{100}$ ungefaehr ? Ungefaehr $e^{61}$

$$e^{(\ln a^v)} \Rightarrow \ln(a^b) = b \cdot \ln a$$

$b \ldots$ Basis $> 0$

**Definition 2.1 – Logarythmus**

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

# 3 Konversatorium 2023-11-28: Funktionen

## 3.1 Rechenbeispiel 1

Given the function:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$$

for the interval $[0, 4]$, we first find its derivative:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

To find the critical points, we solve for $x$ in the equation $f'(x) = 0$:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

This can be simplified to:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Solving this quadratic equation, we get the critical points:

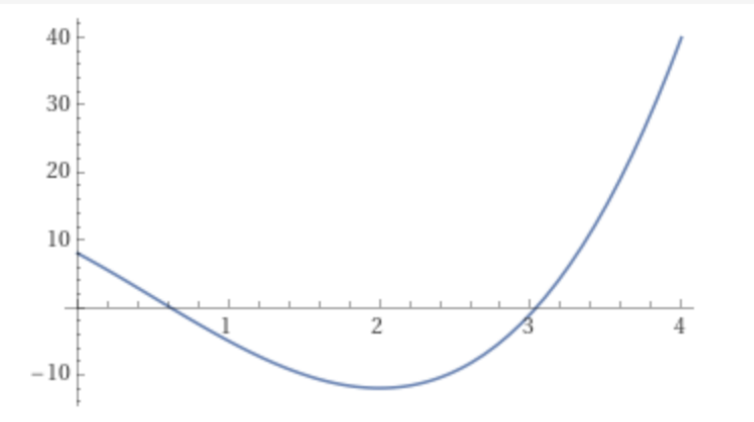
$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \{2, -1\}$$

However, since we are considering the interval $[0, 4]$, only $x = 2$ is relevant.
Now, evaluating $f(x)$ at 0, 2, and 4:

$$f(0) = 8$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -12$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8 = 40$$




## 3.2 Rechenbeispiel 2

Given the function:

$$f(x) = e^x(2x^2 - 3x + 1)\text{fuer}x \in [-1, 2]$$

we first find its derivative:

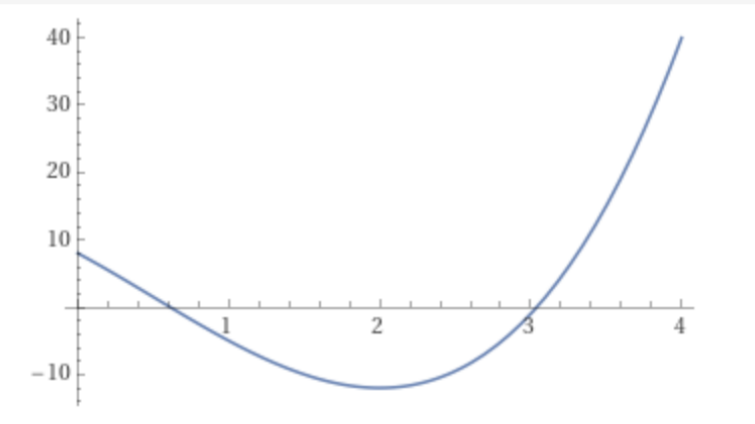
$$.$$

Solving this quadratic equation, we get the critical points:

$$f(-1) = \frac{6}{8} = 2,2$$

$$f(\frac{-1\sqrt{17}}{4}) = -0.27$$

$$f(2) = 3e^2 \approx 22,17$$




### 3.3 Rechnebeispiel 01 zur Regel von L'Hospital

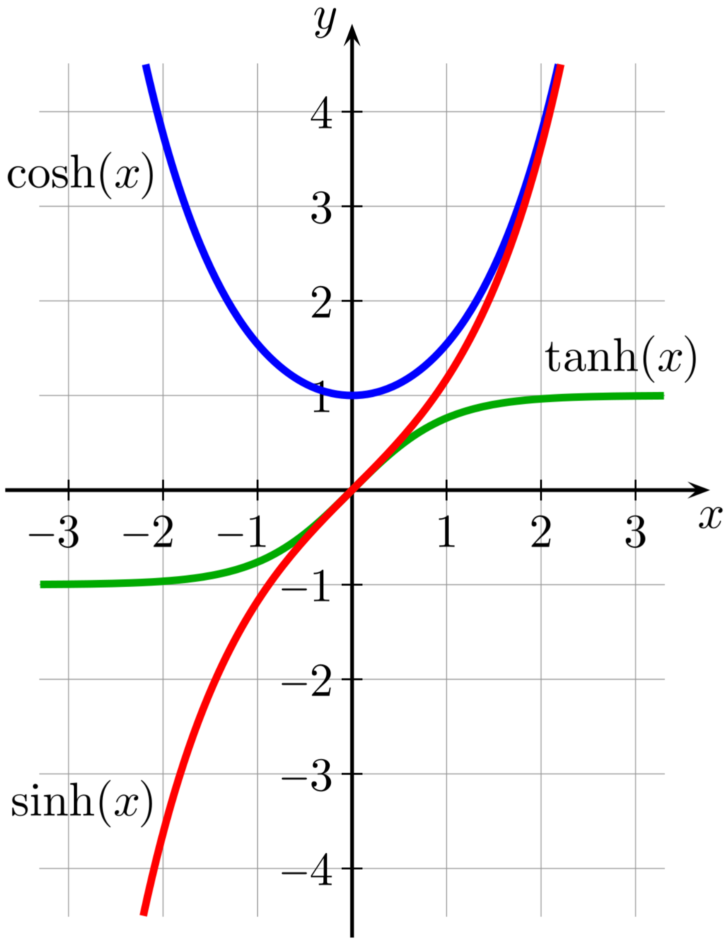
**Theorem 3.1 – Regel von L'Hospital** Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $x_0 \in I$ mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Find it's derivative:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$




$$= \frac{2}{2} = 1$$

### 3.4 Rechnebeispiel 02 zur Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)}$$