0.1 Das Plynom

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120$$

besitzt vier reelle Nullstellen. Zwei der Nullstellen sind $x = -2$ und $x = 4$. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die beiden anderen Nullstellen. Hinweis: Polynomdivision. [1]

0.1.1 Plynomdivision

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad -2x \quad -15 \\
\hline
x^2 - 2x - 8 & x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120 \\
 & -x^4 + 2x^3 + 8x^2 \\
\cline{2-2}
 & -2x^3 - 11x^2 + 46x \\
 & 2x^3 - 4x^2 - 16x \\
\cline{2-2}
 & -15x^2 + 30x + 120 \\
 & 15x^2 - 30x - 120 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

- Zuerste berechnen wir $(x+2)(x-4)$ das ergibt sich aus den Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$. Dadurch erhalten wir $x^2 - 2x - 8$.

0.1.2 Nullstellen

- Berechnen wir die Nullstellen, von $x^2 - 2x - 8$, mit Hilfe der Mitternachtsformel.

Proof. Mitternachtsformel

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \\
x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2 \pm 8}{2} \\
x_1 &= \frac{2 + 8}{2} = 5 \\
x_2 &= \frac{2 - 8}{2} = -3 \\
\mathbb{L}x_1, x_2 &= \{5, -3\}
\end{aligned}$$

$\square$

0.2 Bestimmen Sie jene $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$, für die gilt

$$\frac{x-2}{x-1} < 3$$

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x-1} &< 3 && \mid \cdot x-1 \\
\frac{x-2}{x-1} - 3 &< 0 && \mid \cdot -3 \\
\frac{x-2}{x-1} - \frac{3(x-1)}{x-1} &< 0 && \mid \cdot \texttt{selber Nenner} \\
\frac{x-2-3x+3}{x-1} &< 0 && \\
\frac{-2x+1}{x-1} &< 0 && \mid \texttt{vereinfache}
\end{aligned}$$

1. Fall, Nenner ist positiv:

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\frac{-2x+1}{x-1} > 0 \qquad \mid \cdot (x-1)$$

$$\neq \text{Vorzeichenwechsel !}$$

$$\begin{aligned}
-2x+1 &> 0 && \mid -1 \\
-2x &> -1 && \mid \cdot -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Vorzeichenwechsel !}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

   (a) $x > 1$ ist, superior gegenüber $\frac{1}{2}$.

   (b) Kein Vorzeichenwechsel. Daher, dass $x > 1$

0.2.1 Lösungsmenge $\mathbf{x > 0}$

$$x_1(1, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (1, \infty)$$

2. Fall, Nenner ist negativ:

$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$\frac{-2x + 1}{x - 1} < 0 \qquad | \cdot (x - 1)$$

Vorzeichenwechsel !

$$-2x + 1 > 0 \qquad | - 1$$

$$-2x > -1 \qquad | \cdot -\frac{1}{2}$$

Vorzeichenwechsel !

$$x < \frac{1}{2}$$

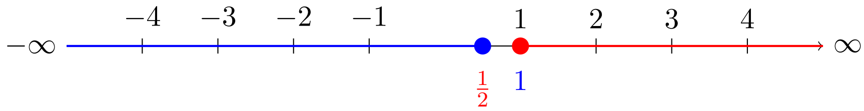
(a) $x < \frac{1}{2}$ ist superior gegenüber $x < 1$

0.2.2 Lösungsmenge $\mathbf{x < 0}$

$$x_2(-\infty, 1) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2})$$

0.2.3 Lösungsmenge

$$X \in x_1 \cup x_2 = (1, \infty) \cup (-\infty, \frac{1}{2}) = \mathbb{R} \backslash [\ \frac{1}{2}, 1]$$



0.3 Beweis $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$

Im Skriptum auf S.24/25 wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist (anders gesagt: dass es keinen Buch p/q gibt so dass $(p/q)^2 = 2$ ist). Wenn man mit einem Beweis von genau derselben Struktur beweisen will dass $\sqrt{4}$ nicht rational ist (was natürlich schiefgehen muss), warum klappt das dann nicht (an welcher Stelle exakt scheitert der "Beweis"?).

0.3.1 Wiederspruch $\sqrt{4} \in \mathbb{Q}$

$p, q \in \frac{p}{q}\& \quad |^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{4} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 4 \qquad & | \cdot q^2 \\ p^2 = 4q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \qquad & |\texttt{p ist gerade} \end{aligned}$$

- Wenn p gerade ist, dann ist p^2 gerade.
- D.h.
  sqrtp ist ebenfalls gerade.

$$\begin{aligned} \Rightarrow p = 2 \cdot k \quad & |^2 k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow p^2 = 4k^2 & \end{aligned}$$

- Daraus resultiert, dass:

$$4 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} q^2 = k^2 \quad & |q, k \in \mathbb{N}, daherkein\pm \\ q = k \quad & |\texttt{q ist gerade} \end{aligned}$$

- Wir haben durch Widerspruchsbeweis gezeigt, dass q eine gerade Zahl ist und k eine gerade Zahl ist.

0.3.2 $\sqrt{2}$ ist nicht $\mathbb{Q}$

- Bei $\sqrt{4}$ erhalten wir, dass q auch eine gerade Zahl sein muss, also der Bruch $\frac{p}{q}$ nicht gekürzt werden kann. Ergo der größte gemeinsame Teiler von p und q ist 1.

0.4 Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

0.4.1 Berechnung der Folgenglieder

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = \frac{3}{4}$$

0.4.2 Grenzwert

Definition 0.1: Grenzwert

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbf{N}; \forall n > N |an - a| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}| &< \epsilon \quad |Aufsplittenvon1 \\
|\frac{-1}{n+} &< \epsilon \quad |\texttt{Betragsauflöung} \\
\frac{1}{n+1} &< \epsilon \quad |\texttt{Umformen} \\
\frac{1}{\epsilon} &< n
\end{aligned}$$

Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2$$

0.4.3 Hinweis: zu Bsp. 5

Example 0.2: Beispiel 7. Sei $q \neq 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. Induktionsbasis: $n = 1$: Auf der rechten Seite haben wir $\frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = 1 + q$, wie behauptet. 2. Induktionsvoraussetzung:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3. Induktionsbehauptung:

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

4. Induktionsschritt:

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Beispiel 8. Mittels Induktion ist Folgendes zu beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$$

1. Induktionsbasis:

$$n = 1 : \quad 2^1 = 2 > 1$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$2^n > n$$

3. Induktionsbehauptung:

$$2^{n+1} > (n + 1)$$

4. Induktionsschritt: Wir schreiben die Induktionsvoraussetzung,

$$2^n > n$$

und multiplizieren die Ungleichung mit 2:

$$2^{n+1} > 2n$$

Auf der linken Seite ist genau das, was wir für die Induktionsbehauptung brauchen. Wir schätzen weiter ab:

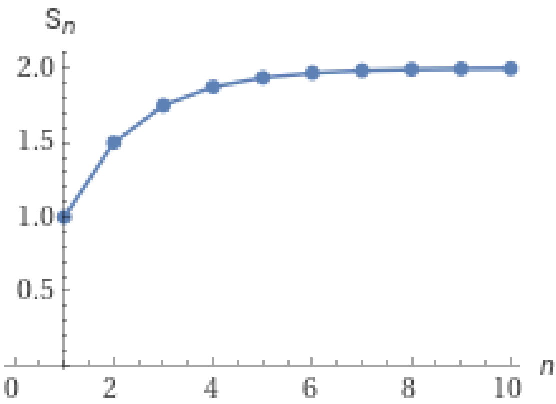
$$2^{n+1} > 2n = (n+1) + (n-1) \geq n+1$$

weil $n - 1 \geq 0$ ist.

0.4.4 Folgeglieder

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4}$$

0.4.5 Visualisierung



0.4.6 Grenzwert ermitteln

- Analysieren wir.
  - Das erste Element in unserer Folge ist 1.
  - Gegeben ist die allgemeine Formel: $\frac{1}{2^n}$.
  - Jede Basis hoch 0 ist 1.

    Definition 0.3:

    $a^0 = 1$
    $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Daraus erschließt sich, dass die Folge bei 0 beginnt. Also $k = 0$
- Wenn wir uns die Formel

  $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  anschauen sehen wir ein Problem. Denn unsere Gleichung hat die Form $\frac{1}{n^2}$, aber unserer Tipp ist in der Form $n+1$.
- Nun muessen wir einen Trick anwenden. Wir setzten setzen fuer

  $$\sum_{k=0}^{n} q^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1}$$

  .
- Pruefen wir, ob das stimmen kann. Wenn k, unsere Laufvariable gleich 1 ist, dann ist n also 0. Das ist gut, weil wie wir oben gezeigt haben, denn $\frac{1}{n^0=1}$ und dass ist equivalent zu unserem $a_1 = 1$!
- Aber was machen wir nun mit dem q^k?
- q ist eine Variable. Das ist schließlich nichts anderes als das $\frac{1}{2^n}$ in unserem Beispiel. Jedoch muessen wir uns noch um das ^{k} kuemmern.
- Da jeder Exponent mit der Basis 1 immer gleich 1 ist, koennen wir schlicht und einfach unsere Angabe wie folgt

umschreiben:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2})^k$$

Wir ersetzen in diesem schritt unser ^{n} duch die Variable k, um mit der Formel besser arbeiten zu koennen.

- Pruefen wir nun, ob das auch wirklich stimmt. **Example 0.4: Pruefen der Formel** $a_1 = (\frac{1}{2})^k = 1$
  $a_2 = (\frac{1}{2})^k = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}$
  $a_3 = (\frac{1}{2})^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{8}$
  Hiermit haben wir gezeigt, dass unsere Annahme stimmt und koennen weiter fortsetzen.

- Mit diesem Ausdruck koennen wir aber noch nicht den Granzwert bestimmen. Hierfuer muessen wir zuerst in den Rechten teil der Formeln einsetzen.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(q)^k \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2})^k$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1-1}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2^k}}$$

- Ich habe 1 in $\frac{1}{1}$ umgeschrieben, da wir im naechsten Schritt den Doppelbruch loesen werden und das meiner Meinung nach so wesentlich einfacher geht.

$$\frac{\frac{1}{1} - (\frac{1}{2})^k}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

- Nun muessen wir den Doppelbruch loesen. Dafuer rechnen wir Zaehler mal Zaehler und Nenner mal Nenner. Oder anders gesagt innen mal innen und aussen mal aussen. Wobei Nenner mal Nenner zum neuen Zaehler wird und vice versa.

$$= \frac{\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4^n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

- Vereinfachen wir nun, indem wir kuerzen erhalten wir:

$$= 2 - \frac{2}{2^n}$$

- Jezte koenen wir den Grenzwert bestimmen. **Definition 0.5: Grenzwert**

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - a| < \epsilon$$

- Wir setzen nun unsere Folgeglieder in die Formel ein.

$$|2 - \frac{2}{2^n} - 2| = |\frac{2}{2^n}| = \frac{2}{2^n}$$

- Wir setzten 2 ein, da $\lim_{x\to\infty} a_n = 2$
- $2 - 2 = 0$; vereinfche. Achtun Vorzeichen beibehalten!
- Beim aufloesen des Betragstriches wird das aus minus plus.

$$\frac{2}{2^n} = \frac{\cancel{2}}{\underbrace{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{\cdot n}}$$

- 2 Kuerzt sich weg und wir erhalten:

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

Buy me a coffee

- Da $\frac{1}{n} < \frac{1}{2^n - 1} < \epsilon$ ist muessn wir nun nur mehr nach n umformen.

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon \quad | \cdot 2^{n-1}$$

$$1 < \epsilon \cdot (2^{n-1}) \quad | \div \epsilon$$

$$\frac{1}{\epsilon} < 2^{n-1} \quad | \log_2$$

$$\log_2 \frac{1}{\epsilon} < n - 1 \quad | + 1$$

$$\log_2 \frac{1}{\epsilon} + 1 < n$$

- Wir haben nun gezeigt, dass $\lim_{x \to \infty} a_n = 2$ ist. Graturliere!

0.5 Beweisen Sie unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 = 8$$

0.5.1 Auflösen der Potenz mit der Binomischen Formel

Definition 0.6: Binomiche Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

1. Berechnen wir die Potenz mit der Binomischen Formel!

$$(a+b)^3 = a^3\cdot b^0\binom{3}{0} + a^2\cdot b^1\binom{3}{1} + a^1\cdot b^2\binom{3}{2} + a^0\cdot b^3\binom{3}{3}$$

2. Vereinfachen Wir

1
$$\frac{3!}{0!-(3-0)!=1}$$

2
$$\frac{3!}{1!-(3-1)!=3}$$

3
$$\frac{3!}{2!-(1)!}=3$$

4
$$\frac{3!}{3!-(3-3)!}=1$$

3. Wir erhalten:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\left|2^3 + 12 \cdot \frac{(-1)^n}{n} + 6 \cdot \frac{(-1)^{2n}}{n^2} + \frac{(-1)}{n^3} - 8\right| < \epsilon \quad \text{(Umformen)}$$

$$\left|12 \cdot \frac{(-1)^n}{n} + 6 \cdot \frac{(-1)^{2n}}{n^2} + \frac{(-1)}{n^3}\right| < \epsilon$$

`Da` -1^x `immer 1 ist, wenn n gerade ist:`

0.5.2 Fall: n ist gerade

Proof. 1. Fall: n ist gerade

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n > N |an - a| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{12n^2 + 6n + 1}{n^3}\right|$$

$$\left|(2 + \frac{(-1)^n}{n})^3 - 8\right| < \epsilon$$

$$\text{N} = \tfrac{\epsilon}{12} - 1$$

$$\begin{aligned}
&\frac{12n^2 + 6n + 1}{n^3} < n^3 > n \Rightarrow \frac{1}{n^3} && < \frac{1}{n} \\
\Rightarrow &\frac{12n^2 + 6n + 1}{n}\epsilon && |12n^2 + 6n + 1 < 12n^2 + 6n + 6n = 12n(n+1) \\
&\frac{12n^n + 6n + 1}{n^3} < 12(n+1) && < 12(N+1) = 12(\frac{\epsilon}{12} - 1 + 1)
\end{aligned}$$

□

0.5.3 Fall: n ist ungerade

$$
\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n > N \left| a_n - a \right| < \epsilon \left| (2 + \frac{(-1)^n}{n})^3 - 8 \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow \left| \frac{12n^2 + 6n + 1}{n^3} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow \left| - \frac{12n^3 - 6n + 1}{n^3} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow \frac{12n^2 - 6n + 1}{n^3} < \epsilon \quad \text{where } n^3 > n \Rightarrow \frac{1}{n^3} < \\
&\Rightarrow \frac{12n^2 - 6n + 1}{n^3} < \epsilon \quad \text{where } 12n^2 - 6n + 1 < \\
&\Rightarrow \frac{12n}{n} < \epsilon \Rightarrow 12n < \epsilon \quad \text{thus } n < \frac{\epsilon}{12}
\end{aligned}
$$

Waehle N so, dass gilt:

$$
\left| (2 + \frac{(-1)^n}{n})^3 - 8 \right| = \frac{12n^2 - 6 + 1}{n^2} < 12n < 12N = 12 \left(\frac{\epsilon}{12} \right) = \epsilon
$$