Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende

Renhart Werner

3. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Das elektrische Feld

1.1 Die elektrische Ladung

Lange Zeit galten Atome als die kleinsten, nicht weiter teilbaren Bausteine der Materie (atomos heißt unteilbar). Die Griechen Leukipp und Demokrit beschrieben dies schon etwa 500 vor Christus in ihren Schulen. Sie machten Beobachtungen über Anziehungen von einem Stück Fell, welches mit Bernstein (griechisch: elektron) in Berührung kam. Damit haben sie den Begriff Elektrizität geprägt. Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannten die Physiker, daß das Atom nicht unteilbar ist (Rutherford, 1871-1937). Das Atom besteht nunmehr aus einem Atomkern um den in bestimmten Abständen Elektronen kreisen. Der Atomkern besteht aus Neutronen und Protonen. Die Wirkung eines Atoms nach außen hin ist neutral. Entzieht man einem Atom beispielsweise ein Elektron, so kann eine Wirkung beobachtet werden, die man als elektrisch bezeichnet. Aus einer Vielzahl von in der Natur vorkommenden Kraftfeldern (z.B. Gravitationsfeld) befaßt sich die Elektrotechnik intensiv mit einem Kraftfeld, welches als elektrisches Feld bezeichnet wird. Ein Körper im elektrischen Feld reagiert zufolge einer elektrischen Ladung. Die elektrische Ladung Q beschreibt den elektrischen Zustand eines Körpers. Sie hat die aus den SI-Einheiten abgeleitete Einheit [As] oder auch Coulomb [C] genannt und wird in einem Vielfachen der sogenannten Elementarladung e ausgedrückt.

$$\boxed{\text{Elementarladung } e = 1,602189210^{-19}C}$$

Es ist dies eine Naturkonstante. Es gibt nun Körper, die per Definition positiv geladen sind und solche die negative Ladung aufweisen. Beispielsweise gilt :

ein Elektron ist negativ geladen, d.h. Q = -e
ein Proton ist positiv geladen, d.h. Q = e
ein Neutron ist ungeladen, d.h. Q = 0

Der willkürlichen Definition der Vorzeichen liegt zugrunde, daß ein Elektronenüberschuß mit minus, ein Elektronenmangel mit plus bezeichnet wird.

1.2 Wirkung elektrischer Ladungen

Man erkannte aus zahlreichen Versuchen (z.B. Bernsteinversuch der Griechen), daß elektrisch geladene Körper aufeinander eine Kraft ausüben. Charles Augustin Coulomb (1736 -1806, französischer Ingenieur und Physiker) gelang es, für diese Kraftwirkung eine, dem Gravitationsgesetz ähnliche Gesetzmäßigkeit aufzustellen(1785):

Zwei Körper wirken entlang ihrer Verbindungslinie mit einer Kraft, die proportional dem Produkt ihrer elektrischen Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes ist.

In mathematischer Schreibweise lautet das Coulombsche Kraftgesetz :

$$\vec{F} = k\frac{Q_1.Q_2}{r^2}\vec{e}_{12} \tag{1.1}$$

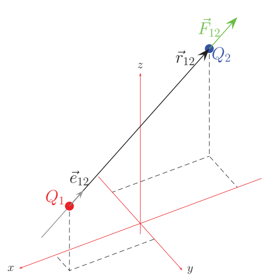

Abbildung 1.1: Kräfte zweier geladener Körper, in diesem Fall: Abstoßung zweier gleichnamig geladener Körper.

Die Proportionalitätskonstante in (1.1) entspricht dabei:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987.10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right] \tag{1.2}$$

ϵ_0 wird darin als elektrische Feldkonstante bezeichnet. Die physikalische Bedeutung dieser Größe wird später noch besprochen. Es ist nun zweckmäßig, den Begriff der elektrischen Feldstärke einzuführen. Dazu denke man sich den Körper mit der elektrischen Ladung Q_1 festgehalten. Mit der zweiten elektrischen Ladung Q_2 (Probeladung) untersuchen wir die Wirkung des ersten Körpers im Raum. Bezieht man die gemessene Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung Q_2 des Probekörpers, erhält man die elektrische Feldstärke $\vec{E}$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{Q_2} \left[\frac{kgm}{s^2} \frac{1}{As} = \frac{N}{As} = \frac{Ws}{m} \frac{1}{As} = \frac{VAs}{m} \frac{1}{As} = \frac{V}{m} \right] \tag{1.3}$$

bzw.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r. \tag{1.4}$$

Dem entsprechend existiert um einen geladenen Körper ein elektrisches Feld, dessen Größe proportional der elektrischen Ladung ist und mit dem Quadrat des Abstandes vom geladenen Körper abnimmt. Die Richtung des Feldes entspricht der radialen Richtung $\vec{e}_r$, vom Mittelpunkt der Ladung laufend. Die Gesamtheit aller Feldstärkevektoren $\vec{E}$ bezeichnet man als das elektrische Feld.

Wird ein Körper mit der Ladung Q in ein elektrisches Feld $\vec{E}$ gebracht, so erfährt dieser die Kraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}, \tag{1.5}$$

wobei $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke am Ort des Körpers mit der Ladung Q angibt. Bei diesen Betrachtungen muß vorausgesetzt werden, daß die räumlichen Ausdehnung des geladenen Körpers und dessen Ladung so gering sind, daß die ursprünglich vorherrschende Feldverteilung nicht gestört wird (Punktladungen). Sind mehrere Punktladungen vorhanden, so erzeugt jede für sich ein elektrisches Feld. Da der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und Q linear ist (Gl. 1.4), ergibt die Überlagerung der Felder aller Ladungen das Gesamtfeld. Beispielsweise ergibt die Gesamtfeldstärke für drei unterschiedliche Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 in einem beliebigen Punkt im Raum :

Die Gesamtfeldstärke $\vec{E}$ im Punkt P errechnet sich dabei zu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_{iP}^2} \vec{e}_{iP}. \tag{1.6}$$

1.2.1 Feldlinien und Feldlinienbilder

Um den optischen Eindruck über das Feldverhalten im gesamten Raum zu erhalten, müßte man in sehr vielen Punkten die Feldstärkevektoren in Betrag und Richtung dar-

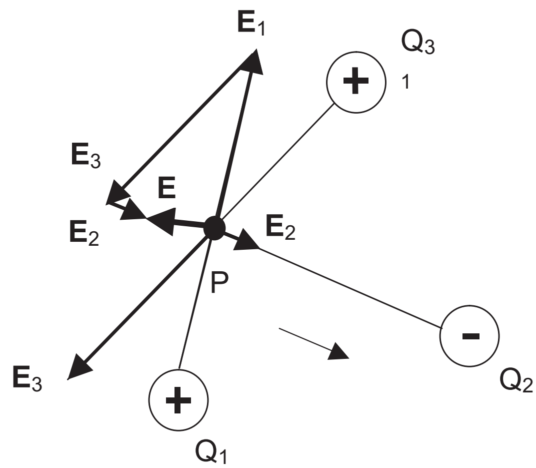

Abbildung 1.2: Überlagerung der elektrischen Feldstärken mehrerer Punktladungen in einem beliebigen Aufpunkt P.

stellen. Übersichtlicher ist es, das Verhalten mit Hilfe sogenannter Fedlinien wiederzugeben. Man erhält eine Fedllinie, wenn man von einem gegebenen Punkt aus ein kleines Stück in Richtung des Feldstärkevektors geht, die Richtung des Feldstärkevektors bestimmt, wieder ein kleines Stück weiterschreitet, und so fort. Aus dieser Darstellung ist

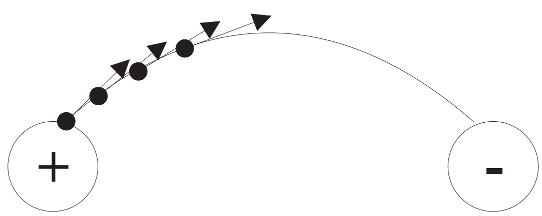

Abbildung 1.3: Konstruktion einer elektrischen Feldlinie.

sehr gut der qualitative Verlauf des elektrischen Feldes zu erkennen. Diese Darstellung gibt indirekt auch über den Betrag der elektrischen Feldstärke Auskunft. Er ist um so höher, je dichter beisammen die Feldlinien liegen. Alle Feldlinien haben einen Anfangs- und einen Endpunkt. Entsprechend einer willkürlichen Festlegung beginnen sie in den positiven Ladungen und enden in den negativen.

Die positiven Ladungen werden als Quellen, die negativen Ladungen als Senken des elektrischen Feldes bezeichnet.

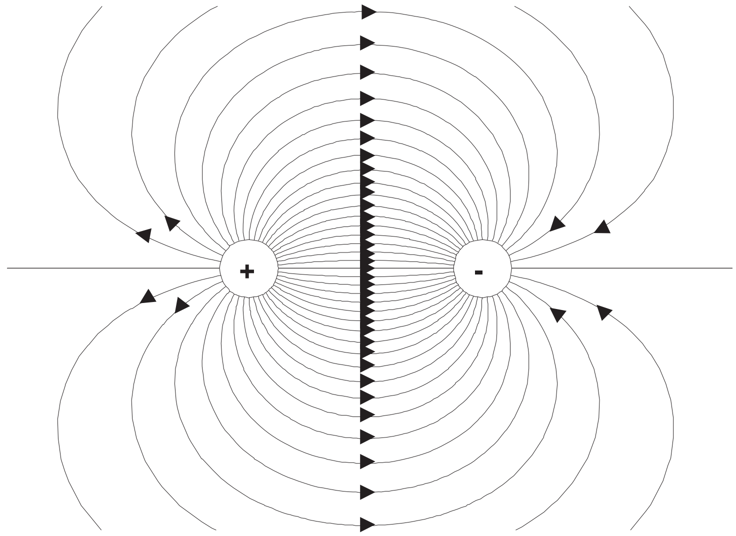

Abbildung 1.4: Feldlinienbild zweier punktförmiger Ladungen.

1.3 Arbeit, Potential und Spannung

Befindet sich im elektrischen Feld $\vec{E}$ eine elektrische Ladung Q, so wirkt auf diese eine Kraft $\vec{F}$ gemäß Gl. 1.1. Soll nun diese Ladung Q bewegt werden, so muß dazu Arbeit verrichtet werden. Bei einer Verschiebung der Ladung in Gegenrichtung zum elektrischen Feld $\vec{E}$ ist eine Energiezufuhr von außen erforderlich. D.h. es ist eine mechanische Kraft erforderliche, welche der Kraftwirkung des elektrischen Feldes entgegenwirkt. Erfolgt hingegen die Verschiebung in Richtung der elektrischen Feldstärke, so verrichtet das Feld die notwendige Arbeit. Die Arbeit W ist definiert als das Produkt der längs des Weges wirkenden Kraft und dem zurückgelegten Weg. Im Allgemeinen muß die Richtung der Kraft nicht mit der Richtung des Weges übereinstimmen, sodaß die vektorielle Projektion für die notwendige Arbeit maßgeblich ist. Für ein differentielles Wegelement $d\vec{s}$ gilt allgemein:

$$dW = \vec{F}_{mech} \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [Nm = J] \quad ... \quad Joule \tag{1.7}$$

$$|dW| = |\vec{F}||d\vec{s}| \cos\alpha \tag{1.8}$$

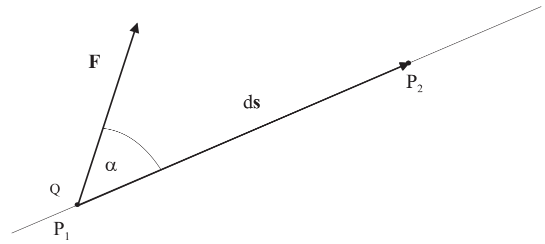

Abbildung 1.5: Arbeit im elektrischen Feld.

Die erforderliche Arbeit W_{12} zur Verschiebung der Ladung Q von P_1 nach P_2 (im elektrischen Feld) ergibt sich aus dem Wegintegral :

$$W_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{1.9}$$

Bewegt man nun die Ladung Q von P_2 nach P_1 zurück, so ändert sich lediglich die Richtung des Wegelementes zu $-d\vec{s}$, und die Arbeit W_{21} ergibt sich zu:

$$W_{21} = -\int_{P_2}^{P_1} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{1.10}$$

Entfernt man folglich eine Ladung Q im elektrischen Feld von einem Punkt P_1 und bringt diese Ladung anschließend wieder in diesen Punkt zurück, wird keine Gesamtarbeit W verrichtet:

$$W = W_{12} + W_{21} = 0 \tag{1.11}$$

Die Größe der Arbeiten W_{12} und W_{21} sind auch von der Wahl des Weges zwischen den Punkten P_1 und P_2 unabhängig:

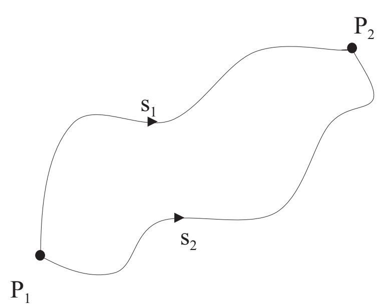

Abbildung 1.6: Bestimmung der verrichteten Arbeit entlang unterschiedlicher Wege.

Dieses Ergebnis läßt sich auch folgendermaßen interpretieren. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im elektrostatischen Feld entlang eines geschlossenenen Weges ist **Null**.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \tag{1.12}$$

Ein Feld mit dieser Eigenschaft bezeichnet man allgemein als **wirbelfrei**. Bedingt durch diese Wegunabhängigkeit des Integrales wird die Arbeit W nur vom Anfangs- und vom Endpunkt bestimmt. Man ordnet daher diesen Punkten eine charakteristische Größe, das **elektrostatische Potential** Φ zu. Es wird definiert:

$$W_{el} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} [-\vec{E} \cdot d\vec{s}] = Q[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)]. \tag{1.13}$$

Diese Definition erlaubt es, zum Potential $\Phi(P)$ einen beliebigen, konstanten Wert zu addieren, ohne daß sich der Wert des Linienintegrals (Gl. 1.13) ändert. Das elektrostatische Potential ist eine **skalare** Größe.

Für die Differenz der Potentiale in den Punkten P_1 und P_2 kann

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = U_{12} \quad \left[\frac{V}{m} m = V\right] \quad ...Volt \tag{1.14}$$

geschrieben werden. Die Größe U_{12} bezeichnet man als **elektrische Spannung** zwischen den Punkten P_1 und P_2.

1.4 Materie im elektrischen Feld

Bisher erfolgten alle Betrachtungen für luftleeren Raum, d.h. weder elektrisch leitfähige noch isolierende Körper waren vorhanden. Bei Vorhandensein derartiger Körper müssen die entsprechenden Materialeigenschaften mitberücksichtigt werden. Bringt man nun ein Material, zB. einen Matalldraht oder PVC in des elektrische Feld ein, so wird sich das elektrische Feld im Inneren derselben unterschiedlich einstellen. Um dies nun beschreiben zu können, ist es zweckmäßig, neben der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$, eine weitere Feldgröße, nämlich **die elektrische Verschiebung** $\vec{D}$, einzuführen. Sie ist als Proportionalität zur elektrischen Feldstärke folgent definiert:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \frac{V}{m} = \frac{(As)^2}{VAsm} \frac{V}{m} = \frac{As}{m^2}\right]. \tag{1.15}$$

Die Einheit der elektrischen Verschiebung $\vec{D}$ entspricht einer Ladung pro Fläche (Gl. 1.15). Auf die *Proportionalitätskonstante* ϵ wird bei der Beschreibung isolierender Stoffe näher eingegangen.

Zunächst werden elektrisch leitfähige Körper und hernach nichtleitende Körper in ein elektrisches Feld eingebracht und die jeweiligen Auswirkungen und Phänomene untersucht.

1.4.1 Leitfähige Körper - Influenz

Ein leitfähiger Körper, zB. ein Stück Kupferdraht, zeichnet sich dadurch aus, dass die um die Atomkerne kreisenden Elektronen unter sehr geringem energetischen Aufwand für einen Ladungstransport (=Strom) zur Verfügung stehen. Die Elektronen sind hoch beweglich.

Bringt man nun einen Leiter, -er ist elektrisch neutral- in ein elektrisches Feld $\vec{E}$ ein, so wird auf die Elektronen jeweils die Kraft $\vec{F} = Q\vec{E}$ wirken. Aufgrund ihrer hohen Beweglichkeit werden sich diese Elektronen bewegen. Diese Bewegungen erfolgen so lange, bis die Elektronen **keine** Feldstärke mehr verspüren, dh. wenn die Bedingung $\vec{E} = \vec{0}$ erfüllt ist. Damit ist auch die Kraft $\vec{F}$ auf die Ladungen Null. Diesen Vorgang nennt man die **elektrische Verschiebung oder Influenz**

Alle Ladungen des Leiters sind nunmehr flächenhaft an der Oberfläche des Leiters verteilt (vgl. Abb. 1.7).

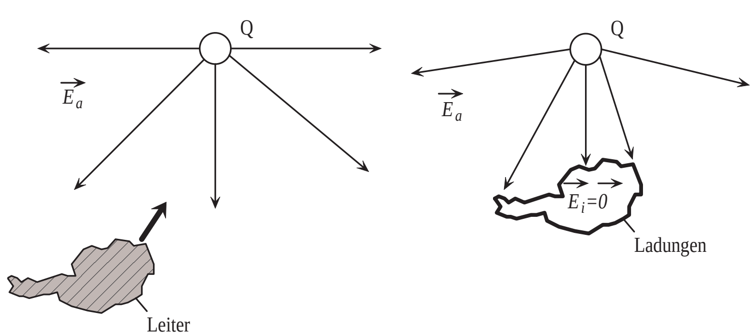

Abbildung 1.7: Ladungsverteilung und elektrisches Feld in einem elektrisch leitfähigen Körper.

Somit ist das Innere des Leiters feld- und ladungsfrei. Man könnte sich dieses Gebiet durch einen Isolator oder durch leeren Raum ersetzt denken, an dessen äußerer Begrenzung die Ladungen sitzen. Die folgenden wesentlichen Aussagen können nun getroffen werden:

1. **Elektrische Felder werden durch leitfähige Körper abgeschirmt.**

2. **Die elektrischen Feldlinien münden auf leitfähigen Körpern stets senkrecht ein.**
3. **Da das Innere eines Leiters feld- und ladungsfrei ist, muß die Leiteroberfläche eine Fläche konstanten Potentials darstellen (Äquipotentialfläche).**

Aus der Einheit der elektrischen Verschiebung $\vec{D}$ [As/m^2] ersieht man, daß aus dessen Integration über eine Fläche eine elektrische Ladung Q resultieren muß.

Tatsächlich ergibt ein **geschlossenes** Oberflächenintegral von $\vec{D}$ über ein beliebiges Gebiet die darin enthaltene Gesamtladung:

$$\oint_\Gamma \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma} = Q. \tag{1.16}$$

Diese Beziehung bezeichnet man als das **Gaußsche Gesetz**. Wird das Integral nicht über eine geschlossene Fläche, sondern nur über eine beliebige Fläche Γ ausgeführt, so ergibt dies den elektrischen Fluß Ψ_{el}:

$$\Psi_{el} = \int_\Gamma \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}. \tag{1.17}$$

War der leitende Körper vor dem Einbringen in das Fremdfeld $\vec{E}_f$ ungeladen, so ist er es dann auch wieder. Das geschlossene Oberflächenintegral über den eingebrachten Leiter ergibt Null, da eine gleich große Anzahl von positiven und negativen Ladungen influenziert wurde. In jedem Fall liegen die Influenzladungen umgekehrten Vorzeichens zu den influenzierenden Ladungen näher diesen influenzierenden Ladungen. Aufgrund der höheren Feldstärken im näheren Bereich werden sich influenzierende und influenzierte Leiter immer anziehen. Zur Feststellung der elektrischen Verschiebung $\vec{D}$ kann der Effekt der Influenz herangezogen werden.

1.4.2 Nichtleiter oder Isolatoren - Polarisation

Anders als beim leitenden Körper kann ein Isolator von einem elektrischen Feld durchsetzt werden. Man bezeichnet derartige Stoffe oft als **Dielektrika** (dia heißt durch). Die Elektronen eines isolierenden Materials, zB. PVC oder Glas, sind nur beschränkt beweglich. Sie können sich nicht solange bewegen, bis völlige Feldfreiheit vorherrscht. Es wird ein elektrisches Feld im Inneren verbleiben. Ein Maß für die Verschiebbarkeit von Ladungen wird nun mit der Dielektrizitätszahl ϵ ausgedrückt.

Ähnlich dem Falle eines Leiters im elektrischen Feld kann man auch bei einem Isolator die Ladungen an der Oberfläche vermuten. Die Dichte der Ladungen an der Oberfläche wird jedoch vergleichsweise klein sein, da ja im Inneren ein Feld $\vec{E}_i$ verbleibt. Man nennt diese Ladungen **Polarisationsladungen** mit der Dichte σ_{pol}. Als Polarisation bezeichnet man die makroskopisch feststellbare Ladungsverschiebung in dielektrischen Stoffen.

Im atomaren Verband können sich in einem Isolator die Ladungsschwerpunkte nur sehr begrenzt verschieben. Dies ist so lange möglich, bis sich zwischen der trennenden Kraft des äußeren elektrischen Feldes und der Anziehungskraft der Polarisationsladungen ein Gleichgewichtszustand einstellt. Auf die unterschiedlichen Arten der Polarisation (**Elektronenpolarisation, Molekül-Polarisation und Orientierungspolarisation**) wird hier nicht näher eingegangen.

Die Abschwächung der elektrischen Feldstärke in einem dielektrischen Stoff gegenüber luftleeren Raum kann durch den formalen Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon\,\vec{E} \;=\; \epsilon_r\,\epsilon_0\,\vec{E}, \tag{1.18}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\left[\frac{As}{Vm} = \frac{F}{m}\right] \;...\,Farad\;pro\;Meter. \tag{1.19}$$

über ϵ bzw. ϵ_r erfaßt werden. ϵ_r bezeichnet man als **relative** und ϵ als **absolute** Dielektrizitätskonstante des entsprechenden Stoffes. Gl. 1.18 besagt, daß eine Erhöhung der relativen Dielektrizitätszahl eines Mediums eine Erniedrigung des elektrischen Feldes in diesem Medium zur Folge hat.

1.4.3 Unterschiedliche dielektrische Stoffe

In der nachfolgenden Tabelle 1.1 sind die Dielektrizitätszahlen einiger Stoffe aufgelistet.

Stoff	ϵ_r		Stoff	ϵ_r
Luft	1,00059		Quarz	3,8 bis 5
Petroleum	2,0		Glas	5 bis 7
Polyäthylen	3,2		Keramik	9,5 bis 100
Polystyrol	2,6		Diamant	16,5
Gummi	2,5 bis 3,5		Nitrobenzol	36,0
Bernstein	2,8		destil. Wasser	81,0

Tabelle 1.1: relative Dielektrizitätszahlen.

Es gibt in der Natur einige Stoffe, die in den unterschiedlichen Achsenrichtungen verschiedene Dielektrizitätseigenschaften aufweisen. Zur Beschreibung des Feldverhaltens derariger Stoffe müssen die Materialeigenschaften entsprechend durch eine Matrix berücksichtigt werden, z.B. durch:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} . \tag{1.20}$$

ϵ_x, ϵ_y und ϵ_z sind darin die relativen Dielektrizitätszahlen für die indizierten Achsenrichtungen.

1.4.4 Die Kapazität

Man betrachte die einfache Anordnung zweier paralleler, in einem Abstand d angeordneter Platten (Abb. 1.8). Auf einen der Leiter bringt man eine positive Ladungsmenge +Q auf, auf den anderen gleich viele Ladungen umgekehrten Vorzeichens. In der Praxis erfolgt dies mit einer Spannungsquelle, deren Klemmen über leitende Verbindungen mit den zwei Platten verbunden sind.

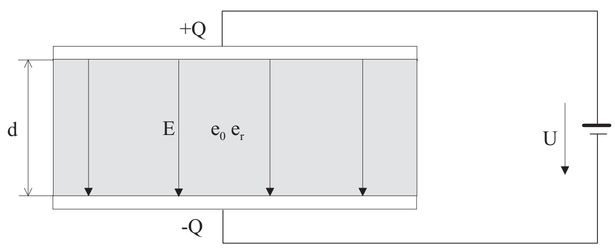

Abbildung 1.8: Zwei parallele Platten mit Batterie als Spannungsquelle

Es werden hierbei auf dem einen Leiter Ladungen der einen Art, auf dem anderen diejenigen umgekehrten Vorzeichens verschoben (influenziert). Bei einer gegebenen Spannung können diese Platten nur eine ganz bestimmte Anzahl von Ladungen aufnehmen. Ein Maß dafür ist die **Kapazität** C (Aufnahmefähigkeit). Aus Versuchen erkannte man, daß C umso größer ist, je größer die Fläche A der Leiter ist, je größer die Dielektrizitätszahl ϵ des dazwischenliegenden Mediums ist und sie wächst mit kleiner werdendem Abstand d der beiden Platten zueinander. Für die Ladungsmenge auf einer Platte gilt:

$$Q = \frac{\epsilon\, A}{d} U \; = \; C\, U. \tag{1.21}$$

Für eine allgemeine Anordnung zweier Leiter, entsprechend Abb. 1.9 folgt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_\Gamma \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}} \left[\frac{As}{V} \; = \; Farad \right] \tag{1.22}$$

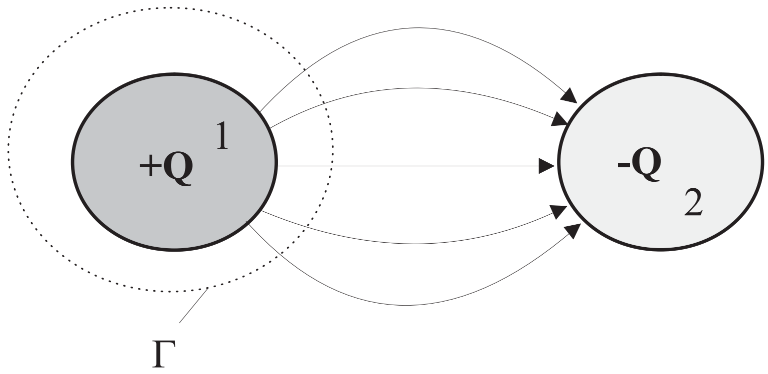

Abbildung 1.9: Kapazität zwischen zwei leitenden Körpern

Zur Veranschaulichung betrachte man eine Plattenanordnung mit einer Fläche von A=1 cm^2 in einem Abstand von d=1 mm zueinander plaziert. An diese Platten wird eine Spannung von U=1 V gelegt. Das Medium zwischen den Platten sei Luft ($\epsilon_r = 1$). Es ergibt sich die Kapazität :

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,854.10^{-12} \frac{1,0.10^{-4}}{1,0.10^{-3}} = 8,854.10^{-13}\, F \tag{1.23}$$

Bei einer Spannung von 1 V folgt die Ladungsmenge je Platte, nach Gl. 1.21 zu

$$Q = C\, U = 8,854.10^{-13}\, As\,. \tag{1.24}$$

Dividiert man diese Ladungsmenge durch die Elementarladung e, so erhält man die Anzahl der auf der Platte pro Quadratzentimeter befindlichen Ladungen. Hier sind dies $5,52615.10^6$ Elektronen.

Voneinander isoliert angeordnete Leiter, zwischen denen sich ein elektrisches Feld einstellen kann, nennt man **Kondensatoren**. Ihr Einsatzgebiet in der Elektrotechnik erstreckt sich über praktisch alle Teilgebiete, von der Elektronik über die Nachrichtentechnik bis zur Hochspannungs- und Anlagentechnik. Dementsprechend gibt es eine Vielzahl von Bauarten und Ausführungen von Kondensatoren.

Parallelschaltung von Kondensatoren

Das Schaltsymbol eines Kondensators wird durch zwei etwas dickere, parallele Striche, welche die Platten eines Kondensators stilisieren, und den elektrischen Verbindungen zu diesen Platten dargestellt (Abb. 1.10).

Durch das Verbinden jeweils einer Platte von zwei oder mehr Kondensatoren in nachfolgender Weise werden die verbundenen Platten auf gleiches Potential gebracht.

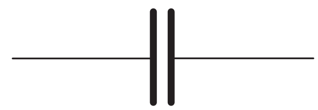

Abbildung 1.10: Schaltsymbol eines Kondensators

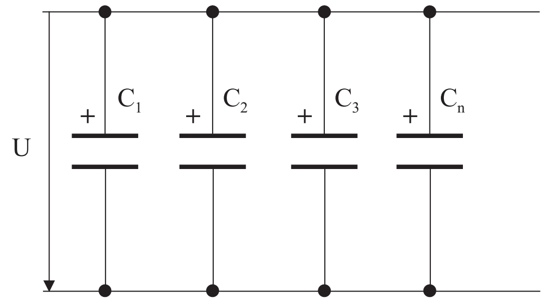

Abbildung 1.11: Parallelschaltung von Kondensatoren

Damit liegt an allen Kondensatoren dieselbe Spannung U. Die Gesamtkapazität ist die Summe aller verschobenen Ladungen bezogen auf die Spannung U:

$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \tag{1.25}$$

Werden Kapazitäten parallel geschalten, so ergibt sich die Gesamtkapazität aus der Summe aller Teilkapazitäten.

$$C_{ges} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} Q_i}{U} = \Sigma_{i=1}^{n} C_i \tag{1.26}$$

Da an allen Teilkapazitäten dieselbe Spannung U liegt, folgt

$$Q_i = C_i U \qquad \Longrightarrow \qquad Q_1 : Q_2 : Q_3 : \cdots : Q_n = C_1 : C_2 : C_3 : \cdots : C_n. \tag{1.27}$$

Die zugeführte elektrische Ladungsmenge Q_{ges} verteilt sich auf die Kondensatoren im Verhältnis ihrer Kapazitäten.

Reihenschaltung von Kondensatoren

Schaltet man mehrere Kondensatoren derart, daß zwischen dem Ende des einen und dem Beginn des nächsten eine leitende Verbindung besteht, so erhält man eine Serien- oder Reihenschaltung von Kondensatoren (Abb. 1.12).

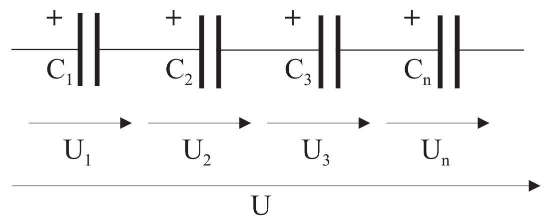

Abbildung 1.12: Reihenschaltung von Kondensatoren

Schließt man dieses Gebilde an den beiden äußersten Anschlüssen mit einer Spannungsquelle (z.B. Batterie) zusammen, so werden sich zunächst an den beiden äußersten Platten Ladungen verschieben. Durch das entstehende elektrische Feld werden infolge Influenz auch Ladungen auf den dazwischenliegenden Platten verschoben. An allen Platten muß sich dieselbe Ladungsmenge +Q bzw. -Q einstellen. Es gilt:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}, \quad \cdots \quad U_n = \frac{Q}{C_n}. \tag{1.28}$$

Die gesamte angelegte Spannung verteilt sich auf die Kondensatoren gemäß :

$$U = \int_{s_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) \tag{1.29}$$

Die Gesamtkapazität erhält man wiederum aus dem Quotienten $\frac{Q}{U}$ zu:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}. \tag{1.30}$$

Als häufig auftretenden Sonderfall sei hier die Seireinschaltung zweier Kondensatoren angeführt:

$$C = \left(\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}\right) \quad = \quad \frac{C_1\, C_2}{C_1 + C_2}. \tag{1.31}$$

Durch die Serienschaltung von Kondensatoren wird die Gesamtkapazität verkleinert.

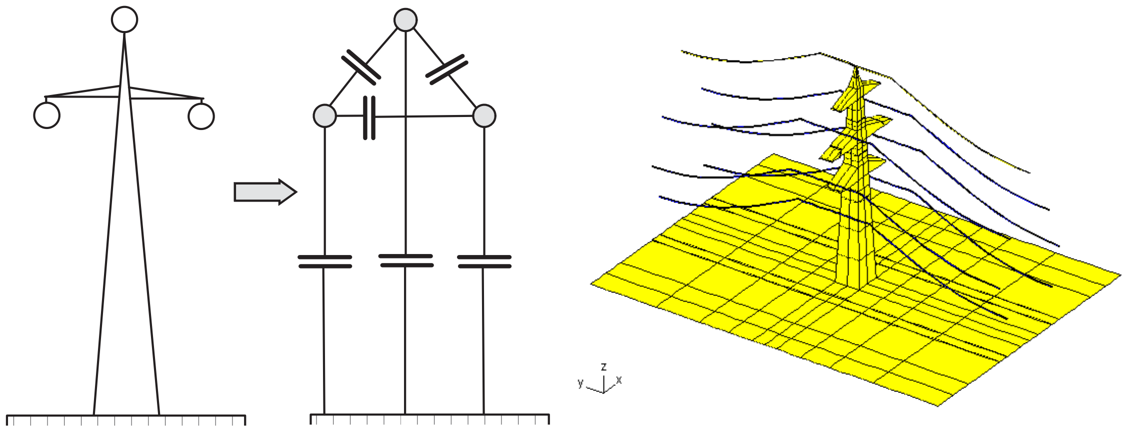

Abbildung 1.13: Kapazitäten an einer Hochspannungsleitung.

1.4.5 Beispiel aus der Praxis

Man betrachte die in Abb. 1.13 dargestellte Anordnung einer Hochspannungs-Freileitung.

Die drei Leitungen des Energieübertragungssystemes haben unterschiedliches Potential. Damit ist eine typisch kapazitive Anordnung gegeben. Die Kapazitäten, sie sind in der mittleren Abbildung dargestellt, beeinflussen nachhaltig das elektrische Verhalten eines Energieübertragungsnetzwerkes. Bei Doppel- und Mehrfachsystemen, wie sie bei 380kV-Trassen eingesetzt werden, sind die Verhältnisse noch komplexer (rechte Abbildung).

1.5 Energie im elektrostatischen Feld

Bisher wurde davon gesprochen, daß sich ungleichnamige Ladungen anziehen (Coulombsches Kraftgesetz). Zur Trennung von Ladungen muß hingegen mechanische Arbeit verrichtet werden. Beim Bernstein-Versuch war die mechanische Tätigkeit das Reiben des Fells an Bernstein. Dem Energieerhaltungsprinzip entsprechend muß sich diese Arbeit in irgend einer Form wiederfinden. In unserem Falle ist dies die **elektrische Feldenergie**. Sie ist im Raum, in welchem sich das elektrische Feld erstreckt, gespeichert. Man beobachte nun folgenden Versuch.

Zwei Körper, Leiter1 und Leiter 2 haben die elektrischen Potentiale Φ_1 und Φ_2 (Abb. 1.14).

Wird nun eine differentielle elektrische Ladung dQ entgegen der elektrischen Feldkräfte von Leiter 1 nach Leiter 2 gebracht, so muß mechanische Arbeit $-dW_{mech}$ aufgebracht

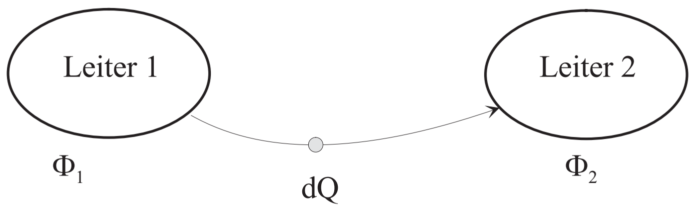

Abbildung 1.14: Verrichtung mechanischer Arbeit und Speicherung elektrischer Energie.

werden (negatives Vorzeichen bedeutet verbrauchte Energie):

$$dW_{el} = -dW_{mech} = dQ\,(\Phi_2 - \Phi_1) = dQ\,U_{21} = dQ\,U. \tag{1.32}$$

Allgemein ist die Ladung proportional der Spannung ($Q = C\,U,$ Gl. 1.21). Bei diesem Versuch bleibt die Kapazität C der Anordnung unverändert. Somit muß für die infinitesimale transportierte Ladung dQ gelten:

$$dQ = C\,dU, \tag{1.33}$$

sodaß mit 1.32

$$W_{el} = \int_0^Q U\,dQ \;=\; C\int_0^U U\,dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{1.34}$$

folgt und man folgende allgemeine Aussage ableiten kann:

Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie entspricht dem halben Produkt aus der Kapazität und dem Quadrat der angelegten elektrischen Spannung.