

Analysis T1

1. Klausur, 1.12.2020
Gruppe B

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für die unten angegebenen Folgen.

a)

$$a_n = 3 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}, \quad n \geq 1.$$

b)

$$a_n = \frac{1 - \frac{2}{n}}{n}, \quad n \geq 1.$$

c)

$$a_n = \frac{3n^3 - 4n}{n^3 + 2n + 1}, \quad n \geq 1.$$

d)

$$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}, \quad n \geq 1.$$

e)

$$a_n = \left(2 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right) \left(2 + \frac{4}{n}\right) \left(2 + \frac{5}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

2. Bestimmen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent oder divergent ist. Dabei ist

a)

$$a_n = \frac{3n - 1}{5n^3 - n^2}, \quad n \geq 1.$$

b)

$$a_n = n^2, \quad n \geq 1.$$

c)

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

d)

$$a_n = \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 1.$$

e)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

3. Sind diese Funktionen injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

a)

$$f(x) = x^2, \quad f : [-3, 3] \mapsto [-9, 9].$$

b)

$$f(x) = 0, \quad f : [-2, 2] \mapsto \{0\}.$$

4. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n (6k - 3)^2 = 3n(2n - 1)(2n + 1).$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ für alle $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Geben Sie alle Rechenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 5 + 5 + 4 + 6; maximale Gesamtpunktezah! = 20.