Analysis 1 für Informatikstudien

7. Übungsblatt

---

1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)x^k}{2^k}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$.

   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

   Welche Funktionen werden durch die Potenzreihen in Teilaufgabe (c) bzw. (d) dargestellt?

2. Skizzieren Sie für jede der folgenden Funktionen den Funktionsgraph, für x in einem sinnvoll gewählten Bereich. Erklären Sie jeweils wie die Skizze zustande gekommen ist.

   (a) $f(x) = e^{-x}$.

   (b) $f(x) = e^{x+1}$.

   (c) $f(x) = e^{|x|}$.

   (d) $f(x) = \ln(\max(1, x))$.

3. Skizzieren Sie für jede der folgenden Funktionen den Funktionsgraph, für x in einem sinnvoll gewählten Bereich. Erklären Sie jeweils wie die Skizze zustande gekommen ist.

   (a) $f(x) = \sin(2x)$.

   (b) $f(x) = x\cos(x)$.

   (c) $f(x) = \cos(x + 1)$.

   (d) $f(x) = \sin(x^2)$.

4. Verwenden Sie $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, um nachzuweisen dass

   $$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

   und

   $$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

   für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Verwenden Sie die Rechenregeln für Logarithmen, sowie die Tatsache dass $\ln 2 \approx 0.69$ und $\ln 3 \approx 1.10$, um folgende Werte der Logarithmusfunktion annäherungsweise (ohne Taschenrechner) zu berechnen:

(a) $\ln 8$.

(b) $\ln 36$.

(c) $\ln \frac{3}{16}$.

Stellen Sie außerdem (ohne Taschenrechner) mithilfe der Logarithmen fest welche Zahl größer ist: 2^{10} oder 3^7.

1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)x^k}{2^k}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$.

   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

   Welche Funktionen werden durch die Potenzreihen in Teilaufgabe (c) bzw. (d) dargestellt?

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{von} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x-0)^k \Rightarrow R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{\overbrace{1/k}^{\to 0}} = 1$$

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)x^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{2^k} (x-0)^k \Rightarrow R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k+4}{2^k}\right|}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k+4}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(k+4)^{\underset{0}{\underset{\downarrow}{1/k}}}} = \frac{2}{1} = 2$$

c) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-0)^k \Rightarrow R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k!}\right|}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^{1/k}}{2} = \infty$$

d) $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 (x-0)^k \Rightarrow R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|1|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+4)x^k}{2^k}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$.

   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

   Welche Funktionen werden durch die Potenzreihen in Teilaufgabe (c) bzw. (d) dargestellt?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-0)^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{k}{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{k} = 1$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{2^k}(x-0)^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{k+5}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k+4}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2 \cdot 2^k (k+4)}{2^k (k+5)}$$

$$= 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{4}{k}}{1+\frac{5}{k}} = 2$$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}(x-0)^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{2^k} \cdot \cancel{k!}\,(k+1)}{2 \cdot \cancel{2^k} \cdot \cancel{k!}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2} = \infty$$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k (x-0)^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{1^{k+1}}{1^k}\right|} = 1$$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ geometrische Reihe

2. Skizzieren Sie für jede der folgenden Funktionen den Funktionsgraph, für x in einem sinnvoll gewählten Bereich. Erklären Sie jeweils wie die Skizze zustande gekommen ist.

   (a) $f(x) = e^{-x}$.

   (b) $f(x) = e^{x+1}$.

   (c) $f(x) = e^{|x|}$.

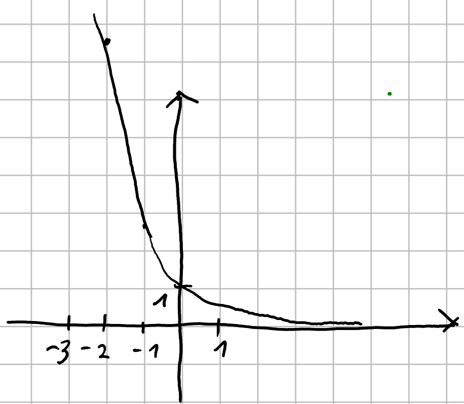
   (d) $f(x) = \ln(\max(1, x))$.

a) $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

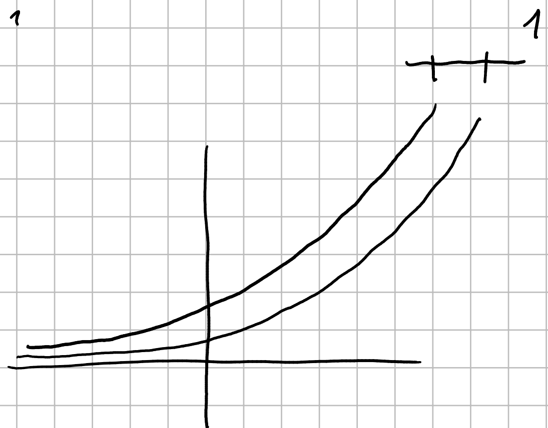
$f(-3) = e^3 < 27$ $\quad$ $f(-1) = e < 3$

$f(-2) = e^2 < 9$ $\quad$ $f(0) = 1$

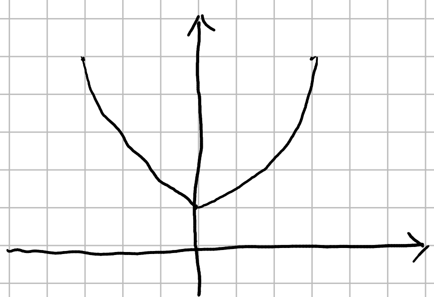
$f(1) = \frac{1}{e}$ $\quad$ $f(2) > \frac{1}{9}$



b) $f(x) = e^{x+1}$



c) $f(x) = e^{|x|}$



d) $f(x) = \ln(\max(x, 1))$

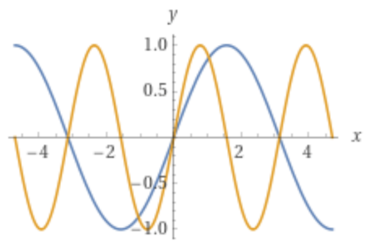
3. Skizzieren Sie für jede der folgenden Funktionen den Funktionsgraph, für x in einem sinnvoll gewählten Bereich. Erklären Sie jeweils wie die Skizze zustande gekommen ist.

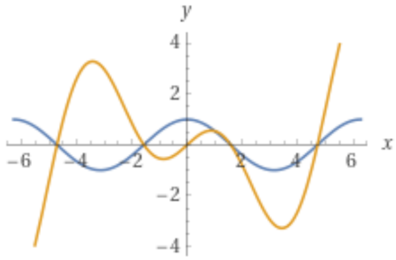
   (a) $f(x) = \sin(2x)$.

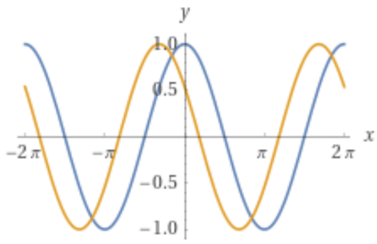
   (b) $f(x) = x\cos(x)$.

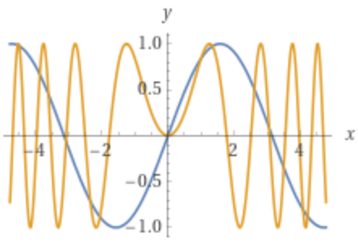
   (c) $f(x) = \cos(x+1)$.

   (d) $f(x) = \sin(x^2)$.









4. Verwenden Sie $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, um nachzuweisen dass

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x+y) = \frac{e^{ix+iy} + e^{-ix-iy}}{2}$$

$$\cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix+iy} + \cancel{e^{-ix+iy}} + \cancel{e^{ix-iy}} + e^{-ix-iy}}{4} - \frac{e^{ix+iy} - \cancel{e^{-ix+iy}} - \cancel{e^{ix-iy}} + e^{-ix-iy}}{-4}$$

$$= \frac{2e^{ix+iy} + 2e^{-ix-iy}}{4} = \frac{e^{ix+iy} + e^{-ix-iy}}{2} = \cos(x+y)$$

$$\sin(x+y) = \frac{e^{ix+iy} - e^{-ix-iy}}{2i}$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$$

$$= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix+iy} - \cancel{e^{-ix+iy}} + \cancel{e^{ix-iy}} - e^{-ix-iy}}{4i} + \frac{e^{ix+iy} + \cancel{e^{-ix+iy}} - \cancel{e^{ix-iy}} - e^{-ix-iy}}{4i}$$

$$= \frac{2e^{ix+iy} - 2e^{-ix-iy}}{4i} = \frac{e^{ix+iy} - e^{-ix-iy}}{2i} = \sin(x+y)$$

5. Verwenden Sie die Rechenregeln für Logarithmen, sowie die Tatsache dass $\ln 2 \approx 0.69$ und $\ln 3 \approx 1.10$, um folgende Werte der Logarithmusfunktion annäherungsweise (ohne Taschenrechner) zu berechnen:

(a) $\ln 8$.

(b) $\ln 36$.

(c) $\ln \frac{3}{16}$.

Stellen Sie außerdem (ohne Taschenrechner) mithilfe der Logarithmen fest welche Zahl größer ist: 2^{10} oder 3^7.

a) $\ln(8) = \ln(2^4) \approx 4 \cdot 0{,}69 \approx 2{,}76$

b) $\ln(36) = \ln(3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) = \ln(3^2 \cdot 2^2) = \ln(3^2) + \ln(2^2)$

$\approx 2 \cdot 1{,}10 + 2 \cdot 0{,}69 = 2{,}20 + 1{,}38 = 3{,}58$

c) $\ln(\frac{3}{16}) = \ln(3 \cdot 16^{-1}) = \ln(3 \cdot 2^{-4}) = \ln(3) + \ln(2^{-4})$

$\approx 1{,}10 + (-4)\, 0{,}69 = 1{,}10 - 2{,}76 = -1{,}66$

$2^{10} \overset{?}{<} 3^7$

$10 \ln(2) \overset{?}{<} 7 \ln(3)$

$10 \cdot 0{,}69 \overset{?}{<} 7 \cdot 1{,}10$

$6{,}9 < 7{,}7 \Rightarrow 2^{10} < 3^7$