# Aufgabe 1

Zeigen Sie unmittelbar anhand der Definition dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$ konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Zeigen dazu mittels vollständiger Induktion dass für die Partialsummen der Reihe gilt: $s_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ für $n \geq 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k-1}{k(k+1)}$$

**Definition 0.1 – Konvergenzkriterien von Reihen** ⭐ Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

D.h. Zur ermittlung des **Grenzwertes** nehmen wir die Partialsumme her!

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)} = \underbrace{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}_{s_n}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{1}(-1)^2\frac{2+1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}, \\ s_1 = 1 + \frac{(-1)^2}{1+1} = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{Wahr fuer n=1} \qquad \checkmark$$

Induktionbehauptung: $n + 1$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)} = \underbrace{1 + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}}_{\text{Zu Zeigen durch IS}}$$

Induktionbehauptung: $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{k(k+1)} = \underbrace{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}_{s_n} + \underbrace{(-1)^{n+2}\frac{2n+2}{(n+1)(n+2)}}_{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+(-1)^{n+2}\frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} && \text{Selben Nenner bringen}\\
1+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+2)}{(n+1)(n+2)}+(-1)^{n+2}\frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} && (-1)^{n+1}=(-1)^{n+3} \quad \text{Wir wollen } {}^{n} \text{ loswerden.}\\
1+\frac{(-1)^{n+3}\cdot(n+2)}{(n+1)(n+2)}+(-1)^{n+2}\frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} && (-1)^{n+3}=(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{-1}\\
1+\frac{(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{1}(n+2)}{(n+1)(n+2)}+(-1)^{n+2}\frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} && \\
1+\frac{(-1)^{n+2}\cdot((-1)^{1}(n+2)+2n+2)}{(n+1)(n+2)} && \text{Ausmultiplizieren}\\
1+\frac{(-1)^{n+2}(-n-2+2n+2)}{(n+1)(n+2)} && \text{Kuerzen}\\
1+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2} && \checkmark
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 2

Zeigen Sie unmittelbar anhand der Definition dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Zeigen dazu mittels vollständiger Induktion dass für die Partialsummen der Reihe gilt: $s_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$ für $n \geq 0$.

## 0.1 Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{1} \frac{k^2}{2^k} & = \frac{1}{2} \\ s_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{n^2} & \frac{1}{2} \end{cases} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{2^k} \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

Induktionsbehauptung: $n + 1$

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \underbrace{6 - \frac{(n+1)^2 + 4(n+1) + 6}{2^{n+1}}}_{\text{Zu zeigen}}$$

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} &= sn + \underbrace{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}_{n+1 \text{ Element von } \sum_{k=0}^{n+1}} && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&\overset{IV}{=} 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} && \text{Selben Nenner bringen} \\
&= 6 - \frac{2n^2+8n+12}{2^{n+1}} + \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} && \text{Loesen fuer das } - \\
&= 6 + \frac{-2n^2-8n-12}{2^{n+1}} + \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}} && \text{Vereinen} \\
&= 6 + \frac{-n^2-6n-11}{2^{n+1}} && \cdot -1 \\
&= 6 - \frac{n^2+6n+11}{2^{n+1}} && \checkmark
\end{aligned}$$

## 0.2 Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} & && \text{Grenzwert der Partialsumme} \\
\lim_{n\to\infty} &= 6 && \checkmark
\end{aligned}$$

# Aufgabe 3

Überprüfen Sie ob die folgenden Reihen konvergent sind. Geben Sie jeweils an welches Konvergenzkriterium Sie verwendet haben.

### 0.2.1 a) Minorantenkriterium für Reihen mit nichtnegativen Gliedern

**Definition 0.2 – Minorantenkriterium** Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen mit $a_n, b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert und $a_n \geq b_n$ für alle $n$ gilt, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Definition 0.3 – Rechengesetze, nuetzlich zu wissen:**

- Wir benutzen das **Quotientenkriterium**, wenn:
  - $\mathbb{X}^k$ , oder $K!$
- Wir benutzen das **Minorantenkriterium**, wenn:
  - Vermuten, dass die Reihe divergiert, aber nicht wissen wie wir es zeigen sollen.
  - $\frac{b_k}{a_k} > 0$, dann divergiert die Reihe.
- Wir benutzen das **Majorantenkriterium**, wenn:
  - Vermuten, dass die Reihe konvergiert, aber nicht wissen wie wir es zeigen sollen.
  - $\frac{b_k}{a_k} < \infty$, dann konvergiert die Reihe.

**Theorem 0.1 – 2.8.13.** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ divergent, $b_n \geq 0$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = m$. Wenn $m > 0$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ (Heuristik: das wird sein wie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ )

  Minorantenkriterium, da wir Divergenz vermuten!

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{K+1} = \lim_{k\to\infty} 1 \quad > \quad 0$$

Divergent laut Minorantenkriterium

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{4^k}$

Quotientenkriterium, da $^k$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{k+1}+1}{4^{k+1}}}{\frac{2^k+1}{4^k}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{k+1}+1}{2^{2+k}+4} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{2^{k+1}}}}{2+\cancelto{0}{\frac{2}{2^k}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}
$$

Konvergent laut Quotientenkriterium

- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2k+1}{k^4+k^2}$ (Heuristik: das wird sein wie: $\frac{1}{k^2}$ )

Majorantenkriterium

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2(k^2+2k+1)}{k^4+k^2} = \frac{1}{2} > 0$$

Konvergent laut Majorantenkriterium

- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ Zeige durch **Cauchy**, wir zeigen, dass es nicht konvergent ist und dadurch divergent sein muss.

Cauchy

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{k^k+1^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} = 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Divergent laut Cauchy

# 1 Aufgabe 4

Überprüfen Sie ob die folgenden Reihen konvergent sind. Geben Sie jeweils an welches Konvergenzkriterium Sie verwendet haben.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ Mit Quotientenkriterium loesen!

$$\ldots \qquad \frac{2}{k+1} = 0 \quad < 1$$

konvergent laut quotientenkriterium

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ Mit Quotientenkriterium loesen!
-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2k! \cdot ((k+1)!)^2}{(k!)^2 \cdot (2k+1)!}$$
$$\mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{2k! \cdot (K+1)! \cdot (k+1)!}{(k!)^2 \cdot (2k+2)!}$$
$$\vdots$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^2+2k+1^2}{4k^2+6k+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \quad < \quad 1$$

Konvergent laut Quotientenkriterium

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k^k+k!}$ Mit Cauchy loesen, muss divergent sein, da $\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^k}{k^k}}{\frac{k^k}{k^k} + \frac{k!}{k^k}} \quad 1 \quad \neq 0$$

Divergent laut Cauchy

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ Mit Quotientenkriterium loesen!

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^k \cdot k^{k+1}\,(k+1)!}{2^k k! \cdot (k+1)^{k+1}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$
$$= 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{1}{k})^k}$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \quad < \quad 1$$

Konvergent laut Quotientenkriterium

## 2 Aufgabe 5

Aus der Vorlesung wissen wir dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Verwenden Sie die Rechenregeln für das Rechnen mit Grenzwerten um damit nachzuweisen dass

- $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

Selben Nenner bringen

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n-1}\right)^n}\right) \\
&\overset{n+1}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{e} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{e} \\
&= e^2 \quad \checkmark
\end{aligned}$$