NRLA Blatt 7

Donnerstag, 17. November 2022 14:33

Aufgabe 7-1

Man zeige, dass mit der folgenden Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle u, v\rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

für $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein Skalarprodukt vorliegt.

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

zz.: $\langle u, v\rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_2y_2$

$\langle u, v\rangle = u^T A v$ ⇒ Matrixdarstellung eines Skalars

$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$

Überprüfen, ob es ein Skalar ist

1) Symmetrie: $s(u,v) = s(v,u)$

$$\left.\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \\ \langle v, u\rangle &= 4y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + y_2x_2 \end{aligned}\right\} \overset{!}{=} \checkmark$$

in Matrix $b = c$ um sym.

2) Linear:

$s(u, \lambda v) = 4x_1\lambda y_1 - x_1\lambda y_2 - x_2\lambda y_2 + x_2\lambda y_2$
$= \lambda \cdot (4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)$
$= \lambda \cdot s(u,v)$ → gleich wie $s(\lambda u, v) = \lambda \cdot s(u,v)$

Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$s(u+z, v) = 4\cdot(x_1+z_1)y_1 - (x_1+z_1)y_2 - (x_2+z_2)y_1 + (x_2+z_2)y_2$
$= 4\cdot(x_1y_1 + z_1y_1) - (x_1y_2 + z_1y_2) - (x_2y_1 + z_2y_1) + (x_2y_2 + z_2y_2)$
$= 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 4z_1y_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + z_2y_2$
$= s(u,v) + s(z,v)$ ⇒ gleich wie $s(u, z+u) = s(u,z) + s(u,v)$

3) positiv definit: $\langle v, v\rangle \geq 0$

$s(v,v) = 4\cdot x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{3x_1^2}_{\geq 0}$

$v = 0 \Leftrightarrow s(v,v) = 0$

$s(v,v) = 4\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0 - 0\cdot 0 + 00 = 0$ ✓

Aufgabe 7-2

Gegeben sind die Vektoren

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$

Man berechne $\langle u, v\rangle$, wobei in Beispiel a) einmal das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ zu verwenden ist und dann das in Beispiel 7-1 angegebene Skalarprodukt. Im Beispiel b) ist das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ zu verwenden.

Man berechne den Abstand $d(u, v)$ für die oben angegebenen Vektoren, wobei jeweils die Betragsnorm, die Euklidische Norm und die Maximumsnorm zu verwenden sind (kanonisches Skalarprodukt). Für Teil a) auch $||u - v||$, mit der von dem Beispiel in 7-1 induzierten Norm.

a) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$

  $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1\cdot 3 + 2\cdot 1 = -1$

- $\langle u, v\rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$

  $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4\cdot(-1)\cdot 3 - (-1)\cdot 1 - 2\cdot 3 + 2\cdot 1$
  $= -12 + 1 - 6 + 2 = -15$

- $d(v,u) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
- $\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = |-4| + |1| = 5$

- $d(v,u) = \left\| \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
- $\left\| \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\|_1 = |-4| + |1| = 5$
- $\left\| \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{|-4|^2 + |1|^2} = \sqrt{17}$
- $\left\| \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\|_\infty = \max \{|-4|, |1|\} = 4$

- Mittels induzierter Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$

$$\|u - v\| = \left\| \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{Skalar aus 7-1}}} = \sqrt{4 \cdot (-4) \cdot (-4) - (-4) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 1}$$
$$= \sqrt{64 + 4 + 4 + 1}$$
$$= \sqrt{73}$$

b) $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

- $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 2 + 6 + 3 = 11$
- $d(u,v) = \left\| \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$
- $\left\| \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\|_1 = |-1| + |-1| + |2| = 4$
- $\left\| \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{|-1|^2 + |-1|^2 + |2|^2} = \sqrt{6}$
- $\left\| \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\|_\infty = \max \{|-1|, |2|\} = 2$

Aufgabe 7-3 Für $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ gegeben.

a) Für $v = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ berechne man $\langle \overset{w}{\cancel{u}}, v \rangle$, $\|\overset{w}{\cancel{u}}\|$, $d(\overset{w}{\cancel{u}}, v)$ unter Verwendung des Skalarproduktes.

b) Man bestimme einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$, so dass u orthogonal zu v ist. Def 50

Sei $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \wedge w = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ es gilt $\langle v, w \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$

a)
- $\langle v, w \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$

  $\left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 4 = 0$ |
- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{11}$
- $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{66}$
- $d(w, v) = \left\| \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$

b) Weil $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \perp w$

$u = w$

Aufgabe 7-4 Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$, des $\mathbb{R}^3$, des $\mathbb{R}^4$ bzw. eines Teilraumes davon. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis. (Bei Teil c) also weitere Vektoren ergänzen.)

a) $\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix}$.

$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 \qquad u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, w_k \rangle \cdot w_k \qquad i = 2, \dots, n$

$w_i = \frac{1}{\|u_i\|} \cdot u_i$

a) $v_1 = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

$u_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \quad 6 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ONB = \left\{ \begin{pmatrix}3/\sqrt{18}\\-3/\sqrt{18}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/\sqrt{8}\\2/\sqrt{8}\end{pmatrix} \right\}$$

b) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_1 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - (-6) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - (-2) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$$
$$= \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - (-3) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \quad 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ONB = \left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \right\}$$

c) $v_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix}$ erweitern durch Basis Vektoren

$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$u_1 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$$
$$= \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix} - \quad \frac{15}{10} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-15/10\\15/10\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3{,}5}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3{,}5}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3{,}5}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} - \quad 3{,}5 \cdot \frac{1}{3{,}5} \cdot \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix} - \frac{7}{10} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1/2\\-15/10\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}14/10\\-7/10\\7/10\\14/10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\\15/10\\2{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}14/10\\-7/10\\7/10\\14/10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14/10\\2/10\\8/10\\11/10\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\quad} \cdot \begin{pmatrix}-14/10\\2/10\\\ldots\end{pmatrix} = \frac{1}{\quad} \cdot \begin{pmatrix}-14/10\\2/10\\\ldots\end{pmatrix}$$

für $v_1 \wedge v_2$ orthogonalen Vektor finden
- Skalarprodukt für $v_1 \wedge v_2$ mit x berechnen $= 0$
- Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix}x\\x\\x\\x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\x\\x\\0\end{pmatrix} \rightarrow \text{davon}$$

Alte Übungsaufgaben
- maybe ähnlich wie vor 2 Jahren (net angeschaut Prof.)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4/10 \\ 14/10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 14/10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\| u_2 \|} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{77}{20}}} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{77}{20}}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{77}{20}}} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} - \overbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -15/10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3{,}5}} \right\rangle}^{=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{3{,}5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -15/10 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(-\frac{14}{10}\right) \cdot \frac{1}{\frac{77}{20}} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{280}{770} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/10 \\ -2/10 \\ 2/10 \\ 4/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{11} \cdot \begin{pmatrix} -14/10 \\ 2/10 \\ 8/10 \\ 11/10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/10 \\ -2/10 \\ 2/10 \\ 4/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -\frac{56}{110} \\ 8/110 \\ 32/110 \\ 44/110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44/110 \\ -22/110 \\ 22/110 \\ 4/110 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12/110 \\ -14/110 \\ 54/110 \\ 48/110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122/110 \\ 14/110 \\ -54/110 \\ -48/110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/55 \\ 7/55 \\ -27/55 \\ -24/55 \end{pmatrix}$$

$$W_4 = \frac{1}{\| u_3 \|} \cdot \begin{pmatrix} 61/55 \\ 7/55 \\ -27/55 \\ -24/55 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{203}{121}}} \cdot \begin{pmatrix} 61/55 \\ 7/55 \\ -27/55 \\ -24/55 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ONB = \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \}$$

Aufgabe 7-5 Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt berechne man eine orthonormale Basis des von der Basis $\mathcal{B}$ aufgespannten Vektorraumes.

$V = \mathbb{P}_2, \quad \mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ mit dem Skalarprodukt $\int_0^1 p(t)q(t)\,dt$.

$V = \mathbb{P}_2 \qquad p_1(t) = 1 \qquad Sp: \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$

$p_2(t) = 1+t$

$p_3(t) = 1+t+t^2$

$$\| p_1 \|^2 = \langle p_1, p_1 \rangle = \int_0^1 p_1(t) p_1(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 1 \cdot 1 \,dt = \int_0^1 1 \,dt = 1$$

$$\Rightarrow w_1(t) = \frac{1}{\|p_1\|} \cdot p_1 = 1$$

$$u_1 = p_2(t) - \langle p_1, w_1 \rangle \cdot w_1(t) = 1+t - \langle 1+t, 1 \rangle \cdot 1$$

$$= 1+t - \int_0^1 (1+t) \cdot 1$$

$$= 1+t - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + t$$

$$\| u_1 \|^2 = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}+t\right)^2 dt = \frac{1}{12}$$

$$w_2 = \frac{1}{\| u_1 \|} \left(-\frac{1}{2}+t\right) = \sqrt{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right)$$

$$u_2 = p_3(t) - \langle p_3(t), w_2 \rangle \cdot w_2(t) - \langle p_3(t), w_1 \rangle w_1(t)$$

$$= 1+t+t^2 - \int_0^1 (1+t+t^2) \cdot \sqrt{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) \cdot \sqrt{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) - \int_0^1 (1+t+t^2) \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 1+t+t^2 - 12 \cdot \int_0^1 (1+t+t^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) - \int_0^1 t^2+t+1$$

$$= 1+t+t^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) - \frac{11}{6}$$

$$= 1+t+t^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}+t\right) - \frac{11}{6}$$

$$= 1+t+t^2 + 1 - 2t - \frac{11}{6}$$

$$= t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$\| u_2 \|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}$$

$$w_3 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{180} \cdot \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

$$ONB = \left\{ 1 \,,\; \sqrt{12} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + t\right),\; \sqrt{180} \cdot \left(t^2 - t + \tfrac{1}{6}\right) \right\}$$