Question 1: Proof by induction :

Dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1. Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1(k+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

3. Induktionsbasis: $n \longrightarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

4. Induktionsschluss:

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{IV} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{\text{Ersetze in IB "k" duch "n+1"}} && \text{Auf den selben Nenner bringen} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} && \text{binomische Formel} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && \text{kürzen} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

😊

Question 2: Proof by induction :

Dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)!}$$

1. Induktionsanfang: $n = 1$

$$\prod_{1=1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{(1+1)!} \tag{1}$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)!}$$

3. Induktionsbasis: $n \longrightarrow n+1$

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{((n+1)+1)!} \tag{2}$$

4. Induktionsschluss:

Proof.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \frac{n+1}{(n+1+1)!} \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n+1}{n+1+1}\right)}_{\text{Ersetze "k" in IB duch "n+1"}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)-(n+1)}{n+2} \quad \text{,da } 1 = \frac{n+2}{n+2} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n+2} \quad \text{auf den selben Nenner bringen} \\
&= \frac{\cancel{n+2} \cdot 1}{((n+1)\cancel{n+2})!} \\
&= \frac{1}{((n+1)+1)!}
\end{aligned}$$

😄

Note:-

- Summensplit,
- Benutze die Induktionsvoraussetzung, und Induktonsbasis, um zu zeigen, dass die Induktonsbasis wahr ist.

Question 3: Proof by induction:

Dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$4^n + 15n - 1$$

ohne Rest durch 9 teilbar ist.

1. Induktionsanfang : $n = 1$

$$4^1 + 15n - 1 = 18$$

2. Induktionsvoraussetzung: Wir fuehren die Variable p ein, um die Aussage zu vereinfachen.

$$\exists n \in \mathbb{N} : 4^n + 15n - 1 = 9 \cdot p$$

3. Induktionsbasis: $n \longrightarrow n + 1$

$$4^{n+1} + 15n + 1 - 1 = 9p$$

4. Induktionsschluss:

Proof.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\ &= 4\underbrace{(4^n + 15n - 1)}_{\text{IV}} - 45n + 18 \\ &= 4 \cdot 9p - 45n + 18 \\ &= 9(4p - 5n + 2) \end{aligned}$$

☺

Note:-

- Tips: Die dir helfen werden die Lösung zu finden.
- $$A^{m+n} = a \cdot a^m$$
- $$15(n+1) = 15n + 15$$
- Wenn *ohne Rest durch 9 teilbar*, dann ist das Ergebnis entweder 9, oder ein vielfaches von 9 sein.
- 45 und 18 sind jeweils duch 9 teilbar.

Question 4: Proof by inductio :

Dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

Geben Sie im Beweis an wo Sie verwendet haben dass $x > -1$ und $x \neq 0$.

1. Induktionsvoraussetzung:

$$(1+x)^2 > 1 + 2 \cdot x$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$\exists n \in \mathbb{N}(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

3. Induktionsbasis: $n \longrightarrow n+1$

$$(1+x)^{n+1} = 1 + n + 1 \cdot x$$

4. Induktionsschluss:

Proof.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &> 1 + (n+1) \cdot x \\
&> (1+x) \cdot \underbrace{(1+x)^n}_{IV} \\
&= 1 + x + nx + n^2 \\
&= 1 + x \cdot (1+n) + nx^2 \\
&= 1 + (n+1) \cdot + nx^2 \\
&> 1 + (n+1) \cdot x
\end{aligned}$$

😄

Note:-

Video

Question 5: Beweisen Sie dass für alle $n \geqslant 1$

Dass für die Summe der Binomialkoeffizienten die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$$

gilt. (Das kann man prinzipiell mit vollständiger Induktion beweisen, aber geht einfacher mit dem binomischen Lehrsatz). Erklären Sie was diese Formel bedeutet, wenn man die Binomialkoeffizienten so interpretiert wie im zweiten Teil von Beispiel 11 im Skriptum.

Definition 0.0.1: Potenzmenge $P(M)$

Die Potenzmenge $P(M)$, oder auch 2^n ist die Menge aller **Teilmengen** einer Grundmengex

Definition 0.0.2: Binomialkoeffizent

Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man aus einer Menge von n verschiedenen Objekten jeweils k Objekte auswählen kann (ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge). Der Binomialkoeffizient ist also die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in der Potenzmenge einer n-elementigen Grundmenge. Wir erhalten die gesuchte Anzahl, indem wir die Anzahl der Variationen durch die Anzahl der Permutationen der k ausgewählten Elemente dividieren.

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Note:-

Bewiesen, durch die Definitionen.

Proof.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ , \ n >= 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

☺

Question 6: Berechnen Sie :

(ohne Computer/Taschenrechner, sondern mit dem binomischen Lehrsatz):wenn man den Term $(x+3)^8$ ausmultipliziert, welcher Koeffizient (das heißt welche Zahl) steht dann bei x^5 ?

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

1. Wir Erhalten die Koeffizienten von

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$$

$$1 \cdot x^8 \cdot 3^0 + 8 \cdot x^7 \cdot 3^1 + 28 \cdot x^6 \cdot 3^2 + 56 \cdot x^5 \cdot 3^3 + 70 \cdot x^4 \cdot 3^4 + 56 \cdot x^3 \cdot 3^5 + 28 \cdot x^2 \cdot 3^6 + 8 \cdot x^1 \cdot 3^7 + 1 \cdot x^0 \cdot 3^8$$

2. Wir erhalten die Lösung

$$56x^5 \cdot 3^3$$

. Das entspricht:

Solution

$$56x^5 = 1512x^5$$