1 Polynomdivision

Das Polynom $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ hat Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 1$. Berechnen Sie alle anderen Nullstellen, und geben Sie an wie das Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

1.1 Plynomdivision

Solution. *Plynomdivision*

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x + 1 \\
x^2 - 1 \,\big) & x^4 + 2x^3 \qquad - 2x - 1 \\
 & -\, x^4 \qquad + x^2 \\
 & \quad 2x^3 + x^2 - 2x \\
 & \quad -\, 2x^3 \qquad + 2x \\
 & \qquad x^2 \qquad - 1 \\
 & \qquad -\, x^2 \qquad + 1 \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

1.2 Nullstellen

Definition 1.1: Mitternachtsformel

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\text{when } ax^2 + bx + c = 0 \\
a, b, c &= \text{ constants, where } a \neq 0 \\
x &= \text{ the unknown}
\end{aligned}
$$

Solution.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_1 = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} \\
&\frac{x_1 = -2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\
&\Rightarrow x_1 = -1 \\
&\Rightarrow x_2 = -1
\end{aligned}
$$

1.3 Zerlegung in Linearfaktoren

Definition 1.2: Linearfaktorzerlegung
Bei der Linearfaktorzerlegung wird ein Polynom von der Normalform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

in die Linearfaktordarstellung oder Produktform gebracht.

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n) \cdot \text{ Restglied}$$

Solution.

$$
\begin{aligned}
&fx = a\,(x - (-1)) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 1) \\
&\Rightarrow f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)^3
\end{aligned}
$$

2 Grenzwert 1

2.1

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-4n+2}{n^2+n+12}$

Solution.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-4n+2}{n^2+n+12}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

2.2

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+1}$.

Solution.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2.3

$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n+1}$.

Solution.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

2.4

$\lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{2}{n}\right)^3$.

Solution.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{2}{n}\right)^3 \mathit{Binomialsatz}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(2^3 - 3\cdot 2^2 \cdot \frac{2}{n} + 3\cdot 2 \cdot \frac{2^2}{n^2} - \frac{2^3}{n^3}\right)\\ &= 8\end{aligned}$$

3 Grenzwert 2

3.1

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(2n-1)^2}$

Solution.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(2n-1)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{4n^2-4n+1}$$
$$= \frac{1}{4}$$

3.2

$\lim_{n\to\infty} \left(n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right).$

Solution.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} - \frac{n^2}{n+1}$$

Auf den Hauptnenner bringen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n^2(n)}{n(n+1)}$$

$\div$ *Groesste Potenz*

Rechenregeln fuer Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}$$
$$= 1$$

3.3

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{2n^2-(-1)^n}.$

Solution.

$\div$ *Groesste Potenz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{-(1)^n \cdot n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

Rechenregeln fuer Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \cdot\frac{(-1)^n \cdot n}{n^2}}{2 - \frac{(-1)^n}{n^2}}$$
$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$$

3.4

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-2}{n^2+4} - \frac{n^3\left(n^2-3\right)}{n^3+1}\right).$$

Solution.

Auf den selben Nenner bringen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2\cdot n^3 + 1}{n^2+4-n^3-1} - \frac{n^2 + 4\cdot n^5 - 3n^3}{n^2+4-n^3-1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-m}(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k})}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}}$$
$$= \begin{cases} 0, & \textit{if } m > k, \\ \frac{a_k}{b_m}, & \textit{if } m = k, \\ \textit{undetermined}, & \textit{if additional conditions apply}, \\ \pm\infty, & \textit{if } k > m. \end{cases}$$

Ausmultiplizieren

Rechenregeln fuer Grenzwerte

Fuer das gegebene Beispiel ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} (\textit{Ausdruck hier einsetzen}) = -1$$

4 rekursive Folgen -1

Beweisen Sie, dass die rekursive definierte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2}, \quad n \geq 0,$$

konvergent ist (indem Sie nachweisen, dass die Folge motonon & beschränkt ist).

4.1 Monotonie

Proof.

Induktionsanfang

$x_{n+1} \geq x_n$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

Induktionsbehauptung

$x_{n+1} \geq x_{n+2}$

Induktionsschritt

$x_{n+2} \leq x_{n+1}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} - x_{n+2} \geq 0$

substituieren

$$x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{x_n}{x_n + 2} - \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{x_n \cdot (x_{n+1} + 2) - x_{n+1} \cdot (x_n + 2)}{(x_n + 2) \cdot (x_{n+1} + 2)}$$

$$= \frac{x_n \cdot x_{n+1} + 2x_n \cdot 2x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1}}{(x_n + 2) \cdot (x_{n+1} + 2)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\overbrace{(x_n - x_{n+1})}^{\text{IV}\geq 0}}{\underbrace{(x_n + 2) \cdot (x_{n+1} + 2)}_{\geq 0}} \geq 0 \quad \text{g.e.d}$$

Logisch gedacht ...

Wenn Nenner ↑, dann Bruch ↓

4.2 Beschraenktheit

Proof.

Induktionsanfang

$0 \leq x_n \leq 1$

$x_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq 1 \quad \checkmark$

Induktionsbehauptung

$0 \leq x_{n+1} \leq 1$

Induktionsschritt

$0 \leq x_{n+1} \leq 1 \quad \Rightarrow \text{substituieren}$

$$0 \leq \frac{x_n}{x_n + 2} \leq 1$$

$$x_{n+1} = \frac{\overbrace{x_n}^{\geq 0}}{\underbrace{x_n}_{\geq 0} + 2} \quad \geq 0$$

$$x_{n+1} = \frac{\overbrace{x_n}^{\leq 1}}{\underbrace{x_n}_{\geq 0} + 2} \quad \leq 1$$

□

Wenn Nenner ↑, dann Bruch ↓
Da $n \geq 0$, ist der Bruch immer ≥ 0
□ Da der Nenner immer +2 groesser als der Zaehler ist,
ist der Bruch immer ≤ 1

Wir haben bewiesen, dass die **rekursive Folge** sowohl monoton, als auch beschraenkt ist und dadurch konvergiert.

5 rekursive Folgen 2

Beweisen Sie, dass die rekursive definierte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_0 = \frac{1}{2}$ und

$$x_{n+1} = x_n\left(2 - x_n\right), \quad n \geq 0,$$

konvergent ist (indem Sie nachweisen, dass die Folge motonon & beschränkt ist).

5.1 Monotonie

Proof.

Induktionsanfang

$x_0 \leq x_1$

$\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{4} \Rightarrow 0.5 \leq 0.75$

Induktionsvoraussetzung

$x_n \leq x_{n+1}$

Induktionsbasis

$x_{n+1} \leq x_{n+2}$

Induktionsschluss

$x_{n+1} \leq x_{n+2}$

$\Leftrightarrow X_{n+2} - xn_{+1} \geq 0$

substituieren

$x_{n+1}(2 - x_{n+1}) - x_n(2 - x_n)$

ausmultiplizieren

$2x_{n+1} - x_{n+1}^2 - 2x_n + x_n^2$

vereinfachen

$= 2x_{n+1} - 2x_n + x_n^2 - x_{n+1}^2$

$$2 \cdot (\underbrace{\overbrace{x_{n+1} - x_n}^{x}}_{\text{IV.}\geq 0}) + (\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\text{Weil } 0\leq n\leq 1 \ gilt \leq 2}) \cdot (\underbrace{\overbrace{x_n - x_{n+1}}^{-x}}_{\text{IV.}\leq 0})$$

$= 2 \cdot x - (x_n + x_{n+1}) \leq 0 \quad$ g.e.d $\square$

$\square$

5.2 Beschraenktheit

Proof.

Induktionsanfang

$0 \leq x_n \leq 1$ Induktionsbasis

$x_0 = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{4} \leq 1\checkmark$

Induktionsvoraussetzung

$0 \leq x_n \leq 1$

Induktionsbasis

$0 \leq x_{n+1} \leq 1$

Induktionsschluss

$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \geq 0$

$x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{\leq 1}(2 - \underbrace{x_n}_{\leq 1}) \leq 1$

$\square$

Die **rekursive** Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, die kleiner als 1 ist, ist monoton steigend! Diese Aussage können wir *ohne vollständige Induktion*, durch *Logik* beweisen. Wir wissen, dass $x_0 = \frac{1}{2}$ ist. Diese Information ist wesentlich, um eine Aussage über die Konvergenz der *rekursiven Folge* zu treffen. Da $2 - x_n$, wobei x_n das **rekursive Element** ist, kleiner als 1 ist, bedeutet das, dass x_{n+1} größer als x_n ist, da $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ ist. Jedoch kann x_{n+1} nie größer als 1 sein, weil, wenn x_n sich 1 nähert, $x_n(2 - x_n)$ sich ebenfalls 1 nähert, aber nie größer als 1 wird. Daher bleibt die Folge immer unter 1, und da sie monoton steigend ist, konvergiert die Folge gegen einen Grenzwert, der kleiner oder gleich 1 ist. Damit haben wir gezeigt, dass die rekursive Folge **konvergent** ist.

(a) Eine Folge die keinen Häufungswert besitzt.

(i)
$$a_n = 2^n \quad n \geq 1$$

(ii) Diese Folge besitz keine Haefungswerte, da sie unbeschraenkt ist und sie streng monoton steigend ist. **Definition 5.1: D**er Heufungswert, auch Limes superior, ist der Grenzwert einer unendlichen Teilfolge.

(b) Eine Folge die beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

(i) Rekursiv definierte Folge mit $(x_n)n \geq 1$ mit $x_0 = 1$ und
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2} \quad n \geq 0,$$

(c) Eine Folge die unbeschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

(i) $a_n = (3)^n + (-3)^n \quad n \geq 1$

(ii) Diese Folge hat genau einen Häufungswert und zwar bei 0, für jede gerade zahl hingegen kommt eine positive Zahl raus die bei größer werdenden n immer weiter wächst

(d) Eine Folge die genau zwei Häufungswerte besitzt.

(i) $a_n = (-1)^n \quad n \geq 1$

(ii) Besitzt genau 2 Häufungswerte und zwar bei 1 und bei -1, da für alle geraden Zahlen 1 und für alle ungeraden Zahlen -1 herauskommt.

(e) Eine Folge die genau vier Häufungswerte besitzt.

(i) $a_n \mod 4$

(ii) Eine der einfachsten Folgen mit genau 4 Häufungspunkten ist die des Modulo von 4. Diese gibt immer den Rest einer Division durch 4 an. Z.B wenn man 1 einsetzt schaut man 1:4=0 1R und so weiter. Die HP sind 0,1,2,3.