Analysis 1 für Informatikstudien

6. Übungsblatt

---

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Sei $f(x)$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \leq 2, \\ ax + 2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

   Welchen Wert muss a haben so dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist? Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

2. Sei $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ eine Funktion, die in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Beweisen Sie dass es mindestens einen Wert $x \in [0,1]$ geben muss für den

$$f(x) = x$$

   gilt.

3. (Wiederholung zu vollständiger Induktion). Die Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n\geq 1}$ sind gegeben durch $F_1 = 1, F_2 = 1$, und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n.$$

4. (Wiederholung zu Konvergenz). Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{9(a_n+4)}{10}$. Zeigen Sie dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergent ist. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.[1,2]

5. (Wiederholung zu Konvergenzkriterien). Überprüfen Sie ob die folgenden Reihen konvergent sind. Geben Sie jeweils an welches Konvergenzkriterium Sie verwendet haben.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2^k-1}$.

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+k!+k}$.

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2}$.

---

[1] Wie man den Grenzwert tatsächlich berechnet haben wir in der Vorlesung nicht ausführlich gelernt. Das geht so: **Nachdem** man gezeigt hat dass ein Grenzwert überhaupt existiert, argumentiert man folgendermaßen: Sei a der Grenzwert der Folge, also $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Wegen $a_{n+1} = \frac{9(a_n+4)}{10}$ für alle n muss daher für den Grenzwert a die Gleichgung gelten: $a = \frac{9(a+4)}{10}$.

[2] Interpretation des Beispiels: Ein Student kann pro Tag vier Seiten des Mathematik-Skriptums lernen. Über Nacht vergisst er aber jedesmal wieder 10 % dessen was er bisher gelernt hat. Zu Beginn des Studiums weiß er gar nichts. Wie viele Seiten des Skriptums kann er maximal lernen, wenn er unendlich lang Zeit fürs Studium hat?

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Sei $f(x)$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \leq 2, \\ ax + 2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Welchen Wert muss a haben so dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist? Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

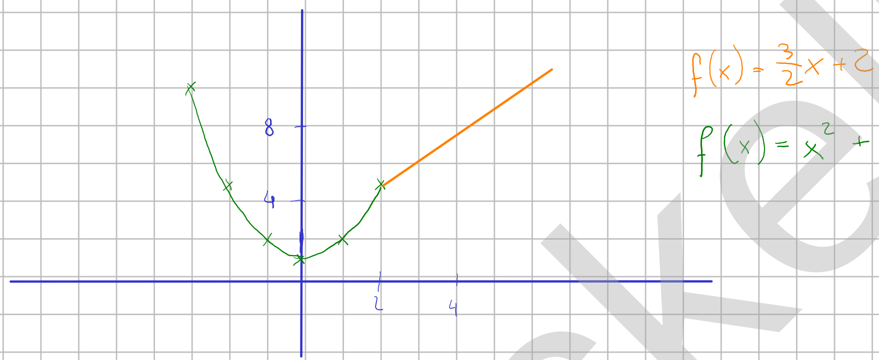
Die Funktion kann nur bei $x = 2$ unstetig sein, wenn x^2+1 und $ax+2$ dort andere Werte haben

$x^2 + 1 \Rightarrow 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Nun muss man a finden so dass $ax+2$ für x auch 5 ergibt

$ax + 2 = 5 \Rightarrow 2a + 2 = 5 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Die Funktion ist mit $a = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig



2. Sei $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ eine Funktion, die in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Beweisen Sie dass es mindestens einen Wert $x \in [0,1]$ geben muss für den

$$f(x) = x$$

gilt.

$f(0) - 0 \geq 0$ und $f(1) - 1 \leq 0$

da $f(x) \in [0, 1]$

Def. 3.2.2 S. 60

$g(x) = f(x) - x$ $f(x)$ und x sind stetig, somit ist $g(x)$ auch stetig

$g(0) \geq 0$ $g(1) \leq 0$

Wenn $g(0) = 0$ oder $g(1) = 0$ sind, hat man ein $f(x) = x$ gefunden, da $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = x$

Ansonsten gilt $g(0) > 0$ und $g(1) < 0$

Laut Nullstellensatz muss es mindestens ein $x \in [0, 1]$ geben bei dem gilt $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = x$

3. (Wiederholung zu vollständiger Induktion). Die Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n\geq 1}$ sind gegeben durch $F_1 = 1, F_2 = 1$, und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n.$$

I. basis $n = 1$

$$F_{1+1}^2 = F_2^2 = 1^2 = 1$$

$$F_1 \cdot F_{1+2} + (-1)^1 = 1 \cdot (F_1 + F_2) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \checkmark$$

I. voraus: $A(n)$

$$F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$$

I. behaup: $A(n+1)$

$$F_{n+2}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+3} + (-1)^{n+1} \Rightarrow (F_n + F_{n+1})^2 = F_{n+1} \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) + (-1)^{n+1}$$

I. schritt

$$F_{n+1} \cdot (F_{n+1} + F_{n+2}) + (-1)^{n+1} = F_{n+1}^2 + F_{n+1} \cdot F_{n+2} + (-1)^{n+1} \quad \Big| \; F_{n+1}^2 \overset{IV.}{=} F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$$

$$= F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n + F_{n+1} \cdot F_{n+2} + (-1)^{n+1} \quad \Big| \; (-1)^n + (-1)^{n+1} = \begin{cases} +1 - 1 = 0 \\ -1 + 1 = 0 \end{cases} = 0$$

$$= F_n \cdot F_{n+2} + F_{n+1} \cdot F_{n+2} \quad \Big| \; F_{n+2} \text{ ausklammern}$$

$$= F_{n+2} (F_n + F_{n+1}) \quad \Big| \; F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

$$= (F_n + F_{n+1})(F_n + F_{n+1})$$

$$= (F_n + F_{n+1})^2 \checkmark$$

4. (Wiederholung zu Konvergenz). Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{9(a_n+4)}{10}$. Zeigen Sie dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergent ist. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.[1,2]

[1] Wie man den Grenzwert tatsächlich berechnet haben wir in der Vorlesung nicht ausführlich gelernt. Das geht so: **Nachdem** man gezeigt hat dass ein Grenzwert überhaupt existiert, argumentiert man folgendermaßen: Sei a der Grenzwert der Folge, also $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Wegen $a_{n+1} = \frac{9(a_n+4)}{10}$ für alle n muss daher für den Grenzwert a die Gleichgung gelten: $a = \frac{9(a+4)}{10}$.

[2] Interpretation des Beispiels: Ein Student kann pro Tag vier Seiten des Mathematik-Skriptums lernen. Über Nacht vergisst er aber jedesmal wieder 10 % dessen was er bisher gelernt hat. Zu Beginn des Studiums weiß er gar nichts. Wie viele Seiten des Skriptums kann er maximal lernen, wenn er unendlich lang Zeit fürs Studium hat?

$$a = \frac{9(a+4)}{10} \Rightarrow 10a = 9a + 36 \Rightarrow a = 36$$

Der Schüler kann max. 36 Seiten lernen

5. (Wiederholung zu Konvergenzkriterien). Überprüfen Sie ob die folgenden Reihen konvergent sind. Geben Sie jeweils an welches Konvergenzkriterium Sie verwendet haben.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2^k-1}$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+k!+k}$.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2}$.

a) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2^k-1} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{<\infty}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^2+1}{2^k-1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(k^2+1)}{2^k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^4+k^2}{2^k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^4}{2^k} + \frac{k^2}{2^k}}{\frac{2^k}{2^k} - \frac{1}{2^k}} = \frac{0}{1} = 0 < \infty$$

konvergent laut Majorantenkriterium (Satz 2.8.12 S. 47)

b) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+k!+k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{2^k+k!+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k!}$ Majorantenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{4^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k! \cdot 4^k \cdot 4}{k! \cdot (k+1) \cdot 4^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{k+1} = 0 < 1$$ Quotientenkriterium

konvergent laut Majoranten + Quotientenkriterium

c) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}$ vermute divergent weil keine Nullfolge

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{k}{k}} = \frac{1}{1} = 1 \neq$$

divergent laut Cauchy-Kriterium

d) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ vermute divergent

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+(-1)^k}{k^2}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k\pm 1)}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k} \pm \frac{1}{k}}{\frac{k}{k}} = \frac{1}{1} = 1 > 0$$

divergent laut Minorantenkriterium (Satz 2.8.13 S. 48)