Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

29. September 2008

Inhaltsverzeichnis

7 Verhalten Passiver Bauelemente bei zeitharmonischen Vorgängen

7.1 Allgemeines

Das Verhalten der Bauelemente R, C und L im Falle zeitlich gleichbleibender elektrischer Größen (Gleichstrom/Gleichspannung) wurde bereits beschrieben. Hierbei wurde erläutert, daß der Kondensator C ein Bauteil zur Speicherung elektrischer Energie darstellt. Ein Maß dafür ist durch seinen Kapazitätswert (in $Farad$) gegeben. Betrachtet man dabei das Verhalten des elektrischen Stromes, so erkennt man, daß der Kondensator eine Unterbrechung darstellt. Im Gleichstromfalle fließt über den Kondensator kein Strom.

Ebenso wurde erkannt, daß eine Spule mit der Induktivität L ein Bauelement mit dem Vermögen zur Speicherung magnetische Energie ist. Ein Maß dafür ist dessen Induktivitätswert (in $Henry$). Im Gleichstromfall wird sich an der Spule kein Spannungsabfall einstellen. Sie stellt somit einen Kurzschluß dar.

Im Falle sich zeitlich ändernder Größen werden Kondensator und Spule ein wesentlich verändertes Verhalten aufweisen, welches im Folgenden diskutiert wird.

7.2 Der Ohm'sche Widerstand

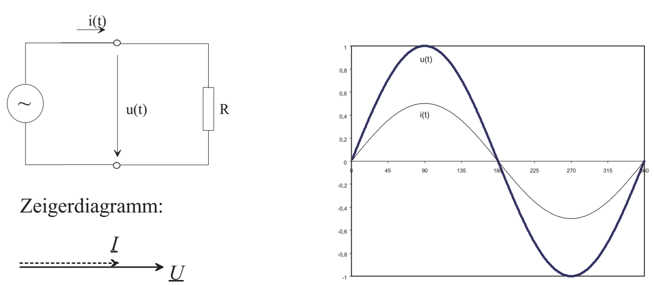

Abbildung 7.1: Ohmscher Widerstand an sinusförmiger Wechselspannungsquelle.

Gemäß dem Ohmschen Gesetz wird eine sinusförmige Spannung $u(t)$ (Abb. 7.1) der

Form

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \tag{7.1}$$

an einem Ohmschen Widerstand R einen sinusförmigen Strom $i(t)$:

$$i(t) = \hat{i}\sin(\omega t) = \frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t) \tag{7.2}$$

zur Folge haben. Der sich ergebende Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom ist immer Null. Im Zeigerdiagramm liegen der Strom- und Spannungszeiger in derselben Linie. Deren Längen sind durch den Widerstandswert R festgelegt.

An einem Ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase!

Im Widerstand R wird lediglich elektrische Energie irreversibel in Wärmeenergie übergeführt. Der rein Ohmsche Widerstand R wird *Wirkwiderstand* oder *Resistanz*, bzw. dessen Kehrwert $G = 1/R$ Wirkleitwert oder Konduktanz genannt.

7.2.1 Die Wirkleistung

Der Zeitwert der Leistung $P(t)$ ergibt sich aus der Multiplikation

$$P(t) = u(t)\,i(t) = \hat{u}\sin(\omega t)\,\hat{i}\sin(\omega t) = \hat{u}\hat{i}sin^2(\omega t). \tag{7.3}$$

In Abb. 7.2 ist dieser zeitliche Verlaut dargestellt. Die Summe der elektrischen Leistung

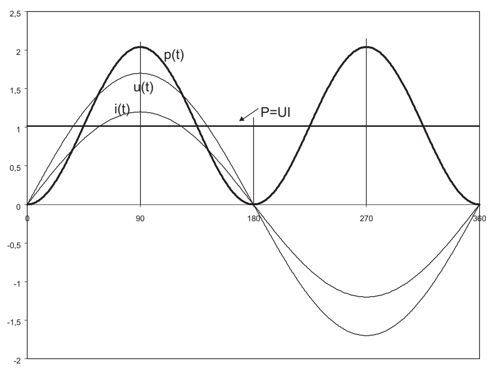

Abbildung 7.2: Leistung an einem Ohmschen Widerstand.

über eine Periode T ergibt die, in dieser Zeitspanne umgesetzte elektrische Energie:

$$W = \int_0^T u(t)\,i(t)\,dt = \int_0^T \hat{u}\sin(\omega t)\,\hat{i}\sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\hat{u}\hat{i} = UIT. \tag{7.4}$$

Wiederum ist es sinnvoll, die mittlere Leistung, dh. die auf die Periode T bezogene Energieumsetzung, zu betrachten. Mit (7.4) folgt:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\, dt = UI. \tag{7.5}$$

Die so erhaltene **Wirkleistung** P entspricht also dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung. Setzt man in (7.5) das Ohmsche Gesetz verschiedentlich ein, folgt schlußendlich:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \tag{7.6}$$

7.3 Die Induktivität

Es wird hier eine reine Induktivität behandelt. Der ohmsche Widerstand der Spulenwicklung wird dabei vernachlässigt. Wird entsprechend Abb. 7.3 an eine reine Induktivität

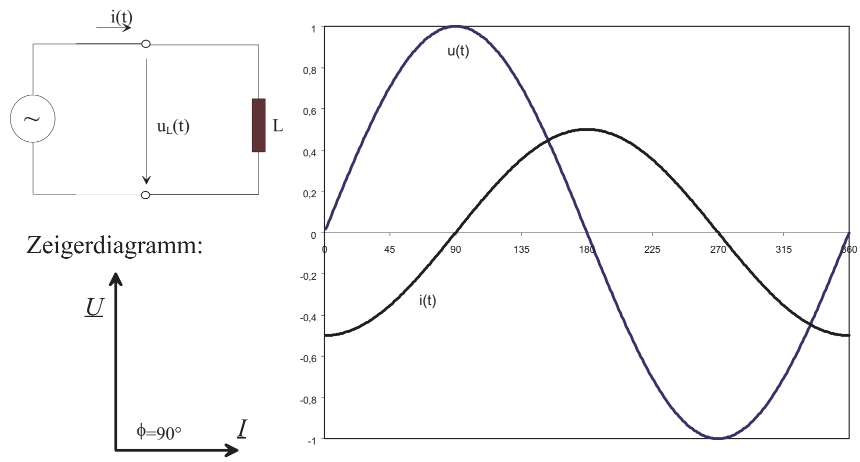

Abbildung 7.3: Strom und Spannung an einer reinen Induktivität.

eine Wechselquelle gelegt, so besteht zwischen Strom und Spannung der aus dem Induktionsgesetz abgeleitete Zusammenhang:

$$u_L = L\frac{d\, i(t)}{dt}. \tag{7.7}$$

Nimmt man willkürlich an, dass der zeitliche Verlauf des Stromes durch

$$i(t) = -\hat{\imath}\cos(\omega t) \tag{7.8}$$

beschrieben wird, so folgt mit (7.7) für die Spannung

$$u_L = L\frac{d\,i(t)}{dt} = -L\,\hat{i}\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = \omega L\,\hat{i}\sin(\omega t) = \hat{u}\sin(\omega t). \tag{7.9}$$

Zeichnet man den Verlauf von $u(t)$ und $i(t)$ in ein Liniendiagramm, so erkennt man, dass die Spannung zum Strom um 90° phasenverschoben sind.

An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° **voraus**!

Für die Zeigerdarstellung läßt sich der Strom durch

$$\underline{i} = \hat{i}e^{j\omega t} \tag{7.10}$$

darstellen. Damit folgt für die Spannung

$$\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = L\,\hat{i}\frac{d\,e^{j\omega t}}{dt} = j\omega\,L\,\hat{i}e^{j\omega t} = j\omega\,L\,\underline{i} \tag{7.11}$$

Unter der Annahme, dass der Stromzeiger in der reellen Achse liegt, folgt aus (7.11) für den Spannungszeiger eine Multiplikation mit j, womit die 90° Phasenverschiebung ebenfalls ersichtlich wird.

7.3.1 Der induktive Blindwiderstand

Dividiert die beiden rechten Ausdrücke in (7.9) durch $\sin(\omega t)$, so folgt:

$$\omega L\,\hat{i} = \hat{u}. \tag{7.12}$$

Formal kann wieder eine Proportionalität zwischen Strom und Spannung gefunden werden, indem man für

$$\omega L = X_L \qquad -\frac{1}{X_L} = B_L \tag{7.13}$$

einführt. X_L wird als **induktiver Blindwiderstand oder induktive Reaktanz**, dessen Kehrwert als **induktiver Blindleitwert oder induktive Suszeptanz** bezeichnet. Es folgt somit, sowohl für die Scheitelwerte, als auch für die Effektivwerte (Division durch $\sqrt{2}$):

$$\hat{u} = X_L\,\hat{i} \qquad U = X_L\,I \tag{7.14}$$

In komplexer Schreibweise folgt dementsprechend:

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I} \qquad \underline{I} = \frac{1}{jX_L}\underline{U} = jB_L\underline{U} \tag{7.15}$$

7.3.2 Die induktive Blindleistung

Bildet man wiederum das Produkt aus $u(t)$ und $i(t)$ zu jedem Zeitpunkt, so ergibt der in Abb. 7.4 dargestellte Verlauf. Wiederum pulsiert der Zeitwert mit doppelter Frequenz.

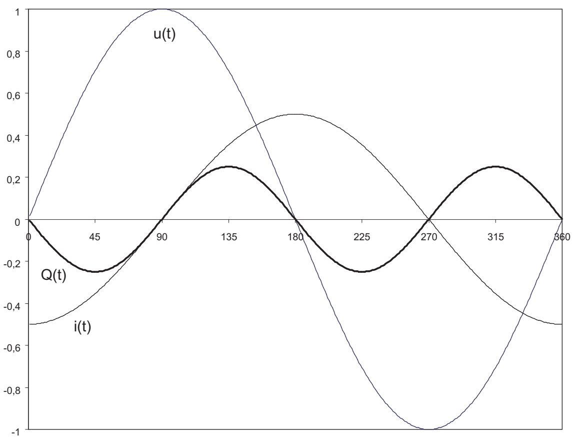

Abbildung 7.4: Leistung an einer Induktivität.

Die Flächen über der Zeitachse und unter der Zeitachse sind jedoch immer gleich groß. Je Viertelperiode nimmt die Induktivität alternierend Energie auf bzw. gibt diese wieder ab. Im Mittel über eine Periode ergibt sich keine Wirkleistung. P ist somit immer 0. Es wird keine Energie in Wärme umgewandelt. Als Unterscheidung zur Wirkleistung wird nun der Zeitwert der Leistung mit Q, der Blindleistung bezeichnet.

Für die Blindleistung ergibt sich, analog zur Wirkleistung P beim ohmschen Widerstand:

$$Q = UI = I^2 X_L = -U^2 B_L \qquad [Einheit : var(VoltAmpereReaktanz)] \tag{7.16}$$

7.4 Der Kondensator

Wiederum wird ein reiner Kondensator betrachtet. Im Inneren des Kondensators befindet sich somit ein ideales (=elektrisch nichtleitendes) Dielektrikum. Die Strom- Spannungsverhältnisse sind in Abb. 7.5 dargestellt. Ausgehend von der für Gleichstrom gülti-

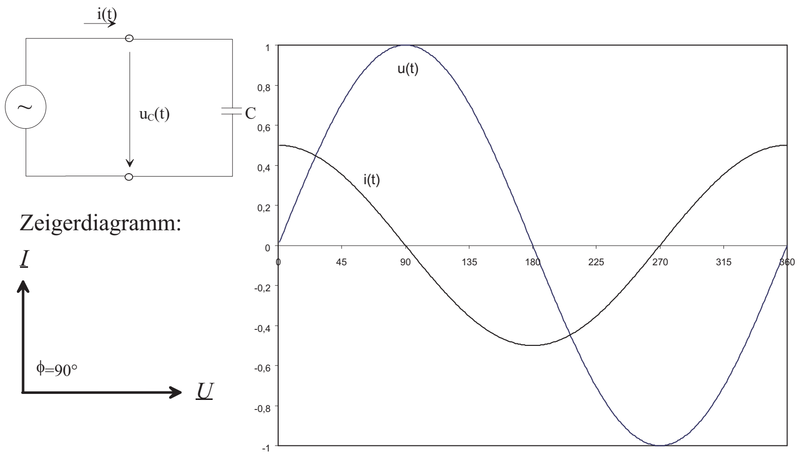

Abbildung 7.5: Strom und Spannung am Kondensator.

gen Beziehung

$$Q = CU, \tag{7.17}$$

kann für zeitlich veränderliche Vorgänge die differentielle Ladungsänderung $dq(t)$ zu

$$dq(t) = Cdu(t) \tag{7.18}$$

geschrieben werden. Die Ladung ist immer das Produkt aus Strom und Zeit, sodass aus (7.18)

$$dq(t) = i(t)dt = Cdu(t) \qquad bzw. \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \tag{7.19}$$

folgt. Die Spannung am Kondensator sei nun durch

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \tag{7.20}$$

gegeben. Mit (7.19) folgt für den Strom

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = C\hat{u}\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega C\hat{u}\cos(\omega t) = \hat{i}\cos(\omega t). \tag{7.21}$$

Ein sinusförmiger Verlauf der Spannung am Kondensator hat daher einen cosinusförmigen Verlauf des Stromes durch denselben zur Folge (vgl. Abb. 7.5).

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um $90°$ **voraus**!

Für die komplexe Zeigerdarstellung folgt:

$$\underline{u} = \hat{u} e^{j\omega t}. \tag{7.22}$$

Mit (7.19) folgt daraus

$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = C\hat{u}\frac{e^{j\omega t}}{dt} = j\omega C e^{j\omega t} = j\omega C\underline{u}. \tag{7.23}$$

Legt man den Spannungszeiger in die reelle Achse, so ergigt sich für den Stromzeiger durch die Multiplikation mit j eine Phasenverschiebung um 90°, bzw. eine Drehung in die positive imaginäre Achse.

7.4.1 Der kapazitive Blindwiderstand

In Effektivwerten lautet diese Gleichung

$$\underline{I} = j\omega C\underline{U} \qquad bzw. \qquad \underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}. \tag{7.24}$$

Die Proportionalität zwischen Strom und Spannung erfolgt wiederum über den Blindwiderstand:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \qquad bzw. \qquad B_C = -\frac{1}{X_C} = \omega C. \tag{7.25}$$

Mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C bzw. dem kapazitiven Blindleitwert B_C lässt sich (7.24) zu

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I} = jX_C\underline{I}. \tag{7.26}$$

7.4.2 Die kapazitive Blindleistung

Aus dem Produkt von $u(t)$ mit $i(t)$ ergibt sich der nachfolgend dargestellte Verlauf. Die mittlere Leistung ist auch in diesem Falle Null, sodass keine Wirkleistung entsteht ($P = 0$). Es gibt auch hier nur Blindleistung. Diese schwingt wiederum mit doppleter Frequenz, jedoch entgegengesetzt der Blindleistung bei der Induktivität. Für die Blindleistung am Kondensator folgt demgemäß:

$$Q = -UI = I^2 X_C = -U^2 B_C \qquad [Einheit : var(VoltAmpereReaktanz)]. \tag{7.27}$$

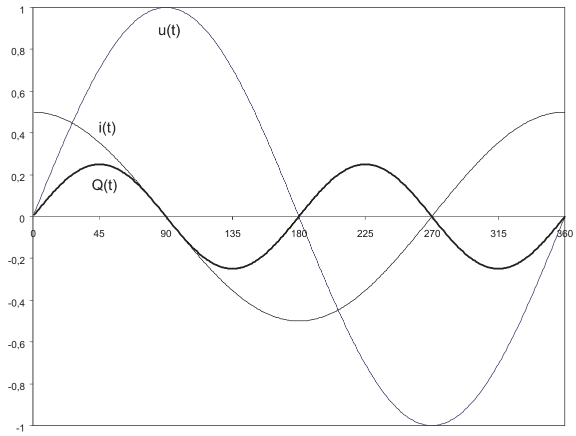

Abbildung 7.6: Leistung an einem Kondensator.

7.5 Zusammenschaltung von passiven Bauelementen

Bisher wurden die Bauelemente R, L und C als ideale Bauelemente behandelt. Im Allgemeinen werden dies Bauelemente jedoch in gemischter Zusammenschaltung vorkommen. In diesem Abschnitt werden nun derartige Zusammenschaltungen behandelt.

7.5.1 Die Impedanz

Man betrachte zunächst die Zusammenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einer Spule der Induktivität L, welche von einer sinusförmigen Spannungsquelle gespeist wird (Abb. 7.7). Infolge der Serienschaltung von R mit L wird der sich einstellende Strom

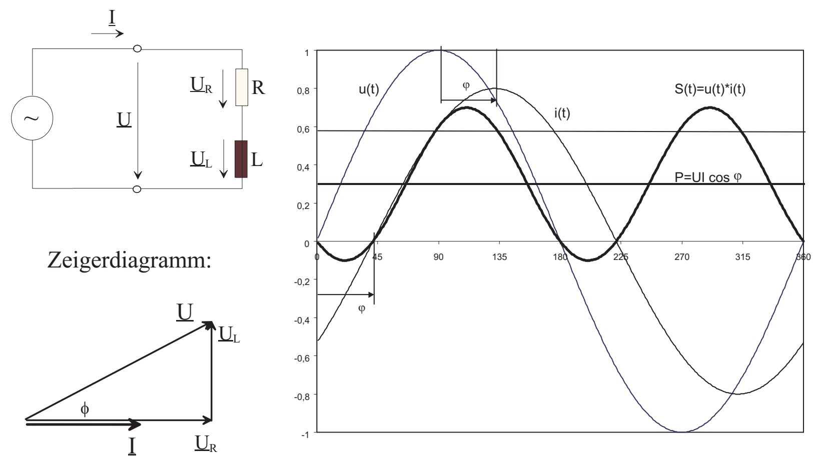

Abbildung 7.7: Serienschaltung von R und L.

$\underline{I}$ durch den Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X_L begrenzt. Der gesamte wirksame Widerstand wird als Scheinwiderstand oder Impedanz Z bezeichnet. Z ist im allgemeinen eine komplexe Größe.

$$\underline{Z} = R + j\omega L = Ze^{j\varphi} \qquad [Ohm]. \tag{7.28}$$

mit

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad bzw. \qquad \varphi = arctan\frac{\omega L}{R}. \tag{7.29}$$

Für den Strom $\underline{I}$ folgt daraus:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}. \tag{7.30}$$

Zur Zeichnung des komplexen Zeigerdiagrammes beginnt man immer mit der gemeinsamen Größe. Bei obiger Serienschaltung ist dies der Strom $\underline{I}$. Diesen legt man in die reelle Achse. Als nächstes zeichtet man den Spannungsabfall über dem ohmschen Widerstand R ein. Der zeiger $\underline{U_R}$ liegt in Phase mit dem Strom $\underline{I}$. Dessen Länge ergibt sich aus

$$U_R = R\,I. \tag{7.31}$$

An dessen Spitze wird anschließend der Spannungszeiger $\underline{U_L}$ gezeichnet. Dessen Richtung ist auch bekannt, da man weiss, dass die Spannung an der Induktivität um 90° voreilt. Die Länge des Zeigers $\underline{U_L}$ ergibt sich aus

$$U_L = \omega L\,I. \tag{7.32}$$

Damit folgt die Gesamtspannung $\underline{U}$ aus der geometrischen Summe beider Spannungsabfälle. der sich einstellende Phasenwinkel ist mit φ bereits bestimmt.

7.5.2 Die auftretenden Leistungen

Aus dem Zeigerdiagramm ersieht man eine Vorauseilung der Spannung $u(t)$ gegenüber dem Strom$i(t)$. Demgemäß gilt für die Zeitfunktionen:

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \qquad bzw. \qquad i(t) = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi). \tag{7.33}$$

Die Bildung des Zeitwertes der Leistung führt zu

$$S(t) = u(t)\,i(t) = \hat{u}\hat{i}\sin(\omega t)\sin(\omega t+\varphi); \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \tag{7.34}$$

Durch Anwendung trigonometrischer Beziehungen lässt sich dies zu

$$S(t) = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2}[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi) \tag{7.35}$$

umformen. Das Produkt der Effektivwerte aus U und I wird als Scheinleistung S definiert:

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}. \tag{7.36}$$

Diskutiert man Gleichung (7.35), so ersieht man darin einen von der Zeit t unabhängigen Term. Dieser Anteil entspricht der verrichteten Wirkleistung P:

$$P = UI\cos\varphi = S\cos\varphi. \tag{7.37}$$

Der Ausdruck $\cos\varphi$ wird als Leistungsfaktor oder Wirkfaktor bezeichnet. Der zweite Ausdruck in (7.35) ist jener Leistungsanteil welcher mit doppelter Frequenz schwingt. Das Mittel über eine Periode ist Null. Dieser Anteil entspricht der Blindleistung Q im System. Nach Anwendung eines weiteren trigonometrischen Additionstheorems folgt dafür:

$$Q = UI\sin\varphi = S\sin\varphi. \tag{7.38}$$

$\sin\varphi$ wird darin als Blindleistungsfaktor bezeichnet. Quadriert und addiert man anschließend die beiden Gleichungen (7.37) und (7.38), so erhält man wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{7.39}$$

Aus der komplexen Schreibweise folgt

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = UIe^{j\varphi} = P + jQ. \tag{7.40}$$

Auch mit den Zeigern P und Q kann somit ein Zeigerdiagramm in der komplexen Zahlenebene erstellt werden:

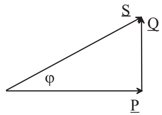

Abbildung 7.8: Leistungsdiagramm.

7.5.3 Parallelschaltung von R und C

Man betrachte nachfolgend die Zusammenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einem Kondensator C (Abb. 7.9). Der Gesamtwiderstand der Schaltung entspricht

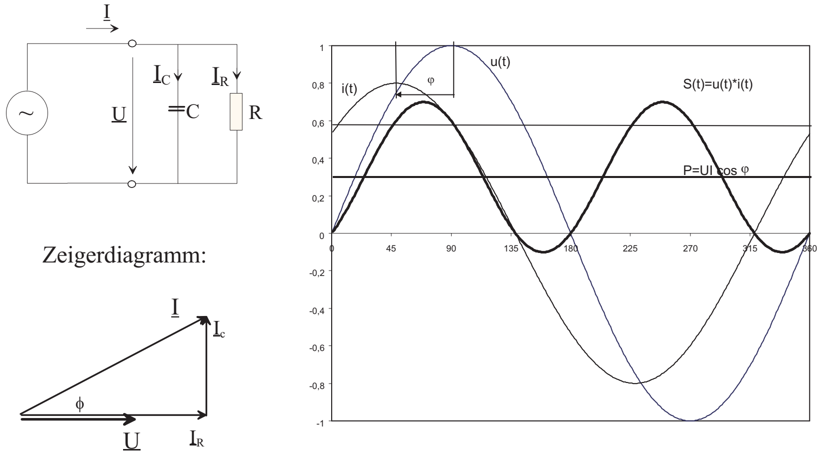

Abbildung 7.9: Parallelschaltung von R und C.

einer Parallelschaltung von R mit X_C, sodass für die Impedanz $\underline{Z}$

$$\underline{Z}= \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega C+1} = \frac{R}{1+(\omega CR)^2} - j\frac{\omega CR^2}{1+(\omega CR)} = Re\underline{Z} + Im\underline{Z} \tag{7.41}$$

folgt. Der Winkel ergibt sich aus

$$\varphi = arctan\left(\frac{Im\underline{Z}}{Re\underline{Z}}\right). \tag{7.42}$$

Mit dem Betrag von $\underline{Z}$

$$Z = \sqrt{(Re\underline{Z})^2 + (Im\underline{Z})^2} \tag{7.43}$$

folgt für $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}. \tag{7.44}$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist wieder durch

$$\underline{U} = \underline{I}\underline{Z} \qquad bzw. \qquad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z}e^{-j\varphi}. \tag{7.45}$$

gegeben. Für die Zeichnung des Zeigerdiagramms beginnt man wieder mit der gemeinsamen größe, in diesem falle mit der Spannung $\underline{U}$. Die Teilströme I_R und I_C sind dazu entsprechend phasenverschoben. Für die Leistungsbetrachtungen gelten dieselben Beziehungen wie vorhin.

7.5.4 Blindstromkompensation

Ziel der Blindstromkompensation ist es, den einem Verbraucher zuzuführenden Strom auf den Wirkanteil zu reduzieren. Dadurch können die Ohm'schen Verluste entlang der Zuleitungen minimiert werden.

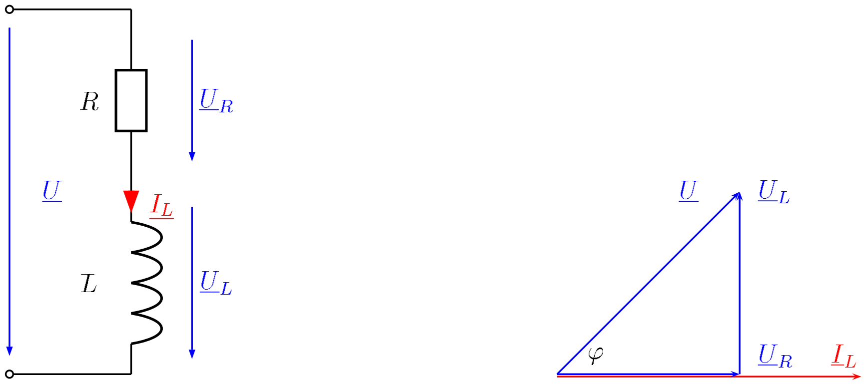

Abbildung 7.10: Zur Blindstromkompensation, ohmsch-induktive Last.

In Abb. 7.10 ist eine ohmsch-induktive Schaltung dargestellt. Aus dem Zeigerdiagramm ersieht man ein Voreilen der Spannung $\underline{U}$ gegenüber dem Strom $\underline{I}_L$. Der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ dieser Konfiguration ergibt sich aus dem Winkel φ zwischen Strom und Spannung.

Schaltet man nun einen Kondensator beispielsweise parallel zu dieser Anordnung, so ergeben sich die nachfolgend dargestellten Verhältnisse. Der Winkel φ zwischen Strom

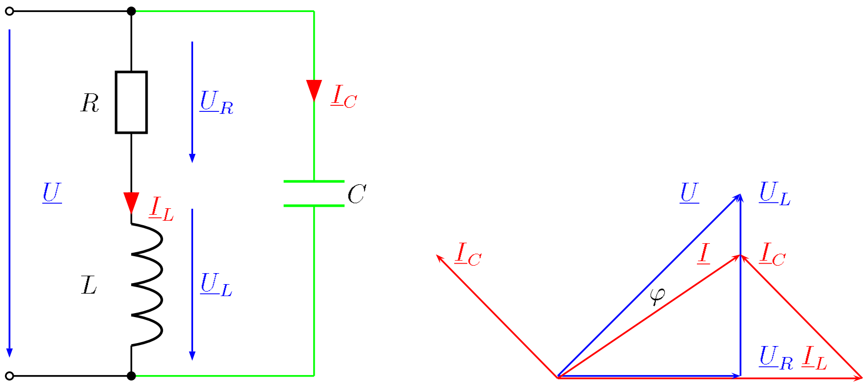

Abbildung 7.11: Blindstromkompensation, unvollständige Kompensation.

und Spannung ist deutlich geringer geworden. Auch die Länge des Stromzeigers $\underline{I}$ hat sich verringert, wodurch sich die Leitungsverluste ($\sim I^2$) entsprechend verringern.

Im Falle einer vollständigen Kompensation werden Strom und Spannung in Phase sein ($\varphi = 0$). Die Schaltung verhält sich dann wie ein Ohm'scher Widerstand. Die Bedingung für vollständige Kompensation erhält man, indem man die Impedanz $\underline{Z}$ allgemein darstellt und anschließend deren Imaginärteil Null setzt.

7.5.5 Leistungsanpassung

In Abb. 7.12 ist ein allgemeines Netzwerk für zeitharmonische Größen dargestellt. Es besteht aus einer realen Spannungsquelle mit der Quellspannung $\underline{U}_q$, einer Quellenimpedanz $\underline{Z}_q$ (vergleichbar mit dem Innenwiderstand R_i im Gleichstromfalle) sowie einer Impedanz $\underline{Z}$, welche die Last darstellt.

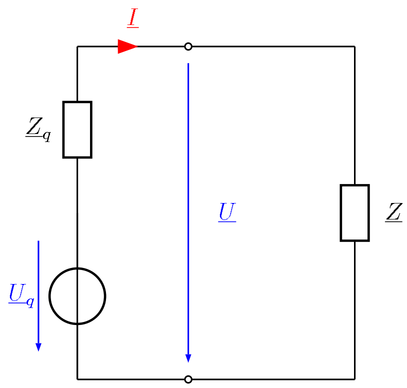

Abbildung 7.12: Leistungsanpassung.

Es gilt nun die Bedingungen zu finden, bei welchen die Leistung an der Last ein Maximum erreicht. Für Quelleninmepdanz und für Lastimpedanz gilt:

$$\underline{Z}_q = R_q + j\,X_q, \qquad \underline{Z}_q = R + j\,X \tag{7.46}$$

Damit lässt sich der Strom $\underline{I}$ durch

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z} + \underline{Z}_q} \tag{7.47}$$

ausdrücken. Die Wirkleistung an der Last kann mit dem Realteil der Last-Impedanz folgend ausgedrückt werden:

$$P = I^2\,Re(\underline{Z}). \tag{7.48}$$

Setzt man für den Betrag des Stromes aus Gleichung 7.47 ein, ergibt sich:

$$P = |\underline{U}_q|^2 \frac{Re(\underline{Z})}{|\underline{Z} + \underline{Z}_q|^2} = U_q^2 \frac{R}{(R + R_q)^2 + (X + X_q)^2} \tag{7.49}$$

Die Leistung am Verbraucher wird dann maximal, wenn die Bedingungen

$$R_q = R \tag{7.50}$$

$$X_q = -X \tag{7.51}$$

gelten. Damit folgt für Leistungsanpassung im Wechselstromfalle:

$$R + j\,X = R_q - j\,X_q \tag{7.52}$$

$$\underline{Z}_{max} = \underline{Z}_q^*. \tag{7.53}$$