Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

29. September 2008

Inhaltsverzeichnis

2 Gleichförmig bewegte Ladungen

2.1 Der elektrische Strom

Bisher wurden elektrische Feldverteilungen behandelt, welche sich aufgrund ruhender Ladungen ergeben haben. Es wurde bei der Influenz zwar von Ladungsverschiebungen gesprochen, jedoch wurden nur die Endzustände, d.h. alle Ladungen befanden sich wieder in einer stabilen, ruhenden und ortsfesten Lage, betrachtet. Dieses Kapitel befaßt sich mit bewegten Ladungen. **Die Gesamtheit bewegter elektrischer Ladungen wird als elektrischer Strom bezeichnet**.

2.1.1 Die elektrische Stromstärke

Man betrachte dazu einen -durch welche Mechanismen auch immer- geladenen Kondensator, auf dessen einer Platte ein Elektronenüberschuß (negative geladene Platte) auf der anderen ein Eleketronenmangel (positiv geladene Platte) vorliegt (Abb. 2.1).

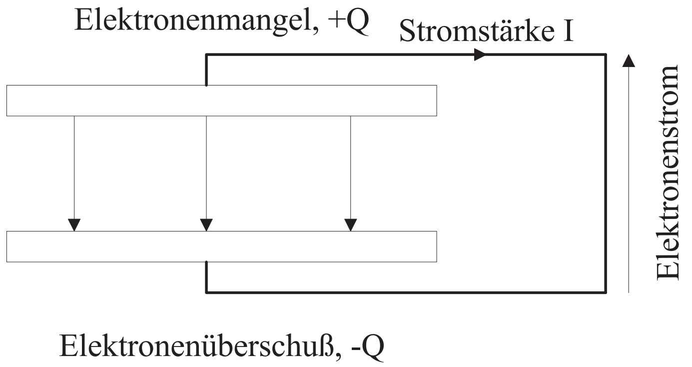


Abbildung 2.1: Feldabbau an einem Kondensator.

Soll sich nun die zwischen den Platten eingestellte elektrische Feldestärke abbauen, so muß ein Ladungsausgleich stattfinden. Die überschüssigen Elektronen der einen Platte müssen zur Platte mit Elektronenmangel fließen. Damit dies möglich ist, muß zwischen den Platten eine leitende Verbindung hergestellt werden. In Metallen sind Ladungen frei beweglich. Entsprechend eines, wie in Abb. 2.1 dargestellten Leiters wird dieser

Ladungsausgleich möglich. Als phsyikalische Größe zur Beschreibung des elektrischen Stromes wird die elektrische Stromstärke I definiert :

Definition:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [A] \quad ... \quad Ampere. \tag{2.1}$$

Die elektrische Stromstärke I ist die pro Zeiteinheit durch einen festgelegten Querschnitt hindurchfließende Ladungsmenge.

Da im allgemeinen die Stromstärke I zeitlich nicht gleichbleibend ist, kann für den augenblicklichen Stromstärkewert die differentielle Änderung der Ladungen pro Zeit angegeben werden(2.2).

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad [A]\,. \tag{2.2}$$

Die Flußrichtung des Stromes ist definiert als die Richtung entgegengesetzt zum Elektronenstrom. D.h. der elektrische Strom fließt immer von plus nach minus (Quelle $\Longrightarrow$ Senke). Versuche haben gezeigt, daß die Dauer, bis ein Ladungsausgleich erfolgt ist, abhängig ist vom verwendeten Material. Die Gesetzmäßigkeit zur Beschreibung dieses Ladungsausgleiches erfolgt später.

2.1.2 Gleichstrom, Gleichspannung und Spannungsquellen

Zum Erreichen eines gleichbleibenden Elektronenflusses (**Gleichstrom**) und damit einer gleichmäßigen Stromstärke I muß gesorgt werden, daß die ab- bzw. zufließenden Ladungen an den Kondensatorplatten immer in gleichem Maße vorhanden bleiben. Dies kann durch eine gleichbleibende Spannung U an den Platten erreicht werden. Es kann die Spannung U als treibende Größe für die Ladungsbewegung angesehen werden. Unabhängig von der Anordnung muß also immer Energie (mechanische, chemische, ...) aufgewendet werden, um für die notwendigen Ladungen, die dann zu- bzw. abfließen können, zu sorgen. Bei unseren Betrachtungen ist es zunächst nicht erheblich, aus welcher Energieform dies geschieht. Der Einfachheit halber verwendet man ein Schaltsymbol und bezeichnet dieses als Spannungsquelle.

Der Pfeil von der plus-Klemme zur minus-Klemme in Abb. 2.1 wird als Zählpfeil bezeichnet und hat nichts mit einem Vektor zu tun. Der Zählpfeil wird so gewählt, daß er vom höheren zum niedrigeren Potential gerichtet ist.

Durch Verbinden der Klemmen der Gleichspannungsquelle mit einem Leiter entsteht ein Stromkreis, in dem ein gleichbleibender Strom der Stromstärke I fließt.

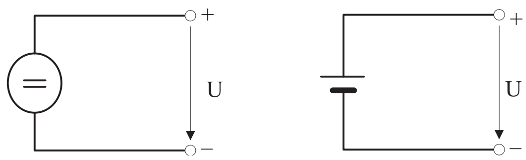


Abbildung 2.2: Schaltsymbole von Gleichspannungsquellen, links allgemein, rechts Batterie.

2.1.3 Die elektrische Stromdichte

Damit die vorhin beschriebene richtungsabhängige Bewegung der Elektronen im Leiter mathematisch korrekt erfolgen kann, wird wiederum eine vektorielle Größe benötigt.

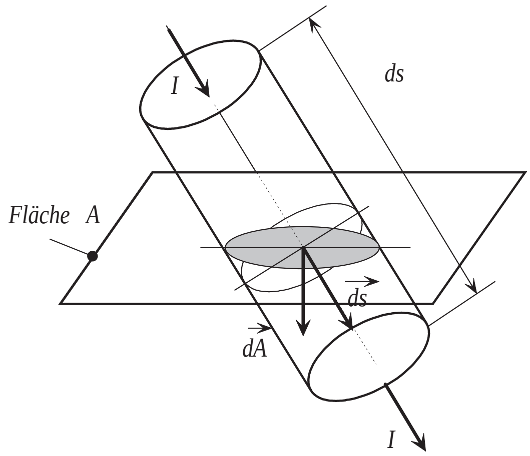


Abbildung 2.3: Zur Definition der elektrischen Stromdichte.

Dazu wird die sogenannte elektrische Stromdichte $\vec{J}$ wie folgt definiert. Für ein infinitesimales Flächenelement $d\vec{A}$ gilt:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}. \tag{2.3}$$

Die Gesamtstromstärke, welche durch eine Fläche A fließt errechnet sich aus der Integration aller infinitesimaler Stromstärken dI über diesen Querschnitt:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \tag{2.4}$$

Umgekehrt kann die elektrische Stromdichte durch

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{e_A} \tag{2.5}$$

dargestellt werden. Man kann dieselbe Stromdichte $|\vec{J}| = J$ in einem Leiter erreichen, wenn einmal der Strom hoch und der Querschnitt hoch und umgekehrt wenn der Strom klein und der Querschnitt klein sind.

2.2 Das Ohmsche Gesetz

Es wurde schon erwähnt, daß die Dauer des Ladungsausgleiches zwischen Quelle und Senke vom verwendeten Material des Leiters abhängig ist. In Metallen (gute Leiter) sind die Elektronen der äußersten Schale praktisch ungebunden. Somit stehen pro Atom zumindest ein freies Elektron für den Ladungsausgleich zur Verfügung. Für Metalle ergibt sich eine untere Schranke von etwa 10^{23} Ladungsträger pro cm^3. Diese ungebundenen Ladungsträger führen bei Temperaturen größer als 0 Kelvin ungeordnete Bewegungen aus (vgl. Brownsche Moelkularbewegung). Nach außen erscheint der Leiter elektrisch neutral.

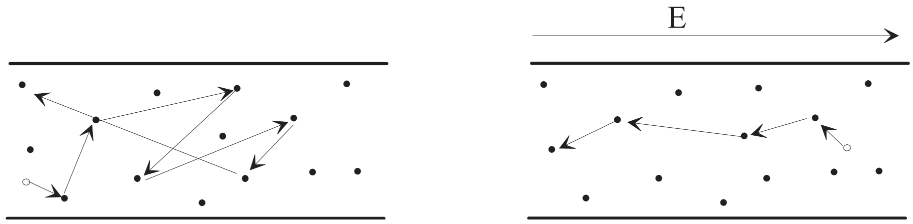


Abbildung 2.4: Bewegung der Ladungsträger im Metall,
links ohne elektrisches Feld, rechts mit elektrischem Feld.

Durch Anlegen einer Spannung U an den Leiter wird nun ein elektrisches Feld erzeugt und die Elektronen werden entsprechend der auf sie wirkenden Kraft beschleunigt. Nach einiger Zeit treffen sie auf die Atomrümpfe des Gitters (=Ionen, es fehlen Elektronen) und werden unter Abgabe von Energie an das Gitter abgebremst, abgelenkt oder zurückgeworfen. Sie erreichen keine hohe Geschwindigkeit. Es kann jedoch eine *mittlere Driftgeschwindigkeit* festgestellt werden, die proportional zur elektrischen Feldstärke ist. Es gilt:

$$\vec{v} = -\mu_e \vec{E}. \tag{2.6}$$

Die Proportionalitätskonstante μ_e $[\frac{m^2}{Vs}]$ wird als **Beweglichkeit** der Elektronen benannt. Mit der Einführung einer spezifischen Leitfähigkeit γ, definiert durch

$$\gamma = -\mu_e \rho_e = -\mu_e(n(-e)), \tag{2.7}$$

wobei n die Anzahl der freien Elektronen pro Volumseinhei ist, folgt für die elektrische Stromdichte :

$$\vec{J} = \gamma \, \vec{E} \qquad [\gamma] = \left[\frac{A}{m^2} \frac{m}{V} = \frac{A}{V m} = \frac{S}{m} \right] \tag{2.8}$$

Nachfolgend sind für einige wichtige elektrische Werkstoffe deren Materialdaten zusammengefaßt:

Leiter	$\gamma[\frac{S}{m}.10^6]$		$\rho_R\,[\Omega\, m.10^{-6}]$	$\alpha_{20}\,[\frac{1}{K}.10^{-3}]$
Silber	62,5		0,016	3,8
Kupfer	56		0,01786	3,93
Gold	44		0,023	4,0
Aluminium	35		0,02857	3,77
Messing	11-14		0,09-0,7	1,5
Eisen	5-10		0,2-0,15	4,5-6
Kohle	0,01-0,02		100-50	-0,2 bis -0,8

Tabelle 2.1: Materialdaten einiger Stoffe

Entsprechend Gl. 2.8 ist durch die Vorgabe der elektrischen Feldstärke auch die Richtung des elektrischen Stromes bestimmt. Die Gesamtheit der Stromdichtevektoren $\vec{J}$ eines betrachteten Gebietes bezeichnet man als **elektrisches Strömungsfeld**. Auch hier gibt es die Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Strömungsfeldern.

Zur Beschreibung der Auswirkung des Fließens elektrischen Stromes in Stoffen wird nun der Begriff des **elektrischen Widerstandes** eingeführt. Das in Abb. 2.5 dargestellte zylindrische Metallstück sei an dessen Enden mit den Klemmen einer Gleichspannungsquelle verbunden:

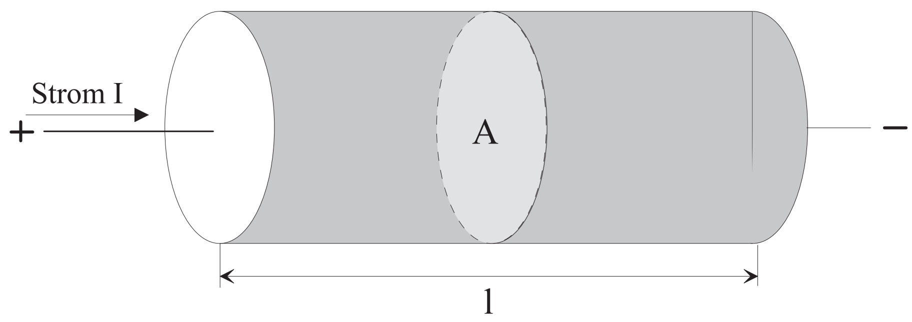


Abbildung 2.5: Der Ohmsche Widerstand

Der Querschnitt A dieses metallischen Zylinders bleibt über die gesamte Länge l unverändert. Aufgrund der angelegten Spannung U stellt sich eine konstante elektrische Feldstärke $\vec{E}$ entlang des metallischen Leiters ein. Für die Spannung gilt:

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}|\, l\,. \tag{2.9}$$

Infolge des homogenen Leiters ist die Stromdichte überall gleich groß. Daraus resultiert die Stromstärke I zu:

$$I = \gamma\, |\vec{E}|\, A. \tag{2.10}$$

Nach Substitution der elektrischen Feldstärke mit Hilfe von Gl. 2.9 erhält man:

$$U = \frac{l}{\gamma\, A}\, I \tag{2.11}$$

Diese Beziehung wird als das **Ohmsche Gesetz** bezeichnet. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U und dem, infolge dieser Spannung fließenden Strom I. Für den Bruch in Gleichung 2.11 wird der Begriff des **elektrischen Widerstandes** mit dem Formelzeichen R eingeführt:

$$R = \frac{l}{\gamma\, A} \qquad \left[\frac{m}{\frac{A}{Vm} m^2} = \frac{V}{A}\right] \quad \ldots \quad (Ohm,\, \Omega), \tag{2.12}$$

und Gleichung 2.11 kann vereinfacht dargestellt werden:

$$U = R\, I. \tag{2.13}$$

Die elektrische Stromstärke I in einem metallischen Leiter ist proportional der angelegten elektrischen Spannung U.

Sehr häufig wird anstelle der elektrischen Leitfähigkeit γ dessen reziproker Wert, der sogenannte **spezifische Widerstand** ρ_R verwendet. Die Zahlenwerte für ρ_R einiger wichtiger Stoffe sind bereits in Tabelle 2.1 aufgelistet. Für Gleichung 2.12 kann daher auch

$$R = \frac{l}{\gamma\, A} = \rho_R \frac{l}{A} \tag{2.14}$$

geschrieben werden. Desgleichen verwendet man häufig den als **elektrischen Leitwert** G bezeichneten reziproken Widerstand R^{-1}.

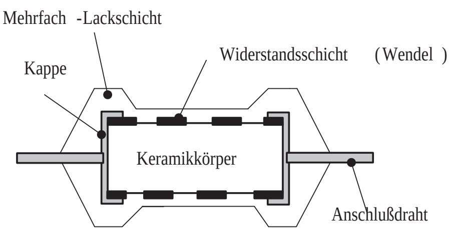
$$I = \frac{1}{R} U = G\,U; \qquad [G] = \left[\frac{1}{\Omega} = S\right] \quad ... \quad (Siemens, S). \tag{2.15}$$

Im allgemeinsten Fall ist ein elektrischer Leiter nicht so regelmäßig wie im falle eines Zylinders. Es gilt hier

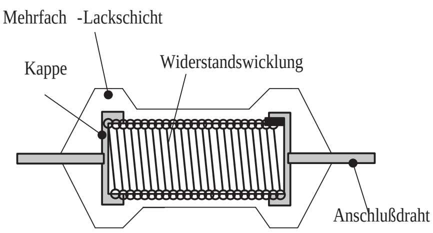
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int\limits_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int\limits_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\int\limits_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int\limits_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}. \tag{2.16}$$

2.2.1 Bauformen Ohmscher Widerstände

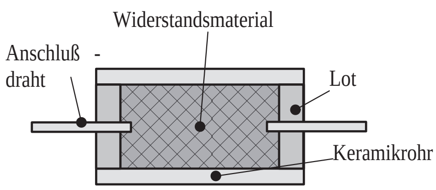
Je nach Anwendungsgebiet gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Bauformen Ohmscher Widerstände. Kriterien dafür sind die thermische Belastbarkeit, Genauigkeit, Langzeitstabilität, das parasitäre Verhalten, usw. In den nachfolgenden Abbildungen sind unterschiedliche Bauformen dargestellt.



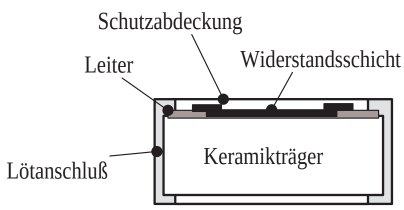
a) Schichtwiderstand



b) Drahtwiderstand



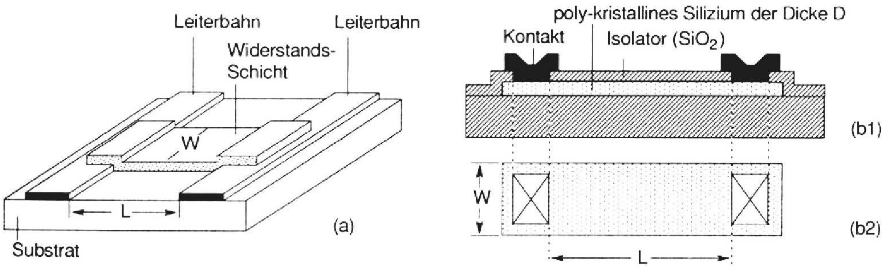
c) Massewiderstand



d) Dünnschichtwiderstand

Ebene Schichtwiderstände werden auch in Dickschichtschaltungen (a) sowie in integrierten Schaltkreisen (b) ausgeführt.

Mittels eines veränderbaren Abgriffes an einem Widerstand lassen sich sogenannten **Potentiometer** oder Spannungsteiler verwirklichen. Bei Drahtwiderständen ermöglicht



ein beweglicher Schleifkontakt den Abgriff an unterschiedlichen Stellen. Auch in Schichttechnologie werden Potentiometer ausgeführt.

2.3 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Der lineare zusammenhang zwischen Strom und Spannung gilt nur dann, wenn der Ohmsche Widerstand R sich nicht ändert. Nur dann ist gewährleistet, daß eine Erhöhung der Spannung am Widerstand auch eine proportionale Erhöhung des Stromes zur Folge hat. Diese Konstanz von R ist nicht über den gesamten Temperaturbereich gegeben.

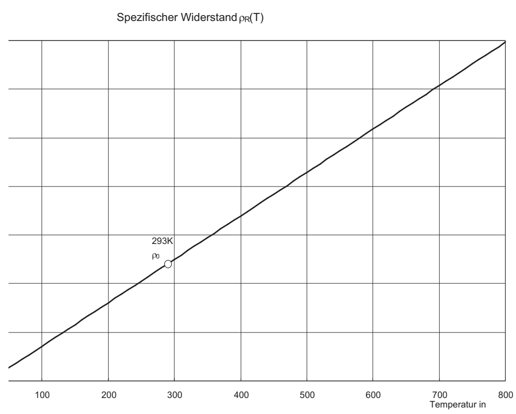


Abbildung 2.6: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes ρ_R

.

In Abb. 2.6 ist die Abhängigkeit des spezifischen Widerstande von Kupfer von der absoluten Temperatur T [K] grafisch dargestellt. $0K$ entsprechen -273,15° C. In weiten Teilen nimmt der spezifische Widerstand ρ_R etwa linear mit der Temperatur zu. Im Bereich der Raumtemperatur T_0=20° C = 293 K hat folgende lineare Näherung Gültigkeit:

$$\rho_R(T) = \rho_{R_0}\,[1 + \alpha_{20}(T - T_0)] \qquad [\Omega\, m]. \tag{2.17}$$

Darin ist ρ_{R_0} der spezifische Widerstand bei Raumtemperatur T_0. Der Temperaturkoeffizient α_{20} ist eine Materialkenngröße. Für einige Stoffe ist dieser Wert in Tab. 2.1 aufgelistet. Dieser Temperaturkoeffizient kann auch negatives Vorzeichen besitzen, d.h. der spezifische elektrische Widerstand wird mit steigender Temperatur kleiner. Bei sehr vielen Anwendungen will man über einen weiten Temperaturbereich eine Konstanz des elektrischen Widerstandes erreichen. Dies kann durch Zusammenschalten von Widerständen mit entsprechenden Temperaturkoeffizienten erreicht werden.

Sind sehr große Temperaturbereiche zu betrachten, so ist die lineare Näherung nicht mehr genau genug. Es muß eine quadratische Näherung herangezogen werden. Die beziehung wird in 2.18 angedeutet, ohne aber auf den darin verwendeten Temperaturkoeffizienten β näher einzugehen.

$$\rho_R(T) = \rho_{R_0}\,[1 + \alpha_{20}(T - T_0) + \beta\,(T - T_0)^2]. \tag{2.18}$$

Es gibt Stoffe, die ihren spezifischen elektrischen Widerstand bei sehr tiefen Temperaturen (nur einige Kelvin) plötzlich verlieren und bis zum absoluten Nullpunkt auf Null bleiben. Derertige Materialien werden als **Supraleiter** bezeichnet.

2.4 Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld

Die Gegenüberstellung der Gleichungen des elektrostatischen Feldes mit denen des elektrischen Strömungsfeldes läßt folgende Analogien erkennen:

Elektrostatisches Feld	Strömungsfeld
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$	$\vec{J} = \gamma\vec{E}$
$\Psi = \int_\Gamma \vec{D}\cdot d\vec{\Gamma}$	$I = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A}$
$U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s}$	$U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s}$
$Q = C\,U$	$I = G\,U$

$\vec{E}$ und U haben in beiden Fällen dieselbe Bedeutung. Die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ entspricht der elektrischen Verschiebung $\vec{D}$, der elektrische Fluß Ψ der elektrischen Stromstärke I, die Dielektrizitätszahl ϵ ist analog zur elektrischen Leitfähigkeit γ und die Kapazität C entspricht dem Leitwert G.

2.5 Die Leistung im stationären Strömungsfeld

Zur Beschreibung der elektrischen Leistung P betrachte man ein differentielles Volumselement dV, gemäß Abb. 2.7 :

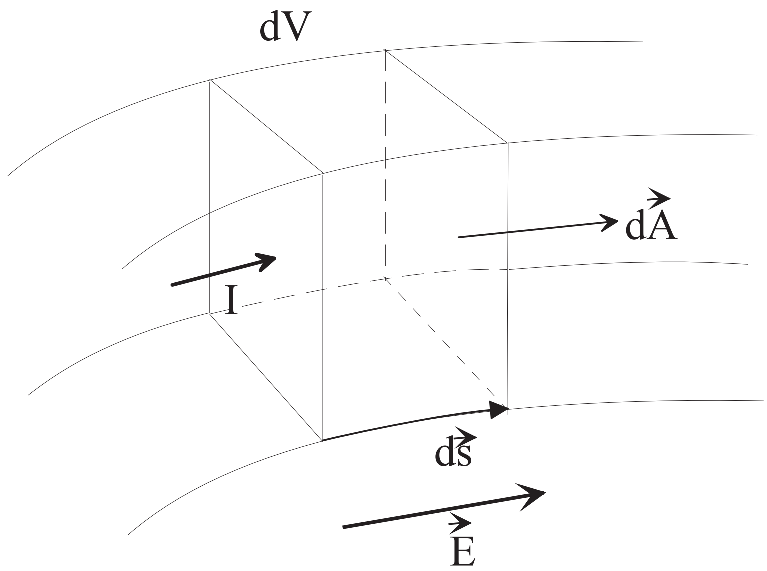


Abbildung 2.7: Bestimmung der elektrischen Leistung.

Für das differentielle Volumselement gilt:

$$dV = \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{2.19}$$

In diesem differentiell kleinen Volumen ist die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und das Längenelement $d\vec{s}$ in gleicher Richtung. Die umgesetzte elektrische Leistung dP ergibt sich aus dem Produkt der elektrischen Spannung in diesem Volumselement mit dem durchfließenden Strom :

$$dP = dU\, dI \tag{2.20}$$

Setzt man darin die Beziehungen

$$dU = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

und

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

ein, so folgt:

$$dP = dU\, dI = \vec{E} \cdot d\vec{s}\, \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \tag{2.21}$$

Das skalare Vektorprodukt aus den beiden Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{J}$ bezeichnet man dabei als **Leistungsdichte** p.

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}. \tag{2.22}$$

Damit wird die in einem Gesamtvolumen Ω umgesetzte elektrische Leistung zu

$$P = \int_\Omega \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV \;=\; U\, I \quad [VA = W] \quad ... \quad Watt. \tag{2.23}$$