1 Aufgabe 03-1 Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} x_1 & 2x_2 & x_3 & -2x_4 & 1 \\ x_1 & 4x_2 & 3x_3 & -7x_4 & 3 \\ -3x_1 & -6x_2 & 0 & -3x_4 & 0 \end{array}\right.$$

1.1 Ohnen zu rechnen, wie viele Loesungen wuerden Sie erwarten?

Betrachtet man die Matrix erkennt man sofort, dass die Anzahl der Variablen (4) groesser ist, als die Anzahl der Gleichungen (3). Daher erwarten wir unendlich viele Loesungen.
Des weiteren muss die Koeffizientenmatrix linear abhaengig sein, da wir eine inhomogene Matrix haben.

1.2 B, Gauss Algorithmus

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -7 & 3 \\ -3 & -6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \cdot -1 \\ \cdot 3 \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \div 3 \end{array} \quad \rightsquigarrow$$

1.3 Gaus-Jordan Verfahren

Im Gauss-Jordan-Verfahren werden Pivot-Elemente in Pivot-Spalten ausgewählt, um Systeme linearer Gleichungen zu vereinfachen und zu einer Lösung zu führen. Durch Manipulation der Zeilen, basierend auf den Pivot-Elementen, wird die Matrix in eine reduzierte Zeilenstufenform gebracht, wodurch die Lösungen des Systems leicht identifiziert werden können.

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \cdot -1 \\ \cdot -2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right. \quad \cdot -1 \quad \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & & & & 0 \\ & 2x_2 & & & 0 \\ & & x_3 & -3x_4 & 1 \end{array}$$

1.3.1 B, Loesungsmenge

$$\mathbb{L}x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 - 1 = 3x_4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Das reduzierte Gleichungssystem in Vektordarstellung:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.4 C, Wenn die Konstantenmatrix 0 ist.

1.4.1 C, Loesungsmenge

$$\mathbb{L} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = x_4, \quad x \in \mathbb{R}$$

2 Rechnen mit Matrizen

$$\text{Gegeben ist } A \cdot x = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^3.$$

2.1 A, Fuer welches $b \in \mathbb{R}^3$ existiert eine Loesung?

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 5 & 7 & 3 & b_3 \end{array}\right. \quad \cdot -\frac{2}{3} \quad \cdot -\frac{5}{3} \quad \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2 - \frac{2}{3b_1} + \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - \frac{5b_1}{3} - (b_2 - \frac{2b_1}{3}) \end{array}\right. \quad (-\tfrac{6}{11}) \quad \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & b_1 - \frac{6}{11} \cdot (b_2 - \frac{2b_1}{3}) \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2 - \frac{2}{3b_1} + \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

2.2 B, Man bestimme die Lösung in Abhängigkeit von b.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & & 6 & b_1 - \frac{6}{11} \cdot (b_2 - \frac{2b_1}{3}) \Rightarrow x_1 = \frac{5b_1}{11} - \frac{2b_2}{11} - 24 \\ & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2 - \frac{2}{3b_1} + \Rightarrow x_2 = -\frac{2b_1}{11} + \frac{3b_2}{11} + 4 \end{array}$$

$\forall b_1, b_2, \in \mathbb{R}: \quad 1b_3 = b_1 + b_2 \quad gild:$

$$\mathbb{L}_{x_1,x_2,x_3} = \left\{ \left(\frac{5b_1}{11} - \frac{2b_2}{11} - 2x_3, -\frac{2_b1}{11} + \frac{3b_2}{11} + x_3, x_3 \right) x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

3 Vergleiche mit dem exakten Ergebnis

Man verwende eine 2-stellige Gleitkommaarithmetik zur Lösung des Systems

$$0.89x_1 + 0.53x_2 = 0.36$$
$$0.47x_1 + 0.28x_2 = 0.19$$

und vergleiche dies mit dem exakten Ergebnis.

Anleitung: Jeder Zwischenschritt (Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division) ist gemäß der vorgegebenen Gleitkomma-Arithmetik zu machen. Taschenrechner können benutzt werden. Es ist mit den üblichen Rundungsregeln zu runden. Die Reihenfolge der Rechenschritte kann Auswirkungen auf das Ergebnis haben. Anmerkung: Beim Ermitteln des exakten Ergebnisses ist davon auszugehen, dass alle Zahlen exakt sind; d.h., z.B. $0.89 = 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} = \frac{89}{100}$ *usw.*

3.1 A, 2 Gleitkommerzahlen Loesen des Systems

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} 0.89 & 0.53 & 0.36 \\ 0.47 & 0.28 & 0.19 \end{array} \right. \cdot -\frac{0.47}{0.89} \rightsquigarrow \qquad \left\{ \begin{array}{cc|c} 0.89 & 0.53 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$0.89X_1 + 0.53x_2 = 0.36 \Rightarrow 0.89x_1 = 0.36 - 0.53x_2 \quad | \quad \div 0.89$$
$$\Rightarrow x_1 = 0.4 - 0.6x_2$$

$$\mathbb{L}x_1, x_2 = \{(0.4 - 0.6x_2, x_2)\}$$

3.2 B, Exaktes Ergebnis

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} \frac{0.89}{100} & \frac{0.53}{100} & \frac{0.36}{100} \\ \frac{0.47}{100} & \frac{0.28}{100} & \frac{0.19}{100} \end{array} \right. \rightsquigarrow \qquad \left\{ \begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 47 & 28 & 19 \end{array} \right. \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 47 & 28 & 19 \end{array} \right. \cdot 89 \rightsquigarrow \qquad \left\{ \begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right. \text{-53} \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} 89 & 0 & 89 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right. \div 89 \qquad \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

$$\mathbb{L}_{x_1,x_2} = \{(1, -1)\}$$

4 Determinante

4.1 C

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow det(a) = -43$$

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{gathered} 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 \\ = 0 + 12 - 6 - 45 - 4 - 0 \\ det(a) = -43 \end{gathered}$$

4.2 e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

det $= 0$

4.3 f

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Entwicklung mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz nach der ersten Spalte:
det $= 0$