# Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

29. September 2008

# Inhaltsverzeichnis

# 5 Ungleichförmig bewegte Ladungen

## 5.1 Allgemeines

Elektrische Ladungen können beschleunigt und abgebremst werden. In einem späteren Kapitel wird erläutert, wie diese ungleichförmigen Bewegungen zustande kommen. Im allgemeinen werden in der Elektrotechnik zeitlich periodische Vorgänge auftreten. Zur mathematischen Beschreibung müssen hierzu einige Eigenschaften und Kenngrößen definiert und beschrieben werden. Das Zeitverhalten elektrischer Größen bei Ein- und Ausschaltvorgängen, den sogenannten **transienten Vorgängen** , wird hier nicht berücksichtigt. Alle Betrachtungen erfolgen hier für **stationäre** Vorgänge.

## 5.2 Periodische Wechselgrößen

Elektrische Größen, welche nach gleichbleibenden Zeitintervallen immer wieder in Größe und Richtung gleich sind, nennt man in der Zeit **periodisch**. In Abbildung 5.1 ist ein derartiger qualitativer Verlauf am Beispiel einer elektrischen Spannung dargestellt.

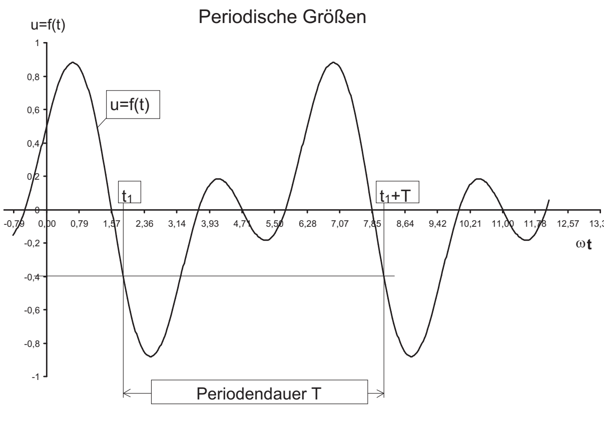


Abbildung 5.1: Zeitlicher Verlauf einer periodischen Spannung.

Der Abstand zwischen zwei Punkten gleichen Zustandes im Zeitdiagramm $u = f(t)$ nennt man Periode oder Periodendauer T. Für ein periodisches Verhalten einer Zeitfunktion $f(t)$ muß immer

$$f(t) = f(t + nT) \tag{5.1}$$

gelten. $n$ ist darin eine beliebige ganze Zahl größer als Null. Bei periodischen Funktionen unterscheidet man reine Wechselgrößen und Mischgrößen. Bei reinen Wechselgrößen ist je Periode $T$ die Fläche zwischen Funktion und Zeitachse unter der Zeitachse immer gleich der Fläche zwischen Funktion und Zeitachse oberhalb der Zeitachse (z.B. die Funktion in Abbildung 5.1). Bei Mischgrößen ist der Wechselgröße immer ein Gleichanteil, positiv oder negativ, überlagert (Abbildung 5.2).

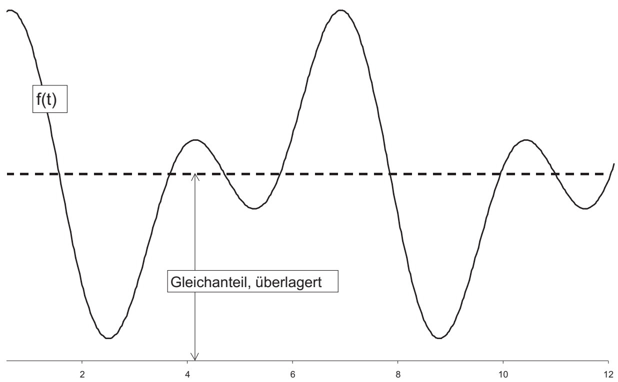


Abbildung 5.2: Periodische Zeitfunktion mit Gleichanteil, Mischgröße

## 5.3 Kennwerte sinusförmiger Größen

In der Praxis treten häufig reine sinusförmige Wechselgrößen auf. Diese können mathematisch sehr einfach beschrieben werden. Reine sinusförmige Größen bezeichnet man als **zeitharmonische Funktionen**. Man betrachte folgendes Zeitverhalten rein sinusförmiger Wechselgrößen.

Für die Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ gilt allgemein:

$$u_1(t) = \hat{u_1} \sin\left[(\omega t) + \varphi_1\right] \tag{5.2}$$

$$u_2(t) = \hat{u_2} \sin\left[(\omega t) + \varphi_2\right] \tag{5.3}$$

Die Sinusfunktionen wiederholen sich nach Ablauf eines Winkels von $360^\circ = 2\pi$. Daraus ergibt sich die Periodendauer T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5.4}$$

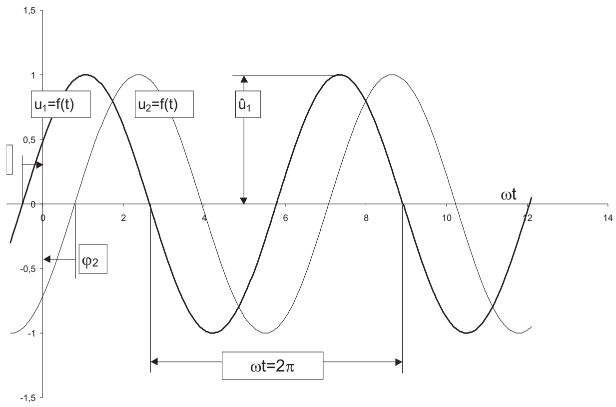


Abbildung 5.3: Reine sinusförmige Wechselgrößen.

$\omega$ wird darin als Kreisfrequenz bezeichnet. Der reziproke Wert der Periodendauer wird als Frequenz $f$ bezeichnet.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{1}{s} = Hz\right] \quad ... \quad Hertz. \tag{5.5}$$

Die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ werden als Nullphasenwinkel bezeichnet. Der Nullphasenwinkel gibt die Verschiebung, das heißt, um wieviel Grad eine allgemeine Sinusfunktion zur Zeit $t = 0$ früher oder später gegenüber der reinen Sinusfunktion $f(t) = \sin(\omega t)$ durch Null geht, an.

In Abbildung 5.3 ist im Falle der Zeitfunktion $u_1(t)$ ist der Nullphasenwinkel positiv und entsprechend dazu der Nullphasenwinkel von $u_2(t)$ negativ. Man sagt, die Spannung $u_1(t)$ eilt der Spannung $u_2(t)$ vor. Aus der Differenz der beiden Nullphasenwinkel ergibt sich die **Phasenverschiebung** oder der **Phasenwinkel** zwischen den beiden Spannungen zu

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{5.6}$$

Eine weiter Kenngröße aus den Gleichungen 5.2 und 5.3 sind die mit einem Dächchen gekennzeichneten Maximalwerte der Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$.

Man bezeichnet diese Maximalwerte oder Amplituden $\hat{u_1}$ und $\hat{u_2}$ auch als **Scheitelwerte** der Zeitfunktionen.

**Durch die Angabe von Scheitelwert, Frequenz und Nullphasenwinkel ist eine sinusförmige Größe eindeutig beschrieben**!

Zur Beschreibung der Wirkungen periodischer Wechselgrößen ist es zweckmäßiger, mit Begriffen zu arbeiten, welche von der Kurvenform unabhängig sind. Zu deren Festlegung geht man von den Wirkungen des elektrischen Stromes aus.

### 5.3.1 Der lineare Mittelwert

Wir wissen, daß die elektrische Stromstärke $I$ aus der Änderung der Ladungen pro Zeiteinheit gegeben ist ($I = \frac{dQ}{dt}$, Gleichung 2.2). Die über eine Zeitspanne transportierte Ladungsmenge $Q$ errechnet sich zu

$$Q = \int_0^t i(\tau)d\tau. \tag{5.7}$$

Will man einen Gleichstrom der Stärke $I$ für diesen Ladungstransport mit einem Wechselstrom $i(t)$ vergleichen, so muß man über die Preiodendauer $T$ integrieren. Man erhält den linearen Mittelwert $\bar{i}$ :

$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T idt. \tag{5.8}$$

Für reine Wechselgrößen ergibt die Integration immer Null, da die Flächen unter der psoitiven und über der negativen Halbschwingung jeweils gleich groß ist. Die Ladung $Q$ wird in der einen Halbperiode in die eine Richtung, in der zweiten Halbperiode in die andere Richtung bewegt. Es kommt daher zu keinem resultierenden Ladungstransport. Für Mischströme ist der lineare Mittelwert von Null verscheiden und entspricht dem überlagerten Gleichanteil.

### 5.3.2 Der Gleichrichtwert

Mittels Halbleiterbauelementen, z.B. Dioden, kann man eine sogenannte Gleichrichtung einer Wechselgröße erzielen. hernach werden die beiden Halbschwingungen dieselbe Stromrichtung aufweisen.

Der zeitliche Mittelwert dafür ergibt sich aus dem Integral

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\, i\,|dt. \tag{5.9}$$

Für sinusförmige Größen wie $i(t) = \hat{i}\sin(\omega t)$ und $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ ergibt sich das Integral zu:

$$\frac{\overline{|i|}}{\hat{i}} = \frac{\overline{|u|}}{\hat{u}} = \frac{1}{\omega T}\int_0^T |\sin(\omega t)|d(\omega t) = \frac{2}{\pi} = 0,6366. \tag{5.10}$$

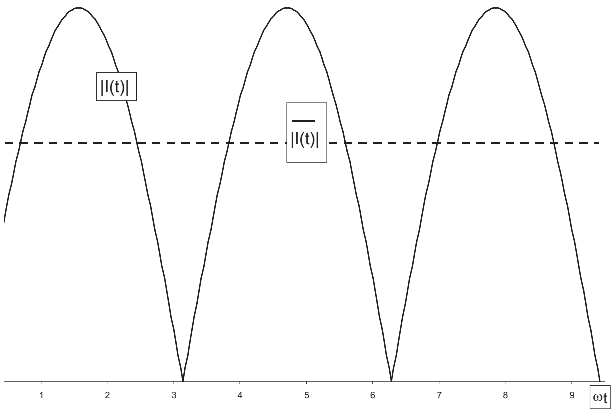


Abbildung 5.4: Gleichrichtung einer sinusförmigen Wechselgröße.

### 5.3.3 Der Effektivwert oder quadratische Mittelwert

Für den Vergleich der elektrischen Leistung an einem Widerstand, in einem Falle mit Gleichstrom, im anderen Falle mit Wechselstrom durchflossen, müssen folgende Überlegungen gelten. Im Falle von Gleichstrom gilt für die Leistung $P = UI = I^2R = U^2/R$. Für den Wechselstromfall gilt sinngemäß:

$$P = i^2(t)R. \tag{5.11}$$

Führt man darin das Quadrat über den sinusförmigen Strom aus, so folgt:

$$i^2(t) = \hat{i}^2 sin^2(\omega t). \tag{5.12}$$

In Abbildung 5.5 sind die Verläufe der einzelnen Größen grafisch dargestellt.

Der Mittelwert des Quadrates der Kurve $i(t)$ wird, da es sich um eine Gleichgröße handelt, mit $I^2$ bezeichnet. Für das Integral über die Periode $T$ ergibt sich :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{\hat{i}^2}{T}\int_0^T sin^2(\omega t)dt = \frac{\hat{i}^2}{\omega T}\int_0^T sin^2(\omega t)d(\omega t) = \frac{\hat{i}^2}{2}. \tag{5.13}$$

Der Mittelwert $I^2$ entspricht daher dem halben Quadrat des Scheitelwertes $\hat{i}^2$. Der erhaltene quadratische Mittelwert $I$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \tag{5.14}$$

wird als **Effektivwert** bezeichnet.

**Der Effektivewert ist jene Kenngröße eines Wechselstromes, der die gleiche Wirkung wie ein Gleichstrom derselben Höhe hervorruft**!

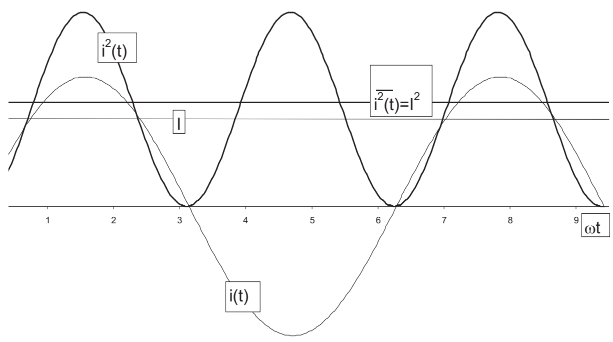


Abbildung 5.5: Zur Herleitung des Effektivwertes.

## 5.4 Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen

Die Darstellung von elektrischen Größen (z.B. $u = u(t), i = i(t)$ ) im Zeitdiagramm ist oft sehr umständlich, insbesondere dann, wenn mehrere Größen gleichzeitig diskutiert werden. Zudem sind die mathematischen Operationen oft sehr aufwendig. Es wird daher versucht, die zeitharmonischen Größen in einer symbolischen Weise darzustellen.

### 5.4.1 Die Zeigerdarstellung oder das Zeigerdiagramm

Am Beispiel einer sinusförmigen Spannung der Form

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

soll diese Form der Darstellung gezeigt werden. Es muß natürlich einen Zusammanhang zwischen Zeitdiagramm und Zeigerdiagramm geben. Dazu betrachte man nachfolgende Abbildung.

In dieser Abbildung wird die Spannung durch einen einfachen Pfeil der Länge $\hat{u}$ dargestellt. Zur Kennzeichnung, daß es sich um einen Zeiger handelt, wird die physikalische Größe durch einen Unterstrich beim Symbol dargestellt. Für den Spannungszeiger gilt damit die Zeigerdarstellung $\underline{\hat{u}}$. Definitionsgemäß dreht sich nun der Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$ entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz $\omega$. Aus der Projektion des Zeigers auf die y-Achse (oder eine beliebige, dazu parallele Linie) kann für jeden beliebigen Zeitpunkt $t$ der Augenblickswert der Spannung abgelesen werden. Am Papier können nur feststehende Zeiger gezeichnet werden. Ein Zeigerdiagramm gibt also über den Momentanwert der einzelnen dargestellten Größen Auskunft. Werden beispielsweise zwei

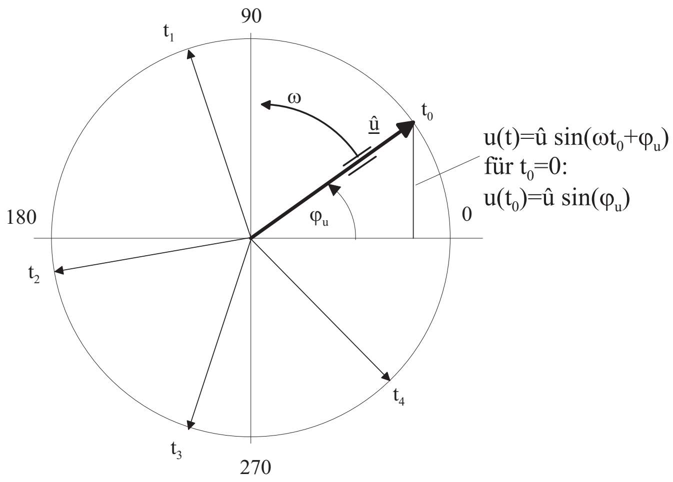


Abbildung 5.6: Zum Zeigerdiagramm.

elektrische Spannungen und eine elektrische Stromstärke

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u_1} \sin(\omega t + \varphi_{u1}) \\ u_2 &= \hat{u_2} \sin(\omega t + \varphi_{u2}) \\ i &= \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

in einem Zeigerdiagramm für einen bestimmten Zeitpunkt $t_1$ dargestellt, so hat dieses folgendes Aussehen.

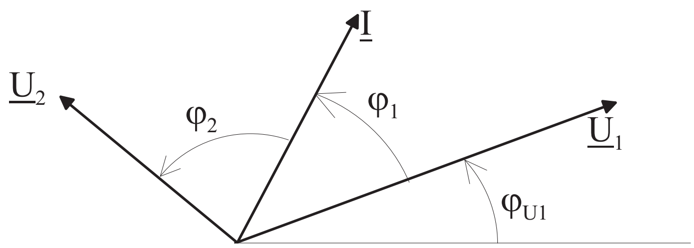


Abbildung 5.7: Zeigerdiagramm für drei elektrische Größen.

In Abbildung 5.7 wurde schon darauf Bedacht genommen, daß fast ausschließlich mit den Effektivwerten der Wechselgrößen gearbeitet wird. Bei Vorhandensein mehrerer Zeiger ist es zweckmäßig, einen davon als *Bezugszeiger* zu wählen und die Phasenverschiebungen zueinander zu bezeichnen. In der obigen Abbildung wurde der Strompfeil $\underline{I}$ dazu verwendet. Der Winkel $\varphi_1$ gibt an, um wieviel die Spannung $\underline{U}_1$ dem Strom $\underline{I}$ nacheilt. Umgekehrt ist es im Falle der Spannung $\underline{U}_2$. Diese eilt dem Strom um $\varphi_2$ voraus.

Ein Zeiger ist durch folgende Angaben eindeutig beschrieben:

- Symbol der dargestellten Größe (z.B. $\underline{U}$, $\underline{I}$, $\underline{\hat{u}}$).
- Betrag der sinusförmigen Größe. Dieser ist proportional der Länge des Zeigers. Dazu ist immer ein Maßstab notwendig, z.B. $1\,cm \mathrel{\hat{=}} 5\,Volt, \quad 1\,cm \mathrel{\hat{=}} 3\,Ampere$.
- Frequenz $f$ oder Kreisfrequenz $\omega$ der Schwingung.
- Phasenwinkel zu einem Bezugszeiger oder Nullphasenwinkel, z.B. $\varphi_1$, $\varphi_{U1}$.

Gemäß der schon hergeleiteten Beziehung zwischen Effektiv- und Scheitelwerten bei sinusförmigen Größen müßten die Zeigerlängen in obigem Zeigerdiagramm um den Faktor $\sqrt{2}$ verlängert werden, um das Zeigerdiagramm für Scheitelwerte zu erhalten.

Die Überlagerung (Addition oder Subtraktion) von sinusförmigen Zeitsignalen gleicher Frequenz ergibt **immer** ein Signal mit sinusförmigem Verlauf bei gleicher Frequenz. Aus diesem Grunde können Zeiger wie Vektoren geometrisch addiert bzw. subtrahiert werden (Abbildung 5.8).

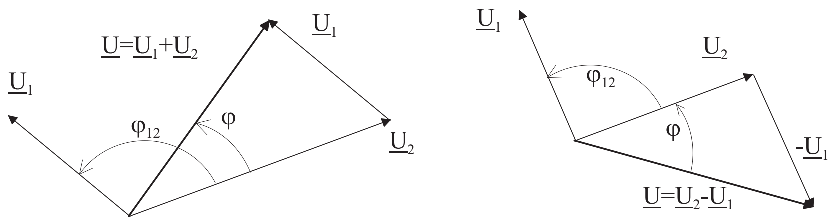


Abbildung 5.8: Geometrische Addition und Subtraktion von Zeigern.

Rechnerisch sind diese beiden Operationen sehr umständlich durchzuführen. Die beiden sinusförmigen Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ seien folgend gegeben.

$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Die Überlagerung beider Spannungen ergibt:

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Nach Anwendung des Summensatztes $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ erhält man :

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}\sin(\omega t + \varphi) \\ &= [\hat{u}_1\cos\varphi_1 + \hat{u}_2\cos\varphi_2]\sin(\omega t) + [\hat{u}_1\sin\varphi_1 + \hat{u}_2\sin\varphi_2]\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Gesamtspannung $u$:

$$\begin{aligned} u \sin\varphi &= \hat{u}_1 \sin\varphi_1 + \hat{u}_2 \sin\varphi_2 \\ u \cos\varphi &= \hat{u}_1 \cos\varphi_1 + \hat{u}_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Aus der Division dieser beiden Gleichungen erhält man über den Arcus-Tangens den resultierenden Phasenwinkel zu:

$$\varphi = \arctan\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\hat{u}_1 \sin\varphi_1 + \hat{u}_2 \sin\varphi_2}{\hat{u}_1 \cos\varphi_1 + \hat{u}_2 \cos\varphi_2} \tag{5.16}$$

Durch Quadrieren und Addieren der sin- und cos-Terme findet man den Scheitelwert $\hat{u}$ der Gesamtspannung.

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= [\hat{u}_1 \sin\varphi_1 + \hat{u}_2 \sin\varphi_2]^2 + [\hat{u}_1 \cos\varphi_1 + \hat{u}_2 \cos\varphi_2]^2 \\ \hat{u} &= \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned} \tag{5.17}$$

In dieser Beziehung 5.17 wurde noch Gebrauch von der Identität $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ gemacht. Man erkennt die Umständlichkeit dieser einfachen mathematischen Manipulation bereits bei nur zwei zu addierenden/subtrahierenden Größen.

### 5.4.2 Sinusgrößen als komplexe Zeiger

Bildet man einen Zeiger in der komplexen Zahlenebene ab, so kann dieser Zeiger durch eine komplexe Zahl **eindeutig** beschrieben werden. Es können alle Vorteile aus der komplexen Zahlenrechnung angewandt werden. **Die Sinusschwingung im Zeitbereich wird in die komplexe Ebene transformiert**. Es ist dies lediglich eine einfachere, eine symbolische Darstellungsform der sinusförmigen Größen. Ein komplexer Zeiger wird ebenfalls durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Auch hier hat sich die Verwendung des Effektivwertes durchgesetzt. In Abbildung 5.9 ist für eine Spannung und für einen Strom deren komplexer Effektivwert $\underline{U}$, bzw. $\underline{I}$ dargestellt. Man sagt dazu auch die komplexe Spannung bzw. der komplexe Strom.

Die dargestellte Spannung $\underline{U}$ kann durch die Exponentialform oder Eulersche Form

$$\underline{U} = U\, e^{j(\omega t+\varphi)} = U\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi} \tag{5.18}$$

mathematisch beschrieben werden. Unter Verwendung des *Satztes von Moivre* kann daraus die trigonometrische Form erstellt werden:

$$\underline{U} = U\,[\cos(\omega t + \varphi) + j\, \sin(\omega t + \varphi)]. \tag{5.19}$$

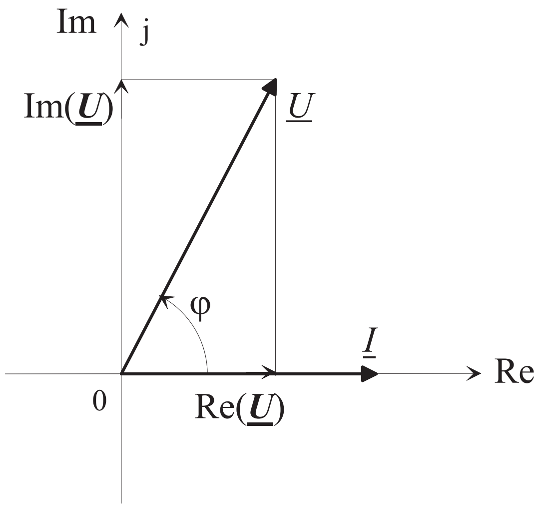


Abbildung 5.9: Zeiger in der komplexen Zahlenebene.

Die bekannte Frequenz $f$ bzw. Kreisfrequenz $\omega$ der harmonischen Größe ist nur für die Bestimmung von Zeitwerten notwendig. In allen anderen Fällen wird auch in der komplexen Darstellung eines Zeigers auf die Drehung des Zeigers mit der Kreisfrequenz $\omega$ verzichtet. Man läßt in diesen Fällen den Term $e^{j\omega t}$ aus Gleichung 5.18 weg. Dies entspricht dem Momentanzustand zum Zeitpunkt $t = 0$.

Man bezeichnet die in Abbildung 5.9 eingezeichneten Größen, den auf der reellen Achse aufgetragenen Anteil von $\underline{U}$ als Realteil und den auf der imaginären Achse aufgetragenen Anteil von $\underline{U}$ als Imaginärteil.

Der Real- und der Imaginärteil einer komplexen Größe berechnet sich durch

$$\begin{aligned} Re(\underline{U}) &= U\,\cos(\omega t + \varphi) \\ Im(\underline{U}) &= U\,\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Mit diesen Beziehungen ist der Zusammenhang zur Zeitfunktion der Sinusgröße gegeben. Aus diesen Komponenten kann nun der Betrag und der Winkel $\varphi$ nachfolgend berechnet werden:

$$\begin{aligned} Re(\underline{U}) &= a; \qquad Im(\underline{U}) = b \quad \longrightarrow \quad \underline{U} = a + jb \\ U &= |\underline{U}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Zur komplexen Größe $\underline{U}$ gibt es eine dazu **konjugiert komplexe** Größe. Diese hat ein zur komplexen Größe umgekehrtes Vorzeichen im Imaginärteil und demzufolge auch im Winkel (Abbildung 5.10).

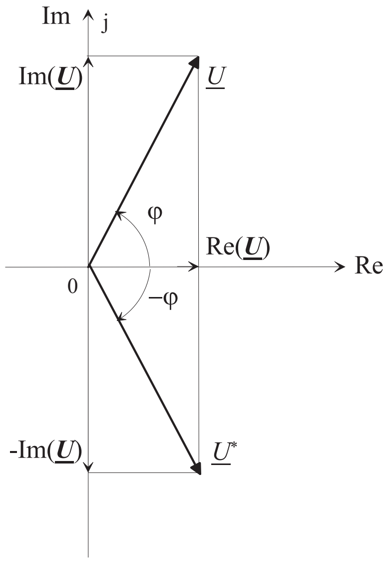


Abbildung 5.10: Komplexe und dazu konjugiert komplexe Größe.

Die konjugiert komplexe Größe wird mit einem hochgestellten Stern am Größensymbol gekennzeichnet.