NRLA Blatt 03

Mittwoch, 12. Oktober 2022 16:05

Aufgabe 3-1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

1)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - I \\ IV - I \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + 2II \\ IV + II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 1IV \\ III - 2IV \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - III \\ II - 2III \\ III - \\ \vdots \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

2)
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ V - I \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ V + II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ V - III \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ V + IV \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

Nullzeile $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen
x_5 ist freier Parameter

$$x_5 = t \Rightarrow \begin{aligned} x_4 &= -t \\ x_3 &= t \\ x_2 &= -t \\ x_1 &= t \end{aligned} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

Aufgabe 3-2 Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 4 \\ x + y + (a^2 - 10)z &= a \end{aligned}$$

1. keine Lösung,
2. eine eindeutig bestimmte Lösung,
3. beliebig viele Lösungen besitzt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & (a^2-10) & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - I \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right)$$

1) Keine Lösung:

$a = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 9 = (-3) - 3$
$0 = -6$ ↯

2) Eindeutige Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

2) Eindeutige Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$z = \frac{a-3}{a^2-9} = \frac{a-3}{(a-3)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$

3) Unendlich viele Lösungen:

$a = 3 \Rightarrow$ Nullzeile, freier Parameter

Sei $z = t \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 2t$

$x - \frac{1}{2} + 2t - t = 3$

$x = 3{,}5 - t$

$$\left.\begin{matrix} y = -\frac{1}{2} + 2t \\ x - \frac{1}{2} + 2t - t = 3 \\ x = 3{,}5 - t \end{matrix}\right\} \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

Aufgabe 3-3 Gegeben ist $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^3$.

1. Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ existiert eine Lösung?
2. Man bestimme die Lösung in Abhängigkeit von b.

$A\vec{x} = \vec{b}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^3$

Sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 5 & 7 & 3 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}-\text{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right)$

Es existiert ∞-viele Lösung, wenn $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ ist $\Rightarrow b_3 = b_2 + b_1$ | $\text{rank}(A) = 2 = \text{rank}(A|b) < n$

Damit eine Lösung entsteht muss $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$ sein.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right) \text{I}-\text{II} \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 - b_2 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right) \text{II} - 2\text{I}$

$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 - b_2 \\ 0 & 11 & -11 & b_2 - 2(b_1 - b_2) \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right)$

Wenn $b_3 = b_1 + b_2 \Rightarrow \infty$-viel Lösungen
Wählen für x_3 freien Parameter t.

$11x_2 - 11t = 3b_2 - 2b_1$

$\underline{\underline{x_2}} = \frac{3}{11} b_2 - \frac{2}{11} b_1 + t$

$x_1 - 3\left(\frac{3}{11} b_2 - \frac{2}{11} b_1 + t\right) + 5t = b_1 - b_2$

$x_1 - \frac{9}{11} b_2 + \frac{6}{11} b_1 - 3t + 5t = b_1 - b_2$

$\underline{\underline{x_1}} = \frac{5}{11} b_1 - \frac{2}{11} b_2 - 2t$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Aufgabe 3-4 Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösen Sie damit $Ax = (2, 3, 4)^t$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\quad II - I$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -1 \\ III - II \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 3III \\ II - III \\ \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2II \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

b)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - I \end{array}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 10 + 12 - 12 - 10 - 16 = 0$$

a) $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Keine Inverse

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + IV \\ \\ \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + III \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + II \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Löse $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad Ax = b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = x_1 \\ = x_2 \\ = x_3 \end{array}$$

Aufgabe 3-5

Lösen Sie die folgenden Matrix-Gleichungen nach X auf und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit als möglich. Alle Matrizen seien regulär $n \times n$ Matrizen.

a) $XA^2 = A^{-1}$ c) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$

b) $AXB = (BA)^2$ d) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

a) $XA^2 = A^{-1}$

$X \cdot A \cdot A = A^{-1} \quad \mid \cdot A^{-1} \mid \cdot A^{-1}$

a) $XA^2 = A^{-1}$

$X \cdot A \cdot A = A^{-1} \quad | \cdot A^{-1} \; | \cdot A^{-1}$

$X \cdot A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$

$X = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$

$X = (A^{-1})^3$

b) $AXB = (BA)^2$

$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(BA)^2B^{-1}$

$X = A^{-1}(BA)^2B^{-1}$

c) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$

$X^{-1}(A^{-1})^{-1} = A\,A^{-1}(B^{-2})^{-1}$

$X^{-1}A = I\,(B^{-2})^{-1}$

$XX^{-1}A = X\,(B^{-2})^{-1}$

$IA\,B^{-2} = X\,(B^{-2})^{-1}(B^{-2})$

$AB^{-2} = X$

d) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A \quad | \cdot A^{-1}\_$

$IBXA^{-1}B^{-1} = A^{-1} \cdot (I + A)$

$BXA^{-1}B^{-1} = A^{-1} + A^{-1} \cdot A$

$BXA^{-1}B^{-1} = A^{-1} + I \quad | \cdot \_ \cdot B$

$BXA^{-1}B^{-1}B = (A^{-1} + I) \cdot B$

$BXA^{-1} = A^{-1}B + B \quad | \cdot B^{-1}\_$

$B^{-1}BXA^{-1} = B^{-1} \cdot (A^{-1}B + B)$

$XA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cdot B + I \quad | \cdot\_A$

$X = (B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B + I) \cdot A$

$X = B^{-1}A^{-1} \cdot B \cdot A + A$

$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (B + I) \cdot A$

Aufgabe 3-6 Man bestimme eine $(3 \times 3)-$ Matrix A so, dass gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A eindeutig?

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$a_1 \cdot \overset{x_1}{1} + b_1 \cdot \overset{x_2}{0} + c_1 \cdot \overset{x_3}{1} = 0$

$a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 1$

$a_3 \cdot 1 + b_3 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 = -4$

$\Rightarrow a_1 + c_1 = 0 \qquad$ Bestimmt Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$a_2 + c_2 = 1$

$a_3 + c_3 = -4$

Nein, sie ist nicht eindeutig.