Klausur 1, B

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme, Inverse von Matrizen, Determinanten)

(a) **[4]** Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - \beta x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + (2\beta - 2\alpha)x_2 - (2+\alpha)x_3 = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Für welche reelle Werte von α und β hat das obige lineare System keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Anleitung: *In Matrixform auf ZSF bringen und Fallunterscheidungen.*

[**1 Bonus**] für geometrische Veranschaulichung des Lösungsverhalten mittels α, β-Ebene.

(b) **[4]** Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = (0)\,, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & x^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie an, welche Matrizen singulär bzw. regulär sind (a, b, c, λ und x sind reell).

Aufgabe 2 (Lineare Vektorräume, anschaulich und abstrakt)

[3] Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-1, 0, 0)$ vom Lot[1] auf die Ebene

$$\epsilon: \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

durch den Punkt $Q(0, 0, -1)$.

(b) **[4]** Bestimmen Sie eine Basis des Spans der folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Wahr/Falsch) [**1 Punkt pro Behauptung.**] Begründung oder Gegenbeispiel.

(a) Das Lösungsverhalten des homogenen linearen Systems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ allein bestimmt, ob das inhomogene System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist.

(b) Zwei quadratische Matrizen können stets miteinander multipliziert werden.

(c) Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ sei invertierbar mit inverser Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$. Dann gilt: die i-te Zeile von $\boldsymbol{A}$ steht senkrecht auf die j-te Spalte von $\boldsymbol{A}^{-1}$, AUSSER wenn $i = j$.

(d) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{3x3}$, wobei $\boldsymbol{S}$ invertierbar ist und $\boldsymbol{SA} = \boldsymbol{BS}$. Dann gilt: $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B})$.

(e) Die Ebene $x+y+2z = -4$ teilt den Raum in drei Teile: "über" (wohin der Normalvektor zeigt), "auf" und "unter" der Ebene. Der Ursprung liegt hier "über" der Ebene.

(f) Die Menge der Polynome p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $a \geq 0$, ist ein Teilraum von $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen.

[1] Gerade senkrecht zur Ebene.