NRLA BLATT 01

Montag, 3. Oktober 2022 20:35

Aufgabe 1-1 Arbeiten Sie die Übungswebseite durch, um mit dem Übungsmodus vertraut zu werden.

✓

Aufgabe 1-2 Finden Sie einige Beispiele für Anwendungen von Linearer Algebra.[1]

- Theoretische Physik
- Lineare Optimierung

Aufgabe 1-3 Finden Sie mit schulmathematischen Mitteln den Schnitt (falls es einen solchen gibt) der beiden folgenden Geraden in der Euklidischen x, y-Ebene:

(a) Die erste Gerade g_1 wird durch die Punkte $P(-1, 1)$ und $Q(0, 2)$ festgelegt.

(b) Die zweite Gerade g_2 wird durch die Gleichung

$$2y = 1$$

festgelegt.

Fertigen Sie eine Skizze an.

P (-1, 1)
Q (0, 2)

P: $1 = k \cdot (-1) + d$
Q: $2 = k \cdot 0 + d \Rightarrow d = 2$

Einfügen: $1 = k \cdot (-1) + 2$
$k = 1$

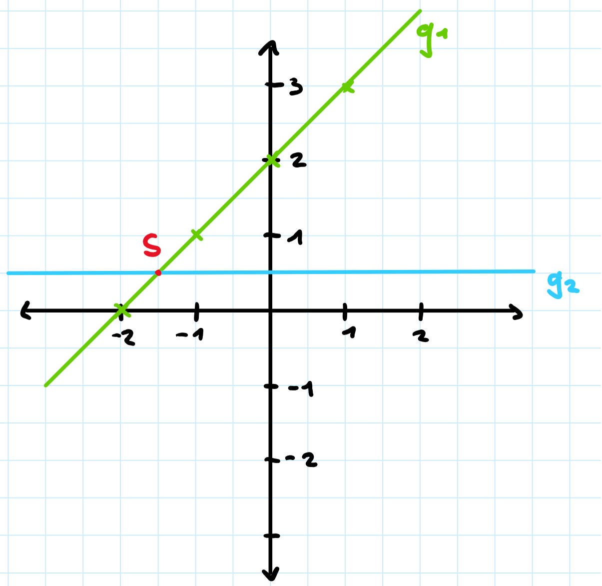
$\Rightarrow \boxed{y = x + 2}$ g_1

geg. $2y = 1$
$\boxed{y = 0.5}$ g_2 (keine Steigung)

Setzen y ein

$y = x + 2$
$0{,}5 = x + 2$
$x = -1{,}5$

$\boxed{\text{Schnitt } S(-1{,}5\ ,\ 0{,}5)}$



Aufgabe 1-4 Gegeben sind die drei Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\} \quad \text{und} \quad B = \{2, 4\} \quad \text{und} \quad C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 6\}$$

Bestimmen Sie alle Elemente der Mengen $(A \cap \mathbb{Z}) \times B$, $B \setminus A$ und $\mathcal{P}(C \cap B)$. Hierbei ist $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M, d.h. z.B. $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ besteht aus acht verschiedenen Mengen: $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

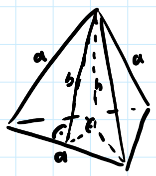
$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$

$B = \{2, 4\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 6\}$

- $(A \cap \mathbb{Z}) \times B = \{2, 3\} \times B = \{(2,2); (2,4); (3,2); (3,4)\}$
- $B \setminus A = \{4\}$
- $P(C \cap B) = \{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$

Aufgabe 1-5 Das Volumen V eines Tetraeders ist gegeben durch $V = \frac{Gh}{3}$, wobei G die Fläche der Grundseite ist, und h die Höhe. Berechnen Sie das Volumen eines regulären Tetraeders mit Seitenlänge a. (Regulär: alle Seitenlängen sind gleich, alle Dreiecke sind gleichseitige Dreiecke). (Hinweis: die 4 Punkte $P_1 = (1,1,1), P_2 = (1,-1,-1), P_3 = (-1,1,-1), P_4 = (-1,-1,1)$ oder $Q_1 = (0,0,1), Q_2 = (0, \sqrt{8}/3, -1/3), Q_3 = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, -1/3), Q_4 = (-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, -1/3)$ sind explizite Koordinaten von jeweils regulären Tetraedern).



Seite b berechnen:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

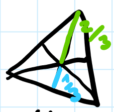
Grundfläche:

$$G = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

h berechnen:

Wichtig!



$$b^2 = h^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot b\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \frac{1}{9}b^2$$

$$h^2 = \frac{8}{9}b^2$$

$$h^2 = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$$h^2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4}a^2 = \frac{24}{36}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$$

$$\Rightarrow V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$