Analysis T1

1. Klausur, 1.12.2020
Gruppe A

Musterlösung und grobes Bewertungsschema
(Gruppe B und Gruppe C sind jeweils ganz ähnlich, nur mit anderen Zahl en)

---

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die unten angegebenen Folgen.

a)
$$a_n = 2 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}, \qquad n \geq 1.$$

b)
$$a_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{n}, \qquad n \geq 1.$$

c)
$$a_n = \frac{3n^3 - 2n}{n^3 + n + 2}, \qquad n \geq 1.$$

d)
$$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

e)
$$a_n = \left(2 + \frac{2}{n}\right)\left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(4 + \frac{4}{n}\right)\left(5 + \frac{5}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

Lösungen:

a) Wir wissen aus der Vorlesung dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Daher
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\right) - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\right) = 2.$$

b) Wir wissen dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, daher
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

c) Wir dividieren Zählen und Nenner durch n^3 und erhalten
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n}{n^3 + n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2n}{n^3}}{1 + \frac{n}{n^3} + \frac{2}{n^3}}.$$

Wir verwenden wieder dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, daher ist der gesamte Grenzwert gleich 3 (weil: Grenzwert einer Summe = Summe der Grenzwerte, Grenzwert eines Quotienten = Quotient der Grenzwerte).

d) Wir wissen aus der Vorlesung dass $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Die Funktion $x \mapsto x^2$ ist stetig (muss nicht extra hingeschrieben werden, sondern kann einfach verwendet werden), daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} = \frac{1}{e^2}.$$

e) Wir wissen dass Grenzwert eines Produkts = Produkt der Grenzwerte. Also ist

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}\right)\left(5+\frac{5}{n}\right) \\ = & \left(\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{5}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Wir haben $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right) = 2$, und entsprechende Formeln für die anderen Faktoren. Der gesamte Grenzwert ist daher

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Punkteschema: Pro Teilaufgabe 1 Punkt.

---

2. Bestimmen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent oder divergent ist. Dabei ist

a)
$$a_n = \frac{2n-1}{4n^3-n^2}, \qquad n \geq 1.$$

b)
$$a_n = n^2, \qquad n \geq 1.$$

c)
$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad n \geq 1.$$

d)
$$a_n = \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right), \qquad n \geq 1.$$

e)
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

Lösungen:

a) Wir vergleichen a_n mit $b_n = \frac{1}{n^2}$. Dann ist

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2n-1}{4n^3-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^3-n^2}{4n^3-n^2},$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Wir wissen aus der Vorlesung das $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist. Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4n^3-n^2}$ ebenfalls konvergent laut Majorantenkriterium.

b) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge (sondern unbeschränkt). Daher kann die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent sein.

c) Wir verwenden das Quotientenkriterium. Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^{n+1}}{2^n}}_{=2} \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{=\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Die Folge ist daher konvergent laut Quotientenkriterium.

d) Wir vergleichen die Folge mit $b_n = \frac{1}{n}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{n} - \frac{2n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{2}{n}\right) = 4 > 0.$$

Wir wissen dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$ ist daher auch divergent laut Minorantenkriterium.

e) Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

(wissen wir aus der Vorlesung). Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist daher keine Nullfolge, die Reihe kann nicht konvergent sein.

Punkteschema: Pro Teilaufgabe 1 Punkt.

---

3. Sind diese Funktionen injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

a)

$$f(x) = x^2, \qquad f: \; [-4,4] \mapsto [-16,16].$$

b)

$$f(x) = 0, \qquad f: \; [-1,1] \mapsto \{0\}.$$

Lösungen:

a) Es ist möglich zwei verschiedene Werte für x im Bereich $x \in [-4, 4]$ zu finden für die $f(x)$ denselben Wert hat. Es ist z.B. $f(-4) = f(4) = 16$. Die Funktion ist daher nicht injektiv. Es gibt Zahlen im Bildbereich die nicht als Funktionswerte angenommen werden. Beispielsweise ist $f(x) \neq -1$ für alle $x \in [-4, 4]$ (weil x^2 nicht negativ sein kann). Daher ist die Funktion nicht surjektiv. Die Funktion ist also nicht injektiv und nicht surjektiv (und daher auch nicht bijektiv – muss nicht extra erwähnt werden).

b) Es ist möglich zwei verschiedene Werte für x im Bereich $x \in [-1, 1]$ zu finden für die $f(x)$ denselben Wert hat. Es ist z.B. $f(-1) = f(0) = 0$. Die Funktion ist daher nicht injektiv. Werden alle Werte im Bildbereich angenommen? Der Bildbereich hat nur ein einziges Element, nämlich die Zahl 0, und es gibt Werte $x \in [-1, 1]$ für die der Wert $f(x) = 0$ angenommen wird (es ist sogar $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$). Daher ist die Funktion surjektiv. Die Funktion ist also nicht injektiv, aber surjektiv (und daher nicht bijektiv – muss nicht extra erwähnt werden).

Punkteschema: Pro Teilaufgabe 2 Punkte (jeweils für injektiv bzw. surjektiv korrekt bestimmt und argumentiert).

---

4. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (6k-3)^2 = 3n(2n-1)(2n+1).$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für jede relle Zahl $x \geq 0$ für alle $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Lösungen:

a) Induktionsanfang: Wir setzen $n = 1$, die linke Seite ist gleich $(6-3)^2 = 9$, die rechte Seite ist gleich $3 \cdot 1 \cdot (2-1) \cdot (2+1) = 9$. Passt also.

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} (6k-3)^2 = 3n(2n-1)(2n+1)$.

Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1}(6k-3)^2 = 3(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1) = 3(n+1)(2n+1)(2n+3)$.

Induktionsschritt: Wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(6k-3)^2 &= \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(6k-3)^2}_{=3n(2n-1)(2n+1) \text{ laut IV}}\right) + \underbrace{(6(n+1)-3)^2}_{=36n^2+36n+9} \\ &= 12n^3 - 3n + 36n^2 + 36n + 9 \\ &= 12n^3 + 36n^2 + 33n + 9.\end{aligned}$$

Andererseits ist (einfach ausmultiplizieren)

$$3(n+1)(2n+1)(2n+3) = 12n^3 + 36n^2 + 33n + 9.$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein, damit ist der Induktionsschritt getan.

b) Induktionsanfang: Wir setzen $n = 1$, dann steht $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$, also $1+x \geq 1+x$, das ist korrekt.

Induktionsvoraussetzung: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Induktionsbehauptung: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Induktionsschritt: Wir haben

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx \text{ laut IV}}(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x.$$

Damit ist der Induktiosschritt getan.

Punkteschema: Jeweils 1 Punkt für Überprüfen des Induktionsanfangs, 1 Punkt für korrektes Formulieren der Induktionsbehauptung (n korrekt durch $n+1$ ersetzen), 1 Punkt für Induktionsschritt.

Geben Sie alle Rechenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 5 + 5 + 4 + 6; maximale Gesamtpunktezahl = 20.