Bitte mit DRUCKBUCHSTABEN ausfüllen
Nachname: .... Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

03.12.2018

Numerisches Rechnen und Lineare Algebra, WS 2018/19
1. Klausur - Gruppe B

- Lösungszeit 90 Minuten
- Es gibt insgesamt 4 Aufgaben mit maximal 38 Punkten.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
- Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei allen Aufgaben sind die einzelnen Rechenschritte und Zwischenergebnisse zu dokumentieren.
- Als Hilfsmittel ist nur Ihr Skript erlaubt. Alle anderen schriftlichen oder elektronischen Materialien, einschließlich Taschenrechner, Handys und Smartphones, sind nicht erlaubt.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Die folgenden Vektoren bilden eine Basis eines Unterraumes U von $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt eine orthonormale Basis $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ des U, sodass $L(\{w_1, \dots, w_k\}) = L(\{u_1, \dots, u_k\})$, $k = 1, 2, 3$.

(b) Finden Sie einen Vektor w_4, der nicht der Nullvektor ist, sodass $w_4 \perp U$, d.h., dass v_4 senkrecht auf U steht. Hinweis: man kann w_4 als Lösung eines homogenen linearen Gleichungssytems bestimmen.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11-b & 0 & b-3 \\ b & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(B)$.

(b) Für welche Werte $b \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar?

(c) Bestimmen Sie, für $b = 0$, $\det(B^{-1})$.

Klausurangabe WS2018 03.12.2018

Aufgabe 3. (10 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definiert durch

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y \\ x - 2y + z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die bezüglich der Standardbasis (kanonischen Basis) darstellende Matrix der Abbildung g.

(b) Bestimmen Sie Basis und Dimension von Kern g.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von Bild g.

Aufgabe 4. (8 Punkte) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte kreuzen Sie die Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben:

☐ Aufgabe 1
☐ Aufgabe 2
☐ Aufgabe 3
☐ Aufgabe 4