Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik (437.201) für Elektrotechnik-Studierende und Biomedical Engineering-Studierende

Renhart Werner

29. September 2008

Inhaltsverzeichnis

11 Schaltvorgänge

11.1 Einleitung

Bisher wurden nur *stationäre* Vorgänge betrachtet: Ströme und Spannungen existieren seit beliebig langer Zeit, im Netzwerk wurden keine Änderungen vollzogen. In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie die Spannungen und Ströme in einem Netzwerk reagieren, wenn Quellen plötzlich ein- oder ausgeschaltet werden oder passive Netzwerkelemente ihr Verhalten plötzlich verändern. Man spricht dann vom *Übergangsverhalten* oder vom *transienten* Verhalten des Netzwerkes. Dieses Verhalten wird durch die Energiespeicher (Spulen, gekoppelte Spulen und Kondensatoren) des Netzwerkes verursacht. Es ist nun aber eine physikalische Tatsache, daß sich die gespeicherte Energie $W(t)$(sowohl in einem Kondensator als auch in einer Spule) nur *stetig* ändern kann, da ansonsten eine unendlich große Leistung $p(t)$ nötig wäre.

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

Wenn aber die Energiefunktion stetig ist, dann können sich auch jene elektrischen Größen, aus denen sich die Energie in einer Spule oder in einem Kondensator ableiten, nur stetig ändern. Wird also in einem Netzwerk zum Schaltzeitpunkt t_S etwas verändert, so erhält man folgende stetige Größen, wobei t_S^- den Zeitpunkt unmittelbar vor dem Schaltvorgang und t_S^+ den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Schaltvorgang bezeichnen.

Spule	Kondensator
$W(t)_{Spule} = \frac{Li_L(t)^2}{2}$	$W(t)_{Kondensator} = \frac{Cu_C(t)^2}{2}$
Strom $i_L(t)$ muß stetig sein	Spannung $u_C(t)$ muß stetig sein
$i_L(t_S^-) = i_L(t_S^+)$	$u_C(t_S^-) = u_C(t_S^+)$

Es können sich also der Strom i_L, der über eine Spule fließt und die Spannung u_C, die an einem Kondensator abfällt, nicht *sprunghaft* verändern.

Das Verhalten der einzelnen Ströme und Spannungen im Netzwerk wird durch *Differentialgleichungen* beschrieben, die in den nächsten Abschnitten näher untersucht werden.

11.2 Schaltvorgänge mit Gleichspannungsquellen

11.2.1 Einschalten einer RL-Reihenschaltung

Aufstellen der Differentialgleichung

Gegeben sei eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einer Spule der Induktivität L, die zum Zeitpunkt $t_S = 0$ an eine Gleichspannungsquelle $u_q(t) = U_0$ geschaltet wird. Gesucht ist der Verlauf des Stromes $i(t)$.

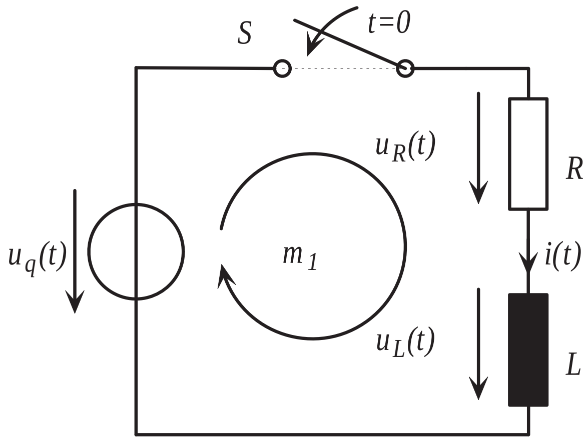

Abbildung 11.1: Einschaltvorgang einer RL-Reihenschaltung.

Um die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ aufzustellen, wendet man die Kirchhoffsche Maschenregel an und ersetzt dann die Spannungen an den passiven Elementen durch die entsprechenden Strom/Spannungsbeziehungen. Man erhält

$$\begin{aligned} u_R + u_L &= U_0 \\ iR + L\frac{di}{dt} &= U_0, \end{aligned}$$

beziehungsweise nachdem man den Koeffizienten bei der höchsten Ableitung zu Eins gemacht hat und die Zeitableitung $\frac{d()}{dt}$ durch ein „ $'$ “kennzeichnet.

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}. \tag{11.1}$$

Gleichung (11.1) ist eine *lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Die Lösung dieser Gleichung ist eine *Zeitfunktion* $i(t)$, die sich aus der *homogenen* Lösung $i_h(t)$ und einer *speziellen =(partikulären)* Lösung $i_p(t)$ zusammensetzt.

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \tag{11.2}$$

Man erhält $i_h(t)$ als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$i_h' + \frac{R}{L} i_h = 0, \tag{11.3}$$

während $i_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung darstellt.

$$i_p' + \frac{R}{L} i_p = \frac{U_0}{L}. \tag{11.4}$$

Setzt man $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$ in die Differentialgleichung (11.1), so erhält man

$$\begin{aligned} i'(t) + \frac{R}{L} i(t) = (i_h(t) + i_p(t))' + \frac{R}{L}(i_h(t) + i_p(t)) = \\ \underbrace{i_h'(t) + \frac{R}{L} i_h(t)}_{0} + \underbrace{i_p'(t) + \frac{R}{L} i_p(t)}_{\frac{U_0}{L}} = \frac{U_0}{L}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie man $i_h(t)$, $i_p(t)$ und letztendlich $i(t)$ erhält.

Bestimmen der homogenen Lösung

Um die Lösung der homogenen Differentialgleichung $i_h' + \frac{R}{L} i_h = 0$ zu erhalten, wählt man folgenden Ansatz

$$i_{h,A} = K e^{-\lambda t}, \tag{11.6}$$

differenziert ihn einmal

$$i_{h,A}' = -\lambda K e^{-\lambda t}, \tag{11.7}$$

und setzt beides in die homogene Differentialgleichung ein. Es folgt:

$$-\lambda K e^{-\lambda t} + \frac{R}{L} K e^{-\lambda t} = K e^{-\lambda t}(-\lambda + \frac{R}{L}) = 0 \tag{11.8}$$

Gleichung (11.8) ist dann *nichttrivial* erfüllt, falls die *charakteristische Gleichung*

$$(-\lambda + \frac{R}{L}) = 0 \tag{11.9}$$

erfüllt ist, was für $\lambda = \frac{R}{L}$ der Fall ist. Die Lösung der homogenen Gleichung ist demzufolge

$$i_h = Ke^{-\frac{R}{L}t}, \tag{11.10}$$

wobei K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Häufig verwendet man auch den Kehrwert von λ und bezeichnet diese Größe als *Zeitkonstante* τ

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{L}{R}, \tag{11.11}$$

und erhält für (11.10)

$$i_h = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}. \tag{11.12}$$

Dieser Anteil der Lösung wird für zunehmendes t immer kleiner und verschwindet für $t \longrightarrow \infty$ vollkommen. Daher bezeichnet man diesen auch als den *transienten* oder *flüchtigen* Teil der Gesamtlösung $i(t)$.

Bestimmen einer speziellen Lösung

Um eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (11.1) zu bestimmen, gibt es verschieden Möglichkeiten. Eine davon ist die *Variation der Konstanten*, eine andere die *Methode des Ansatzes*, die hier kurz erklärt werden soll.

Die rechte Seite, die Erregung von (11.1) ist ein konstanter Wert, sodaß man davon ausgehen kann, daß *alle* Spannungen und Ströme im Netzwerk ebenfalls einen konstanten Wert annehmen werden, nachdem die *transienten* Vorgänge abgeklungen sind. Es liegt also nahe, als Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung eine Konstante zu wählen.

$$i_{p,A} = I_0 = \text{konstant}, \tag{11.13}$$

bzw. einmal differenziert

$$i'_{p,A} = 0. \tag{11.14}$$

Setzt man (11.13) und (11.14) in (11.4) ein, so erhält man

$$0 + \frac{R}{L}I_0 = \frac{U_0}{L}. \tag{11.15}$$

Daraus ergibt sich $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Das ist also genau jener Strom, der nach Abklingen aller transienten Vorgänge als stationäre Größe über die Spule fließt. Die Gesamtlösung $i(t)$ lautet daher:

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}. \tag{11.16}$$

Bestimmen der unabhängigen Konstanten

Abschließend muß noch die Konstante K so gewählt werden, daß $i(t)$ die Anfangsbedingungen erfüllt. Nachdem sich die Energie $W(t)_{Spule} = \frac{Li(t)^2}{2}$, die in der Spule gespeichert ist, stetig verhält, muß auch der Strom $i(t)$ ein stetiges Verhalten zeigen. Das bedeutet, daß $i(t)$ unmittelbar vor dem Schalten $t = 0^-$ und unmittelbar nach dem Schalten $t = 0^+$ gleich groß sein muß. Da der Stromkreis vor $t = 0$ offen war, muß gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stetigkeit:} & i(t=0^-) = 0 = i(t=0^+) = i(t=0) \\ \text{Dgl:} & i(t=0) = Ke^{-\frac{0}{\tau}} + \frac{U_0}{R} = K + \frac{U_0}{R} \end{array}\right\} K + \frac{U_0}{R} = 0. \tag{11.17}$$

Man erhält somit die Gesamtlösung für den Strom $i(t)$ mit

$$i(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}. \tag{11.18}$$

Der Spannungsabfall $u_L(t)$ an der Spule lautet

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}. \tag{11.19}$$

Abbildung 11.2 zeigt den Zeitverlauf des Stromes $i(t)$, der durch die Spule fließt und den zugehörigen Spannungsabfall $u_L(t)$, wobei $U_0 = 100\text{V}$, $R = 100\Omega$ und $L = 10\text{H}$ gewählt wurden. Man erkennt, daß der Strom innerhalb der Zeit $\tau = \frac{L}{R} = 0.1\text{s}$ auf etwa $63\% (= e^{-1} * 100\%)$ des Endwertes angestiegen ist, während die Spannung auf etwa $37\% (= (1 - e^{-1}) * 100\%)$ des Anfangswertes abgesunken ist.

11.3 Schaltvorgänge mit Wechselstromquellen

Gegeben sei wieder die RL-Reihenschaltung aus Abbildung 11.1, wobei als Quellenspannung $u_q(t)$ eine Wechselspannung $U_0 \sin(\omega t)$ gewählt wird. Damit verändert sich die Differentialgleichung (11.1) zu

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t). \tag{11.20}$$

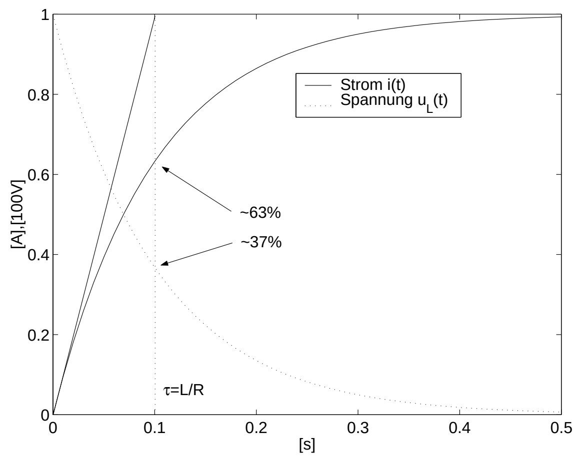

Abbildung 11.2: Einschaltvorgang einer Gleichspannungsquelle, RL-Reihenschaltung.

Die Lösung der homogene Differentialgleichung ist bereits bekannt und lautet

$$i_h = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}.$$

Bestimmen einer speziellen Lösung

Um eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (11.20) zu bestimmen, wird wieder die *Methode des Ansatzes* verwendet.

Die rechte Seite, die Erregung von (11.20) ist ein harmonische Zeitfunktion mit der Kreisfrequenz ω, sodaß man davon ausgehen kann, daß *alle* Spannungen und Ströme im Netzwerk ebenfalls harmonische Funktionen mit mit der Kreisfrequenz ω sein werden, nachdem die *transienten* Vorgänge abgeklungen sind. Es liegt also nahe, als Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung folgenden Ansatz zu wählen.

$$i_{p,A} = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \tag{11.21}$$

bzw. einmal differenziert

$$i'_{p,A} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\ sin(\omega t), \tag{11.22}$$

wobei A und B noch zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man (11.21) und (11.22) in (11.20) ein, so erhält man

$$(A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)) + \frac{1}{\tau}(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t), \tag{11.23}$$

beziehungsweise

$$\sin(\omega t)(-B\omega + \frac{A}{\tau}) + cos(\omega t)(A\omega + \frac{B}{\tau}) = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t). \tag{11.24}$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten bei den beiden Winkelfunktionen, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von A und B.

$$\begin{aligned} -B\omega + \frac{A}{\tau} &= \frac{U_0}{L} \\ A\omega + \frac{B}{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$A = \frac{\frac{U_0}{L}\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} \tag{11.25}$$

$$B = -\frac{\frac{U_0}{L}\omega\tau^2}{(\omega\tau)^2 + 1}. \tag{11.26}$$

Sind die beiden Konstanten A und B der partikulären Lösung bestimmt, so läßt sich die Gesamtlösung wieder als Summe der homogenen Lösung und einer speziellen Lösung darstellen.

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R} \tag{11.27}$$

oder

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + I_0\sin(\omega t + \varphi_I) \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{L}{R}, \tag{11.28}$$

mit

$$I_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{11.29}$$

$$\varphi_I = \arctan(\frac{B}{A}). \tag{11.30}$$

Da der Anteil $I_0\sin(\omega t + \varphi_I)$ wieder genau jenen Strom darstellt, der nach Abklingen aller transienten Vorgänge als stationäre Größe über die Spule fließt, gibt es noch einen einfacheren Weg, I_0 und φ_I zu ermitteln. Dafür kann nämlich die komplexe Rechnung herangezogen werden. Transformiert man zunächst $u(t)$, R und L in den Bildbreich, so erhält man $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi_U}$, R und $jX_L = j\omega L$. Dann lautet der Gesamtstrom $\underline{I}$

$$\underline{I} = \frac{U_0 e^{j\varphi_U}}{R + j\omega L} = I_0 e^{j\varphi_I}. \tag{11.31}$$

und die Rücktransformation ergibt die gesuchte Zeitfunktion des Stromes. Als Beispiel soll eine Wechselspannung mit einem Scheitelwert von $U_0 = 100$V und einer Frequenz von f =10Hz auf eine Reihenschaltung von $R = 100\Omega$ und $L = 10$H geschaltet werden. Dann ergibt der Strom $i(t)$ mit

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{0.1s}} + 0.1572\text{A}\sin(\omega t - 80.9569°). \tag{11.32}$$

Bestimmen der unabhängigen Konstanten

Abschließend wird noch die Konstante K aus 11.32 so gewählt werden, daß $i(t)$ die Anfangsbedingungen erfüllt. Wie im Beispiel zuvor, muß dieser Strom sich zum Schaltzeitpunkt $t = 0$ stetig verhalten und den Wert 0 annehmen. Daher gilt

$$i(t = 0) = Ke^{-\frac{0}{\tau}} + I_0 \sin(\varphi_I) = 0, \tag{11.33}$$

beziehungsweise

$$K = -I_0 \sin(\varphi_I). \tag{11.34}$$

Die Gesamtlösung lautet daher

$$i(t = 0) = -I_0 \sin(\varphi_I)e^{-\frac{0}{\tau}} + I_0 \sin(\varphi_I). \tag{11.35}$$

Für das Beispiel erhält man $K = -0.1552$ und somit für $i(t)$

$$i(t = 0) = 0.155\text{A}e^{-\frac{t}{0.1s}} + +0.1572\text{A}\sin(\omega t - 80.9569°). \tag{11.36}$$

Abbildung 11.3 zeigt den Schaltvorgang und eine Dauer von fünf Zeitkonstanten (=1s).

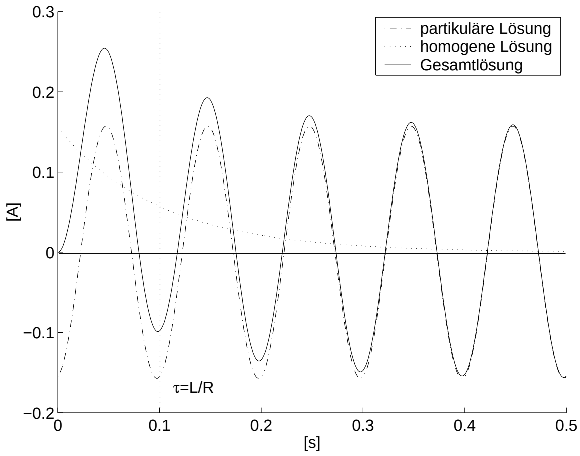

Abbildung 11.3: Einschaltvorgang einer Wechselspannungsquelle, RL-Reihenschaltung.