Übungsbeispiele

zur Lehreranstaltung

Numerisches Rechnen
und Lineare Algebra

Ao.Univ.-Prof. Dr. P. Berglez

1 Lineare Gleichungssysteme – Matrizen

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = (b_{ij}) \in M(6 \times 6; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

   wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, $0 \leq i \leq 6$. Man berechne A^3 und B^2.

2. Man bestimme den Rang sowie die Summe und das Produkt der folgenden Matrizen (soweit möglich):

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

   (a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

   (c) $A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Welches der folgenden linearen Gleichungssysteme besitzt eine nichttriviale Lösung?

   (a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

5. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 14 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 10 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 9 \end{array}$$

(c) $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Man bestimme alle Lösungen des linearen Systems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & & & = & -2 \\ -3x & + & 3y & + & z & - & 3w & = & -5 \end{array}$$

7. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -x & + & 2y & + & 8z & = & -1 \\ x & + & 6y & + & 10z & = & 9 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 8z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

8. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & & & = & -1 \\ x & & & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & 4z & = & 3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

9. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a \end{array}$$

   (a) keine Lösung,
   (b) eine eindeutig bestimmte Lösung,
   (c) beliebig viele Lösungen besitzt.

10. Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ eine Lösung?

11. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Systeme lösbar sind und gebe in diesem Fall die Lösung an.

   (a) $\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & 3z & = & a \\ 3x & + & 4y & + & 7z & = & 8 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & 3z & = & a \\ 3x & + & 4y & + & 8z & = & 8 \end{array}$

12. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & t \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, lösbar?

13. Gegeben ist $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ existiert eine Lösung?
   (b) Man bestimme die Lösung in Abhängigkeit von b.

14. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

   (a) eindeutig lösbar,
   (b) lösbar ist.

15. Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2-t & 3 & -6 \\ 3 & 2-t & -6 \\ -6 & -6 & 11-t \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $A \cdot x = 0$ eine nichttriviale Lösung?
   (b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A \cdot x = b$ lösbar?
   (c) Für $t = -1$ bestimme man die Lösung von $A \cdot x = b$.

16. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ -2\lambda x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 &= 6\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren beliebig viele Lösungen?

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

(d) Man berechne die Lösung für $\lambda = 1$.

(e) Man berechne die Lösung zu b).

(f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch gedeutet werden?

17. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

18. Man berechne - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1.5 & -4.2 \\ 0.5 & 2.4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2.54 & 8.128 \\ 0.25 & 0.8 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$, $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$

k) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ m) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ o) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ q) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ r) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ s) $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ u) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

19. Man löse folgende Gleichungssysteme unter Verwendung der Inversen der Koeffizientenmatrix

a) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ 5x & + & 3y & = & 2 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$ c) $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{array}$

20. Im folgenden bestimme man A^{-1} und berechne damit die Lösung der drei Systeme $Ax = b_1\,,\quad Ax = b_2$ und $Ax = b_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

21. Man löse die folgenden Matrix-Gleichungen für X. Man vereinfache das Ergebnis soweit als möglich. Alle Matrizen seien regulär.

a) $XA^2 = A^{-1}$ c) $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$

b) $AXB = (BA)^2$ d) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

22. Man berechne die Inversen der angegebenen Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix} \quad \text{regulär?}$$

Man berechne in diesem Fall A^{-1} und B^{-1}.

24. Man bestimme eine $(3 \times 3)-$ Matrix A so, daß gilt:

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (b) $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ (c) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrizen und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ dadurch, dass man zuerst $Ly = b$ löst und anschließend $Rx = y$.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

26. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung ohne Zeilenvertauschung durch und mache die Probe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & -11 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

27. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung mit Zeilenvertauschung durch und mache die Probe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Man führe die LR–Zerlegung mit Zeilenvertauschung für folgende Matrizen durch und mache die Probe

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & -8 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

29. Man löse das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

mittels LR–Zerlegung von A. Danach ersetze man den Vektor $\vec{b}$ durch

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 23.01 \\ 31.99 \\ 32.99 \\ 31.01 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 23.1 \\ 31.9 \\ 32.9 \\ 31.1 \end{pmatrix}$$

und löse die neuen Systeme. Vergleiche die Resultate.

30. Man verwende eine 2–stellige Gleitkommaarithmetik zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned} 0.89\,x_1 + 0.53\,x_2 &= 0.36 \\ 0.47\,x_1 + 0.28\,x_2 &= 0.19 \end{aligned}$$

und vergleiche dies mit dem exakten Ergebnis.

31. Man berechne $\det A$ für

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

32. Man berechne die folgenden Determinanten

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & a \\ -3 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 4 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{(f)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{(g)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

33. Man bestimme die Determinante folgender Matrizen ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}.$$

34. Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{e)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{f)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \ \text{g)}\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{h)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i)}\ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{j)}\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \tan\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

k) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$ l) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}$ m) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

n) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ o) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$ p) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

q) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ r) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ s) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

t) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ u) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Vektoren im anschaulichen Raum

35. Man überprüfe, ob der Vektor v eine Linearkombination der übrigen Vektoren ist.

a) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $v = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 2.0 \\ -2.6 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.4 \\ 4.8 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 1.4 \\ -6.4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.2 \\ -1.0 \end{pmatrix}$

36. Man berechne den Winkel zwischen u und v:

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } u = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 2.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

37. Man brechne $u \times v$ für

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{d) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3 Allgemeine Vektorräume

38. Welche der folgenden Mengen sind lineare Teilräume des $\mathbb{R}^n$?

(a) $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = a, a = \text{konstant}\}$,
(b) $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \geq 0\}$,
(c) $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$,
(d) $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0\} \cup \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2 = 0\}$,
(e) $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0\} \cap \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2 = 0\}$.

39. Im $\mathbb{R}^3$ sind folgende Teilmengen gegeben:

(a) $T_1 = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid a = (a_1, a_2, a_2), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$,
(b) $T_2 = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid a = (a_1, a_2, a_3), a_1 \geq 0\}$,
(c) $T_3 = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid a = (a_1, a_2, a_3), a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$.

Welche dieser Teilmengen ist ein linearer Teilraum?

40. (a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(\alpha, 0, 1), (0, \beta, 2)$ linear unabhängig?
(b) Man bestimme diejenigen Werte von $x \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(1, 2, 1)$, $(1, x, -1)$, $(1, -2, -1)$ linear unabhängig sind.

41. Man prüfe folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

(a) $a = (3, 6, 9)$, $\quad b = (-1, 8, 3)$, $\quad c = (11, 2, 21)$;

(b) $a = (3,1,7)$, $b = (2,-2,18)$, $c = (-1,1,-9)$;

(c) $a = (2,-1,7,6)$, $b = (-1,1,-2,-4)$, $c = (1,1,8,0)$, $d = (0,1,3,-2)$.

42. Man gebe die größte Anzahl von Vektoren aus den angegebenen Familien an, die linear unabhängig sind:

(a) $\mathbb{R}^5$: $u_1 = (1,0,-1,1,2,), u_2 = (0,1,1,2,3)$ und $u_3 = (1,1,0,1,0)$.

(b) $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,0,-1,1), u_2 = (0,1,-1,-1), u_3 = (1,1,0,-1), u_4 = (0,-3,0,4)$.

43. Man untersuche, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix} \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix} \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix}-2\\3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{e)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{f)}\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{g)}\ \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{h)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{i)}\ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{j)}\ \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

44. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix} \quad \text{d)}\ \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\5\\1\end{pmatrix}$$

45. Die Vektoren $u = (1,-2,5,-3)$, $v = (2,3,1,-4)$, $w = (3,8,-3,-5)$ erzeugen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von U.

46. Bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^4$?

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

47. Zu den folgenden zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gebe man einen dritten Vektor an, so dass diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

4 Lineare Abbildungen

48. Man untersuche, ob die folgenden Abbildungen F linear sind.

Dabei ist $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

a) $F(x) = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\x_1 - x_2\end{pmatrix}$ b) $F(x) = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1 + 2x_2\\3x_1 - 4x_2\end{pmatrix}$ c) $F(x) = \begin{pmatrix}2x_1\\x_2 - x_1\\x_1 - x_2\end{pmatrix}$

d) $F(y) = \begin{pmatrix}y_1 - y_2 + y_3\\2y_1 + y_2 - 3y_3\end{pmatrix}$ e) $F(y) = \begin{pmatrix}y_1 + y_3\\y_2 + y_3\\y_1 + y_2\end{pmatrix}$ f) $F(y) = \begin{pmatrix}y_1 + y_2\\y_2 + y_3\\y_3 + y_1\end{pmatrix}$

g) $F(x) = \begin{pmatrix}x_2\\x_1^2\end{pmatrix}$ h) $F(x) = \begin{pmatrix}|x_1|\\|x_2|\end{pmatrix}$ i) $F(x) = \begin{pmatrix}x_1 \cdot x_2\\x_1 + x_2\end{pmatrix}$ j) $F(x) = \begin{pmatrix}x_1 + 1\\x_2 - 1\end{pmatrix}$

49. Sei $F : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2)$ eine lineare Abbildung mit

$$F\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & d\end{pmatrix}$$

Man führe für die nachstehend angegebenen Matrizen folgendes Programm durch:

(i) Welche der folgenden Matrizen ist ein Element von Kern(F).

(ii) Welche der folgenden Matrizen ist ein Element von Bild(F).

(iii) Man beschreibe Kern(F) und Bild(F) jeweils durch die Angabe einer Basis.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

50. Sei $F : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}, \quad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$, eine lineare Abbildung.

(i) Welche Zahl liegt in Bild(F)?
a) 0 b) -2 c) $1/\sqrt{2}$

(ii) Welche der folgenden Matrizen liegt in Kern(F)?
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(iii) Man beschreibe Kern(F) und Bild(F) jeweils durch die Angabe einer Basis.

51. Sei $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$F(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ b + c \end{pmatrix}$$

(i) Welches der folgenden Polynome liegt in Kern(F)?

$$\text{a) } 1 + t \quad \text{b) } t - t^2, \quad \text{c) } 1 + t - t^2$$

(ii) Welcher der folgenden Vektoren liegt in Bild(F)?

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Man beschreibe Kern(F) und Bild(F) jeweils durch die Angabe einer Basis.

52. Sei $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die lineare Abbildung definiert durch $F(p(t)) = t \cdot p'(t)$.

(i) Welches der folgenden Polynome liegt in Kern(F)?
a) 2, b) t^2, c) $1 - t$

(ii) Welches der Polynome aus Teil (i) liegt in Bild(F)?

(iii) Man beschreibe Kern(F) und Bild(F) jeweils durch die Angabe einer Basis.

53. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ordnet jedem Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ einen weiteren Vektor $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ gemäß $x' = A \cdot x$ zu. Auf welche Vektoren werden die Basisvektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet? Worauf wird die Gerade $x_2 = kx_1 + d$ abgebildet,

worauf die Kreise $x_1^2 + x_2^2 = r^2$?
Hinweis: Man berechne das Bild eines beliebigen Vektors x, der auf der Geraden liegt, z.B. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ kx_1 + d \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, bzw. das eines beliebigen Vektors x, der auf der auf der Kreislinie liegt, z.B. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{r^2 - {x_1}^2} \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}$ für die obere Halbkreislinie.

54. Welche geometrische Bedeutung haben die Koordinatentransformationen $y = A \cdot x$ mit

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

55. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Man beschreibe geometrisch die folgenden linearen Abbildungen:

(a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_1(x) = A \cdot x$,
(b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_2(x) = B \cdot x$,
(c) $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_3(x) = A \cdot B \cdot x$,
(d) $L_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_4(x) = B \cdot A \cdot x$.

56. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dargestellt durch $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Man berechne $F(u)$ und $F(v)$ für
a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

57. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dargestellt durch $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Man berechne $F(u)$ und $F(v)$ für
a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

58. Man bestimme die bezüglich der kanonischen Basen darstellenden Matrizen der Abbildungen a), b), c), d), e)und f) von Beispiel 48.

59. Man zeige, dass $w \in L(\mathcal{B})$ gilt und bestimme den Koordinatenvektor $c_{\mathcal{B}}(w)$

$$\text{a)} \ \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \ \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

60. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ stellen die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ dar. Man verifiziere die Relation $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(G \circ F) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ für die folgenden Abbildungen.

$$\text{a)}\ F(x) = \begin{pmatrix} x_1 & - & x_2 \\ x_1 & + & x_2 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\ F(x) = \begin{pmatrix} x_1 & + & 2x_2 \\ -3x_1 & + & x_2 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} x_1 & + & 3x_2 \\ x_1 & - & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} x_1 & - & 3x_2 \\ 2x_1 & + & x_2 \\ x_1 & - & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ F(y) = \begin{pmatrix} y_1 & + & y_2 & - & y_3 \\ 2y_1 & - & y_2 & + & y_3 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & - & 2x_2 \\ -x_1 & + & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)}\ F(y) = \begin{pmatrix} y_1 & + & 2y_2 \\ 2y_2 & - & y_3 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} x_1 & - & x_2 \\ x_1 & + & x_2 \\ -x_1 & + & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)}\ F(y) = \begin{pmatrix} y_1 & + & y_2 \\ y_2 & + & y_3 \\ y_1 & + & y_3 \end{pmatrix}, \quad G(y) = \begin{pmatrix} y_1 & - & y_2 \\ y_2 & - & y_3 \\ -y_1 & + & y_3 \end{pmatrix}$$

Bezüglich der Notation siehe Beispiel 48.

61. Man berechne die Koordinatenvektoren $c_{\mathcal{A}}(x)$ und $c_{\mathcal{B}}(x)$ des Vektors x bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Anschließend bestimme man die Matrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, und bestimme damit $c_{\mathcal{B}}(x)$ aus $c_{\mathcal{A}}(x)$.

$$\text{a)}\ x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im } \mathbb{R}^2$$

$$\text{b)}\ x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im } \mathbb{R}^2$$

$$\text{c)}\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

$$\text{d)}\ x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

62. In den folgenden Beispielen ist die die lineare Abbildung $F : V \to W$ darstellende Matrix $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ gesucht. Dann berechne man $w = F(v)$ einmal direkt und einmal über die Relation $c_{\mathcal{B}}(w) = A \cdot c_{\mathcal{A}}(v)$.

a) $F = \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1, \quad F(a + bt) = b - at, \ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \{1, t\}, \quad v = p(t) = 4 + 2t$

b) $F = \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1, \quad F(a + bt) = b - at, \ \mathcal{A} = \{1 + t, 1 - t\}, \quad \mathcal{B} = \{1, t\}, \quad v = 4 + 2t$

c) $F = \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad F(p(t)) = p(t + 2), \ \mathcal{A} = \{1, t, t^2\}, \quad \mathcal{B} = \{1, t + 2, (t + 2)^2\},$
$v = a + bt + ct^2$

d) $F = \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad F(p(t)) = p(t + 2), \ \mathcal{A} = \{1, t + 2, (t + 2)^2\}, \quad \mathcal{B} = \{1, t, t^2\},$
$v = a + bt + ct^2$

e) $F = \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \{1, t, t^2\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$
$v = a + bt + ct^2$

f) $F = \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \{t^2, t, 1\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$
$v = a + bt + ct^2$

g) $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -a \\ b \end{pmatrix},$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad v = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

h) Wie Beispiel g) mit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ 2a + 3b \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

j) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a - b \\ 3a + 2b \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

63. Man stelle die Vektoren der Basis $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ dar (d.h. als Linearkombination der genannten Basisvektoren) und bestimme die Transformationsmatrix der Koordinatentransformation $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

5 Unitäre Räume

64. Man zeige, daß mit den folgenden Abbildungen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}$$

für $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, ein Skalarprodukt vorliegt.

a) $\langle u, v \rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ b) $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$

c) $\langle u, v \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ d) $\langle u, v \rangle = 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$

65. Gegeben sind die Vektoren

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } u = \begin{pmatrix} 3.2 \\ -0.6 \\ -1.4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{f) } u = \begin{pmatrix} 1.12 \\ -3.25 \\ 2.07 \\ -1.83 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2.29 \\ 1.72 \\ 4.33 \\ -1.54 \end{pmatrix}$$

Man berechne $\langle u, v \rangle$, wobei in den Beispielen a) und b) einmal das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ zu verwenden ist und dann die in Beispiel 64 angegebenen Skalarprodukte. In den Beispielen c) – f) ist das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ zu verwenden.

66. Für die in Beispiel 65 angegebenen Vektoren u berechne man $\|u\|$ und gebe einen Einheitsvektor in Richtung von u an. Dabei ist jeweils die Betragsnorm, die Euklidische Norm und die Maximumsnorm zu verwenden.

67. Für die in Beispiel 65 a) und b) angegebenen Vektoren v berechne man $\|v\|$, wobei die durch die in Beispiel 64 definierten Skalarprodukte induzierten Normen zu verwenden sind.
a) Vektor v von Bsp. 65 a) mit den Skalarprodukten von Bsp. 64.
b) Vektor v von Bsp. 65 b) mit den Skalarprodukten von Bsp. 64.

68. Man berechne den Abstand $d(u, v)$ für die in Beispiel 65 angegebenen Vektoren, wobei jeweils die Betragsnorm, die Euklidische Norm bzw. die Maximumsnorm zu verwenden sind.

69. Für die in Beispiel 65 a) und b) angegebenen Vektoren u und v berechne man den Abstand $d(u, v)$, wobei die durch die in Beispiel 64 definierten Skalarprodukte induzierten Normen zu verwenden sind.
a) Vektoren u, v von Bsp. 65 a) mit den Skalarprodukten von Bsp. 64.
b) Vektoren u, v von Bsp. 65 b) mit den Skalarprodukten von Bsp. 64.

70. Man untersuche, welche Menge von Vektoren bzgl. des kanonischen Skalarprodukts orthogonal ist.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{e)}\quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{f)}\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

71. Man bestimme den Winkel zwischen den zum kleinsten bzw. zum größten Eigenwert der Matrix A gehörigen Eigenvektoren für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

72. Man zeige, daß die Vektoren (v_i) eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ bilden. Dann gebe man den Vektor w als Linearkombination dieser Basisvektoren an und bestimme den Koordinatenvektor $c_{\mathcal{B}}(w)$ für $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{a)}\ v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

73. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren eine orthonormale Menge von Vektoren bilden. Sind sie nicht orthonormal, so bilde man daraus eine orthonormale Menge.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

d) Die Vektoren v_1 und v_2 von Bsp. 72 a) und b).
e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 von Bsp. 72 c) und d).

$$\text{f)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \text{g)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

74. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$, des $\mathbb{R}^3$, des $\mathbb{R}^4$ bzw. eines Teilraumes davon. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \ ; \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \ ; \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \ ;$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ ; \quad \text{e)}\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} \ ; \quad \text{f)}\ \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

75. Für $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ seien die Skalarprodukte

$$\text{(S1)} \qquad \langle v, w\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

und

$$\text{(S2)} \qquad \langle v, w\rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 7x_2y_2$$

vorgelegt.

a) Für $v = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ berechne man

$$\langle u, v\rangle, \quad \|u\|, \quad d(u, v)$$

unter Verwendung der beiden Skalarprodukte.

b) Man bestimme in beiden Fällen einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$, so daß u orthogonal zu v ist.

76. Im $\mathbb{P}_2$ sei das Skalarprodukt für $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t$ und $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ wie folgt definiert

$$\langle p(t), q(t)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

a) Für $p(t) = 2 - 3t + t^2, q(t) = 1 - 3t^2$ berechne man

$$\langle p(t), q(t)\rangle, \quad \|p(t)\|, \quad d(p(t), q(t))$$

b) Man bestimme einen Vektor (= Polynom), der orthogonal zu $p(t)$ ist.

77. Man führe das Programm von Beispiel 76 für das Skalarprodukt

$$\langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 p(t) \cdot q(t)\, dt$$

durch.

78. Im $\mathcal{C}^2[0,2\pi]$ sei das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\cdot g(t)\,dt$$

definiert.

Für $f(t)=\sin t, g(t)=\sin t+\cos t$ berechne man $\langle f,g\rangle,\ \ |f\|,\ d(f,g)$ und bestimme einen Vektor $h\in\mathcal{C}^2[0,2\pi], h\neq 0$, der othogonal zu f ist.

79. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt berechne man eine orthonomierte Basis des von der Basis $\mathcal{B}$ aufgespannten Vektorraumes. Dabei ist das angegebene Skalarprodukt zu verwenden.

a)$V=\mathbb{R}^2,\quad \mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ mit dem Skalarprodukt (S1) von Beispiel 75.

b)$V=\mathbb{R}^2,\quad \mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ mit dem Skalarprodukt (S2) von Beispiel 75.

c)$V=\mathbb{P}_2,\quad \mathcal{B}=\{1,1+t,1+t+t^2\}$ mit dem Skalarprodukt von Beispiel 77.

d)$V=\mathbb{P}_2,\quad \mathcal{B}=\{1,1+t,1+t+t^2\}$ mit dem Skalarprodukt von Beispiel 78.

80. Man bestimme die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}2&8&2\\1&7&-1\\-2&-2&1\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\-1&1&0\\1&5&1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\-1&-1&-1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

6 Eigenwerte und Eigenvektoren

81. Man bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren folgender Matrizen

(a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (b) $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ (c) $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$

(d) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{pmatrix}$ (e) $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&4&1\\1&0&4\end{pmatrix}$ (f) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\4&5&6&0\\7&8&9&10\end{pmatrix}$

82. Man bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}\quad \text{b) } A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\quad \text{c) } A=\begin{pmatrix}-1&1\\6&0\end{pmatrix}\quad \text{d) } A=\begin{pmatrix}4&-2\\5&-7\end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{f) } A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\quad \text{g) } A=\begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix}\quad \text{h) } A=\begin{pmatrix}2&2\\5&-1\end{pmatrix}$$

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix}0&4\\-1&0\end{pmatrix}\quad \text{j) } A=\begin{pmatrix}0&4\\-1&5\end{pmatrix}\quad \text{k) } A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\quad \text{l) } A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&1&1\\4&2&0\end{pmatrix}$$

$$\text{m) } A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad \text{n) } A=\begin{pmatrix}2&4\\6&0\end{pmatrix}\quad \text{o) } A=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}\quad \text{p) } A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$$

83. Man berechne die Eigenwerte, die Eigenvektoren, eine Basis jedes Eigenraumes und die algebraische und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&6\end{pmatrix}\quad \text{b) } A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\quad \text{c) } A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\quad \text{d) } A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad \text{f) } A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&3\\2&0&1\end{pmatrix}\quad \text{g) } A=\begin{pmatrix}4&0&1\\2&3&2\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\text{h) } A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\quad \text{i) } A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&4\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad \text{j) } A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&4&5\\0&0&3&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\text{k) } A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&3&0\\-2&1&2&-1\end{pmatrix}\quad \text{l) } A=\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&4&1&1\\0&0&1&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}$$

84. Man zeige, dass A und B keine ähnlichen Matrizen sind.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \text{b) } A=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\-4&6\end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&3\\0&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&4&0\\2&3&4\end{pmatrix}\quad \text{d) } A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

85. Man diagonalisiere folgende Matrizen, d.h. man bestimme eine Matrix C so, dass $C^{-1}AC = D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix darstellt.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{h) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

86. Man untersuche, ob die folgenden Matrizen othogonal sind und berechne gegebenenfalls die Inverse

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & -\cos\varphi & -\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

87. Man bestimme die Eigenwerte und ein System paarweise orthogonaler Eigenvektoren von

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

88. Man diagonalisiere die folgenden symmetrischen Matrizen durch eine orthogonale Matrix Q, d.h. man bestimme Q so, dass gilt $Q^{-1}AQ = D$, wobei D eine Diagonalmatrix bezeichnet.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{g) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ j) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$

k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ l) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ m) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

89. Man bestimme eine Matrix A, deren Eigenwerte 1 und 4 sind und deren Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

90. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2

$$\text{a) } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

91. Man bestimme eine symmetrische 3×3 Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3 und den entsprechenden Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3

$$\text{a) } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7 Numerische Behandlung von Gleichungssystemen

92. Man ermittle die Cholesky-Zerlegung der folgenden Matrizen und mache die Probe.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

93. Man berechne die Norm $\|A\|_2, \|A\|_\infty$ und $\|A\|_F$ sowie die entsprechenden Konditionszahlen $\text{cond}(A)_2$, $\text{cond}(A)_\infty$ und $\text{cond}(A)_F$ der folgenden Matrizen

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad f)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad g)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad j)\ A = \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 3001 & 4002 \end{pmatrix}$$

$$k)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

94. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung der folgenden Gleichungssysteme. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.0001 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung.

a) $\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcr} 4.5x_1 & - & 0.5x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 3.5x_2 & = & -1 \end{array}$ d) $\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 17 \\ x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 18 \end{array}$

e) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$ f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & -x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$

95. Man rechne das Programm von Beispiel 94 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch.

96. Für die folgenden Gleichungssysteme berechne man mit der Gauß-Seidel-Iteration die ersten vier Iterationsvektoren, wobei der Null-Vektor als Startvektor dienen soll, um zu zeigen, dass das Verfahren divergiert. Dann vertausche man die Gleichungen so, dass eine

streng diagonal dominate Koeffizientenmatrix entsteht und berechne dann eine Näherungslösung mit einem Fehler < 0.001.

a) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$

97. Die Koeffizientenmatrix der folgenden Gleichungssysteme ist nicht streng diagonal dominant (s.d.d.) auch durch Umordnen der Gleichungen erhält man keine s.d.d. Matrix. Trotzdem konvergieren hier die Jacobi- und die Gauß-Seidel-Iteration. Man zeige dies für die Gauß-Seidel-Iteration mit dem Null-Vektor als Startvektor und der Berechnung einer Näherungslösung mit dem Fehler < 0.01.

a) $\begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 5x_2 & = & 14 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -7 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -8 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 102 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -90 \end{array}$

98. Man bestimme die Näherungslösung (im Sinne des kleinsten quadratisch Fehlers) der Gleichungssysteme $A \cdot x = b$ mit Hilfe der Pseudoinversen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

99. Man berechne die Näherungslösung der Gleichungssysteme $Ax = b$ mit Hilfe der QR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A wobei A und b wie in Beispiel 98 angegeben zu wählen sind.

8 Numerische Bestimmung von Eigenwerten

100. Man approximiere den dominanten Eigenwert von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

101. Man approximiere alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

102. Vorgelegt sei die Matrix A und ein mit der Potenzmethode gewonnener iterierter Vektor x_5. Damit approximiere man einen dominanten Eigenvektor auf 3 Dezimalen genau, dessen erste Komponente 1 ist, und den dominanten Eigenwert. Man vergleiche das Ergebnis mit den exakten Resultaten.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 4443 \\ 11109 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 7811 \\ -3904 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 144 \\ 89 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2.0 & 3.0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 60.625 \\ 239.500 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} -3.667 \\ 11.001 \end{pmatrix}$$

103. Mit der Potenzmethode approximiere man den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor. Der Startvektor x_0 ist vorgelegt, ebenso die Anzahl k der Iterationen.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 5$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 6$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 6$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 6$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & -4 \\ 8 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 5$$

$$\text{f) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 6$$

$$\text{g) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 5$$

$$\text{h) } A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 5$$

104. Man bestimme die einzelnen Rayleigh-Quotienten $\mu_s, s = 1, 2, \ldots, k$, für die in Beispiel 103 angegebenen Matrizen.

105. Man bestimme die Gerschgorin-Kreisscheiben für

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2i \\ 1 & 3 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 1 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

106. Man verwende Gerschgorin-Kreisscheiben, um die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrizen anzugeben.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2\cdot 10^{-5} \\ 4\cdot 10^{-5} & 0.5 & -3\cdot 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3\cdot 10^{-5} & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 2 & -0.1 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 29 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix}$$

9 Interpolation und Polynomapproximation

107. Approximieren Sie die folgenden Werte mit geeigneten Lagrangeschen Interpolationspolynomen vom Grad eins, zwei und drei. Dabei wähle man die Stützstellen jeweils geeignet aus. Stellen Sie die Polynome graphisch dar.

(a) $f(8.4)$, wenn $f(8) = 16.63553$, $f(8.1) = 17.61549$,
$f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

(b) $f(-\frac{1}{3})$, wenn $f(-1) = 0.1$, $f(-0.75) = -0.0718125$,
$f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

(c) $f(0.25)$, wenn $f(0) = -1$, $f(0.1) = -0.62049958$,
$f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

(d) $f(0.9)$, wenn $f(0.5) = -0.34409873$, $f(0.6) = -0.17694460$,
$f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

(e) $f(\pi)$, wenn $f(2.9) = -4.827866$, $f(3.0) = -4.240058$,
$f(3.1) = -3.496909$, $f(3.2) = -2.596792, f(3.4) = -0.3330587$

(f) $f(1.25)$, wenn $f(1.1) = 1.964760$, $f(1.2) = 2.572152$,
$f(1.3) = 3.602102$, $f(1.4) = 5.797884$, $f(1.5) = 14.10142$

(g) $f(1.15)$, wenn $f(1) = 1.684370$, $f(1.1) = 1.949477$,
$f(1.2) = 2.199796$, $f(1.3) = 2.439189$, $f(1.4) = 2.670324$

(h) $f(4.1)$, wenn $f(3.6) = 1.16164956$, $f(3.8) = 0.80201036$,
$f(4) = 0.30663842$, $f(4.2) = -0.35916618$, $f(4.4) = -1.23926000$

(i) $f(0.2)$, wenn $f(-0.6) = -4.30789$, $f(-0.3) = -2.48886$, $f(0) = -1$, $f(0.3) = 0.666061$, $f(0.6) = 2.97862$

(j) $f(0.5)$, wenn $f(0) = 1$, $f(0.2) = 0.935897$, $f(0.4) = 0.802096$, $f(0.6) = 0.667463$, $f(0.8) = 0.57352$

108. Konstruieren Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom $P_n(x)$ für die folgenden Funktionen. Zeichnen Sie den Graph von $f(x)$ und von $P_n(x)$.

(a) $f(x) = e^{2x} \cos 3x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, $n = 2$

(b) $f(x) = \sin(\ln x)$, $x_0 = 2.0$, $x_1 = 2.4$, $x_2 = 2.6$, $n = 2$

(c) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.3$, $x_3 = 1.4$, $n = 3$

(d) $f(x) = \cos x + \sin x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.0$, $n = 3$

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.1$, $x_2 = 0.1$, $n = 2$

(f) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x_0 = -0.1$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.3$, $n = 2$

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$, $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $n = 2$

(h) $f(x) = \frac{1+x}{\cos x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $n = 2$

(i) $f(x) = x^2 \ln x$, $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $n = 2$

(j) $f(x) = e^x \sin 2x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $n = 2$

109. Konstruieren Sie jeweils die kubischen Spline-Interpolierenden für die folgenden Daten und fertigen Sei einen Graph der Spline-Funktion sowie der zugehörigen, in Beispiel 110 gegebenen Funktion $f(x)$.

(a)

x	8.0	8.1	8.3	8.6
$f(x)$	16.636	16.944	17.565	18.505

(b)

x	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	−0.1769	0.2236	0.6581	0.9687

(c)

x	−0.5	−0.25	0	0.25
$f(x)$	−0.02475	0.3349	1.1010	2.3672

(d)

x	3	3.1	3.2	3.3
$f(x)$	−4.2400	−3.4969	−2.5968	−1.5408

(e)

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	−0.6205	−0.2840	0.0066	0.2484

(f)

x	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	2.5722	3.6021	5.7978	14.1014

(g)

x	1	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	1.6844	1.9495	2.1998	2.4392

(h)

x	3.6	3.8	4.0	4.2
$f(x)$	1.1616	0.8020	0.3066	−0.3592

(i)

x	1	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.5403	2.1548	1.5180	0.6333

(j)

x	2	2.3	2.6	2.9
$f(x)$	-12.75	-8.645	-2.594	6.273

110. Die Daten in Beispiel 109 wurden mit den folgenden Funktionen erzeugt. Approximieren Sie $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ mit den in Beispiel 109 konstruierten kubischen Splines für den gegebenen Wert von x_0 und berechnen Sie den tatsächlichen Fehler.

    (a) $f(x) = x \ln x, \quad x_0 = 8.4$
    (b) $f(x) = \sin(e^x - 2), \quad x_0 = 0.9$
    (c) $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101, \quad x_0 = -\frac{1}{3}$
    (d) $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x, \quad x_0 = \pi$
    (e) $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 0.25$
    (f) $f(x) = \tan x, \quad x_0 = \pi/2$
    (g) $f(x) = \ln(e^{2x} - 2), \quad x_0 = 1.15$
    (h) $f(x) = x - (\ln x)^x, \quad x_0 = 4.1$
    (i) $f(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x \cos x, \quad x_0 = 1.1$
    (j) $f(x) = x \sinh x - 20, \quad x_0 = 2.5$

10 Approximationstheorie

111. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten und zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome.

(a)

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

(b)

x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

(c)

x_i	4.0	4.5	5.1	5.9	6.3	7.1
y_i	102.56	130.11	167.53	224.87	256.73	326.72

(d)

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	2.5015

(e)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	85	80	71	55	31	0	-22

112. Man bestimme ein approximierendes Polynom dritten Grades (im Sinne der kleinesten Fehlerquadrate) für die in Beispiel 111 angeführten Daten. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome.

113. Gegeben sind die Daten

(a)

x_i	0	1	2	3	4
y_i	6	12	30	80	140

(b)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	3	4	5	8	17	40	103

Man ermittle eine Funktion von der Form $f(x) = ae^x + b$, die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktion $f(x)$ an.

114. Man bestimme die **diskrete Approximation** der folgenden Funktionen durch ein trigonometrisches Polynom $S_n(x)$, wobei $2m$ die Anzahl der Teilintervalle angibt, in die das vorgelegte Intervall zu zerlegen ist. Plotten Sie die Funktion $f(x)$ und das Polynom $S_n(x)$.

(a) $f(x) = |x| \sin x\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 6$
(b) $f(x) = x^2\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 6$
(c) $f(x) = x \cos x\,, \quad -\pi/2 < x < \pi/2\,, \quad n = 4, m = 6$
(d) $f(x) = x + \sin x\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 6$
(e) $f(x) = 1 + x\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 6$
(f) $f(x) = e^x\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 4$
(g) $f(x) = 1 + x + x^2\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 4, m = 4$
(h) $f(x) = x(\pi - x)\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad n = 3, m = 4$
(i) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad n = 3, m = 4$
(j) $f(x) = \frac{\pi}{4}\mathrm{sign}(x)\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \quad n = 8, m = 8$
(k) $f(x) = x^2 + x\,, \quad -1 < x < 1\,, \quad n = 4, m = 4$
(l) $f(x) = x^3\,, \quad -2 < x < 2\,, \quad n = 4, m = 4$
(m) $f(x) = e^{-x}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad n = 3, m = 4$
(n) $f(x) = \cosh x\,, \quad -1 < x < 1\,, \quad n = 3, m = 4$

115. Berechnen Sie mit der schnellen Fouriertransformation das trigonometrische Interpolationspolynom vierten Grades auf $[-\pi, \pi]$ für folgende Funktionen und stellen Sie $f(x)$ und das zugehörige Interpolationspolynom graphisch dar. Dabei ist das Intervall in $2m = 8$ Teilintervalle zu zerlegen.

(a) $f(x) = \pi(x - \pi)$
(b) $f(x) = |x|$
(c) $f(x) = \cos \pi x - 2 \sin \pi x$
(d) $f(x) = x \cos(x^2) + e^x \cos(e^x)$
(e) $f(x) = x^2 \cos x$
(f) $f(x) = \mathrm{sign}(x)$

(g) $f(x) = x(1 + x^2)$

(h) $f(x) = x(1 - x^2)$

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2\pi & \text{für} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ -2x + 2\pi & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

(j) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{für} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$