ANALYSIS 1 für Informatikstudien

ANALYSIS T1

WS 2023/24

Univ.-Prof. Dr. Christoph Aistleitner
Univ.-Prof. Dr. Peter Grabner

Inhaltsverzeichnis

0 Logik und Mengenlehre

0.1 Logik

Definition 0.1.1. Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder *wahr* oder *falsch* sein kann.

Beispiel 1. p: „Die Hauptstadt von Österreich ist Wien“
q: „Zwei ist eine ungerade Zahl“
r: „Ist zwei eine ungerade Zahl?“
s: „Jede gerade natürliche Zahl $n \neq 2$ ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar“
Die Aussage p ist wahr, q ist falsch, r ist keine Aussage und über s weiß man nicht genau. Das ist die Goldbachsche Vermutung und Goldbach vermutete im 18. Jahrhundert, dass s wahr sei.

Definition 0.1.2. Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die Variablen enthält.

Beispiel 2. $p(x)$: „x ist eine gerade Zahl“ ;

0.1.1 Verknüpfungen

Aussagen können untereinander verknüpft werden mit:

Konjunktion „A und B“, „$A \wedge B$“
ist nur wahr, wenn beide Variablen wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Disjunktion „A oder B“, „$A \vee B$“
ist nur falsch, wenn beide Variablen falsch sind.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Negation„nicht“: „$\neg A$“

A	$\neg A$
W	F
F	W

Subjunktion „Wenn A, dann B“: „$A \to B$“

A	B	$A \to B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

$A \to B$ kann man als $(\neg A) \vee B$ umschreiben. Dass die Aussageformen äquivalent sind, beweist die Wahrheitstafel:

A	B	$A \to B$	$(\neg A) \vee B$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

Bijunktion „B genau dann, wenn A“: $A \leftrightarrow B$

ist dann wahr, wenn beide Variablen den gleichen Wahrheitswert haben.

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Definition 0.1.3. Eine *Tautologie* ist eine Aussageform, die unabhängig vom Wahrheitswert der Variablen immer wahr ist.

Beispiel 3.
1. $A \vee (\neg A)$ ist immer wahr.
2. $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A)) \vee B)$ ist immer wahr.

Wenn es sich bei einer Subjunktion um eine Tautologie handelt, schreibt man „$\Rightarrow$“ und man sagt „aus A folgt B“.

Wenn es sich bei einer Bijunktion um eine Tautologie handelt, schreibt man „$\Leftrightarrow$“, und man sagt „A äquivalent zu B“.

Folgendes gilt aufgrund der Definition:

1. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
2. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
3. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

Rechenregeln:

1. $A \vee (\neg A) \Leftrightarrow W$
2. $A \wedge (\neg A) \Leftrightarrow F$
3. $A \wedge W \Leftrightarrow A$
4. $A \vee W \Leftrightarrow W$

5. $A \land F \Leftrightarrow F$

6. $A \lor F \Leftrightarrow A$

7. **Die Gesetze von De Morgan:**

   - $\neg(A \land B) \Leftrightarrow ((\neg A) \lor (\neg B))$

A	B	A∧B	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \lor (\neg B)$
W	W	W	**F**	F	F	**F**
W	F	F	**W**	F	W	**W**
F	W	F	**W**	W	F	**W**
F	F	F	**W**	W	W	**W**

   - $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow ((\neg A) \land (\neg B))$

A	B	A∨B	$\neg(A \lor B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \land (\neg B)$
W	W	W	**F**	F	F	**F**
W	F	W	**F**	F	W	**F**
F	W	W	**F**	W	F	**F**
F	F	F	**W**	W	W	**W**

8. **Die Distributivgesetze:**

   - $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

A	B	C	$B \land C$	$A \lor (B \land C)$	$A \lor B$	$A \lor C$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$
W	W	W	W	**W**	W	W	**W**
W	W	F	F	**W**	W	W	**W**
W	F	W	F	**W**	W	W	**W**
W	F	F	F	**W**	W	W	**W**
F	W	W	W	**W**	W	W	**W**
F	W	F	F	**F**	W	F	**F**
F	F	W	F	**F**	F	W	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

   - $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

A	B	C	$B \lor C$	$A \land (B \lor C)$	$A \land B$	$A \land C$	$(A \land B) \lor (A \land C)$
W	W	W	W	**W**	W	W	**W**
W	W	F	W	**W**	W	F	**W**
W	F	W	W	**W**	F	W	**W**
W	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	W	W	W	**F**	F	F	**F**
F	W	F	W	**F**	F	F	**F**
F	F	W	W	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Wir können die Subjunktion auch mit Hilfe der Disjunktion umschreiben:

$$A \to B \Leftrightarrow ((\neg A) \lor B)$$

Die Bijunktion kann man mit Hilfe der Konjunktion und Disjunktion umschreiben:

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \land (B \to A)$$

und das kann man wie oben weiter umschreiben:

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)$$

Bemerkung 1. Jede Aussageform kann durch $\neg$, $\wedge$, $\vee$ ausgedrückt werden.

0.1.2 Die Normalformen

Wir wollen eine vorgegebene Wahrheitstafel durch $\neg$, $\wedge$, $\vee$ erzeugen, (logische Schaltung mit vorgegebenen Ausgang).

Beispiel 4. Wir haben drei Leitungen A, B, C (die auch gleichzeitig unsere Variablen sind) und als Ausgang haben wir G. Es ist bekannt, was für Wahrheitswerte G haben kann. Gesucht wird die Aussageform, die die Variablen verbindet, um den gewünschten Ausgang G zu erhalten.

A	B	C	G
W	W	W	F
W	**W**	**F**	**W**
W	F	W	F
W	F	F	F
F	**W**	**W**	**W**
F	W	F	F
F	**F**	**W**	**W**
F	**F**	**F**	**W**

Erstmal schauen wir, wann G wahr ist. Dann sehen wir, welche Wahrheitswerte die Variablen in diesen Fällen haben. Jetzt müssen wir überlegen, wie wir sie miteinander verknüpfen, um eine wahre Aussageform zu erhalten.

Wir sehen uns den ersten Fall an: A ist wahr, B ist wahr und C ist falsch, d. h. um wahr als Endergebnis zu erhalten, müssen wir sie so verknüpfen:

$$A \wedge B \wedge (\neg C).$$

Im 2. Fall ist A falsch, B und C wahr

$$(\neg A) \wedge B \wedge C.$$

Der 3. Fall:

$$(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C.$$

Und im 4. Fall:

$$(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C).$$

Nachdem wir das für alle vier Fälle betrachtet haben, werden diese Aussagenformen mit „oder“ verknüpft.

$$G \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))$$

Auf die letzten 2 Aussageformen können wir gleich das Distributivgesetz anwenden und erhalten dann:

$$(A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (C \vee (\neg C)).$$

$(C \vee (\neg C))$ ist immer wahr und kann daher weggelassen werden.
Dadurch ergibt sich

$$G \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)).$$

Dasselbe kann man auch erreichen, wenn man sich an dem Ergebnis „Falsch“ orientiert. Dann muss man nur die verschiedenen Fälle mit einem $\wedge$ verknüpfen.
Das würde dann so aussehen:

$$G \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)$$

Bemerkung 2. Jede Aussageform kann man mit 2 Normalformen ausdrücken:

- **konjunktive Normalform**: $D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \cdots \wedge D_n$; $D_1, D_2, \ldots$ sind Disjunktionen der Variablen und ihrer Negationen.
- **disjunktive Normalform**: $K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee \cdots \vee K_n$; $K_1, K_2, \ldots$ sind Konjunktionen der Variablen und ihrer Negationen.

0.1.3 Schlussregeln

Ableitungsregel:

$$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$$

Widerlegungsregel:

$$(\neg B) \wedge (A \to B) \Rightarrow \neg A$$

Kettenschlussregel:

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$$

Beweis durch Fallunterscheidung:

$$(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$$

0.1.4 Oft benutzte Symbole und Bezeichnungen

$A \Rightarrow B$: „A ist eine hinreichende Bedingung für B“

$B \Rightarrow A$: „A ist eine notwendige Bedingung für B“

$\exists$: „es existiert“

$\forall$: „für alle“

0.2 Mengenlehre

Definition 0.2.1 (G. CANTOR:)**.** „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.“

0.2.1 Symbole und Begriffe

Für eine Menge schreiben wir:

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

Die leere Menge „$\emptyset$“ hat keine Elemente.
a ist Element von A: $a \in A$.

$$a \in \emptyset \Leftrightarrow F$$

Seien A und B Mengen, dann schreiben wir

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$$

und sagen: „A ist Teilmenge von B“
Zwei Mengen, A und B, sind genau dann gleich, wenn

$$a \in A \Leftrightarrow a \in B.$$

Wir schreiben dann $A = B$, also

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (B \subseteq A)$$

Sei A eine Menge und f eine Aussageform mit einer Variablen a mit Werten in A, dann ist

$$B = \{a \in A \mid f(a)\} \qquad \text{(die Menge aller Elemente von } A \text{ für die } f \text{ wahr ist)}$$

eine Menge. Es gilt: $B \subseteq A$.

0.2.2 Operationen mit Mengen

Vereinigung: Seien A und B Mengen, dann ist $A \cup B$ auch eine Menge (Vereinigungsmenge).

$$a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \lor a \in B.$$

Durchschnitt: Seien A und B Mengen, dann ist $A \cap B$ auch eine Menge (Durchschnittsmenge).

$$a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \land a \in B.$$

Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann heißen A und B *disjunkt* oder *elementfremd*.

Differenz: Seien A und B Mengen, dann ist $A \setminus B$ auch eine Menge (Differenzmenge), und zwar

$$a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \land \neg(a \in B)$$
$$\text{Es gilt:} A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&a \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow a \in A \land (\neg(a \in A \land a \in B)) \\
&\Leftrightarrow a \in A \land (\neg(a \in A) \lor (\neg(a \in B)) \Leftrightarrow (a \in A \land \neg(a \in A)) \lor ((a \in A) \land (\neg(a \in B))) \\
&\Leftrightarrow a \in A \land (\neg(a \in B)) \Leftrightarrow a \in A \setminus B
\end{aligned}$$

$\square$

Das kartesische Produkt: Seien A und B Mengen, dann ist

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

auch eine Menge (die Menge der geordneten Paare (a, b) mit a aus A und b aus B)

Beispiel 5.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{a, b\}$$
$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A \\
A^3 &= A \times A \times A \quad \text{die Elemente der Menge heißen Tripel} \\
A^4 &= A \times A \times A \times A \quad \text{die Elemente der Menge heißen Quadrupel} \\
A^n &= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}} \quad \text{die Elemente der Menge heißen } n\text{-Tupel.}
\end{aligned}$$

0.3 Abbildungen

Definition 0.3.1. Seien A und B zwei Mengen. Eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zuordnet, heißt eine *Abbildung* oder *Funktion*. Wir schreiben in diesem Fall $b = f(a)$. Die Funktion wird als

$$\begin{aligned}
f :& A \to B \\
& a \mapsto f(a)
\end{aligned}$$

geschrieben.

- A heißt die **Definitionsmenge**
- B heißt die **Bildmenge**

Wenn $M \subseteq A$, dann heißt

$$f(M) = \{f(a) \mid a \in M\} = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$$

das *Bild von M unter f*. Wenn $N \subseteq B$, dann heißt

$$f^{(-1)}(N) = \{a \in A \mid f(a) \in N\}$$

das *Urbild von N unter f*.

Definition 0.3.2 (Verknüpfungen von Abbildungen)**.** Seien

$$f : A \to B \quad \text{und } g : B \to C.$$

Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned}
g \circ f : A &\to C \\
a &\mapsto g(f(a))
\end{aligned}$$

die *Verknüpfung* der Abbildungen g und f. („g verknüpft mit f“)

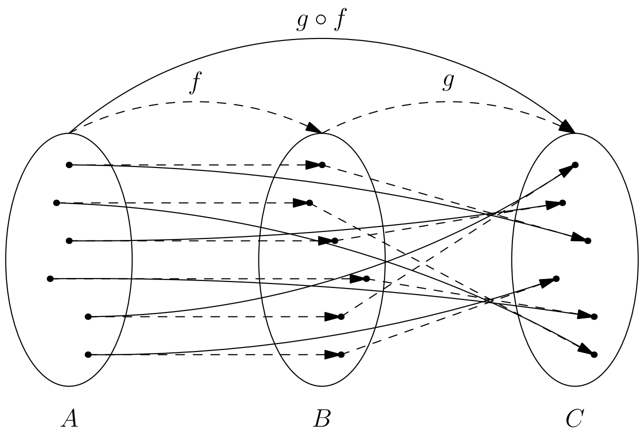


Abbildung 0.1: Verknüpfung zweier Abbildungen

Definition 0.3.3. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **injektiv** (eineindeutig), wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2. \tag{0.1}$$

Die Beziehung (0.2) ist äquivalent zu

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \tag{0.2}$$

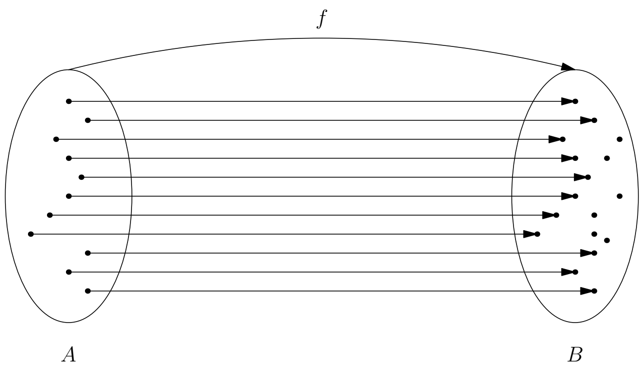


Abbildung 0.2: Eine injektive Abbildung

Definition 0.3.4. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn

$$\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y, \tag{0.3}$$

d.h $f(A) = B$.

Definition 0.3.5. Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 3. Die Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität einer Abbildung hängt sowohl von der Abbildungsvorschrift als auch von der Bild- und Urbildmenge der Abbildung ab.

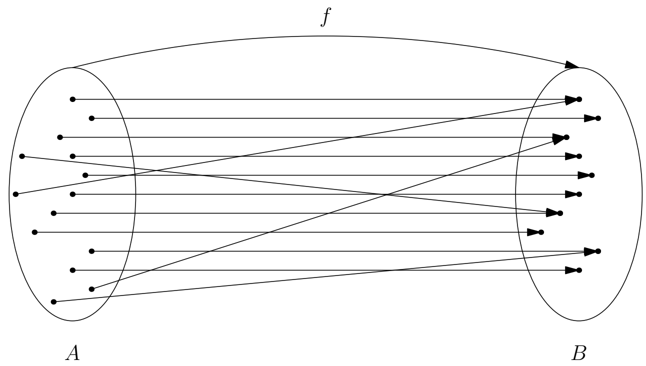


Abbildung 0.3: Eine surjektive Abbildung

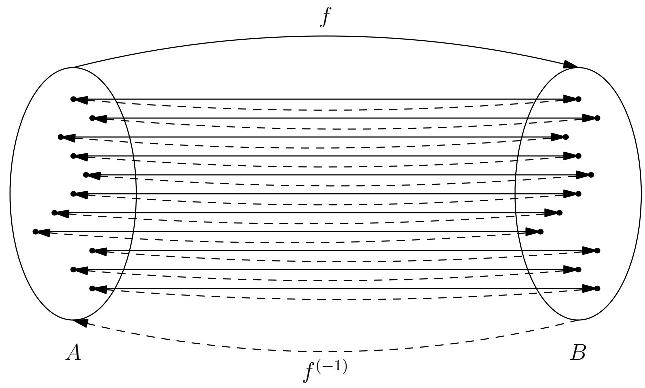


Abbildung 0.4: Eine bijektive Abbildung

Bemerkung 4. Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind genau dann gleich, wenn: $A = C \wedge B = D \wedge \forall a \in A : f(a) = g(a)$.

Satz 0.3.6. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \exists g_1 : B \to A : \forall y \in B : f \circ g_1(y) = y \tag{0.4}$$
$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \exists g_2 : B \to A : \forall x \in A : g_2 \circ f(x) = x \tag{0.5}$$
$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \exists g : B \to A : \forall x \in A : g \circ f(x) = x \wedge \forall y \in B : f \circ g(y) = y. \tag{0.6}$$

Beweis.

1. Wir wollen beweisen, dass f surjektiv ist, wenn es eine Abbildung g_1 gibt. Nach Definition von g_1 ist $x = g_1(y)$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = y$. Damit ist f surjektiv.

   Sei umgekehrt f surjektiv. Dann ist $f^{(-1)}(N) \neq \emptyset$, wenn $\emptyset \neq N \subseteq B$. Wir definieren dann
   $$\begin{aligned} g_1 : \quad & B \to A \\ & y \mapsto \text{ ein Element aus } f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

2. Wir wollen beweisen, dass f injektiv ist, wenn es eine Abbildung g_2 gibt.
   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g_2(f(x_1)) = g_2(f(x_2)) = x_2$$
   f ist also injektiv.

   Sei umgekehrt f injektiv.
   $$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Dann hat für $y \in B$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$ höchstens ein Element. Wir definieren für ein $a \in A$

$$\begin{aligned} g_2 : \quad & B \to A \\ & y \mapsto \begin{cases} x, & \text{wenn } \{x\} = f^{-1}(\{y\}) \\ a, & \text{wenn } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

$g_2(f(x)) = g_2(y) = x$, weil $f(x) = y$ und $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$. Die zweite Alternative der Definition wird nie verwendet.

3. Die dritte Aussage folgt aus der Verknüpfung der ersten beiden.

□

Definition 0.3.7. Wenn f eine bijektive Abbildung ist, dann heißt die Abbildung g aus (0.6) die *Umkehrabbildung* von f; $g = f^{-1}$.

Definition 0.3.8. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt die Menge

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$$

der Graph von f .

1 Die natürlichen Zahlen

Definition 1.0.1. Die *natürlichen Zahlen* sind durch

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

bzw. die Forderung

$$1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \in \mathbb{N}$$

gegeben.

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Satz 1.1.1. *Wenn wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ haben, und wir*
1. *wissen, dass $A(1)$ wahr ist, und*
2. *wissen, dass $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt,*
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 6. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Mittels Induktion ist Folgendes zu beweisen:

$$S = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Offenbar stimmt die Gleichung für $n = 1, 2, 3$.

Für einen Beweis mit vollständiger Induktion gehen wir immer nach folgendem Schema vor:

1. **Induktionsbasis:** $A(1)$
$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$$
2. **Induktionsvoraussetzung:** $A(n)$
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
3. **Induktionsbehauptung:** $A(n+1)$. Zu zeigen ist
$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
4. **Induktionsschritt:** $A(n) \Rightarrow A(n+1)$: Wir gehen von der Induktionsvoraussetzung $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ aus und addieren auf beiden Seiten $n+1$:
$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2} \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow A(n+1)$$

Beispiel 7. Sei $q \neq 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. **Induktionsbasis:** $n = 1$: Auf der rechten Seite haben wir $\frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = 1 + q$, wie behauptet.

2. **Induktionsvoraussetzung:**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3. **Induktionsbehauptung:**

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

4. **Induktionsschritt:**

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Beispiel 8. Mittels Induktion ist Folgendes zu beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$$

1. **Induktionsbasis:**

$$n = 1 : \quad 2^1 = 2 > 1$$

2. **Induktionsvoraussetzung:**

$$2^n > n$$

3. **Induktionsbehauptung:**

$$2^{n+1} > (n + 1)$$

4. **Induktionsschritt:** Wir schreiben die Induktionsvoraussetzung,

$$2^n > n,$$

und multiplizieren die Ungleichung mit 2:

$$2^{n+1} > 2n$$

Auf der linken Seite ist genau das, was wir für die Induktionsbehauptung brauchen. Wir schätzen weiter ab:

$$2^{n+1} > 2n = (n + 1) + (n - 1) \geq n + 1,$$

weil $n - 1 \geq 0$ ist.

Beispiel 9. Zeige $2^n > n^2$ für $n \geq 5$. Offenbar ist die Ungleichung für $n = 2, 3, 4$ falsch. Daher müssen wir unsere Induktionsbasis diesmal mit $n = 5$ annehmen.

1. **Induktionsbasis:**
$$n = 5 : 2^5 > 5^2$$

2. **Induktionsvoraussetzung:**
$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 5 : 2^n > n^2$$

3. **Induktionsbehauptung:**
$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 5 : 2^{n+1} > (n+1)^2$$

4. **Induktionsschritt:** Wir schreiben die Induktionsvoraussetzung,
$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 5 : 2^n > n^2,$$
multiplizieren die Ungleichung mit 2,
$$2^{n+1} > 2n^2,$$
und schätzen weiter ab
$$2^{n+1} > 2n^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n - 1) \geq (n+1)^2 + (5n - 2n - 1) \geq (n+1)^2.$$

Bemerkung 5.
Achtung:
Es reicht weder aus, dass nur der Induktionsschritt richtig ist, noch reicht es, dass nur die Induktionsbasis richtig ist. Für einen korrekten Beweis müssen beide Aussagen nachgewiesen werden.

Wir stellen uns jetzt 2 Aufgaben (Fragen), die wir mit Hilfe der Induktion beantworten wollen:

Beispiel 10. Auf wie viele Arten kann man n verschiedene Objekte anordnen? (Anzahl der *Permutationen* von n Elementen) Sehen wir uns die Frage für $n = 3$ an: Es gibt folgende mögliche Anordnungen:
$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$
Es gibt also sechs Möglichkeiten, drei Objekte anzuordnen.

Wir schreiben:
$$a(n) = \# \text{ der Anordungen von } n \text{ Objekten} \quad \# \text{ (= die Anzahl)}$$
Jede Anordnung von $n+1$ Objekten entsteht, indem wir zu einer Anordnung von n Objekten das $(n+1)$-te Objekt dazugeben.

Wenn wir 2 1 3 schon haben und noch ein Element dazu geben möchten, haben wir genau 4 Möglichkeiten: $\downarrow 2 \downarrow 1 \downarrow 3 \downarrow$.

Dadurch ergibt sich

$$a(n+1) = a(n)(n+1)$$

Das ergibt:

n	$a(n)$
1	1
2	$2 = 1{\cdot}2$
3	$6 = 1{\cdot}2 \cdot 3$
4	$24 = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4$
5	$120 = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5$
6	$720 = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6$

Definition 1.1.2. $n! = 1 \dots n$ und wir sagen: „n Faktorielle" oder „n Fakultät".

Jetzt können wir auch eine Antwort auf unsere Frage geben: *Wir können n verschiedene Objekten auf $n!$ verschiedenen Arten anordnen.*

Definition 1.1.3. Das Summenzeichen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

j wird Summationsindex oder auch Laufindex genannt.

Das Produktzeichen:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Bemerkung 6. Konventionen:
Die leere Summe:

$$\sum_{j=1}^{0} a_j = 0$$

Das leere Produkt:

$$\prod_{j=1}^{0} a_j = 1$$

Bemerkung 7.

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} a_j = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot a_{n+1}$$

Diese 2 Gleichungen verstecken eine Induktion.

Achtung!

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \lambda \neq \prod_{j=1}^{n} (a_j \cdot \lambda) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \lambda^n$$

Beispiel 11. Auf wie viele Arten kann man aus n verschiedene Objekten k verschiedene Objekte auswählen? Diese Abzählaufgabe kann man auf zwei verschiedene Arten betrachten:

- Mit Berücksichtigung der Reihenfolge der k ausgewählten Objekte.
  Die Anzahl der Möglichkeiten kann man so bestimmen:
  Für das erste Objekt hat man n Möglichkeiten, für das zweite Objekt hat man $n-1$ Möglichkeiten, für das k-te Objekt hat man $n-k+1$ Möglichkeiten, d. h.:

$$\# = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=1}^{k}(n-j+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

  Man nennt dies auch *Variationen* von n Elementen zur k-ten Klasse und schreibt dann: V_k^n

- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der k ausgewählten Objekte. Wir erhalten die gesuchte Anzahl, indem wir die Anzahl der Variationen durch die Anzahl der Permutationen der k ausgewählten Elemente dividieren:

$$\# = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} =: \binom{n}{k}$$

  $\binom{n}{k}$ liest man „n über k“; $\binom{n}{k}$ heißt auch *Binomialkoeffizient*.
  Es ist nach Definition oder Vereinbarung $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{-1} = 0$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{n+1} = 0$.
  Die Möglichkeiten, aus n Objekten k ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, werden auch *Kombinationen* von n Elementen zur k-ten Klasse genannt: C_k^n

1.1.1 Der Binomische Lehrsatz

Wir suchen einen alternativen Ausdruck für

$$(x+y)^n.$$

Für kleine Werte von n ergibt sich

n	$(x+y)^n$
1	$x+y$
2	$x^2+2xy+y^2$
3	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

Satz 1.1.4 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Jetzt wird uns auch klar, wo der Name Binomialkoeffizient herkommt.

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion

1. **Induktionsbasis:**

$$n = 1: \quad x + y = \binom{1}{0} \cdot x^0 \cdot y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = 1 \cdot 1 \cdot y + 1 \cdot x \cdot 1 = x + y$$

2. **Induktionsvoraussetzung:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

3. **Induktionsbehauptung:**

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

4. **Induktionsschritt:** Wie immer schreiben wir die Induktionsvoraussetzung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

und multiplizieren mit $(x+y)$

$$\begin{aligned}(x+y)^n \cdot (x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \cdot (x+y) \Rightarrow \\ (x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(x^{k+1} \cdot y^{n-k} + x^k \cdot y^{n+1-k}\right)\end{aligned}$$

Jetzt bearbeiten wir noch die rechte Seite:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x^{k+1} \cdot y^{n-k} + x^k \cdot y^{n+1-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Für die erste Summe machen wir die Substitution $k + 1 = \ell$ und für die zweite $k = \ell$ und erhalten

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell - 1} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell}.$$

In der ersten Summe fehlt uns das Glied mit $\ell = 0$ und in der zweiten das Glied mit $\ell = n + 1$. Wir sehen, dass sich für diese Werte von ℓ folgendes ergibt $\ell = 0 : \binom{n}{-1} = 0$ d. h. es beeinflusst die Summe nicht.

$$\sum_{\ell=\mathbf{1}}^{n+1} \binom{n}{\ell - 1} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell} = \sum_{\ell=\mathbf{0}}^{n+1} \binom{n}{\ell - 1} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell}$$

$\ell = n + 1 : \binom{n}{n+1} = 0$ d. h. hier wird der Wert auch nicht beeinflusst:

$$\sum_{\ell=0}^{\mathbf{n}} \binom{n}{\ell} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell} = \sum_{\ell=0}^{\mathbf{n+1}} \binom{n}{\ell} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell}$$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \left[\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right] \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell}$$

Wir wollen die eckige Klammer umschreiben:

$$\begin{aligned}
\left[\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right] &= \frac{n!}{(n-\ell+1)! \cdot (\ell-1)!} + \frac{n!}{\ell! \cdot (n-\ell)!} = \\
&= \frac{n!}{(n-\ell)!(\ell-1)!} \cdot \left[\frac{1}{(n-\ell+1)} + \frac{1}{\ell} \right] = \\
&= \frac{n!}{(n-\ell)!(\ell-1)!} \cdot \frac{\ell+n-\ell+1}{\ell(n-\ell+1)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{\ell!(n-\ell+1)!} = \binom{n+1}{\ell}
\end{aligned}$$

Jetzt ist unser Beweis vollständig:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} \cdot x^\ell \cdot y^{n+1-\ell}$$

Dass auf einer Seite k und auf der anderen ℓ steht, stört uns nicht, denn wir können $\ell = k$ setzen und erhalten dann:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

□

Beispiel 12. Beweis des Binomischen Lehrsatzes unter Verwendung der Abzählaufgaben

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y) \cdot (x+y) \cdot \cdots \cdot (x+y) = \\
&= x^n + n \cdot x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \cdots + \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} y^k + \cdots + y^n
\end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, die k Stellen, an denen y dazumultipliziert wird, aus den n Stellen auszuwählen.

Beispiel 13. Wir wollen jetzt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

als Abzählaufgabe beweisen.

$\binom{n+1}{k} = \#$ der Auswahlen von k Stücken aus $(n+1)$ Stücken

Das kann man aufteilen in:

1. # der Auswahlen von k Stücken aus $n+1$ Stücken, bei denen das $(n+1)$-te Stück gewählt wird:

$$\binom{n}{k-1}$$

2. # der Auswahlen von k Stücken aus $n+1$ Stücken, bei denen das $(n+1)$-te Stück nicht gewählt wird:
$$\binom{n}{k}$$

Und wenn wir beide addieren, kommen wir genau auf das, was wir gesucht haben:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

2 Das Zahlensystem

2.1 Die natürlichen Zahlen

Wir haben bereits die natürlichen Zahlen definiert. Wir setzen

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2.1.1 Operationen auf $\mathbb{N}$

Die Operationen auf $\mathbb{N}$ werden durch Induktion definiert:

- Addition: $n + 1$ ist durch die Nachfolger-Operation auf $\mathbb{N}$ definiert.

  Sei $n + k$ bereits definiert, dann setzen wir $n + (k + 1) := (n + k) + 1$ (wieder unter Verwendung der Nachfolgenden-Operation)

- Multiplikation: $n \cdot 1 = n$

  Sei $n \cdot k$ bereits definiert, dann setzen wir $n \cdot (k + 1) = n \cdot k + n$ unter Verwendung der vorher definierten Addition. Alle Rechenregeln für Additionen und Multiplikationen lassen sich durch Induktion nachweisen.

Wir wollen folgende Gleichungen lösen:

$$x + a = b; \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Solange $b \geq a$ gilt, können wir die Lösung $x = b - a$ in $\mathbb{N}$ bestimmen. Wenn wir aber $x + 10 = 3$ lösen wollen, stellen wir fest, dass für kein $x \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung stimmt.

2.2 Die ganzen Zahlen

Definition 2.2.1. Die *ganzen Zahlen* werden als

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

definiert. $\mathbb{Z}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt Menge der negativen ganzen Zahlen.

Jetzt können wir die obige Gleichung lösen:

$$x + 10 = 3 \Rightarrow x = -7 \quad 10 + (-7) = 3.$$

2.2.1 Operationen auf $\mathbb{Z}$

- Addition

$$n + m = \begin{cases} n + m, & n, m \in \mathbb{N}, \\ n - (-m), & n \in \mathbb{N}_0 \land m \in \mathbb{Z}^-, \\ m - (-n), & m \in \mathbb{N} \land n \in \mathbb{Z}^-, \\ -((-m) + (-n)), & n, m \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

- Subtraktion

$$n - m = \begin{cases} n - m, & n \geq m, \\ -(m - n), & n < m. \end{cases}$$

$$n - m = n + (-m)$$

D. h. wir können die Subtraktion auf die Addition zurückführen und die gleichen Regeln anwenden.

- Multiplikation

$$n \cdot m = \begin{cases} n \cdot m, & n, m \in \mathbb{N}, \\ -n \cdot (-m), & n \in \mathbb{N} \land m \in \mathbb{Z}^-, \\ -(-n) \cdot m, & m \in \mathbb{N} \land n \in \mathbb{Z}^-, \\ (-m) \cdot (-n), & n, m \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

2.2.2 Rechenregeln

A_1**:** 0 ist neutrales Element bezüglich der Addition

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \; n + 0 = n \tag{2.1}$$

A_2**:** Assoziativgesetz der Addition

$$\forall k, \ell, n \in \mathbb{Z}: \; (k + \ell) + n = k + (\ell + n) \tag{2.2}$$

A_3**:** Kommutativgesetz der Addition

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}: \; n + m = m + n \tag{2.3}$$

A_4**:** Das inverse Element bezüglich der Addition

$$\forall n \in \mathbb{Z} \; \exists (-n): \; n + (-n) = 0 \tag{2.4}$$

M_1**:** 1 ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \; n \cdot 1 = n \tag{2.5}$$

M_2**:** Assoziativgesetz der Multiplikation

$$\forall k, \ell, n \in \mathbb{Z}: \; (k \cdot \ell) \cdot n = k \cdot (\ell \cdot n) \tag{2.6}$$

M_3**:** Kommutativgesetz der Multiplikation

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}: \; n \cdot m = m \cdot n \tag{2.7}$$

D**:** Das Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition

$$\forall k, \ell, n \in \mathbb{Z}: \; k \cdot (\ell + n) = k \cdot \ell + k \cdot n \tag{2.8}$$

Definition 2.2.2. Eine Menge R mit den Operationen „$+$“ und „$\cdot$“ (wir schreiben das: $(R, +, \cdot)$), die die Eigenschaften (2.1) bis (2.4), (2.6) und (2.8) besitzt, heißt ein *Ring*. Wenn zusätzlich die Eigenschaft (2.5) erfüllt ist, heißt R ein *Ring mit Eins*. Wenn zusätzlich die Eigenschaft (2.7) erfüllt ist, heißt R ein *kommutativer Ring*.

Bemerkung 8. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist also ein (kommutativer) Ring (mit Eins).

Wir merken, dass es weitere Gleichungen gibt, die wir nicht lösen können, wie z. B.:

$$\begin{aligned} &a \cdot x = b, \quad a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \\ &x = ? \end{aligned}$$

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Was aber machen wir, wenn wir

$$3x = 8$$

lösen sollen? Es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$, dass die Gleichung erfüllt. Aber wir sehen, dass

$$x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

eine Lösung ist.

2.3 Die rationalen Zahlen

Definition 2.3.1. Die *rationalen Zahlen* sind durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

gegeben.

p nennt man den *Zähler* und q nennt man den *Nenner* von $\frac{p}{q}$. $\frac{p}{q}$ heißt *gekürzter Bruch*, wenn $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$.

2.3.1 Operationen auf $\mathbb{Q}$

- Addition

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- Multiplikation
$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$
Zu jedem Bruch $\frac{p}{q} \neq 0$ gibt es einen Bruch $\frac{r}{s}$, sodass:
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = 1$$
Und es gilt:
$$r = \pm q \wedge s = \pm p$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der Addition und Multiplikation hat folgende Eigenschaften:

A_1**:** „0“ ist das neutrale Element bezüglich der Addition
$$\forall\, r \in \mathbb{Q}: \quad r + 0 = r \tag{2.9}$$

A_2**:** Das inverse Element bezüglich der Addition
$$\forall\, r \in \mathbb{Q}: \quad r + (-r) = 0, \tag{2.10}$$
$-r$ ist das inverse Element bezüglich der Addition.

A_3**:** Assoziativgesetz der Addition
$$\forall\, r, s, t \in \mathbb{Q}: \ (r + s) + t = r + (s + t) \tag{2.11}$$

A_4**:** Kommutativgesetz der Addition
$$\forall\, r, s \in \mathbb{Q}: \ r + s = s + r \tag{2.12}$$

M_1**:** „1“ ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation
$$\forall\, r \in \mathbb{Q}: \ r \cdot 1 = r \tag{2.13}$$

M_2**:** Das inverse Element bezüglich der Multiplikation
$$\forall\, r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \exists r' \in \mathbb{Q}: \quad r \cdot r' = 1 \tag{2.14}$$
(r') ist das inverse Element bezüglich der Multiplikation.
Wir schreiben auch:
$$r' = r^{-1} = \frac{1}{r}$$

M_3**:** Assoziativgesetz der Multiplikation
$$\forall\, r, s, t \in \mathbb{Q}: \ (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) \tag{2.15}$$

M_4**:** Kommutativgesetz der Multiplikation
$$\forall\, r, s \in \mathbb{Q}: \ r \cdot s = s \cdot r \tag{2.16}$$

D**:** Das Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition
$$\forall r, s, t \in \mathbb{Z}: \ r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t \tag{2.17}$$

Definition 2.3.2. Eine Menge K mit den Operationen „$+$ “und „$\cdot$ “, die die Eigenschaften (2.9) bis (2.17) haben, heißt Körper; wir schreiben $(K, +, \cdot)$.

Bemerkung 9. $\mathbb{Q}$ ist ein Körper: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

2.4 Ordnungsrelationen auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Auf $\mathbb{N}$ gibt es eine Ordnung „$\leq$", die wie folgt gegeben ist:

$$m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : \ n = m + k$$

wir wollen „$\leq$" auf $\mathbb{Z}$ und dann auf $\mathbb{Q}$ hinaufziehen.

2.4.1 Ordnungsrelationen auf $\mathbb{Z}$

Für $m, \ n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = m + k \Leftrightarrow n - m \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow n - m \geq 0$

Damit gilt:

$$\forall \ m \leq n \ \wedge \forall \ k \in \mathbb{Z} : \ m + k \leq n + k$$

Wir wollen nun sehen, wie sich die Ordnung mit der Multiplikation verträgt: Kann die folgende Aussage gelten?

$$\forall \ m \leq n \ \wedge \forall \ k \in \mathbb{Z} : \ m \cdot k \leq n \cdot k \ \ \textbf{?}$$

Wir formen die Ungleichung um:

$$n \cdot k - m \cdot k \geq 0$$

$$k(n - m) \geq 0$$

Wir wissen, dass $n \geq m$, d. h. dass $n - m \geq 0$.
Weiters gilt:

- wenn $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Ungleichung richtig.
- wenn $k \in \mathbb{Z}^-$, dann ist die Ungleichung falsch.

D. h. wir können sagen, dass für $n \geq m$:

$$k \cdot n \begin{cases} \geq k \cdot m & ; k \in \mathbb{N}_0 \\ \leq k \cdot m & ; k \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

> **Achtung!**
> Bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl wird die Ungleichungsrichtung umgedreht.

Satz 2.4.1. *Jedes Quadrat ist ≥ 0.*

$$\forall \ m \in \mathbb{Z} : \ m^2 \geq 0$$

Beweis. Wir teilen den Beweis in zwei Teile auf:

- $m \geq 0 \quad | \cdot m \Rightarrow m \cdot m \geq m \cdot 0 \Rightarrow m^2 \geq 0$
- $m < 0 \quad | \cdot m \Rightarrow m \cdot m > m \cdot 0 \Rightarrow m^2 \geq 0$

$\square$

2.4.2 Ordnungsrelationen auf $\mathbb{Q}$

$$r \leq s \Leftrightarrow s - r \geq 0$$
$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \frac{p}{q} \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 0$$

(Der Nenner ist immer positiv)
Dann gilt wieder:

$$\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ r \geq s \Rightarrow r + t \geq s + t$$
$$\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ r \geq s,\ t \geq 0 \Rightarrow r \cdot t \geq s \cdot t$$
$$\forall r, s, t \in \mathbb{Q},\ r \geq s,\ t \leq 0 \Rightarrow r \cdot t \leq s \cdot t$$

Bemerkung:
Ein Körper mit einer Ordnung „$\leq$“, der die obigen Eigenschaften erfüllt, heißt angeordneter Körper. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper.

2.5 Die reellen Zahlen

Wir können nun viele Gleichungen lösen, aber es finden sich immer noch Zahlen, die in keiner der bereits definierten Mengen auftauchen.

Ein Beispiel wäre: Wir haben ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathetenlänge 1. Unsere Aufgabe ist, die Länge der Hypotenuse zu bestimmen. Wir stellen die

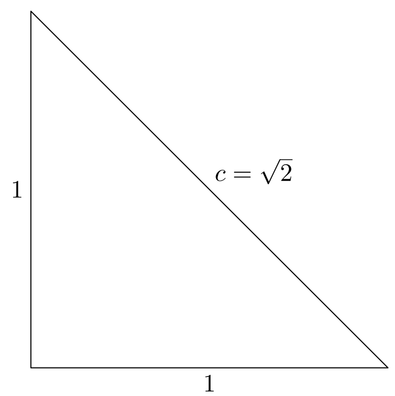


Abbildung 2.1: Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck.

Gleichung auf:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \text{ nach Pythagoras}$$

Wie wollen zuerst beweisen, dass c nicht aus $\mathbb{Q}$ ist.

Beweis. Beweis durch Widerspruch Annahme: $c \in \mathbb{Q}$

$$\text{Also } c = \frac{p}{q} \text{ mit } \operatorname{ggT}(p, q) = 1$$
$$\text{Dann gilt also } c^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$$

d. h. 2 teilt die rechte Seite und 2 teilt auch die linke Seite.

$$2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow p = 2p'$$

$$(2p')^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$$

$$2|q^2 \Rightarrow 2|q$$

$$2|q \wedge 2|p \Rightarrow 2|\operatorname{ggT}(p,q) \Rightarrow \operatorname{ggT}(p,q) \neq 1$$

und das ist ein Widerspruch. Die Annahme ist also falsch, d. h. c ist nicht aus $\mathbb{Q}$. □

Eine Idee, wie wir c bestimmen können, wäre eine Näherung zu finden, die für unseren Zweck gut ist.

Beispiel

Wir fangen mit $c_0 = 1$ an. Das ist eine schlechte Näherung.

$$c^2 = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{c}$$

Nachdem c_0 eine Näherung ist, hoffen wir, dass $\frac{2}{c_0}$ auch eine Näherung ist, aber sie ist genau so schlecht. Eine ist zu klein die andere zu groß.

Wir haben also zwei schlechte Näherungen. Eine bessere werden wir vielleicht bekommen, wenn wir den Mittelwert der beiden bilden.

$$c_1 = \frac{c_0 + \frac{2}{c_0}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c_0 = 1, \left(\frac{2}{c_0}\right)^2 = 4, c_1^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Wir merken, dass wir immer näher an unsere Lösung kommen.

Also definieren wir, durch Induktion:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(c_n + \frac{2}{c_n}\right)$$

Wenn wir c_2 ausrechnen, sehen wir, dass wir immer näher zu unserer Lösung kommen. $c_2 = 1\frac{5}{12} \wedge c_2^2 = 2\frac{1}{144}$

$$c_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \ c_n \in \mathbb{Q}$$

Wir verschaffen uns einige Eigenschaften von c_n durch Induktion $(1 \leq c_n \leq 2)$:

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion durch:

1. **Induktionsbasis:**
   $n = 0 \quad c_0 = 1 \quad 1 \leq c_0 \leq 2$

2. **Induktionsvoraussetzung:**
   $1 \leq c_n \leq 2$

3. **Induktionsbehauptung:**
   $1 \leq c_{n+1} \leq 2$

4. **Induktionsschritt:**

Wir schreiben die Voraussetzung an:

$$1 \leq c_n \leq 2 \qquad (1)$$

Jetzt wollen wir auf $\frac{2}{c_n}$ kommen. Wir dividieren 2 durch jeden Teil der Ungleichung (die Richtung der Ungleichung wird umgedreht!) und erhalten:

$$\frac{2}{1} \geq \frac{2}{c_n} \geq \frac{2}{2}$$

und das ist gleich mit:

$$1 \leq \frac{2}{c_n} \leq 2 \qquad (2)$$

Jetzt addieren wir die 2 Ungleichungen ((1)und(2)) und erhalten:

$$2 \leq \frac{2}{c_n} + c_n \leq 4 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(c_n + \frac{2}{c_n}\right) \leq 2$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(c_n + \frac{2}{c_n}\right)$$

Damit haben wir bewiesen:

$$1 \leq c_{n+1} \leq 2$$

$\square$

Wir hoffen, dass das eine Folge von Zahlen ist, die immer näher an den Wert $\sqrt{2}$ kommt. Jetzt wollen wir sehen, wie das $(n+1)$-te Folgenglied im Vergleich zu dem n-ten ist. Um das zu überprüfen, sehen wir uns die Differenz $c_{n+1}^2 - 2$ an.

$$c_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(c_n + \frac{2}{c_n}\right)\right)^2 - 2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(c_n^2 + 4 + \frac{4}{c_n^2} - 8\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(c_n^2 - 4 + \frac{4}{c_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(c_n - \frac{2}{c_n}\right)^2 = \frac{(c_n^2 - 2)^2}{4 \cdot c_n^2} > 0$$

Also gilt $\forall n \geq 1 : \ c_n^2 > 2$

Weiters sehen wir:

$$0 < c_{n+1}^2 - 2 = \frac{(c_n^2 - 2)^2}{4 \cdot c_n^2} = \frac{c_n^2 - 2}{4 \cdot c_n^2} \cdot \left(c_n^2 - 2\right) \Rightarrow$$

$$0 < \frac{c_n^2 - 2}{4 \cdot c_n^2}\left(c_n^2 - 2\right) \leq \frac{2^2 - 2}{4}\left(c_n^2 - 2\right) = \frac{1}{2}\left(c_n^2 - 2\right)$$

Und daraus folgt:

$$c_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{2}\left(c_n^2 - 2\right)$$

$(c_n^2 - 2)$ ist der Fehler, den wir bei der Bestimmung haben. Und dieser wird mit jeder weiteren Näherung mindestens um einen Faktor 2 kleiner. Das kann man auch so schreiben:

$$c_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{2}\left(c_n^2 - 2\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(c_{n-1}^2 - 2\right) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (c_1^2 - 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

Für jede vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, sodass für jedes $n > N$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} < \varepsilon$ und damit $c_{n+1}^2 - 2 < \varepsilon$. ($\varepsilon$ ist die Fehlerschranke.)

Wenn die Rechnung eine bestimmte Genauigkeit haben muss, kann man sehen, wie viele Folgenglieder man rechnen muss, um diese Bedingung zu erfüllen. Je mehr Folgenglieder wir ausrechnen, desto näher sind wir an unserer gesuchten Zahl.

Wir haben also jetzt keine Lösung (im bisherigen Sinne) gefunden, aber wir haben ein „Rezept“, mit dem wir beliebig nahe an unsere gesuchte Zahl kommen können, je nachdem, welche Genauigkeit verlangt wird. Wir verwenden die Zahlen $c_0, c_1, \ldots\ldots$ um die Lösung darzustellen.

Definition 2.5.1. Sei $r \in \mathbb{Q}$, dann schreiben wir $|r|$ und sagen Betrag oder Absolutbetrag wenn:

$$|r| = \begin{cases} r, & r \geq 0 \\ -r, & r < 0 \end{cases}$$

Nach dieser Definition ist klar, dass $|r| \geq 0$.

Die Dreiecksungleichung

$$|r + s| \leq |r| + |s| \tag{2.18}$$

Beweis. Das kann man beweisen, indem man alle möglichen Vorzeichenkombinationen einsetzt und den Betrag anschaut:

1. $rs > 0$ (r und s haben dasselbe Vorzeichen): dann gilt $|r+s| = |r|+|s|$, die Ungleichung ist also richtig.

2. $rs < 0$ (r und s haben verschiedene Vorzeichen): dann gilt $|r + s| = \pm(|r| - |s|)$ und $|r| + |s| \geq \pm(|r| - |s|)$.

□

$$||r| - |s|| \leq |r - s|$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zur Dreiecksungleichung.

Beweis. Die 2-te Möglichkeit, die Ungleichung zu schreiben, folgt aus der ersten, indem wir 2 Substitutionen vornehmen:

$$r = x - y$$

$$s = y$$

Jetzt können wir die 2 Substitutionen einsetzen (in der ersten Ungleichung) und erhalten:

$$|x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$
$$|x| \leq |x-y| + |y|$$
$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

Wenn wir nun x und y vertauschen, ist die Ungleichung immer noch wahr:

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

$|x-y| = |y-x|$, nur $|x|-|y|$ und $|y|-|x|$ haben immer ein umgekehrtes Vorzeichen, aber wir brauchen eine Bedingung, die stärker ist als diese 2 zusammen bzw. diese beiden beinhaltet. Und das ist der Betrag der Beträge, d. h. wir haben:

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

Und damit ist der Beweis vollständig. □

2.6 Folgen

Definition 2.6.1. Eine Abbildung $a\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ heißt eine Folge von rationalen Zahlen. Jeder natürlichen Zahl n wird ein $a_n \in \mathbb{Q}$ zugeordnet. Wie schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für solche Folgen.

Als Beispiel haben wir die Folge von vorhin: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (c_n^2 - 2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Folge der „Fehler“. Wir haben schon gezeigt, dass:

$$|f_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, \; n \geq 1$$

D. h. $|f_n|$ wird kleiner als jede gegebene Schranke, wenn nur n groß genug ist.

Definition 2.6.2. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *konvergent* gegen a; a heißt Grenzwert, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N):\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definition 2.6.3. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *konvergent*, wenn es ein a gibt, sodass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen a konvergiert.

Definition 2.6.4. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist, also keinen Grenzwert besitzt.

Definition 2.6.5. Die Menge der *reellen Zahlen* ist durch

$$\mathbb{R} = \{\lim_{n\to\infty} a_n \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ sind konvergente Folgen rationaler Zahlen}\}$$

gegeben.

Definition 2.6.6. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $n \leq x < n+1$. Für dieses n schreiben wir $[x]$ und sagen „Ganzteil von x“.

2.6.1 Bemerkungen zu konvergenten Folgen

Satz 2.6.7. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch: Annahme: Eine Folge hat 2 Grenzwerte: a, b.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1 : |a - a_n| < \varepsilon \tag{2.19}$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2 : |b - a_n| < \varepsilon \tag{2.20}$$

Aus (2.19) und (2.20) folgt

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0\ \exists N(= \max(N_1, N_2)) \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \ |a - a_n| < \varepsilon \wedge |b - a_n| < \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon\\
\Rightarrow &\forall\varepsilon > 0\ |a - b| < 2\varepsilon\\
\Rightarrow &|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b.
\end{aligned}$$

D. h. unsere Annahme war falsch. Es gibt nur einen Grenzwert. □

Unsere Definition einer konvergenten Folge setzt die Kenntnis des Grenzwertes voraus.
Jetzt wollen wir nach Kriterien für Konvergenz suchen, die ohne die Kenntnis des Grenzwertes auskommen.

Satz 2.6.8 (Cauchy)**.** *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist genau dann konvergent, wenn*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n, m > N) : \ |a_m - a_n| < \varepsilon \tag{2.21}$$

Jetzt vergleichen wir paarweise Folgenglieder, und wenn deren Differenz kleiner als ε ist, dann ist die Folge konvergent.

Beweis, einfacher Teil. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit dem Grenzwert a. D. h.:

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \ \forall n > N : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \ \forall m > N : \ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

□

Definition 2.6.9. Eine Folge, die (2.21) erfüllt, heißt *Cauchy-Folge*; diese Eigenschaft heißt *Cauchy'sche Eigenschaft.*

Erst jetzt können wir eine „saubere“ Definition der reellen Zahlen geben.

Definition 2.6.10. Die Menge der reellen Zahlen ist so definiert:

$$\mathbb{R} := \{x \mid x = \lim_{n\to\infty} a_n,\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen}\}.$$

Definition 2.6.11. Auf den reellen Zahlen wird durch $a < b :\leftrightarrow \exists \epsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ a_n + \epsilon < b_n (a = \lim a_n, b = \lim b_n)$ eine Ordung definiert, die von der Ordung auf $\mathbb{Q}$ kommt und dieselben Eigenschaften hat.

Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch die Ordnung definiert sind, heißen Intervalle

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \big| a < x < b\}$ heißt offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \big| a \leq x < b\}$ heißt halboffenes Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \big| a < x \leq b\}$ heißt halboffenes Intervall
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \big| a \leq x \leq b\}$ heißt geschlossenes Intervall

Beispiel 14. Kehren wir noch einmal zu unserem ersten Beispiel zurück:

$$
\begin{aligned}
&c_0 = 1\ c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{2}{c_n}\right) \\
&0 < c_n^2 - 2 \leq 2^{-n-2}\ ,\ 1 \leq c_n \leq 2 \\
&c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{2}{c_n}\right) - c_n = \frac{-1}{2} \cdot c_n + \frac{1}{c_n} \\
&= \frac{c_n^2 - 2}{2 \cdot c_n} \\
&|c_{n+1} - c_n| = \frac{|c_n^2 - 2|}{2c_n} \leq \frac{2^{-n-3}}{c_n} = 2^{-n-3}
\end{aligned}
$$

Achtung!
$|c_{n+1} - c_n| < \varepsilon$ ist zu wenig für die Konvergenz. Der Abstand von 2 beliebigen Folgengliedern muss $< \varepsilon$ sein.

$$
\begin{aligned}
&|c_{n+k} - c_n| < \varepsilon, \quad k > 1 \\
&|c_{n+k} - c_n| = |(c_{n+k} - c_{n+k-1}) + (c_{n+k-1} - c_{n+k-2}) + \cdots + (c_{n+1} - c_n)| \leq \\
&|(c_{n+k} - c_{n+k-1})| + |(c_{n+k-1} - c_{n+k-2})| + \cdots + |(c_{n+1} - c_n)| \leq \\
&\leq 2^{-n-k-2} + 2^{-n-k-1} + \cdots + 2^{-n-3} = \\
&2^{-n-3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 2^{-k+1}) \leq 2^{-n-3} \cdot 2 \leq 2^{-n-2}
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$|c_{n+k} - c_n| \leq 2^{-n-2} \quad \forall k \geq 0,$$

woraus wir

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall k \in \mathbb{N} : |c_{n+k} - c_n| < \varepsilon$$

folgern. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge und daher konvergent.

Definition 2.6.12. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $x \in \mathbb{R}$ *Häufungswert* bzw. *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |a_n - x| < \varepsilon.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also $|a_n - x| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.6.13. Die Menge $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} |\ |x - y| < \varepsilon\}$ heißt die *ε-Umgebung* von x.

Wir können Grenzwerte und Häufungspunkte folgendermaßen charakterisieren: x ist ein Grenzwert: Für $\varepsilon > 0$ liegen in der ε-Umgebung von x alle Folgenglieder bis auf endlich viele.

x ist ein Häufungswert: Für $\varepsilon > 0$ liegen in der ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder.

Definition 2.6.14. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen (d.h. $n_{k+1} > n_k$), dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkung 10.

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und x ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$, die gegen x konvergiert.
2. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert x, dann ist x ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Definition 2.6.15. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, für die es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| \leq M$, dann heißt die Folge *beschränkt*.

Satz 2.6.16. ***(Bolzano-Weierstraß)*** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge, dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge (und damit auch einen Häufungswert).*

Beweis. Die Idee ist, dass unendlich viele Dinge auf endlich viel Platz sich irgendwo häufen müssen.

Wir nehmen das Intervall $[-M, M]$ und teilen es in 2 Hälften auf. In einer Hälfte müssen unendlich viele Folgenglieder liegen. Dieses Teilintervall I_1 teilen wir wieder in 2 Hälften. Wieder liegen in einem der beiden Intervalle unendlich viele Folgenglieder. Dieses nennen wir I_2. Diesen Vorgang können wir beliebig wiederholen. Im n-ten Schritt haben wir ein Intervall der Länge $2^{-n+1}M$, in dem unendlich viele Folgenglieder liegen. Es gilt dann

$$[-M, M] \supset I_1 \supset I_2 \cdots .$$

Weiters gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen I_n liegt, also

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein n, sodass die Länge von I_n kleiner ist als ε ($2^{-n+1}M < \varepsilon$). Weil $x \in I_n$ liegt, gilt $|x - y| < \varepsilon$ für alle $y \in I_n$. Weil weiters I_n unendlich viele Folgenglieder enthält, enthält auch $U_\varepsilon(x)$ unendlich viele Folgenglieder. x ist daher ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Definition 2.6.17. Eine Folge heißt:

- monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \geq a_n$
- monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \leq a_n$
- streng monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} > a_n$
- streng monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} < a_n$

- monoton, wenn sie entweder wachsend oder fallend ist

Satz 2.6.18. *Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.*

Beweis. Sei die Folge ohne Beschränkung der Allgemeinheit monoton wachsend. Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, gibt es nach Satz 2.6.16 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $x = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ außerdem monoton wachsend ist, können wir Folgendes schließen:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K : \forall k > K : x - a_{n_k} < \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : x - a_n < \varepsilon \text{ (wähle } N = n_K).$$

□

Wir haben beim Cauchy Konvergenzkriterium nur eine Richtung bewiesen. Jetzt wollen wir die andere auch beweisen.

Beweis von Satz 2.6.8, schwieriger Teil. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Wir wollen beweisen, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die $\forall\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$ erfüllt, konvergent ist.

Wir zeigen zuerst, dass eine Folge, die die Cauchy Eigenschaft hat, beschränkt ist.

Wir wählen $\varepsilon = 1$. Dann $\exists N\ \forall m, m > N : |a_m - a_n| < 1$. Daher $\forall n > N : |a_n - a_{N+1}| < 1$ und damit

$$\forall n > N : |a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \le |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < |a_{N+1}| + 1.$$

Also gilt $\forall n > N : |a_n| < |a_{N+1}| + 1$.

Jetzt bleiben endlich viel Glieder übrig. Für $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_N| + 1)$ gilt dann

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le M$$

Die Folge ist also beschränkt. Nach 2.6.16 besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge. $(n_k), k \in \mathbb{N}_0$ ist eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und $a \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Idee: wir wollen die restlichen Folgeglieder an dieser Folge „anhängen“. Dazu verwenden wir die Cauchy-Eigenschaft.

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists K : \forall k > K : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m > N_1 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir setzen $N = \max(N_1 + 1, n_K)$, wählen $m = n_k > N$ (womit $k > K$ gilt) und erhalten somit

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists K : \exists N : \forall k > K : \forall n > N : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus den beiden letzten Zeilen folgt:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

□

2.6.2 Rechnen mit Grenzwerten

Satz 2.6.19. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b, dann gilt:*

$$a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \tag{2.22}$$
$$a - b = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) \tag{2.23}$$
$$a \cdot b = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \tag{2.24}$$
$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0 \land b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \tag{2.25}$$

Beweis. Wir fangen mit (2.22) und (2.23) an. Die Beweise sind fast gleich, deshalb werden wir uns nur (2.22) ansehen.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 :\ \forall n > N_1 :\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 :\ \forall n > N_2 :\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir setzen $N = \max(N_1, N_2)$ und erhalten für $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit haben wir (2.22) bewiesen.
Jetzt wenden wir uns (2.24) zu:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind beschränkt. Es gibt also ein M, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M \land |b_n| \leq M$$

Weiters sind beide Folgen konvergent:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 :\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b| + 1}$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 :\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Damit erhalten wir für $n > \max(N_1, N_2)$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} < \varepsilon.$$

□

Beispiel 15.

$$a_n = \frac{n^2 + 5n + 7}{3n^2 + 8n - 3}$$

Trick: wir dividieren durch n^2 und erhalten:

$$a_n = \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}{3 + \frac{8}{n} - \frac{3}{n^2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}}{3 + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt damit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Um zu beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ gilt, müssen wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein N finden, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|1/n| = 1/n < \varepsilon$. Letzteres ist äquivalent zu $1/\varepsilon < n$. Und das ist wiederum äquivalent zu $n > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir daher $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Mit diesem N gilt somit

$$\forall \varepsilon : \forall n > \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Wir zeigen nun direkt, dass a_n gegen $1/3$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| a_n - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{n^2 + 5n + 7}{3n^2 + 8n - 3} - \frac{1}{3} \right| \\
&= \left| \frac{3n^2 + 15n + 21 - (3n^2 + 8n - 3)}{3(3n^2 + 8n - 3)} \right| = \frac{7n + 24}{3(3n^2 + 8n - 3)} \\
&\leq \frac{7n + 24}{3(3n^2 + 5n + 3(n - 1))} \\
&\leq \frac{31n}{9n^2} = \frac{31}{9n}.
\end{aligned}$$

Wir benötigen

$$\frac{31}{9n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{31}{9 \cdot \varepsilon},$$

daher wählen wir

$$N = \left\lfloor \frac{31}{9 \cdot \varepsilon} \right\rfloor .$$

Dann gilt nämlich

$$\forall n > N : |a_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon.$$

Nach Definition konvergiert daher a_n gegen $\frac{1}{3}$.

Beispiel 16.

$$x_0 = 1 \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{5}{8} \dots$$

Nach Satz 2.6.18 müssen wir die Folge erstmal auf Beschränktheit untersuchen. $0 \leq x_n \leq 1$ und das müssen wir durch Induktion beweisen.

1. **Induktionsbasis:** $n = 0$ $0 \leq 1 \leq 1$

2. **Induktionsvoraussetzung:** $0 \leq x_n \leq 1$

3. **Induktionsbehauptung:** $0 \leq x_{n+1} \leq 1$

4. **Induktionsschritt:**

$$0 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow 2 \geq 1 + x_n \geq 1$$

$$0 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2 + x_n \leq 3$$

Und jetzt dividieren wir die beiden Ungleichungen:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1 + x_n}{2 + x_n} \leq \frac{2}{2} = 1$$

$$0 \leq \frac{1}{3} \leq x_{n+1} \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq x_{n+1} \leq 1$$

D. h., dass die Folge x_n beschränkt ist. Jetzt könnten wir versuchen, das Cauchy-Kriterium anzuwenden.

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+k} - x_n\right| &= \left|\frac{1 + x_{n+k-1}}{2 + x_{n+k-1}} - \frac{1 + x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}\right| = \left|\frac{(2 + x_{n-1})(1 + x_{n+k-1}) - (1 + x_{n-1})(2 + x_{n+k-1})}{(2 + x_{n+k-1}) \cdot (2 + x_{n-1})}\right| \\
&\leq \left|\frac{2 + 2 \cdot x_{n+k-1} + x_{n-1} + x_{n+k-1} \cdot x_{n-1} - 2 - x_{n+k-1} - 2 \cdot x_{n-1} - x_{n-1} \cdot x_{n+k-1}}{2 \cdot 2}\right| \\
&= \frac{|x_{n+k-1} - x_{n-1}|}{4}
\end{aligned}$$

Indem wir nun

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{|x_{n+k-1} - x_{n-1}|}{4}$$

wiederholt anwenden, erhalten wir

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{1}{4} \cdot |x_{n+k-1} - x_{n-1}| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}|x_{n+k-2} - x_{n-2}| \leq \ldots \left(\frac{1}{4}\right)^n |x_k - x_0| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

D. h. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \;\; \forall n > N \;\wedge\; \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$ und laut Satz 2.6.8 konvergiert diese rekursiv definierte Folge x_n. Wir nehmen an, dass der Grenzwert x ist und setzen es in unsere Folgendefinition ein.

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \frac{1 + x}{2 + x}$$

Wir haben jetzt eine Gleichung die wir problemlos lösen können.

$$x = \frac{1 + x}{2 + x} \text{ mit } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Weil wir wissen, dass die Folge zwischen 0 und 1 liegt, kann nur eine der beiden Lösungen in Frage kommen. D. h. die Folge konvergiert gegen $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Wir können dies allgemein zusammenfassen:
Wir haben eine Folge, die durch das erste Folgenglied gegeben ist, und das $(n+1)$-ste Folgenglied ist eine Funktion des n-ten Folgenglieds. Also:

$$x_0 = a \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Wenn es gelingt, durch Induktion zu zeigen, dass für ein festes $\alpha < 1$

$$|x_{n+k} - x| \leq \alpha \cdot |x_{n+k-1} - x_{n-1}|$$

gilt, dann können wir auf dieselbe Art wie im vorherigen Beispiel zeigen, dass:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \alpha^n |x_k - x_0| \leq \alpha^n (b - a),$$

wenn wir vorher die Beschränktheit der Folge (x_n) mit $\forall n : a \leq x_n \leq b$ bewiesen haben.

Jetzt haben wir die Konvergenz der Folge bewiesen und können eine Gleichung für den Grenzwert aufstellen: $x = f(x)$. D. h. das vorherige Beispiel gibt eine Methode an, die Existenz eines Grenzwertes zu beweisen und anschließend den Grenzwert zu bestimmen.

Beispiel 17. Wir zeigen nun die Konvergenz für das gleiche Beispiel unter Verwendung von Satz 2.6.18.

$$x_0 = 1 \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{5}{8} \ldots$$

Dieses mal wollen wir beweisen, dass die Folge beschränkt ist (das haben wir schon) und dass die Folge monoton ist. Aus den beiden folgt dann laut Satz 2.6.18, dass die Folge konvergiert. Die Monotonie muss man durch Induktion zeigen.

1. **Induktionsbasis:** $x_0 > x_1$

2. **Induktionsvoraussetzung:** $x_n > x_{n+1}$

3. **Induktionsbehauptung:** $x_{n+1} > x_{n+2}$

4. **Induktionsschritt:**

$$x_n > x_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad x_n + 2 > x_{n+1} + 2$$

Wir bilden den Reziprokwert (Der Reziprokwert von x ist $\frac{1}{x}$).

$$\frac{1}{2 + x_n} < \frac{1}{2 + x_{n+1}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2 + x_n} > 1 - \frac{1}{2 + x_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + x_n}{2 + x_n} > \frac{1 + x_{n+1}}{2 + x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$$

D. h. die Folge ist monoton fallend und beschränkt, d. h. sie ist konvergent und den Grenzwert bestimmt man genau wie in Beispiel 16.

Beispiel 18. Wir nehmen das gleiche Beispiel.

$$x_0 = 1 \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{5}{8} \dots$$

Wir sehen uns die Beschränktheit an, aber diesmal nehmen wir als untere Schranke den vermuteten Limes. Jetzt werden wir das mittels Induktion beweisen.

1. **Induktionbasis:**
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq 1 \leq 1$$

2. **Induktionsvoraussetzung:**
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x_n \leq 1$$

3. **Induktionsbehauptung:**
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x_{n+1} \leq 1$$

4. **Induktionsschritt:**

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x_n \leq 1 \qquad | + 2$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2 \leq x_n + 2 \leq 3$$

Wir bilden den Reziprokwert.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+3} \geq \frac{1}{x_n + 2} \geq \frac{1}{3}$$

Wir ziehen jeden Teil der Ungleichung von 1 ab.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{x_n + 1}{x_n + 2} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x_{n+1} \leq 1$$

Als Zweites wollen wir die Monotonie beweisen.

$$x_{n+1} \leq x_n$$

$$\frac{x_n + 1}{x_n + 2} \leq x_n \Leftrightarrow 1 + x_n \leq x_n(2 + x_n)$$

$${x_n}^2 + x_n - 1 \geq 0$$

Wenn wir jetzt den Grenzwert anstelle von x_n einsetzen, bekommen wir als Lösung $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Nachdem man eine quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ auch als $a(x-x_1)(x-x_2)$, ($x_{1,2}$ sind die Lösungen der Gleichung) umschreiben kann, ist

$$0 \geq {x_n}^2 + x_n - 1 \Leftrightarrow 0 \geq \left(x_n - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \cdot \left(x_n - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

Wir wissen, dass $x_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, d. h. die erste Klammer ist größer Null, die zweite auch, und somit ist die Ungleichung wahr. D. h. die Annahme $x_{n+1} \leq x_n$ ist auch wahr, und die Folge ist monoton fallend. Hier sehen wir, dass es beim Beweis der Monotonie nötig war, als untere Schranke den Limes zu wählen, denn sonst wäre die Ungleichung nicht mehr richtig gewesen.

Satz 2.6.20 (Einzwicksatz). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = x$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n < b_n < c_n$. Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergent.*

Beweis.

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists N_1 : \ \forall n > N_1 : |a_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < a_n < x + \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists N_2 : \ \forall n > N_2 : |c_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < c_n < x + \varepsilon$$

Wenn wir die erste Hälfte der ersten Ungleichung und die zweite Hälfte der zweiten Ungleichung nehmen, dann n so wählen, dass $n > \max(N_1, N_2) = N$, haben wir:

$$x - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < x + \varepsilon \Rightarrow x - \varepsilon < b_n < x + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |b_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} b_n = x$$

□

2.7 Reihen

Definition 2.7.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine unendliche Folge reeller Zahlen. Dann heißt die (unendliche) Folge der (endlichen) Summen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

also

$$(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

unendliche Reihe. Diese wird auch als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

geschrieben.

Definition 2.7.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Definition 2.7.3. Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Wenn

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

dann schreiben wir

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beispiel 19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Wir beweisen durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1. **Induktionsbasis:** $s_1 = \frac{1}{2}$

2. **Induktionsvoraussetzung:** $s_n = \frac{n}{n+1}$

3. **Induktionsbehauptung:** $s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

4. **Induktionsschritt:**

$$\begin{aligned} s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir wissen, ob $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$$s_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1 \text{ d. h. } 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Die Folge der Partialsummen konvergiert, d. h., dass die Reihe konvergiert.

Bemerkung 11. Es ist ein glücklicher Zufall, dass wir so leicht ein Bildungsgesetz für s_n gefunden haben, meistens ist das aber nicht der Fall.

Beispiel 20.

$$q \in \mathbb{R}, \quad |q| < 1 \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Was können wir über s sagen?

Wir nehmen an, dass s existiert.

$$q \cdot s = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot q = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = s - 1$$

$$q \cdot s = s - 1 \Rightarrow s = \frac{1}{1-q}$$

Wann konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$|s_n - \frac{1}{1-q}| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Für $q = 1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n+1} 1 = n + 1,$$

das konvergiert sicher nicht.
Für $q = -1$ gilt

$$s_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = 1 \text{ oder } 0$$

und das ist auch keine konvergente Folge.

$|q| > 1 \Rightarrow |q|^{n+1}$ ist unbeschränkt $\Rightarrow s_n$ ist auch unbeschränkt, d. h. $n \in \mathbb{N}$ ist nicht konvergent.

Bemerkung 12. Die Reihe („geometrische Reihe“)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. Der Wert der Reihe ist dann $\frac{1}{1-q}$.

2.8 Konvergenzkriterien

Das Cauchy-Kriterium für Folgen besagt:
Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n > N \forall \ell \in \mathbb{N} : \; |s_{n+\ell} - s_n| < \varepsilon$$

$$s_{n+\ell} - s_n = \sum_{k=0}^{n+\ell} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+\ell} a_k$$

Damit erhalten wir das Cauchy-Kriterium für Reihen:

Satz 2.8.1. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \forall \ell \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} a_k \right| < \varepsilon$$

Beispiel 21. Wir wollen die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ untersuchen.

Nehmen wir an, die Reihe konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann muss nach dem Cauchy-Kriterium für jedes hinreichend große n und für jedes ℓ der Reihenrest

$$\sum_{k=n+1}^{n+\ell} \frac{1}{k}$$

kleiner als ε sein. Wählen wir $\ell = n$, so erhalten wir

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch, somit divergiert die Reihe.

Satz 2.8.2. *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Achtung! Die Umkehrung ist falsch.

Beweis. Aus Satz 2.8.1 folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : |a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Wenn es für alle k gilt, gilt es auch für $k = 0$, d. h:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : |a_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

Definition 2.8.3. Eine Folge, für die $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, heißt Nullfolge.

Bemerkung 13. Die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ist genau dann monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$. Wir können dann Satz 2.6.18 für Reihen umformulieren.

Satz 2.8.4. *Seien* $a_n \geq 0$. *Die dazugehörige Reihe* $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Wir wollen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ untersuchen. Wegen $\frac{1}{n!} \geq 0$ können wir den Satz anwenden.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Dabei wurde

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot k \Rightarrow k! > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{k-1}$$

verwendet.

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Die Partialsummen sind durch 3 beschränkt und nach Satz 2.8.4 konvergiert die Reihe.

Definition 2.8.5. Der Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e \tag{2.26}$$

heißt Eulersche Zahl.

Es gilt

$$2 < e < 3.$$

Wir sehen uns die Folge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ an:
Kontinuierliche Verzinsung:

- 1. Bank zahlt 1 mal im Jahr Zinsen: $1 \to 2$ (100% Zinsen)
- 2. Bank zahlt 2 mal im Jahr Zinsen: $1 \to \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$
- 3. Bank zahlt 3 mal im Jahr Zinsen: $1 \to \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$
- ...
- n. Bank zahlt n mal im Jahr Zinsen: $1 \to \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Wir stellen uns jetzt die Frage, ob der $\lim_{n\to\infty} x_n$ existiert und wenn ja, was für einen Wert er hat.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Alle Klammern sind kleiner 1, d. h:

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$$

Wir haben oben benutzt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Behauptung:(wird später bewiesen)

$$\prod_{\ell=1}^{n} (1 + x_\ell) \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \quad \text{wenn } \forall \ell : -1 \leq x_\ell \leq 0 \quad \text{oder } \forall \ell : x_\ell \geq 0 \tag{2.27}$$

Daraus ergibt sich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell}{n} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{1}{\ell!} \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{e}{2n}.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{e}{2n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

Damit gilt nach Satz 2.6.20:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass e keine rationale Zahl ist: $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis. Annahme: $e \in \mathbb{Q}$: d.h. $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$

Das ergibt

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

und nach Multiplikation mit $q!$ erhalten wir

$$p(q-1)! = \sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}$$

Da $p((q-1)!) \in \mathbb{N}$ und für $0 \leq n \leq q$ auch $\frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$ und damit auch $\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$. Allerdings gilt

$$\begin{aligned}0 &< \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)(q+2)\dots n} \leq \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)(q+1)\dots(q+1)}\\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{\ell}} = \frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} < 1 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$$

Das ist ein Widerspruch, d. h. $e \notin \mathbb{Q}$. □

Jetzt wollen wir die Behauptung (2.27) durch Induktion beweisen.

Beweis. Mit Hilfe von Induktion:

1. **Induktionsbasis:** $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$

2. **Induktionsvoraussetzung:**

$$\prod_{\ell=1}^{n}(1+x_\ell) \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell$$

3. **Induktionsbehauptung:**

$$\prod_{\ell=1}^{n+1}(1+x_\ell) \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} x_\ell$$

4. **Induktionsschritt:**

$$\prod_{\ell=1}^{n+1}(1+x_\ell) \geq \left(1 + \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)(1+x_{n+1}),\ \text{denn es gilt}(1+x_{n+1}) > 0\,\text{in beiden Fällen.}$$

$$\Rightarrow \prod_{\ell=1}^{n+1}(1+x_\ell) \geq \left(1 + \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)(1+x_{n+1}) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell + x_{n+1} + x_{n+1} \cdot \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell + x_{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} x_\ell$$

$$\text{Falls } -1 < x_\ell \leq 0 \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \leq 0 \quad \text{und } x_{\ell+1} \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \cdot \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \geq 0$$

$$\text{Falls } x_\ell \geq 0 \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \geq 0 \quad \text{und } x_{\ell+1} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \cdot \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \geq 0$$

$$\Rightarrow \prod_{\ell=1}^{n+1}(1+x_\ell) \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} x_\ell$$

□

Wir haben bei dem Konvergenzbeweis der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ eine Idee verwendet, die wir noch näher untersuchen wollen: wir haben eine unbekannte Reihe mit einer bekannten Reihe verglichen, um die Konvergenz zu beweisen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Satz 2.8.6 (Majorantenkriterium)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und es gelte $\forall n : 0 \leq b_n \leq a_n$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Beweis. Weil $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern ist, genügt es, die Beschränktheit der Partialsummen nachzuweisen.

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k =: M$$

Die Folge der Partialsummen ist beschränkt, die Glieder der Reihe sind positiv, d. h. die Reihe ist konvergent. □

Bemerkung 14. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *Majorante.*

Beispiel 22. Wir wollen wissen, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Es gilt
$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1$.
Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ eine konvergente Reihe ist, daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Beispiel 23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Es gilt

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \text{ und}$$

wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist auch konvergent.

Bemerkung 15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \qquad \text{ist konvergent } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

Satz 2.8.7. ***Minorantenkriterium*** *Sei $a_n \geq 0$ und es divergiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Sei weiters $b_n \geq a_n$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Dieser Satz ist die Umkehrung des Majorantenkriteriums.

Beweis. Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Widerspruch! □

Bemerkung 16. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *Minorante.*

Beispiel 24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$1 \leq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, daher divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Satz 2.8.8. ***(Verdichtungssatz)*** *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und positiv. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konvergent. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $2^k \geq n$. Dann gilt

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \leq \sum_{l=0}^{2^k} a_\ell = (a_0) + (a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k-1})$$

$$a_2 + a_3 \leq 2 \cdot a_2,\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4 \cdot a_4 \qquad \text{usw.}$$

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \leq a_0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \dots + 2^{k-1} \cdot a_{2^{k-1}} \leq a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

Man benutzt die Monotonie, um aufeinanderfolgende Glieder abzuschätzen. Die umgekehrte Richtung geht analog. □

Beispiel 25. Wir wollen sehen, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

und nach Satz 2.8.8 folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \Rightarrow \qquad \text{divergent.}$$

Bemerkung 17. Der Verdichtungssatz macht konvergente Reihen stärker konvergent und divergente Reihen stärker divergent.

Beispiel 26. Wir wollen sehen, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergiert

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

und nach Satz 2.8.8 folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{2}} = q < 1$ gilt, konvergiert die Reihe.

Definition 2.8.9. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x \leq M$$

m heißt dann *untere Schranke*, M *obere Schranke*.

Definition 2.8.10. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, A beschränkt. Dann bezeichnen wir mit:

- $\inf A$ „Infimum von A" die größte untere Schranke
- $\sup A$ „Supremum von A" die kleinste obere Schranke

Bemerkung 18. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, A beschränkt und $m = \inf A$ und $M = \sup A$. Dann gilt

$$\forall x \in A : m \leq x \leq M$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A : x > M - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A : x < m + \varepsilon.$$

2.8.1 Verfeinerung der Vergleichskriterien

Definition 2.8.11. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und seien:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \quad \text{größter Häufungswert von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{„Limes superior“}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \quad \text{kleinster Häufungswert von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{„Limes inferior“}$$

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist,

$$\forall M > 0 : \exists n : a_n > M,$$

dann setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten unbeschränkt ist,

$$\forall M > 0 : \exists n : a_n < -M$$

dann setzen wir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Bemerkung 19. lim sup und lim inf existieren für jede Folge.

Bemerkung 20. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $M = \limsup_{n\to\infty} a_n$ Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} \big| a_n > M - \varepsilon\} \quad \text{hat unendlich viele Elemente.}$$

Die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \big| a_n \geq M + \varepsilon\}$$

ist endlich, denn sonst würden wir ja einen größeren Häufungswert finden.

Genauso gilt für $m = \liminf_{n\to\infty} a_n$, dass

$$\forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} \big| a_n < M + \varepsilon\} \quad \text{unendlich viele Elemente hat.}$$

Die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \big| a_n \leq m - \varepsilon\}$$

ist endlich, denn sonst würden wir ja einen kleineren Häufungswert finden.

Bemerkung 21. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow A = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

d.h. die Folge hat den Grenzwert A.

Satz 2.8.12. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergent, $b_n \geq 0$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = M$. Wenn $M < \infty$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = 1$ in der Bemerkung 20 und erhalten

$$\frac{|b_n|}{|a_n|} \leq M + 1 \quad \text{stimmt für alle } n, \text{ mit Ausnahme von endlich vielen: } n \geq N_0.$$

Wir setzen

$$c_n = \begin{cases} b_n, & n < N_0 \\ (M+1) \cdot a_n, & n \geq N_0. \end{cases}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{N_0-1} b_n + (M+1) \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$$

konvergiert dann. Daher gilt nach dem Majorantenkriterium

$$b_n \leq c_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{konvergiert.}$$

Damit konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach Satz 2.8.6. □

Umgekehrt können wir das Minorantenkriterium verwenden, um Folgendes zu sehen.

Satz 2.8.13. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ divergent, $b_n \geq 0$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = m$. Wenn $m > 0$, dann divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Bemerkung 22. Besonders einfach sind die beiden Sätze 2.8.12 und 2.8.13, wenn

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

existiert.

Beispiel 27. Wir wollen jetzt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ vergleichen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1 < \infty$$

Wir haben bis jetzt nur mit Reihen gearbeitet, die positive a_n haben. Aber was passiert, wenn wir auch negative a_n zulassen?

Definition 2.8.14. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.

Satz 2.8.15. *Sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.*

Beweis. Weil $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; \forall k \in \mathbb{N} : \sum_{\ell=n}^{n+k} |a_\ell| < \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{\ell=n}^{n+k} a_\ell \right| \leq \sum_{\ell=n}^{n+k} |a_\ell| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach Satz 2.8.1. □

Beispiel 28.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \quad \text{mit} \quad \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \quad \text{die Reihe ist absolut konvergent}$$

Bemerkung 23. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann hat jede Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ denselben Wert (unendliches Kommutativgesetz). Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent ist, kann man durch Umordnen der Reihenglieder jeden beliebigen Wert als Summe bekommen.

Satz 2.8.16 (Leibniz-Kriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$.*

Beweis.

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n \cdot a_n$$

$$s_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-2} - (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$a_{2n-1} - a_{2n} > 0 \Rightarrow s_{2n-2} \geq s_{2n}$$

Die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

$$s_{2n+1} = a_0 - a_1 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1}$$

Die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

$$s_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0,$$

weil $a_0 - a_1 \geq 0$, $a_2 - a_3 \geq 0$, $a_{2n-2} - a_{2n-1} \geq 0$.
$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt. Zusammen mit der Monotonie ergibt das die Konvergenz. Somit existiert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

$$s_{2n+1} = a_0 + (-a_1 + a_2) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n}) - a_{2n-1} \leq a_0,$$

weil $-a_1 + a_2 \leq 0$, $-a_{2n-1} + a_{2n} \leq 0$.
$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt. Zusammen mit der Monotonie ergibt das die Konvergenz.

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - a_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = s$$

Dann gilt $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ konvergiert daher. □

Bemerkung 24. Der Beweis des Leibniz-Kriteriums zeigt, dass

$$s_{2n-1} < s < s_{2n}$$

für alle n gilt. Daraus erhalten wir

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Die n-te Partialsumme unterscheidet sich also von der Summe der Reihe um weniger als das erste nicht berücksichtigte Reihenglied, der „Abschneidefehler“ geht also gegen 0.

Beispiel 29. Wir sehen uns die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ an. $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, daher konvergiert die Reihe.

Bemerkung 25.

$$s_{10} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots - \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$|s - s_{10}| \leq \frac{1}{11} = 0,0909\ldots$$

Um k Nachkommastellen von s zu berechnen, braucht man 10^{k+1} Summanden.

Beispiel 30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{konvergiert, weil } \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ eine monoton fallende Nullfolge ist.}$$

Satz 2.8.17. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und gelte $\forall n : |b_n| \leq a_n$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. (absolut)*

Satz 2.8.18. *Quotientenkriterium: Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \textit{divergent} \tag{2.28}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \textit{konvergent} \tag{2.29}$$

Wenn $q = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ existiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn $q < 1$ und divergiert, wenn $q > 1$. Bei $q = 1$ ist keine Aussage möglich.

Beweis. Wir beginnen mit (2.28). Nach Definition des $\liminf$ sind nur endliche viele Werte kleiner als der $\liminf$, also

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \geq 1 \Rightarrow |b_{n+1}| \geq |b_n| \Rightarrow 0 < |b_n| \leq |b_{n+1}|$$

Damit gilt nicht $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und die Reihe divergiert.

Wir machen weiter mit (2.29) und setzen $q = \limsup_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} < 1$. Dann sind nach Definition des $\limsup$ nur endlich viele Werte größer als $r = \frac{1+q}{2} < 1$:

$$\exists N : \forall n > N : \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \leq r.$$

$$\Rightarrow |b_{n+1}| \leq r \cdot |b_n| \leq r^2 \cdot |b_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N+1} \cdot b_N$$

D. h. für $n > N$ gilt $|b_n| \leq r^{n-N} \cdot |b_N|$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n-N} \cdot |b_N|$ ist eine geometrische konvergente Reihe, daher ist $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ auch konvergent. $\square$

Die dritte Aussage folgt aus (2.28) und (2.29).

Beispiel 31. Wir sehen uns die folgende Reihe an:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad a_n = \frac{1}{n!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \ .$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \quad \text{die Reihe ist konvergent}$$

Beispiel 32. Sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}, & n \text{ gerade} \\ \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Wir können also keine Aussage über die Konvergenz der Reihe machen.

Beispiel 33.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad a_n = \frac{1}{n^k}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \frac{n^k}{(n+1)^k} \ .$$

Dieser Audruck geht für wachsendes n gegen 1, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, und es ist keine Aussage mit dem Quotientenkriterium möglich.

Satz 2.8.19. *Wurzelkriterium: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann gilt:*

$$\textit{Wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1, \textit{ dann divergiert die Reihe} \tag{2.30}$$

$$\textit{Wenn } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \textit{ dann konvergiert die Reihe} \tag{2.31}$$

Wenn $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existiert, so konvergiert die Reihe, wenn $q < 1$, und divergiert, wenn $q > 1$. Im Fall $q = 1$ ist keine Aussage möglich.

Beweis. Wir fangen mit (2.30) an:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \text{ es gibt unendlich viele } n, \text{ sodass } \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

$$\Rightarrow |a_n| > 1 \quad \text{unendlich oft, daher divergiert } \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Wir machen weiter mit (2.31):

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1+q}{2}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \left(\frac{1+q}{2}\right)^n \quad \text{die konvergente geometrische Reihe} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert}$$

Die dritte Aussage folgt aus den beiden ersten. □

Beispiel 34. Wir wollen bestimmen, ob folgende Reihe konvergent oder divergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{konvergiert.}$$

Beispiel 35. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert.}$$

Beispiel 36.

$$a \in \mathbb{R}, a > 0, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ?$$

$a > 1$

$$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n, x_n > 0 \Rightarrow a = (1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x_n + \binom{n}{2} \cdot {x_n}^2 + \cdots > 1 + n \cdot x_n$$

$$0 < x_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$a < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1.$$

$a = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ . \tag{2.32}$$

Daraus folgt, zum Beispiel, dass die offensichtliche Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$$

mit diesem Kriterium nicht bewiesen werden kann.

Beispiel 37.

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n \; (n > 1, x_n > 0) \Rightarrow n = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x_n + \binom{n}{2} \cdot {x_n}^2 + \cdots > 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot {x_n}^2$$

$$\Rightarrow {x_n}^2 < \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \Rightarrow 0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \; . \tag{2.33}$$

Daraus folgt, zum Beispiel, dass die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

mit diesem Kriterium nicht bewiesen werden kann.

Bemerkung 26. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Dann sind nach dem Wurzelkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot a_n$ konvergent.

Bemerkung 27. Frage: Unter welchen Bedingungen an die Reihen gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Bemerkung 28. Wenn eine Reihe nach dem Quotientenkriterium oder nach dem Wurzelkriterium konvergiert, konvergiert sie absolut.

Satz 2.8.20 (Cauchy-Produkt)**.** *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent. Dann gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \tag{2.34}$$

mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

2.9 Die komplexen Zahlen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Wir können schon sehr viele Gleichungen lösen, aber wir finden immer noch welche, für die wir keine Lösung haben, wie z. B: $x^2 + 1 = 0$.

Wir definieren i als die Lösung dieser Gleichung, setzen also $i^2 = -1$, und erweitern unser Zahlsystem um diese neue „imaginäre“ Zahl unter Verwendung der bisherigen Rechenregeln.

Definition 2.9.1. Wir definieren die Menge der *komplexen Zahlen* als

$$\mathbb{C} = \{a + bi \big| a, b \in \mathbb{R}\}.$$

2.9.1 Die quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \text{gesucht ist } x$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \frac{b}{a} = p \quad \frac{c}{a} = q \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

1. Fall:
$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0 \Rightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. Fall:
$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

   dann gibt es keine reelle Lösung. Wir verschaffen uns eine, indem wir das

Zahlensystem durch $i^2 = -1$ erweitern und erhalten als Lösung:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = i^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{p}{2} = \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Die Gleichung besitzt im 2. Fall keine reelle Lösung, aber eine komplexe Lösung.

2.9.2 Rechnen in $\mathbb{C}$

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Bemerkung 29. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann heißt:
$a = \Re(z)$, oder auch Re z, Realteil von z und
$b = \Im(z)$ oder auch Im z, Imaginärteil von z.

Definition 2.9.2. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. Dann ist $\overline{z} = a - bi$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* oder die Konjugierte.

Es gilt:

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- Für $z \in \mathbb{R}$: $z = \overline{z}$.

  Beweis: $a + bi \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + bi = a = a - bi \Rightarrow z = \overline{z}$
- $\overline{z \cdot \overline{z}} = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} = z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

  Beweis: Sei $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$. $z \cdot \overline{z} = a^2 - abi + bai - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2$.

Wir wollen ein multiplikatives Inverses ermitteln:
$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, $z \neq 0$, $z = a + bi$

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = 1 \quad \text{d. h. } \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Es gibt also zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ein Element $w \in \mathbb{C}$, sodass $z \cdot w = 1$,

$$w = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}.$$

Bemerkung 30. Die Operationen $+, \cdot$ erfüllen also $A_1 - A_4$, $M_1 - M_4$ und D, $\mathbb{C}$ ist also ein Körper.

Definition 2.9.3. Sei $z \in \mathbb{C}$, dann definieren wir $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$

$|\cdot|$ erfüllt die Dreiecksungleichung: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Jetzt wollen wir die Wurzel aus einer komplexen Zahl ziehen:
Wir suchen also ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z = a + bi$.
Wir setzten $w = u + iv$ und das setzen wir oben ein.
Wir erhalten $w^2 = u^2 + 2iuv - v^2 = a + bi$. Aus dieser Gleichung komplexer Zahlen bekommen wir 2 Gleichungen, wenn wir die Koeffizienten von Real- und Imaginärteil vergleichen.
$u^2 - v^2 = a$
$2uv = b$
Durch Quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} u^4 - 2u^2v^2 + v^4 &= a^2 \\ 4u^2v^2 &= b^2 \end{aligned}$$

und durch Addition der beiden Gleichungen

$$u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2+v^2)^2 = a^2 + b^2$$

Damit haben wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \sqrt{a^2+b^2} \\ u^2 - v^2 &= a \end{aligned}$$

aus denen wir durch Addition bzw. Subtraktion

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} + a) \\ v^2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a) \end{aligned}$$

erhalten. Es gilt dann

$$\begin{aligned} u &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} + a)} \\ v &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a)} \end{aligned}$$

Wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass $2uv = b$ gilt.

Satz 2.9.4 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom von Grad n $(n \geq 1)$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, (wobei man mehrfache Nullstellen auch entsprechend mehrfach zählt).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung Analysis T2 beweisen.

2.10 Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann nennt man z_n konvergent in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : |z_n - z| < \varepsilon$.
Wir schreiben dann: $z = \lim_{n\to\infty} z_n$

Bemerkung 31. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $z = x + iy$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x bzw gegen y konvergieren.

Alle Sätze über Folgen in $\mathbb{R}$ bleiben für Folgen in $\mathbb{C}$ gültig.

Beispiel 38.

$$z_n = x_n + iy_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$|z_n - (1+i)| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 - i\right| = \left|\frac{1}{n} + i\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{wir wählen } N = \lfloor\frac{2}{\varepsilon}\rfloor + 1$$

Bemerkung 32. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen als Folge komplexer Zahlen konvergiert. Durch Anwendung der selben Überlegungen wie im Abschnitt 2.8.1 erkennen wir, dass das Quotienten- und das Wurzelkriterium auch für Reihen mit komplexen Gliedern ihre Gültigkeit behalten.

3 Funktionen und Stetigkeit

3.1 Funktionen

Beispiel 39.

$$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to {\mathbb{R}_0}^+$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Beispiel 40.

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$$

Da f auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist, kann $x_1 = -x_2$ nicht passieren, d. h. f ist injektiv.

$$y \in \mathbb{R}^+, f(x) = y, x^2 = y \Leftarrow x = \pm\sqrt{y}$$

f ist also surjektiv. D. h. f ist auch bijektiv.

Beispiel 41.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; g(x) = x^2$$

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$$

D. h. f ist nicht injektiv. Das kann man auch durch ein Gegenbeispiel beweisen: $g(1) = g(-1) = 1$. Die Surjektivität beweist man wie oben, aber die Funktion ist nicht bijektiv.

Beispiel 42.

$$\begin{aligned} h: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

Der Beweis, dass die Funktion nicht injektiv ist, ist analog zu dem obigen Beispiel.

$$y \in \mathbb{R} \quad h(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \qquad \text{hat genau dann eine Lösung wenn } y \geq 0,$$

aber es gibt nicht für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung, d. h. h ist nicht surjektiv und daher auch nicht bijektiv.

Beispiel 43.

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

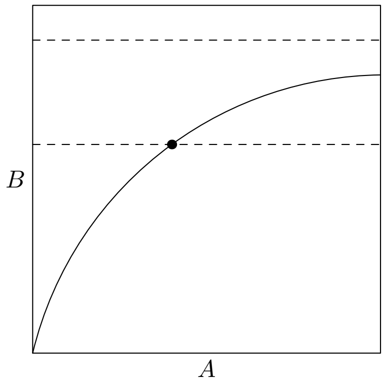


Abbildung 3.1: Graph einer injektiven Funktion

Wenn f injektiv ist, dann hat der Graph folgende Eigenschaft:
Eine waagerechte (horizontale) Gerade schneidet den Graphen in höchstens einem Punkt (jeder Wert wird höchstens einmal angenommen).

Wenn f surjektiv ist, dann hat der Graph folgende Eigenschaft:
Jede horizontale Gerade schneidet den Graphen in mindestens einem Punkt.

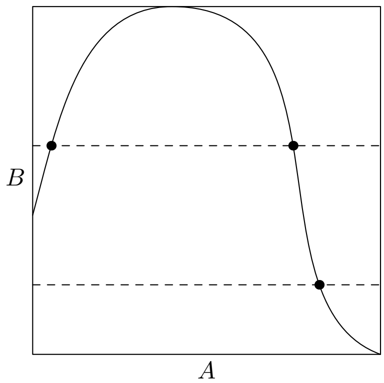


Abbildung 3.2: Graph einer surjektiven Funktion

Wenn f bijektiv ist, dann hat der Graph folgende Eigenschaft:
Jede horizontale Gerade schneidet den Graphen in genau einen Punkt.
Der Graph der Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ geht durch Spiegelung aus dem Graphen von f hervor.

Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Funktion.

Definition 3.1.1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f:

- monoton wachsend, wenn: $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- streng monoton wachsend, wenn: $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- monoton fallend, wenn: $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- streng monoton fallend, wenn: $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Definition 3.1.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann heißt f:

- gerade: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)$
- ungerade: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)$

Bemerkung 33. Sei f eine gerade Funktion. Der Funktionsgraph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.
Sei f eine ungerade Funktion.
$f(x) = -f(-x)$ dann gilt für $x = 0 : f(0) = -f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
Der Funktionsgraph ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Beispiel 44. $f(x) = x^2$ definiert eine gerade Funktion; $f(x) = x^3$ eine ungerade Funktion.

3.2 Stetige Funktionen

Wir wollen eine Eigenschaft reeller Funktionen besonders studieren: die Stetigkeit: „Welche reellen Funktionen vertragen sich mit der Konvergenz von Folgen?“

Definition 3.2.1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x \in I$. Dann ist f **stetig** in x, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Punkten aus I und mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, Folgendes gilt: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(x)$. Die Funktionsauswertung lässt sich mit dem Grenzwertübergang vertauschen:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \tag{3.1}$$

Beispiel 45.

$$\text{Gegeben sei eine Funktion } f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \\ x \mapsto x^2 \end{array} \text{ und ein } x_0 \in \mathbb{R}$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt $(x_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ({x_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)^2 = {x_0}^2 = f(x_0).$$

f ist also in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 46.

$$\begin{aligned} g : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Z. B. gilt $g(\frac{1}{2}) = 1, g(\sqrt{2}) = 0$.
Wir untersuchen die Stetigkeit.

1. Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$. Wir wählen $x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$. (Andernfalls wäre $n(x_n - x_0) = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.) Für alle n gilt $g(x_n) = 0$ und es gilt $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Allerdings gilt $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 \neq g(x_0) = 1$, somit ist g in x_0 nicht stetig.
2. Sei $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Sei $x_n = \frac{\lfloor n \cdot x_0 \rfloor}{n}$. Das ist äquivalent zu $n \cdot x_n - 1 < n \cdot x_0 \leq n \cdot x_n$ oder nach Division durch n ist es äquivalent zu $x_n - 1/n < x_0 \leq x_n$. Daraus folgt aber $x_0 \leq x_n \leq x_0 + 1/n$ und damit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach Konstruktion ist x_n rational, somit gilt $g(x_n) = 1$, aber $0 = g(x_0) \neq \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. g ist also in $x_0 \notin \mathbb{Q}$ nicht stetig.

Somit ist g überall unstetig.

Bemerkung 34. Diese Definition der Stetigkeit über Folgen eignet sich besonders gut, um die Unstetigkeit von Funktionen zu beweisen.

Definition 3.2.2. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dann setzen wir

1. $f \pm g : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) \pm g(x)$
2. $f \cdot g : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
3. Sei $N = \{x \in I \big| g(x) = 0\}$. Dann setze $\frac{f}{g} : I \setminus N \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.
4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann setze $\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \lambda \cdot f(x)$.

Satz 3.2.3. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$. Wenn f, g stetig in $x_0 \in I$, dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ stetig in x_0. Wenn $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.*

Beweis. Sei x_n eine beliebige Folge, die gegen x_0 konvergiert. Nach Voraussetzung wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$. Daher gilt auch

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Somit ist $f + g$ stetig in x_0. Der Beweis für die Subtraktion und die Multiplikation erhält man durch einfaches Austauschen aller „+“ durch „−“ bzw. „·“. Für die Division bemerken wir, dass wegen $g(x_0) \neq 0$ nach Definition der Konvergenz (wähle z.B. $\varepsilon = |g(x_0)/2|$) es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > N$ auch $g(x_n) \neq 0$ gilt. Dann kann obiges Argument wieder angewendet werden. □

Bemerkung 35. Sei $f : I_1 \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $g : I_2 \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0) \in I_2$ und sei $f(I_1) \subseteq I_2$, dann ist $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, f ist stetig $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
g ist stetig$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = g \circ f(x_0)$

□

Satz 3.2.4 (ε-δ-Kriterium)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f ist genau dann in x_0 stetig, wenn:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Bemerkung 36. Wenn x nahe genug bei x_0 liegt, dann gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. „Nahe genug“ wird durch δ beschrieben.

Beweis. 1. Wir nehmen zunächst an, dass (3.2) gilt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wir müssen zeigen, dass dann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach (3.2) gibt es dann ein $\delta > 0$, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Aufgrund der Konvergenz der Folge gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ auch $|x_n - x_0| < \delta$ gilt. Diese beiden Aussagen zusammen besagen, dass für alle $n > N$ auch $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das ist aber genau die Aussage, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

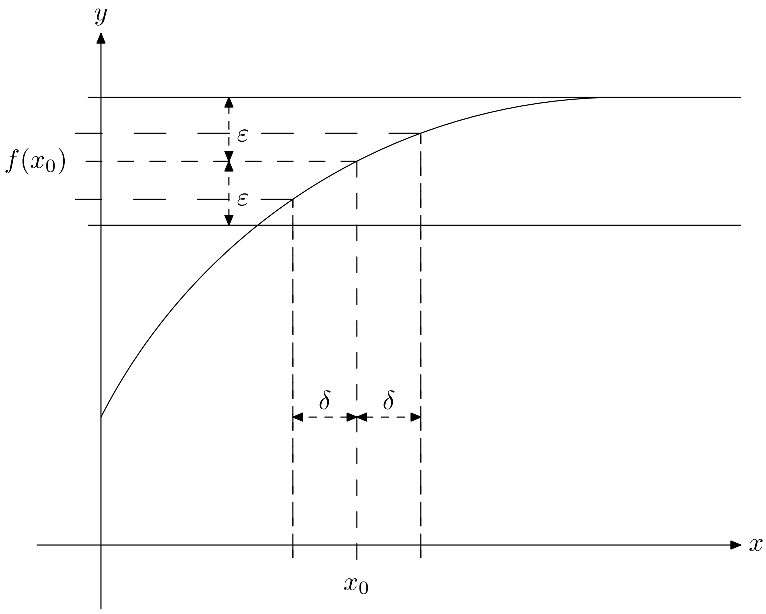


Abbildung 3.3: Zum ε–δ-Kriterium

2. Wir beweisen jetzt die Umkehrung. Nehmen wir an, f sei in x_0 stetig, aber (3.2) gelte nicht. Das heißt, dass

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in I : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Da (3.3) für alle positiven reellen δ gilt, gilt es insbesondere auch für jedes $\delta = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Das x, das für $\delta = 1/n$ nach (3.3) existiert, nennen wir x_n. Dann liest sich (3.3) als

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < 1/n \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Die Folge x_n konvergiert offensichtlich gegen x_0, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

□

Beispiel 47.

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Ist f in x_0 stetig?

Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$

Wir werden ein δ auswählen, dass kleiner oder gleich 1 sein wird. Für so ein δ gilt

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| \leq 1 + 2|x_0| \leq 2|x_0| + 1.$$

Somit gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2|x_0| + 1) \cdot |x - x_0| < (2|x_0| + 1) \cdot \delta.$$

Damit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ garantiert werden kann, setzen wir $\delta = \min(\varepsilon/(2|x_0| + 1), 1)$. Somit ist f stetig in x_0

Bemerkung 37. Wenn es gelingt, eine Ungleichung $|f(x)-f(x_0)| \leq c \cdot |x-x_0|$ für $|x-x_0| < \delta$ (für zwei Werte $c, \delta > 0$) zu zeigen, dann ist f an der Stelle x_0 stetig.

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq c \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

Definition 3.2.5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f stetig auf I, wenn f stetig in jedem $x_0 \in I$.

Bemerkung 38. Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in I$ ist eine lokale Eigenschaft; es werden Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von x_0 betrachtet.
Stetigkeit auf I ist eine globale Eigenschaft.

Satz 3.2.6. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$ und gelte $f(x_0) > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) > 0.$$

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

gilt. Aus dieser Ungleichung erhalten wir $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$ für $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

Satz 3.2.7 (Nullstellensatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und gelte $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

Beweis. Wir definieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_0 = a$ und $y_0 = b$. Wenn x_n und y_n bereits gegeben sind, dann setzen wir

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{wenn } f(\frac{x_n+y_n}{2}) < 0 \\ x_n, & \text{wenn } f(\frac{x_n+y_n}{2}) > 0 \end{cases} \qquad y_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{wenn } f(\frac{x_n+y_n}{2}) > 0 \\ y_n, & \text{wenn } f(\frac{x_n+y_n}{2}) < 0 \end{cases}$$

Wenn $f(\frac{x_n+y_n}{2}) = 0$ gilt, dann haben wir den gesuchten Punkt ξ bereits gefunden. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind Cauchy-Folgen mit demselben Grenzwert.

Weil $\forall n : f(x_n) < 0$ gilt, folgt $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$.

Ebenso folgt aus $\forall n : f(y_n) > 0 f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq 0$

also $f(\xi) \geq 0$

und $f(\xi) \leq 0$,

und daher $f(\xi) = 0$

□

Beispiel 48.

$$\begin{aligned} f : \; & [0, 2] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 - 2 \end{aligned}$$

$f(0) = -2$, $f(2) = 2$ d. h. $\exists \xi \in [0, 2]$, sodass $f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 - 2 = 0 \Rightarrow \xi = \sqrt{2}$.

Beispiel 49.

$$\begin{aligned} f: \quad & [0,2] \to \mathbb{R} \\ & x \to x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

f ist stetig auf $[0,1]$
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, dann gilt nach Satz 3.1:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^5 + 7x_n^4 + 3x_n^3 - 2x_n^2 + x_n - 3) = {x_0}^5 + 7{x_0}^4 + 3{x_0}^3 - 2{x_0}^2 + x_0 - 3$$

Weil $f(0) = -3$ und $f(1) = 7$ gibt es ein $\xi \in (0,1)$ mit

$$f(\xi) = 0 = \xi^5 + 7\xi^4 + 3\xi^3 - 2\xi^2 + \xi - 3$$

Man kann die Idee des Beweises von Satz 3.2.7 verwenden, um die Nullstelle beliebig genau zu berechnen. Die Methode ist allerdings nicht sehr effizient.

Satz 3.2.8 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig auf $[a,b]$. Dann nimmt f auf $[a,b]$ jeden Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$. Sei $T \in (f(a), f(b))$. Dann setzen wir $g(x) = f(x) - T$; g ist dann stetig. Es gilt $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Damit existiert nach Satz 3.2.7 ein ξ mit $g(\xi) = 0$, also $f(\xi) = T$. □

Satz 3.2.9. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} auch stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis. Sei $\eta \in (f(a), f(b))$. Wir möchten zeigen, dass dann f^{-1} in η stetig ist. Zu zeigen ist also

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in (f(a), f(b)) : |y - \eta| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\xi = f^{-1}(\eta)$, also $f(\xi) = \eta$. Wir können annehmen, dass ε so klein ist, dass $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \in [a,b]$. Dann gilt wegen der Monotonie

$$f(\xi - \varepsilon) < f(\xi) = \eta < f(\xi + \varepsilon).$$

Es gibt nun ein $\delta > 0$, sodass

$$f(\xi - \varepsilon) < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < f(\xi + \varepsilon). \tag{3.4}$$

Wenn $\eta - \delta < y < \eta + \delta$ gilt, dann muss wegen der Monotonie

$$f^{-1}(\eta - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(\eta + \delta)$$

gelten.

Nach (3.4) gilt $f^{-1}(\eta - \delta) > \xi - \varepsilon$ und $f^{-1}(\eta + \delta) < \xi + \varepsilon$. Damit gilt für $\eta - \delta < y < \eta + \delta$, dass

$$\xi - \varepsilon < f^{-1}(y) < \xi + \varepsilon.$$

Für y mit $|y - \eta| < \delta$ gilt also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$, die Umkehrfunktion f^{-1} ist daher stetig. □

Definition 3.2.10. Sei $S \subset \mathbb{R}$. Dann heißt S abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, auch $\lim_{n\to\infty} x_n \in S$ liegt.

Intervalle der Form $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

Satz 3.2.11. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $I = [a,b]$. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\forall x \in I : |f(x)| \leq M$$

gilt. f ist also beschränkt auf I.

Beweis. Angenommen, f wäre nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in I$, sodass $|f(x_n)| > n$ gilt. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt daher einen Häufungspunkt ξ (Satz 2.6.16); dieser liegt sogar in I, weil I ein abgeschlossenes Intervall ist. Es gibt also eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. Weil f stetig in ξ ist, gilt

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Andererseits ist die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ nach Definition unbeschränkt und kann daher nicht konvergent sein. Widerspruch. □

Satz 3.2.12. ***(Weierstraß)*** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $I = [a,b]$. Dann gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in I$, sodass*

$$\forall x \in I : f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}).$$

Beweis. Nach Satz 3.2.11 ist f auf I beschränkt. Daher ist die Menge $f(I)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Diese besitzt ein Infimum m und ein Supremum M. Wir müssen nur noch zeigen, dass f die Werte m und M annimmt. Es genügt, dies für M zu zeigen. Nach Definition des Supremums gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein x_n, sodass $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach Satz 2.6.16 einen Häufungspunkt ξ. Für diesen gilt

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

□

3.3 Potenzreihen

Definition 3.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, $x \in \mathbb{R}$, dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ Potenzreihe, x_0 nennt man Entwicklungspunkt.

Sehen wir uns das Quotientenkriterium für diese Art von Reihen an:

$$\left| \frac{a_{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}}{a_n \cdot (x-x_0)^n} \right| = |x - x_0| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} |x-x_0| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und < 1 ist, dann konvergiert die Reihe.
Oder wenn

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{konvergiert die Reihe}$$

Beispiel 50.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 51.

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

(siehe (2.34)), wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = (x+y)^n \Rightarrow c_n = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

$$\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

Sehen wir uns das Wurzelkriterium für Potenzreihen an (siehe: Satz 2.8.19)

$$\sqrt[n]{|a_n| \cdot |(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0|.$$

Damit konvergiert die Reihe für

$$|x-x_0| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

und divergiert für

$$|x-x_0| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

Definition 3.3.2. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe. Die reelle Zahl

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt der *Konvergenzradius* der Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$$

konvergiert für $|x-x_0| < R$ und divergiert für $|x-x_0| > R$. Wenn $R = 0$, heißt die Reihe nirgends konvergent, wenn $R = \infty$, heißt die Reihe beständig (oder überall) konvergent.

Satz 3.3.3. *Sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Beweis. Dazu betrachten wir für $|x - x_0| \leq \frac{R}{2}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n - a_0\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - x_0|^{n-1} \leq |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{R}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Es gilt dann für $|x - x_0| \leq \frac{R}{2}$ und

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{R}{2}\right)^{n-1},$$

$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0|$. Damit ist f stetig in x_0.

Sei nun $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Um die Stetigkeit von f in x_1 zu zeigen, schreiben wir die Potenzreihen in Potenzen von $(x - x_1)$ um:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - x_1) + (x_1 - x_0))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x_1)^k \cdot (x_1 - x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1 - x_0)^{n-k} \\ b_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (x_1 - x_0)^{n-k} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n \end{aligned}$$

Damit folgt wie oben die Stetigkeit von f in $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$. □

3.4 Elementare Funktionen

3.4.1 Exponentialfunktion

Definition 3.4.1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \exp(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

heißt *Exponentialfunktion*.

Nach Satz 3.3.3 ist exp auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Weitere Eigenschaften

- $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > \exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$ (wegen $\exp(-x) = 1/\exp(x)$)
- $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$, damit ist exp streng monoton wachsend und daher injektiv.
- exp nimmt jeden positiven reellen Wert an, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist also bijektiv.

Definition 3.4.2. Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ heißt der *(natürliche) Logarithmus*, $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $\ln(\exp(x)) = x$.

3.4.2 Die Winkelfunktionen

$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit dem gleichen Beweis konvergiert diese Reihe auch für alle $x \in \mathbb{C}$.

$$t \in \mathbb{R} : \exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Es gilt dann

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n \quad i^{2n+1} = i \cdot (-1)^n.$$

Damit können wir

$$\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

schreiben, oder

$$\Re(\exp(it)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und } \Im(\exp(it)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Definition 3.4.3. Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind durch

$$\exp(it) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

bzw.

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

definiert.

Bemerkung 39. Weiters gilt noch

- $\exp(-it) = \cos(t) - i \cdot \sin(t)$
- $\cos(t) = \frac{1}{2} \left(\exp(it) + \exp(-it) \right)$

- $\sin(t) = \frac{1}{2i}(\exp(it) - \exp(-it))$
- $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ gilt auch für $x, y \in \mathbb{C}$ (mit demselben Beweis)
- $\exp(is+it) = \exp(is) \cdot \exp(it)$
  $\exp(is+it) = \exp(i(s+t)) = \cos(s+t) + i \cdot \sin(s+t)$
  $\exp(is) \cdot \exp(it) = (\cos(s) + i \cdot \sin(s)) \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) =$
  $\cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) + i[\sin(s)\cos(t) + \cos(t) \cdot \sin(t)]$

Daraus folgen die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

Satz 3.4.4.

$$\cos(s+t) = \cos(s) \cdot \cos(t) - \sin(s) \cdot \sin(t)$$
$$\sin(s+t) = \sin(s) \cdot \cos(t) + \cos(s) \cdot \sin(t)$$

Bemerkung 40.

- $\exp(it) \cdot \exp(-it) = \exp(0) = 1 = (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2$
- $\cos(t+t) = \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$
- $\sin(t+t) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
  $\cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$
  $\Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$
  D. h.: Cosinus ist eine gerade Funktion.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  $\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$
  $\sin(x) = -\sin(-x)$
  D. h.: Sinus ist eine ungerade Funktion.

Wir betrachten $\cos(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}$. Das ist eine alternierende Reihe mit $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ und ist monoton fallend. Nach unseren Überlegungen bei dem Leibniz-Kriterium sind die Partialsummen abwechselnd größer bzw. kleiner als der Grenzwert.

Sei $0 \leq x < 1$ dann ist $a_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ monoton fallend.
$\cos(x) \leq 1$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} > 0$
$\cos(2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{(2n)!}$, $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$
$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{2}{3}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend erst ab $n \geq 1$
$\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$, $\cos(1) > 0$
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Wir sind nun in der Lage die Zahl π zu definieren. Wir werden erst später sehen, dass diese Definition etwas mit dem Kreisumfang bzw. der Kreisfläche zu tun hat.

Definition 3.4.5.

$$\frac{\pi}{2} = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ \big| \cos(x) = 0\}$$

Nach der obigen Überlegung gilt: $1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow 2 < \pi < 4$.

Wir wollen $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ berechnen.
Aus der Definition von π und den schon bekannten Eigenschaften der Funktionen sin und cos folgt nun:
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ folgt $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ also auch $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$.
$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$ für $x > 0$ und $x > \frac{x^3}{6} \Rightarrow 6 > x^2 \Rightarrow x \leq \sqrt{6}$ gilt
$\sin(x) > 0$ für $0 \leq x \leq \sqrt{6}$ und damit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Aus der Doppelwinkelformel folgt: $\cos(\pi) = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1$, $\sin(\pi) = 0$

Aus den Additionstheoremen ergibt sich weiters: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\cos(2\pi) = 2\cos^2(\pi) - 1 = 1$, $\sin(2\pi) = 0$

Indem wir in die Additionstheoreme einsetzen erhalten wir:
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cdot \cos(2\pi) - \sin(x) \cdot \sin(2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cdot \cos(2\pi) + \cos(x) \cdot \sin(2\pi) = \sin(x)$
Sinus und Cosinus haben also die Periode von 2π.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x) = \sin(x)$
Später werden wir sehen, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ eine streng monoton fallende Funktion ist. Somit ist sie bijektiv und besitzt eine Umkehrabbildung, den *Arcuscosinus*

$$\begin{aligned} \arccos :\ & [-1,1] \to [0,\pi] \\ & x \mapsto \cos^{-1}(x) \end{aligned}$$

Ebenso ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend. Damit ist sie bijektiv und besitzt eine Umkehrabbildung, den *Arcussinus*

$$\begin{aligned} \arcsin :\ & [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ & x \mapsto \sin^{-1}(x) \end{aligned}$$

Sei $y \in [-1, 1]$. Wir suchen alle Lösungen von $\cos(x) = y$?
Wenn $x_0 = \arccos y$ eine Lösung ist, dann sind $x_0 + 2k\pi$ weitere Lösungen.
Wegen $\cos(2\pi - x) = \cos(2\pi)\cos(x) + \sin(2\pi)\sin(x) = \cos(x)$ ist dann $2\pi - x$ eine weitere Lösung und damit auch $2\pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Dann sind alle Lösungen durch
$\{x \in \mathbb{R} \big| \cos(x) = y\} = \{\arccos(y) + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(y) + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$

gegeben. Für $y = 0$ ergibt sich wegen $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$:
$\{x \in \mathbb{R} \big| \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$

Für $y = 1$ erhalten wir: $\cos(x) = 1$,
$\{x \in \mathbb{R} \big| \cos(x) = 1\} = \{+0 + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-0 + 2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$

Für $y=-1$ erhalten wir: $\cos(x)=-1$,
$\{x\in\mathbb{R}\big|\cos(x)=-1\}=\{\pi+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\pi+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}=\{(2k+1)\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$

Sei $y\in[-1,1]$, wann gilt $\sin(x)=y$?
$x_0=\arcsin(y)$ ist eine Lösung; $x_0+2k\pi$ sind weitere Lösungen wegen
$\sin(\pi-x)=\sin(\pi)\cos(x)-\cos(\pi)\sin(x)=\sin(x)$
und $\pi-x_0+2k\pi$ weitere Lösungen.
Also gilt $\{x\in\mathbb{R}\Big|\sin(x)=y\}=\{\arcsin(y)+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\arcsin(y)+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$

Für $y=0$ ergibt sich
$\{x\in\mathbb{R}\big|\sin(x)=0\}=\{2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2k+1)\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}=\{k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$

Für $y=\pm1$ ergibt sich
$\{x\in\mathbb{R}\big|\sin(x)=1\}=\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}=\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$
$\{x\in\mathbb{R}\big|\sin(x)=-1\}=\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}=\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$

Beispiel 52. Seien $a,b\in\mathbb{R}$ und $a^2+b^2=1$. Gibt es ein $x\in[0,2\pi]$, sodass $\cos(x)=a$ und $\sin(x)=b$?
$a\in(-1,1):\cos(x)=a\Rightarrow x=\arccos(a)$ oder $x=2\pi-\arccos(a)$
$a^2+b^2=1\Rightarrow b=\pm\sqrt{1-a^2}$
Die Gleichung $\cos(x)=a$ hat in $[0,2\pi]$ 2 Lösungen. Die beiden Lösungen haben zugehörige Werte des $\sin(x)$, mit unterschiedlichen Vorzeichen. Einer dieser beiden Werte erfüllt daher $\sin(x)=b$
Für $a=1$ gilt $b=0$.
Wegen $\cos(x)=a=1\Rightarrow x=0\Rightarrow\sin(0)=0=b$, und damit $x=0$
Für $a=-1$ gilt $b=0$ und damit $x=\pi$
Durch $K=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\big|a^2+b^2=1\}$ ist ein Kreis mit Radius $R=1$ gegeben.
$K=\{(\cos(x),\sin(x))\big|x\in[0,2\pi)\}$
Nach der obrigen Überlegung ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} f:\ & [0,2\pi)\to K\\ & t\mapsto(\cos(t),\sin(t)) \end{aligned}$$

bijektiv.

Anwendung
$(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$, $a=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, b=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$a^2+b^2=1\Rightarrow\exists t\in[0,2\pi), a=\cos(t), b=\sin(t), x=r\cdot\cos(t), y=r\cdot\sin(t)$
Wir setzen:

$$\varphi=\begin{cases} t, & t\in[0,\pi]\\ t-2\pi, & t\in(\pi,2\pi)\end{cases}$$

$\cos(\varphi)=\cos(t)\wedge\sin(\varphi)=\sin(t)\Rightarrow\varphi\in(-\pi,\pi]$
Wir können jeden Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ in der Form $x=r\cdot\cos(\varphi), y=r\cdot\sin(\varphi)$ mit

$r \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\pi, \pi]$ schreiben.
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Abstand vom Ursprung
φ ist der Winkel mit der x-Achse
$(r, \varphi), r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in (-\pi, \pi]$ beschreiben alle Punkte der Ebene mit Ausnahme des Ursprungs.
Für den Ursprung muss $r = 0$ sein und φ beliebig.
(r, φ) nennt man Polarkoordinaten
$(r, \varphi) \mapsto (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Beispiel 53. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z = x + iy$
$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = \exp(i\varphi), \varphi \in (-\pi, \pi] \Rightarrow z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$
$|z|$ = Betrag von z, Abstand vom Ursprung
φ = Argument von z, $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$
$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \operatorname{Arg}(z))$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} \tan(x):\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cot(x):\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

heißen Tangens und Cotangens.

Bemerkung 41. Der Tangens ist nicht definiert, wenn $\cos(x) = 0$ ($\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)
Der Cotangens ist nicht definiert, wenn $\sin(x) = 0$ ($\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$).
$D_f(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$D_f(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Bemerkung 42. Der Sinus ist streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.
Der Cosinus ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$ $(\tan(-x) = -\tan(x))$
$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist auch injektiv
Der Tangens ist stetig auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Sei $M \in \mathbb{R}^+$, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\cos(x) < \frac{1}{2M}$, wenn $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right)$ (weil $\cos(x)$ stetig ist)
Andererseits gilt $\sin(x) > \frac{1}{2}$ für $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Daher gilt: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2M}} = M \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\tan(x)$ wird also in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ beliebig groß. Ebenso zeigt man, dass $\forall M > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \delta\right) : \tan(x) < -M$.

Sei $y \in \mathbb{R}$, dann gibt es $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sodass $\tan(x_1) < -|y|$ und $\tan(x_2) > |y|$.
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sodass $\tan(x) = y$. Der Tangens ist also surjektiv. Zusammen mit den obigen Informationen ist $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv.
Ebenso kann man zeigen, dass $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend und bijektiv ist.

Definition 3.4.6.

$$\begin{aligned}\arctan: \ & \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \\ & y \mapsto \tan^{-1}(y)\end{aligned}$$

heißt *Arcustangens.*

$$\begin{aligned}\operatorname{arccot}: \ & \mathbb{R} \to (0, \pi) \\ & y \mapsto \cot^{(-1)}(y)\end{aligned}$$

heißt *Arcuscotangens.*

Bemerkung 43. $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$
Der Tangens hat eine Periode von π.
Der Cotangens hat auch eine Periode von π: $\cot(x+\pi) = \cot(x)$

3.4.3 Der natürliche Logarithmus

Wir haben den Logarithmus bereits als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert.

$$\begin{aligned}\ln: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \exp^{-1}(x)\end{aligned}$$

Der Logarithmus ist als Umkehrfunktion der stetigen monoton wachsenden Exponentialfunktion nach Satz 3.2.9 stetig.

Wir wissen, dass: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
$\ln(\exp(x+y)) = \ln(\exp(x) \cdot \exp(y)), \quad \exp(x) = u, \quad \exp(y) = v$
$x = \ln(u)$, $y = \ln(v)$
$x + y = \ln(u) + \ln(v) = \ln(u \cdot v)$

Bemerkung 44. $\forall u, v \in \mathbb{R}^+ : \ln(u) + \ln(v) = \ln(u \cdot v)$

Definition 3.4.7. Sei $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$
Im Besonderen: $e^x = \exp(x)$

Bemerkung 45. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$; $x \mapsto a^x$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Bemerkung 46. $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \alpha^x$ stetig.

3.4.4 Wurzelziehen in $\mathbb{C}$

Für gegebenes $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, wollen wir die Gleichung $z^n = w$ nach z auflösen.
Dazu benötigen wir die Polarkoordinatendarstellung $z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$
$z^n = |z|^n \cdot (\exp(i\varphi))^n = |z|^n \cdot \exp(in\varphi)$
$w = |w| \cdot \exp(i\psi)$
$|z|^n \cdot \exp(in\varphi) = |w| \cdot \exp(i\psi)$
1. Lösung:
$|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$, reelle n-te Wurzel
$\exp(in\varphi) = \exp(i\psi)$
Zur Erinnerung: $\exp(it) = \exp(it) \cdot \exp(2\pi i)^k$ weil: $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$
$\Rightarrow \exp(in\varphi) = \exp(i\psi) \cdot \exp(2\pi i)^k$
$\exp(in\varphi) = \exp(i\psi + 2k\pi i)$ ist auf jeden Fall dann richtig, wenn $n\varphi = \psi + 2k\pi$ gilt.
Also $\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$

$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot \exp\left(i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$ sind Lösungen der Gleichung $z^n = w$
$\ell = k + n : \frac{2\ell\pi}{n} = \frac{2(k+n)\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi$
Wenn man für k Werte einsetzt, die sich um ein Vielfaches von n unterscheiden, dann ergibt sich derselbe Wert für z
$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot \exp\left(i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, \ldots, n-1$ sind alle Lösungen der Gleichung $z^n = w$

Beispiel 54. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung: $z^3 = -4 + 3i = w$
$|w| = \sqrt{16+9} = 5$
Gesucht ist ψ, sodass: $-4 + 3i = 5 \cdot \exp(i\psi) = 5 \cdot (\cos(\psi) + i\sin(\psi))$
$\cos(\psi) = -\frac{4}{5}$; $\sin(\psi) = \frac{3}{5}$;$0 < \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \pi \Rightarrow \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ ist eine Lösung und die 2. Lösung ist $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$
$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) < \pi$ Wir haben: $\psi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ damit gilt auch $\sin(\psi) > 0$ und daher $\sin(\psi) = \frac{3}{5}$
Die Lösungen von $z^3 = -4 + 3i = w$ sind:

- $z_0 = \sqrt[3]{5} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$
- $z_1 = \sqrt[3]{5} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2\pi i}{3}\right)$
- $z_2 = \sqrt[3]{5} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2 \cdot \frac{2\pi i}{3}\right)$

Und weiter:

- $z_0 = \sqrt[3]{5} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right) = 1.15061... + 1.26495...i$
- $z_1 = \sqrt[3]{5} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1.67079... + 0.363984...i$
- $z_2 = \sqrt[3]{5} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 0.520175... - 1.62894...i$

Beispiel 55. $z^4 = -1$, $|w| = 1$
Wir suchen ψ, sodass $\exp(i\psi) = -1$ mit $-\pi < \psi < \pi$
$\cos(\psi) = -1 \wedge \sin(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = \pi$

- $z_0 = \sqrt[4]{1} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{4}\right)$
- $z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \exp\left(i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)\right)$
- $z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \exp\left(i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)\right)$
- $z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \exp\left(i \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)\right)$

Und weiter:

- $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $z_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
- $z_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - 1 \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
So kann man die anderen Werte ausrechnen.

- $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
- $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$
- $z_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$
- $z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

Bemerkung 47. Formel von De Moivre

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \tag{3.5}$$

Bemerkung 48. Wir haben nebenbei die Gleichung $\exp(z) = w, w \neq 0$ gelöst.

$\exp(z) = \exp(\ln(|w|) + i\operatorname{Arg}(w))$
$\Rightarrow z = \ln|w| + i\operatorname{Arg}(w)$ ist eine Lösung
$\exp(z) = \exp(\ln(|w|) + i\operatorname{Arg}(w)) \cdot \exp(2k\pi i), k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \exp(z) = \exp(\ln|w|) + i\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i)$
$\Rightarrow z = \ln|w| + i \cdot \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ sind alle Lösungen von $\exp(z) = w$.

Bemerkung 49. $\log(w) = \ln(w) + i\operatorname{Arg}(w)$ heißt der komplexe Logarithmus. Diese Funktion wird in der Analysis T2 noch eine wichtige Rolle spielen.

Beispiel 56. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}(\neq \exp(x), \neq -\exp(x))$
Die Exponentialfunktion ist weder gerade noch ungerade.

Bemerkung 50. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann gibt es eine gerade Funktion $f_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine ungerade Funktion $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass:
$f = f_g + f_u$, f_g ist der gerade Anteil von f und f_u ist der ungerade Anteil von f.

Beweis. $f(x) = f_g(x) + f_u(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (1)
$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f_g(-x) + f_u(-x) = f_g(x) - f_u(x)$ (2)
(1)+(2) $\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \cdot f_g(x) \Rightarrow f_g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$
(1)−(2) $\Rightarrow f(x) - f(-x) = 2 \cdot f_u(x) \Rightarrow f_u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ ☐

Beispiel 57. $f(x) = \exp(x)$
$f_g(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} =: \cosh(x)$ *Cosinus hyperbolicus*
$f_n(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} =: \sinh(x)$ *Sinus hyperbolicus*

3.4.5 Die Hyperbelfunktionen

Definition 3.4.8. *Sinus hyperbolicus*:

$$\begin{aligned}\sinh :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))\end{aligned}$$

Cosinus hyperbolicus:

$$\begin{aligned}\cosh :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))\end{aligned}$$

Aus den Potenzreihen für exp. ergeben sich die Potenzreihen für die Hyperbelfunktionen.

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Durch Einsetzen der Definition ergibt sich

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

Bemerkung 51. Additionstheoreme für sinh **und** cosh

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

Beispiel 58. Wir wollen die Lösungen $\sinh(x) = y$ bestimmen.
$\frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) = y$, $\exp(x) = T$ und $\exp(-x) = \frac{1}{T}$
$\Leftrightarrow T^2 - 1 = 2Ty$, $T \neq 0$
$T^2 - 2Ty - 1 = 0 \Rightarrow T_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$, $\sqrt{y^2+1} > |y|$
$T_2 = y - \sqrt{y^2+1}$ ergibt $T < 0$ d. h. sie ist nicht verwendbar
$\exp(x) = T = y + \sqrt{y^2+1}$
$\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Definition 3.4.9. Die Umkehrfunktion des sinh

$$\begin{aligned} \text{Arsinh}: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{aligned}$$

heißt *Area sinus hyperbolicus.*

Beispiel 59. Wir wollen die Lösung von $cosh(x) = y$ bestimmen, zuerst bemerken wir, dass $\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \geq 1$ und dass wegen
$\cosh(x) = \cosh(-x)$ jeder Wert zweimal angenommen wird.
Sei $y \geq 1$, dann suchen wir alle Lösungen der Gleichung: $\cosh(x) = y$
$\Leftrightarrow$: $\exp(x) + \exp(-x) = 2y$, $\exp(x) = T, \exp(-x) = \frac{1}{T}$
$\Rightarrow T^2 - 2Ty + 1 = 0 \Rightarrow T_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$
$\Rightarrow x = \pm\ln(y + \sqrt{y^2-1})$
$(y + \sqrt{y^2-1})(y - \sqrt{y^2-1}) = y^2 - y^2 + 1 = 1$
$\Rightarrow \pm\ln(y + \sqrt{y^2-1})$ sind alle Lösungen der Gleichung: $\cosh(x) = y$

Definition 3.4.10. Die Umkehrfunktion des cosh

$$\begin{aligned} \text{Arcosh}: \quad & [1,\infty) \to \mathbb{R}_0^+ \\ & y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \end{aligned}$$

heißt *Areacosinus hyperbolicus.*

$\forall t \in \mathbb{R}\ \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ Hyperbel
Sei $(x,y) \in H$, dann gilt $x \geq 1$ und $\cosh(t) = x$ hat 2 Lösungen: $t = \pm \operatorname{Arcosh}(x)$.
$y = \sinh(t)$
Wir wählen das Vorzeichen von t gleich dem Vorzeichen von y. Damit haben wir für jeden Punkt $(x,y) \in H$ ein $t \in \mathbb{R}$ gefunden, sodass $(x,y) = (\cosh(t), \sinh(t))$.
Umgekehrt beschreiben die Punkte $(\cosh(t), \sinh(t)), t \in \mathbb{R}$ einen Hyperbel-Ast.

Definition 3.4.11. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tanh(x): \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{aligned}$$

heißt *Tangens hyperbolicus*. tanh ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Die Abbildung

$$\begin{aligned} \coth(x): \ & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \end{aligned}$$

heißt *Cotangens hyperbolicus*. coth ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

$\tanh(x) = \frac{\frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))}{\frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))} = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}$
Es gilt dann wegen $\exp(2x) > 0$

$$-1 < \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1} < 1.$$

Der Tangens hyperbolicus nimmt nur Werte aus $(-1,1)$ an.
Sei $y \in (-1,1)$ dann suchen wir die Lösungen von $\tanh(x) = y$
$\tanh(x) = y = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}, \exp(2x) = T$

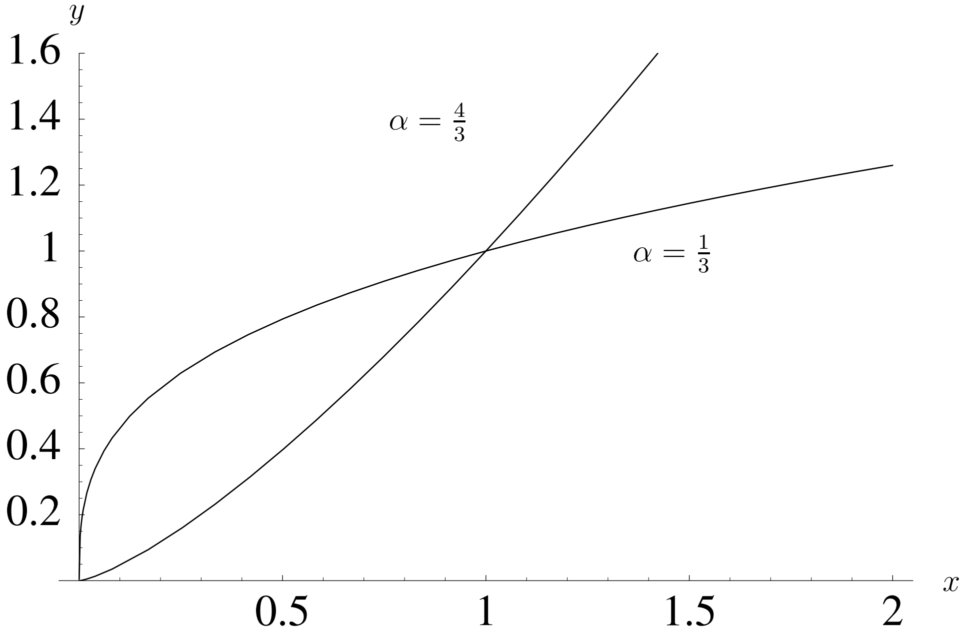
$y = \frac{T-1}{T+1} \Rightarrow yT + y = T - 1 \Rightarrow (y-1)T = -y - 1$

$T = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) =: \operatorname{Artanh}(y).$

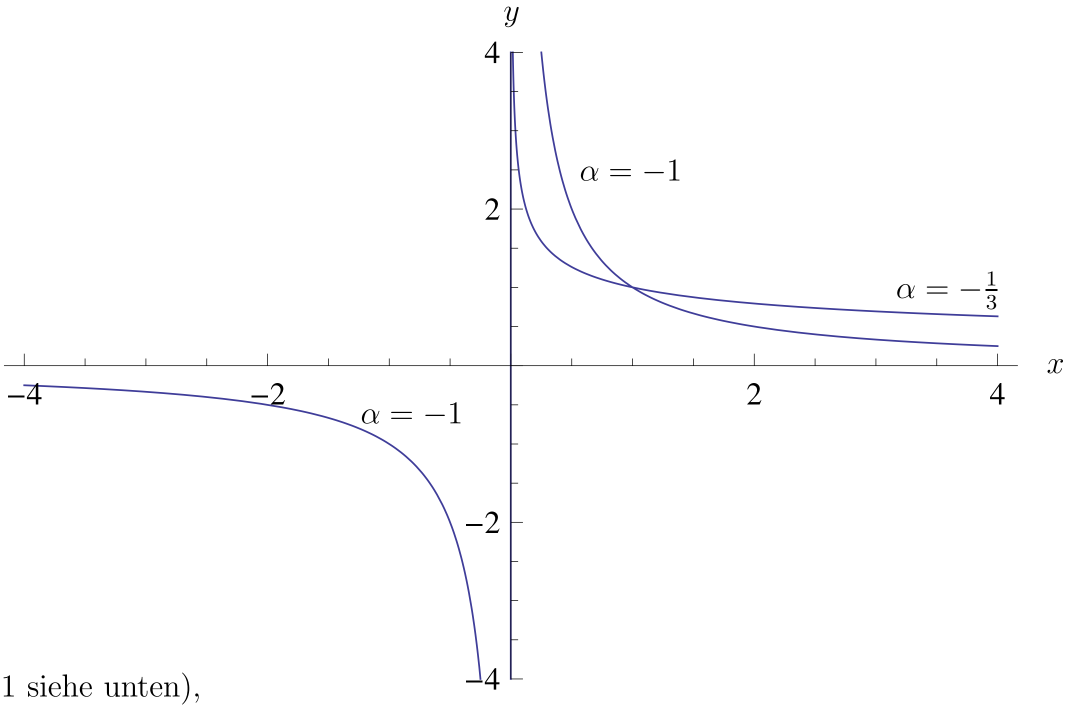
3.5 Graphen der elementaren Funktionen

3.5.1 Potenz- und Wurzelfunktionen

Für $\underline{\alpha > 0}$ ist $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^\alpha$, eine streng monoton wachsende, bijektive Funktion; sie ist für $0 < \alpha < 1$ konkav, für $\alpha > 1$ konvex.
Es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
Die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$.



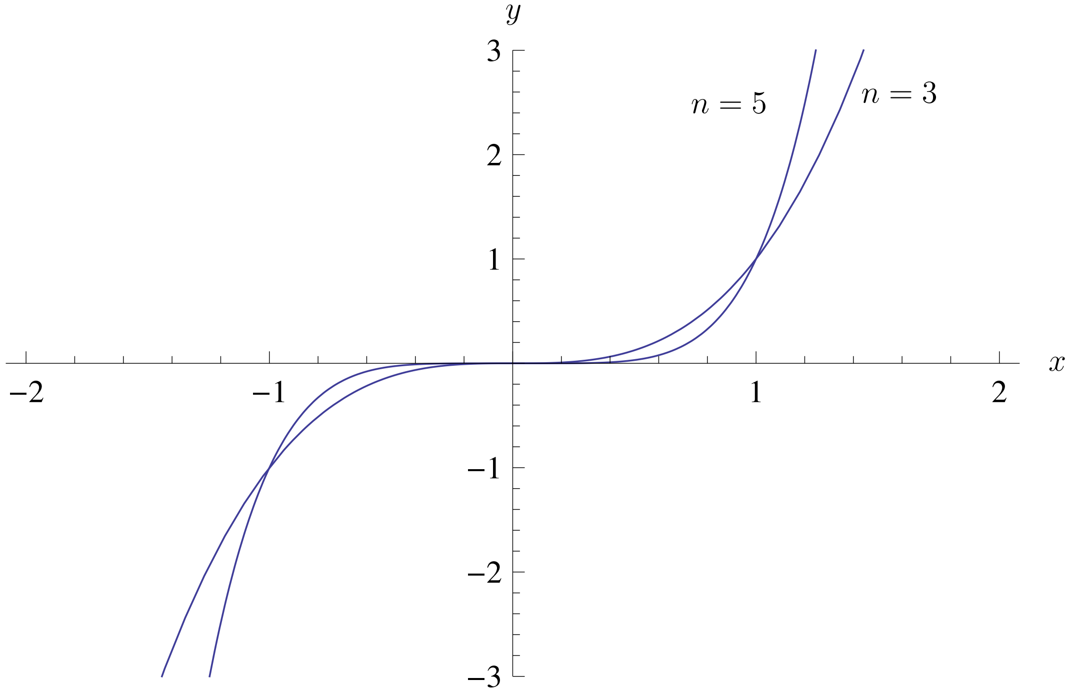
Für $\underline{\alpha < 0}$ ist $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^\alpha$,
eine streng monoton fallende, bijektive, konvexe Funktion.
Es gilt $f(1) = 1$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$.



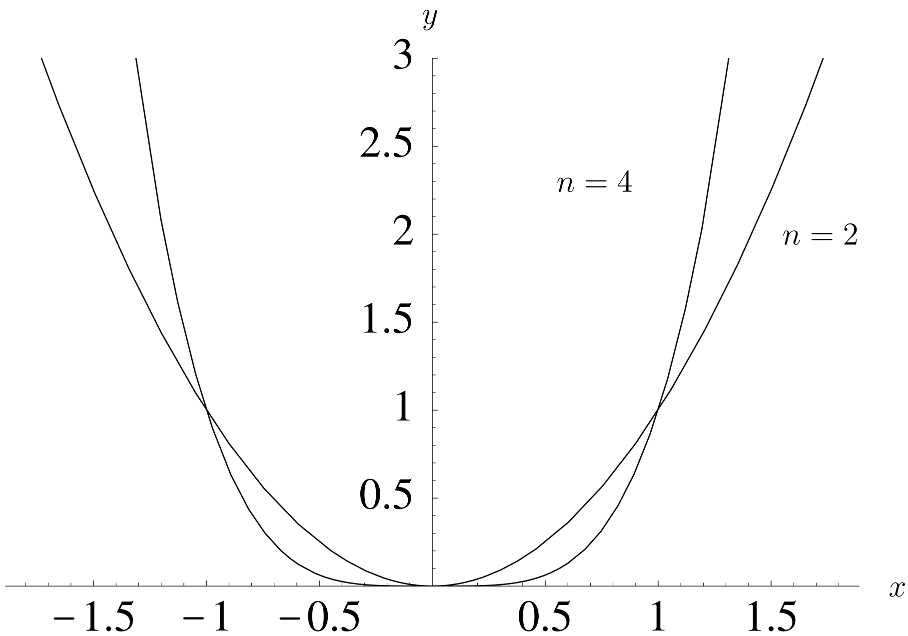
(Für $\alpha = -1$ siehe unten),

Sonderfälle: Der Exponent ist eine ganze Zahl:

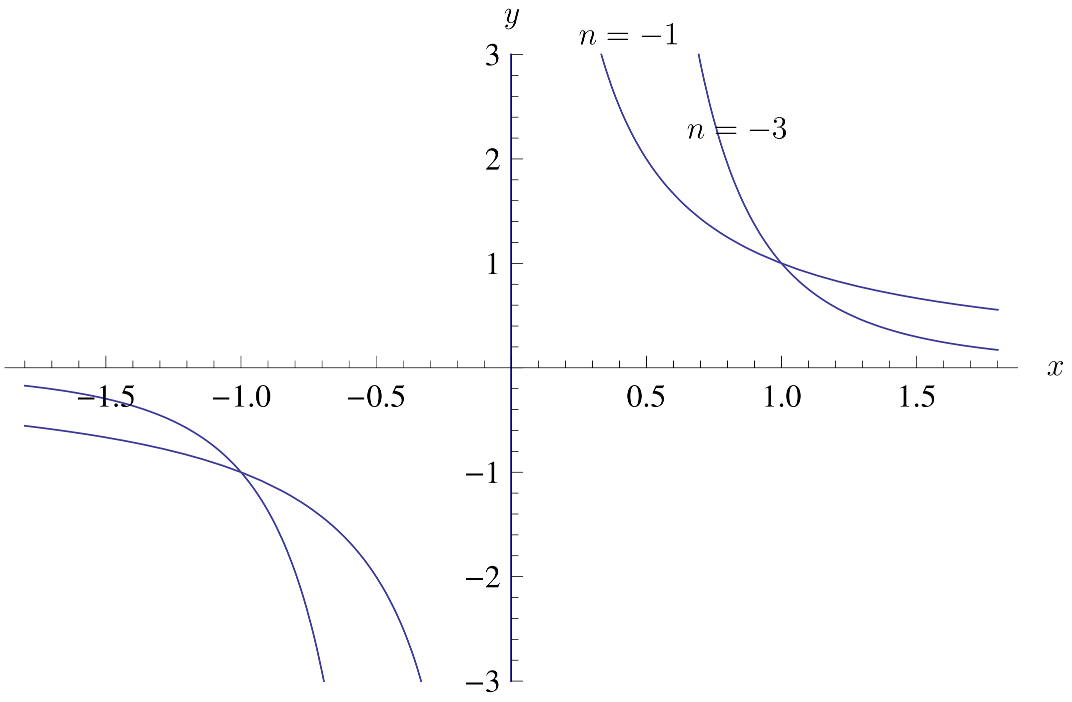
Für $\underline{n \in \mathbb{N},\ n \text{ ungerade}}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, streng monoton wachsend, bijektiv,
auf $\mathbb{R}^-$ konkav, auf $\mathbb{R}^+$ konvex, und es gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}$.



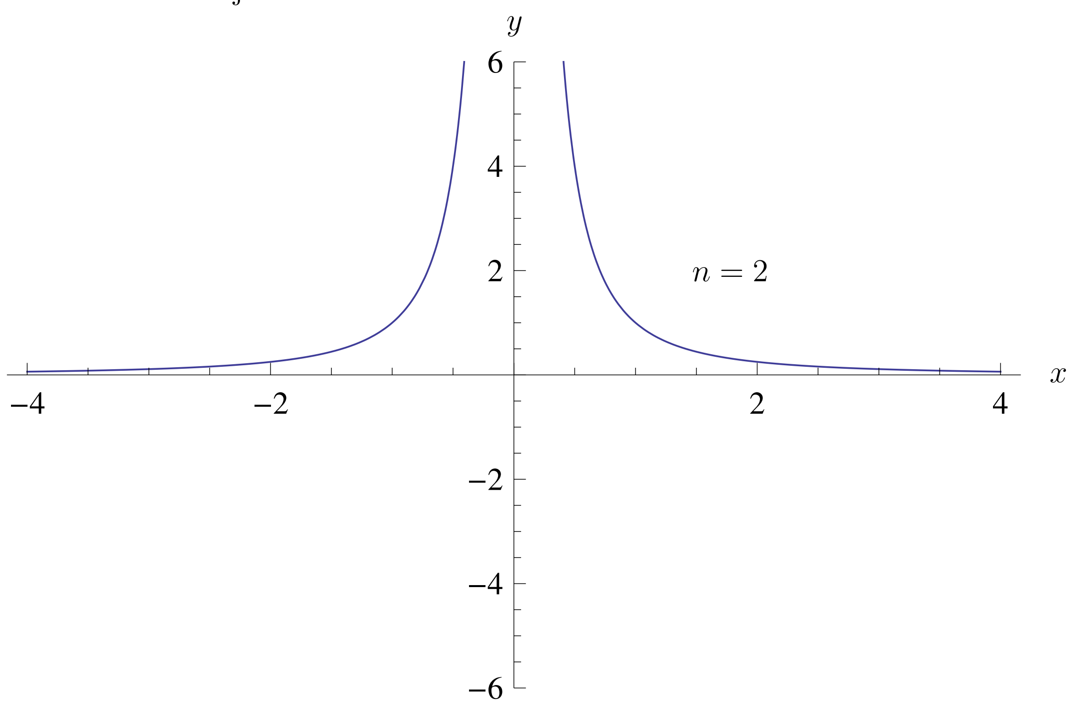
Für $\underline{n \in \mathbb{N},\ n \text{ gerade}}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^n$, konvex,
auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton fallend und bijektiv,
auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend und bijektiv,
und es gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}_0^+$.



Für $\underline{n \in \mathbb{N},\ n \text{ ungerade}}$ ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = x^{-n}$,
auf $\mathbb{R}^-$ konkav, streng monoton fallend, injektiv und es gilt $\mathrm{Bild}(f|_{\mathbb{R}^-}) = \mathbb{R}^-$.
Auf $\mathbb{R}^+$ ist f konvex, streng monoton fallend, injektiv und es gilt $\mathrm{Bild}(f|_{\mathbb{R}^+}) = \mathbb{R}^+$.

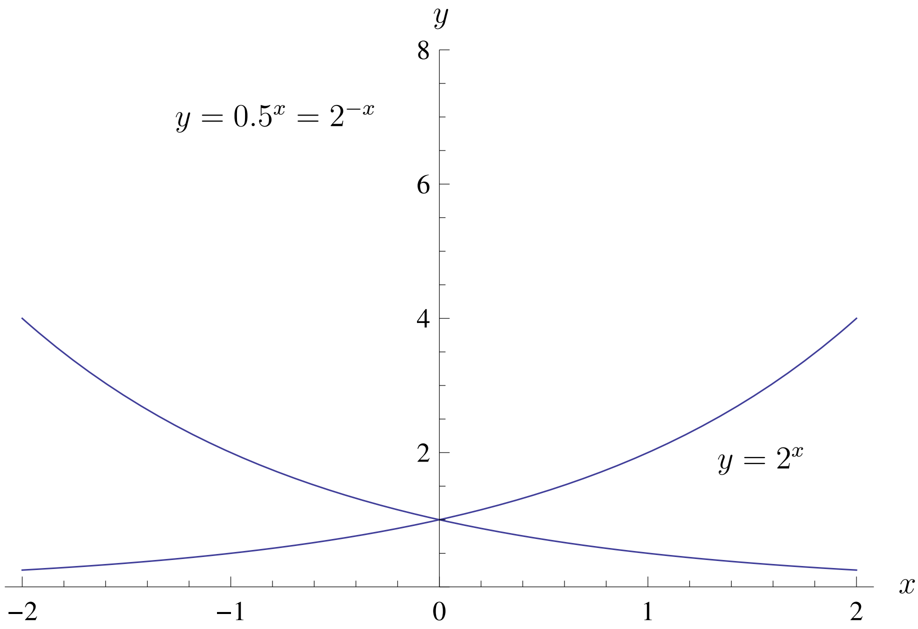


Für $\underline{n \in \mathbb{N},\ n \text{ gerade}}$ ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{-n}$, konvex.
Auf $\mathbb{R}^-$ ist f streng monoton wachsend und bijektiv,
auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend und bijektiv.

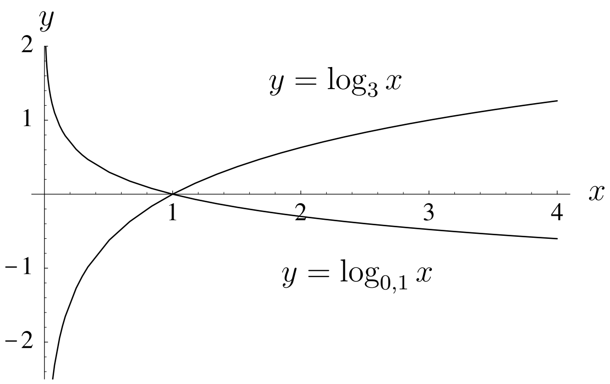


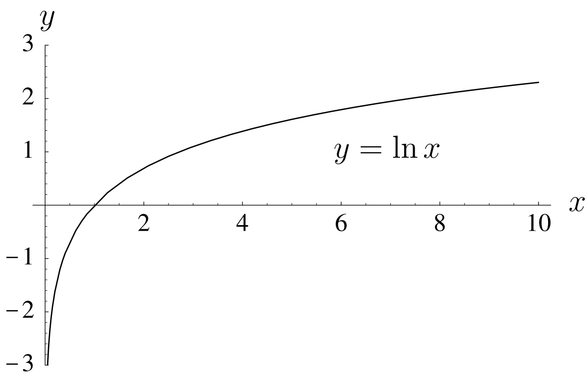
Es gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^+$.

3.5.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen



Die Funktion $f(x) = a^x$ ist
für $a > 1$ streng monoton wachsend und
für $a < 1$ streng monoton fallend.
Es gilt: $\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.
Für $a \neq 1$ ist $f(x) = a^x$ bijektiv.





Definition
$\lg x = \log_{10} x$ (*dekadischer Logarithmus*),
$\ln x = \log_e x$ (*natürlicher Logarithmus*); hierbei ist $e = 2,718281828459...$ die *Eulersche Zahl.*
(Rechenregeln für Logarithmen).

Sei $a > 0, b > 0$. Dann gilt für alle $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$:

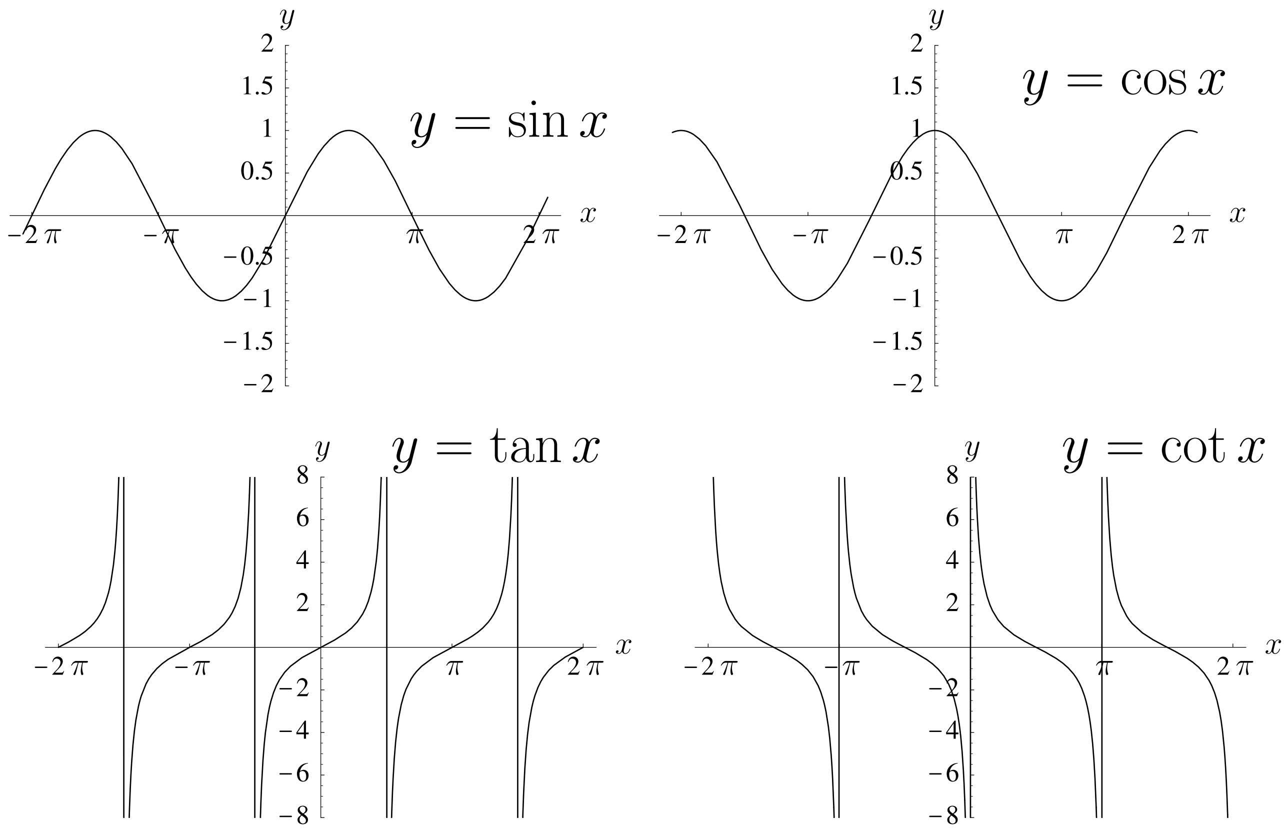
(a) $\log_a\big(x_1 \cdot x_2\big) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$;

(b) $\log_a\big(x^c\big) = c \log_a(x)$,

(c) $\log_a\big(\frac{x_1}{x_2}\big) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$,

(d) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.

3.5.3 Trigonometrische Funktionen und Arcus-Funktionen

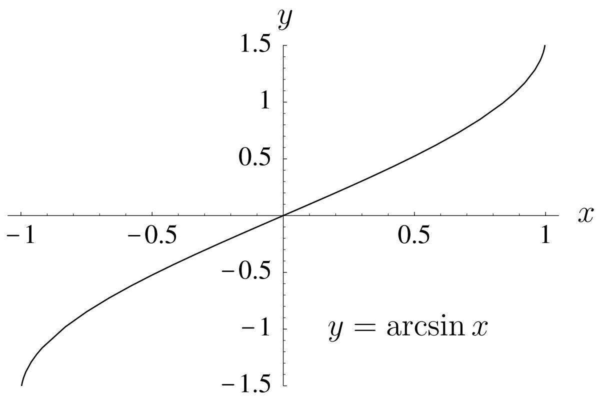


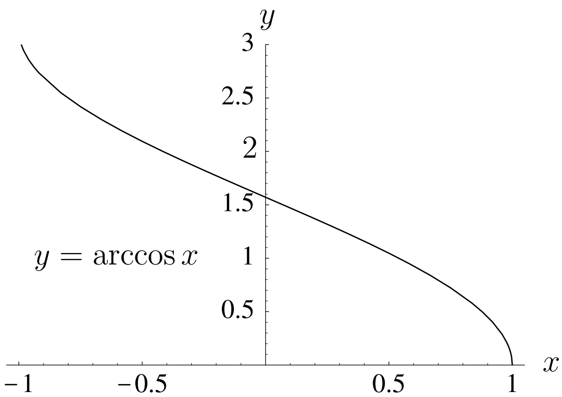
sin und cos haben Periode 2π. tan und cot haben Periode π.
Durch geeignete Restriktionen erhält man die folgenden *bijektiven* Funktionen:

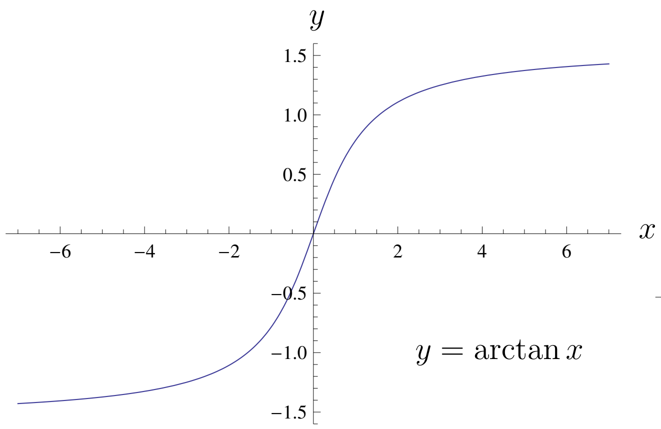
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$	(Sinus)	streng monoton wachsend
$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$	(Cosinus)	streng monoton fallend
$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$	(Tangens)	streng monoton wachsend
$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$	(Cotangens)	streng monoton fallend

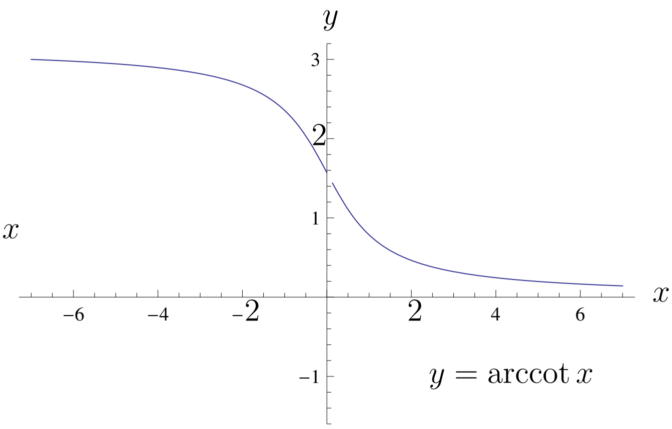
Daher existieren die Umkehrfunktionen (Arcus-Funktionen):

$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(Arcussinus)	streng monoton wachsend
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$	(Arcuscosinus)	streng monoton fallend
$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(Arcustangens)	streng monoton wachsend
$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$	(Arcuscotangens)	streng monoton fallend









3.5.4 Hyperbel-Funktionen

Die *Hyperbel-Funktionen* sind definiert durch

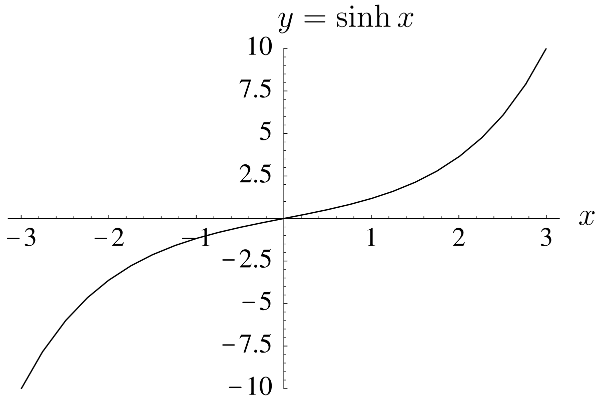
$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

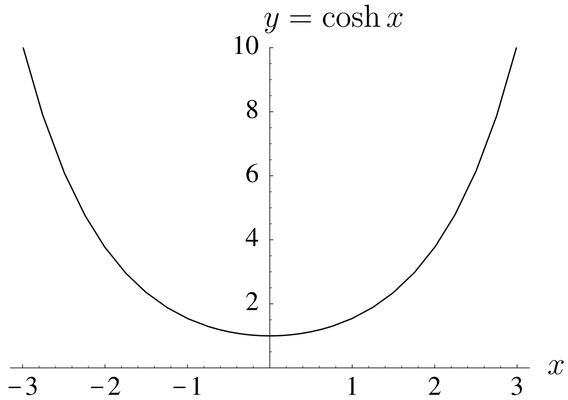
(Sinus hyperbolicus)

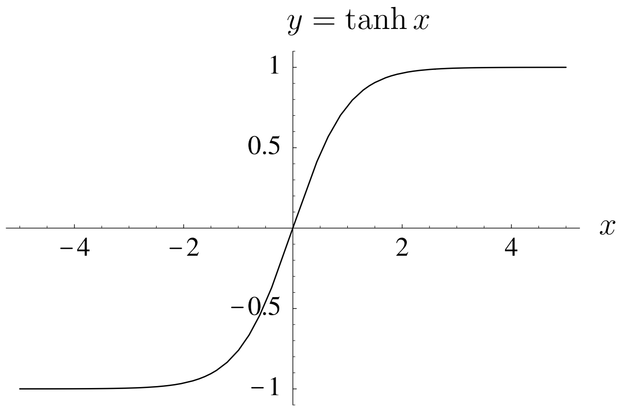
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

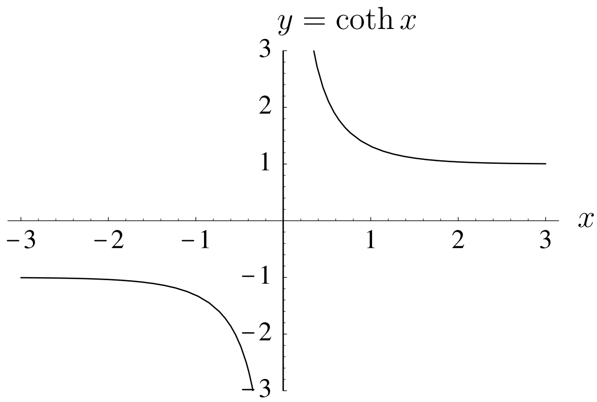
$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$









(Eigenschaften der Hyperbelfunktionen)

(a) sinh, tanh und coth sind ungerade Funktionen, cosh ist eine gerade Funktion.

(b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(c) $\sinh x = 0 \iff x = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R} : \cosh x \geq 1$.

(d) Es gelten die Additionstheoreme

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

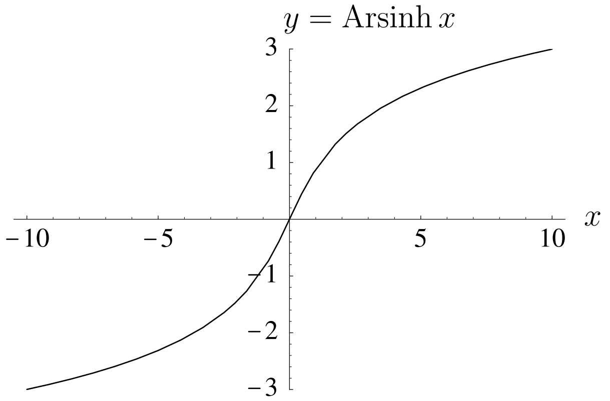
(e) sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend; $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
cosh ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend, auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend; $\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty)$.

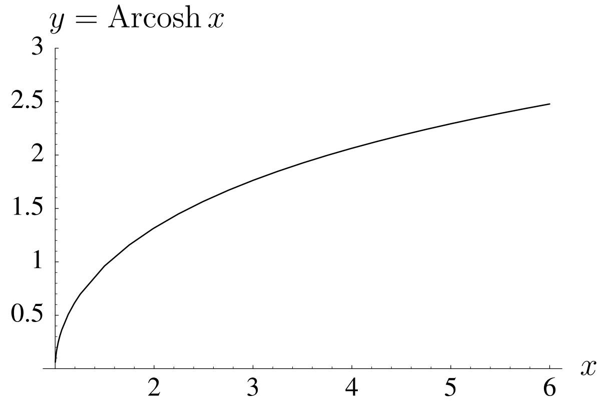
(f) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |\tanh x| < 1 \ , \ |\coth x| > 1 \ (x \neq 0)$.

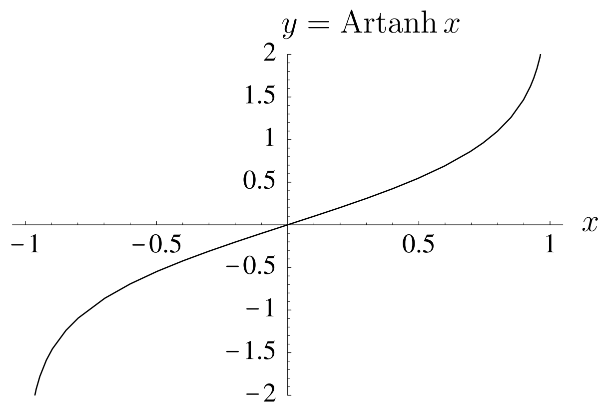
(g) $\tanh x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend; $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$; $\coth x$ ist auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton fallend, auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton fallend; $\coth(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus[-1, 1]$.

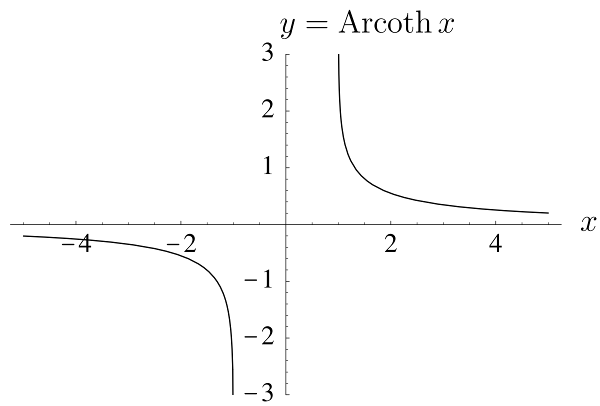
3.5.5 Area-Funktionen

$$\begin{aligned}
&\text{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
&\text{Arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty), \\
&\text{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \\
&\text{Arcoth} : \mathbb{R}\setminus[-1, 1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$









3.6 Grenzwertbegriff für Funktionen

Wir wollen erklären, was „$\lim_{x\to x_0} f(x)$“ ist.

Definition 3.6.1. Sei I ein Intervall und $x_0 \in I$ und $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, wenn:

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y_0| < \varepsilon$ oder
- Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ und $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt: $y_0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

Diese beiden Definitionen sind äquivalent. Der Beweis ist der gleiche wie der für das ε-δ-Kriterium.

Beispiel 60.

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \to \tfrac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

$$x \neq 0 : \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots$$

Dann gilt für $|x| \leq 1$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n+1)!} \leq |x|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \leq e|x|^2 < \varepsilon$$

$$e|x|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} := \delta$$

$$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} \Rightarrow \left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| < \varepsilon \text{ d. h. } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Beispiel 61.

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Existiert $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?
$x_n = \frac{1}{n\pi}$, $0 = \lim_{n\to\infty} x_n$
$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$; $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$
$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$; $0 = \lim_{n\to\infty} y_n$

$$\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) = 1$$

$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$ und $0 \neq 1$, daher existiert $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht!

Definition 3.6.2. Sei $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir

$$y_0 = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x),$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

gilt. y_0 ist der *rechtsseitige Grenzwert.*

$$y_1 = \lim_{x \to b-0} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \uparrow b} f(x),$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (b - \delta, b) : |f(x) - y_1| < \varepsilon$$

gilt.
y_1 ist der *linksseitige Grenzwert.*

Bemerkung 52. Wenn in einem Punkt $y_0 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ gilt, dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und ist gleich y_0.

Bemerkung 53. Sei $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ und existiere $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \quad & I \to R \\ & x \mapsto \begin{cases} y_0, & x = x_0 \\ f(x), & x \neq x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

stetig in x_0. Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig ergänzbar. $\widehat{f}$ ist die stetige Fortsetzung von f in x_0.

Beispiel 62.

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

f ist in 0 ergänzbar mit $f(0) := 1$

Definition 3.6.3. Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann schreiben wir $y_0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, wenn $\forall \varepsilon > 0 : \exists M : \forall x > M : |f(x) - y_0| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \text{wenn } \forall M > 0\ \exists N : \forall x > N : f(x) > M$$

$$\text{Sei } f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}.$$

Dann schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{wenn } \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \text{wenn } \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Die Differentialrechnung ist durch die folgenden drei Probleme motiviert, die durch sie gelöst werden.

1. Gegeben ist die Bewegung eines Teilchen zum Zeitpunkt t. Sei das Teilchen in $x(t) \in \mathbb{R}$. Welche Geschwindigkeit hat das Teilchen zum Zeitpunkt t_0?

   Momentangeschwindigkeit:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$
   falls der Grenzwert existiert.

2. *Tangentenproblem.* Sei $f : I \to \mathbb{R}$.
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \in I, y = f(x)\}$$
   ist der Graph von f

   Idee: Die Tangente ist eine Gerade, daher ist sie durch eine Gleichung $y = kx + d$ gegeben. ($k, d \in \mathbb{R}$). Diese Gerade soll den Graphen in $(x_0, f(x_0))$ berühren, daher muss $f(x_0) = kx_0 + d$ gelten. Wenn wir k kennen, können wir uns d ausrechnen. Gesucht wird also k, die Steigung der Tangente.

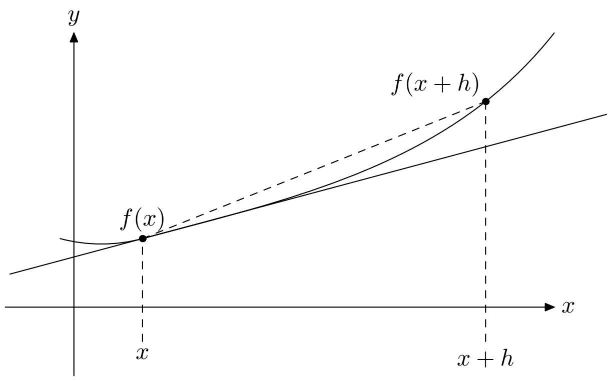


Abbildung 3.4: Graph einer Funktion mit Sekante und Tangente

   $k_S = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Steigung der Sekante. Wenn $x \to x_0$, dann geht die Sekante in die Tangente über. Die Tangentensteigung ist dann $k_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, sofern dieser Grenzwert existiert. Die Tangente ist dann durch die Gleichung gegeben:
$$y = k_T(x - x_0) + f(x_0).$$

3. *Problem der ersten Näherung:* f stetig in x_0 bedeutet: Wenn $x \approx x_0$, dann gilt: $f(x) \approx f(x_0)$.

Für vorgegebenen Fehler ε gibt es ein δ, sodass für $|x - x_0| < \delta$ für $(x \approx x_0)$ der Fehler $|f(x) - f(x_0)|$ höchstens ε ist also $(f(x) \approx f(x_0))$.
Die 0-te Näherung $f(x) \approx f(x_0)$ ist oft zu schlecht.

Wir wollen den Fehler $f(x) - f(x_0)$ genauer analysieren: dazu schreiben wir:
$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + R(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ Dabei beschreibt $R(x)$

den Fehler bei der Näherung von $f(x)$ durch die Gerade $f(x_0) + k(x - x_0)$.

Nun wollen wir durch geeignte Wahl von k erreichen, dass der Fehler $R(x)$ nicht nur absolut kleiner wird, also

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$

sondern auch relativ (bezogen auf $(x - x_0)$) kleiner wird, also gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Dies tritt offenbar genau dann ein, wenn

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definition 3.6.4. Sei $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 genau dann differenzierbar, wenn $k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.
Der Wert k heißt die 1. Ableitung von f in x_0.
Wir schreiben $f'(x_0) = k$.
f heißt differenzierbar auf I, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Die Funktion

$$\begin{aligned} f' :\ & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

heißt dann die 1. Ableitung oder Ableitungsfunktion von f.

Bemerkung 54. Sei f differenzierbar in x_0. Dann ist f stetig in x_0.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = |x|$ überall stetig, aber für $x = 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-0}{x-0}$ nicht.

Beweis. $|f(x) - f(x_0)| = |k(x - x_0) + r(x)(x - x_0)| \leq (|k| + |r(x)|)|x - x_0|$.
$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$. Daher gibt es ein $D > 0$, sodass $|r(x)| \leq 1$ für $|x - x_0| < D$. Für $|x - x_0| < D$ gilt dann: $|f(x) - f(x_0)| \leq (|k| + 1)|x - x_0| \Rightarrow f$ ist stetig in x_0. $\square$

3.7 Rechenregeln für Ableitungen

Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$; f, g differenzierbar in $x_0 \in I$

1. $$\begin{aligned} f + g :\ & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

   $f + g$ ist differenzierbar in x_0 und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$

   Die Summenregel

   $$(f + g)' = f' + g' \tag{3.6}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lambda \in \mathbb{R} \\ &\lambda f: \quad I \to \mathbb{R} \\ &\qquad\quad x \mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Dann ist (λf) in x_0 differenzierbar und es gilt: $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

3.

$$\begin{aligned} f \cdot g: \quad & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} =$
$= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} =$
$= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (i)
$x \to x_0$:
$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
(i) wenn $x \to x_0 \Rightarrow f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$
$f \cdot g$ ist daher in x_0 differenzierbar und es gilt:

Die Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \tag{3.7}$$

4.

$$\begin{aligned} &g(x_0) \neq 0 \\ &\tfrac{f}{g}: \qquad I \to \mathbb{R} \\ &\qquad\quad x \mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar?

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)^2}\cdot g'(x_0)$$

Also: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2}\cdot g'(x_0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{1}{g}'(x_0) =$$
$$= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \Rightarrow$$

Die Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2} \tag{3.8}$$

5. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : f(I) \to \mathbb{R}$
   $x_0 \in I$, f differenzierbar in x_0
   $y_0 = f(x_0)$, g differenzierbar in y_0
   Ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar?

   1. Näherung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)r_f(x), \text{ mit } \lim_{x\to x_0} r_f(x) = 0$$
$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + (y - y_0)r_g(y), \text{ mit } \lim_{y\to y_0} r_g(y) = 0$$

   Dann gilt

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))r_g(f(x)) =$$
$$g(f(x_0)) + g'(f(x_0)\cdot(f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)r_f(x)) + (f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)r_f(x))r_g(f(x)) =$$
$$g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\cdot(g'(f(x_0))\cdot r_f(x) + f'\cdot r_g(f(x)) + r_f(x)r_g(f(x)))$$

   Daraus erhalten wir

$$r_{g\circ f}(x) = g'(f(x_0))\cdot r_f(x) + f'\cdot r_g(f(x)) + r_f(x)r_g(f(x))$$

   für den relativen Fehler. Also gilt:

$$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x_0) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)r_{g\circ f}(x)$$

   und

$$\lim_{x\to x_0} r_{g\circ f}(x) = 0$$

   $g \circ f$ ist also differenzierbar in x_0 und es gilt:

Die Kettenregel:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0) \tag{3.9}$$

   $g'(f(x_0))$ heißt die äußere Ableitung
   $f'(x_0)$ heißt die innere Ableitung

6. Sei f in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton. Dann gibt es eine Umkehrfunktion f'
   $(f^{(-1)}\circ f)(x) = x \Rightarrow f^{(-1)'}(f(x_0))\cdot f'(x_0) = 1 \Rightarrow f^{(-1)'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow$

Die Umkehrregel:

$$f^{(-1)'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{3.10}$$

Tabelle von Ableitungen:

1. $n \in \mathbb{N}$: $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $\exp'(x) = \exp(x)$
3. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
4. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
5. $a \in \mathbb{R}^+$: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
6. $\sin'(x) = \cos(x)$
7. $\cos'(x) = -\sin(x)$
8. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
9. $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
10. $\cosh'(x) = \sinh(x)$
11. $\sinh'(x) = \cosh(x)$
12. $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
13. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
17. $\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
18. $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
19. $\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
20. $\operatorname{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3.7.1 Differentiation von Potenzreihen

Sei $f(x)$ durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gegeben. Dann ist f auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ stetig.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n-1} =$$
$$a_1 + (x - x_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n-2} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

Also gilt

$$f(x_0) = a_0; \;\; f'(x_0) = a_1$$

Weiters erhalten wir für $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ (siehe Beweis der Stetigkeit von Potenzreihen)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n$$
$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (x_1 - x_0)^{k-n}$$

Damit gilt

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{1} a_k (x_1 - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x_1 - x_0)^{k-1} = f'(x_1)$$

Bemerkung 55. Potenzreihen dürfen also gliedweise differenziert werden.

Beispiel 63.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$$

3.8 Anwendungen der Differentialrechnung

Definition 3.8.1. Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle (lokales Maximum, lokales Minimum), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) \leq f(x_0)$ (lokales Maximum) bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ (lokales Minimum).
Wenn $\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$ oder $f(x) \geq f(x_0)$, dann heißt x_0 globales Maximum bzw. globales Minimum.

Satz 3.8.2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ und sei f differenzierbar in x_0. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Sei f differenzierbar in x_0, $(x_0 - \delta, x_0 - \delta) \subseteq I$ und f besitze in x_0 ein lokales Maximum.
$f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) r(x)$, $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$
$f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow [f'(x_0) + r(x)](x - x_0) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Annahme: $f'(x_0) > 0$:
Dann gibt es ein δ' sodass

$$\forall x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') : |r(x)| \leq \frac{f'(x_0)}{2}$$

$f'(x_0) + r(x) \geq \frac{f'(x_0)}{2} > 0$ für $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \Rightarrow$
$[f'(x_0) + r(x)](x - x_0) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta')$ **(Widerspruch!)**

Annahme:$f'(x_0) < 0$: Dann gilt: $|r(x)| \leq -\frac{f'(x_0)}{2}$ für $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$ $f'(x) + r(x) \leq +\frac{f'(x_0)}{2} < 0$ für $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$
$[f'(x_0) + r(x)](x - x_0) > 0$ für $x \in (x_0 - \delta', x_0)$ **(Widerspruch!)**
Damit muss $f'(x_0) = 0$ gelten. □

Bemerkung 56. Für lokale Extremstellen gilt also $f'(x) = 0$. **Die Umkehrung ist nicht richtig!** Eine Stelle x_0, an der $f'(x_0) = 0$ gilt, muss keine lokale Extremstelle sein.

Beispiel 64. $f(x) = x^3, f'(x) = x^2$ also gilt
$f'(0) = 0$. Andererseits gilt für $x < 0 : f(x) < f(0)$ und für $x > 0 f(x) > f(0)$
Es liegt also kein Extremum vor.

Satz 3.8.3. ***Satz von Rolle:***
Sei f differenzierbar auf $[a, b], f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f'(\xi) = 0$.

Beweis. f besitzt in $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum.
In dem Maximum gilt $f'(\xi) = 0$, wenn $\xi \in (a, b)$.
Wenn das Maximum a oder b ist, dann betrachten wir das Minimum η. Wenn $\eta \in (a, b)$, dann gilt $f'(\eta) = 0$.
Wenn $\eta = a$ oder $\eta = b$, dann gilt $f(a)$ ist ein Minimum, $f(b)$ ist ein Maximum (oder umgekehrt) und es gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f(x) = f(a) = f(b)$. Die Funktion ist dann konstant und es gilt $\forall x \in [a, b] : f'(x) = 0$ □

Satz 3.8.4. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis von Satz 3.8.4. Wir definieren eine Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.
$g(a) = f(a) - 0 = f(a)$
$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(a)$
Also gilt $g(b) = g(a)$, g ist differenzierbar und nach Satz 3.8.3 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$.
$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und $g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
□

Bemerkung 57. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte: $\forall x \in [a, b] : f'(x) = 0$. Dann gilt für alle $x \in [a, b] : f(x) = f(a)$. Die Funktion ist also konstant.

Beweis. $a < x \leq b$ Wir wenden Satz 3.8.4 auf f im Intervall $[a, x]$ an: Dann gibt es ein $\xi \in (a, x)$, sodass $f'(\xi) = 0 = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f(x) = f(a)$. □

Satz 3.8.5. ***Verallgemeinerter Mittelwertsatz***
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte: $\forall x \in [a, b] : g'(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Beweis. $g(b) \neq g(a)$ (weil für $g(b) = g(a)$ der Nenner verschwindet)
Wir betrachten eine Hilfsfunktion: $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$
Dann ist h differenzierbar und: $f(a) = h(a)$
$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = f(a)$ und aus Satz 3.8.3 folgt: $\exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$
$h^{'}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ □

3.9 Anwendungen der Mittelwertsätze

3.9.1 Beweis von Ungleichungen

Wir wollen die Ungleichung: $\ln(1+x) \leq x$ beweisen (für $x > -1$)
Wir betrachten die Funktion:
$g(x) = x - \ln(1+x)$; $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$

1) $x > 0$: $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(\xi)$ für ein $0 < \xi < x$
$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$
$g(x) = x\frac{\xi}{1+\xi} > 0$ d. h. $x - \ln(1+x) > 0, x > 0 \Leftrightarrow x > \ln(1+x)$

1) $-1 < x < 0$: $\frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Dann gibt es ein $\xi \in (x,0)$, sodass $\frac{g(x)}{x} = g'(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi}$.
Also haben wir: $g(x) = x\frac{\xi}{1+\xi} > 0 \Rightarrow x > \ln(1+x), -1 < x < 0$
Wir haben bewiesen, dass $x > \ln(1+x)$ für $x > 0$ und $-1 < x < 0$. Für $x = 0$ gilt: $x = \ln(1+x)$.

Beispiel 65. Für $x > 0$ gilt $\arctan(x) < \operatorname{Arsinh}(x) < x$
1) $\arctan(x) < \operatorname{Arsinh}(x)$
$g(x) = \operatorname{Arsinh}(x) - \arctan(x), g(x) > 0 \Rightarrow \operatorname{Arsinh}(x) > \arctan(x)$
$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi), \xi \in (0,x)$
$g'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\sqrt{1+\xi^2}-1}{1+\xi^2} > 0 \Rightarrow g(x) > 0$

2) $\operatorname{Arsinh}(x) < x$
$h(x) = x - \operatorname{Arsinh}(x)$
$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{h(x)}{x} = h'(\eta); \eta \in (0,x)$
$h'(\eta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} > 0 \Rightarrow h(x) > 0$

3.9.2 Berechnung von Grenzwerten

Satz 3.9.1 (Regel von Bernoulli-de l'Hospital)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte für $x_0 \in (a,b) : f(x_0) = g(x_0) = 0$. Weiters existiere der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Beweis. $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ und nach Satz 3.8.5 $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
$\min(x_0, x) < \xi < \max(x_0, x)$
Sei $\delta > 0$ so, dass $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ (und wegen $|\xi - x_0| < |x - x_0| < \delta$) $\Rightarrow$ $|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| = |\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. □

Beispiel 66. Es existiert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{1+x}} = 1$

Beispiel 67.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) + \sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} = „\frac{0}{0}" =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \cos(x) + x(-\sin(x))} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{x\sin(x)} = 1$$

Bemerkung 58. Die Regel von de l'Hospital ermöglicht die einfache Bestimmung von Grenzwerten der Form „$\frac{0}{0}$“, also $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, wenn $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Beispiel 68.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{-\frac{1}{(\ln(x))^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{-\frac{1}{\ln(x)^2}} =$$

... führt zu keinem Ergebnis.

Satz 3.9.2. *Seien $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, gelte $\lim_{x\to b-}f(x)=\lim_{x\to b-}g(x)=\infty$ und existiere der Grenzwert $\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Dann existiert $\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.*

Der Beweis ist ähnlich, aber etwas komplizierter.

Beispiel 69. $\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} =$„$\frac{\infty}{\infty}$“$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x)=0$

Bemerkung 59. Die Regel von de L'Hospital kann also zur Berechnung von Grenzwerten der Form „$\frac{0}{0}$“, „$0\cdot\infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“verwendet werden. Dabei kann „$0\cdot\infty$“entweder in „$\frac{0}{0}$“oder „$\frac{\infty}{\infty}$“umgeschrieben werden.

Beispiel 70.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)+x\sin(-x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Bemerkung 60. Die Regel von de l'Hospital gilt auch für Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, wenn $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$ oder ∞.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A \quad \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A \quad \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \quad \text{„}0\cdot\infty\text{“}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

„$\frac{0}{0}$“ „$\frac{\infty}{\infty}$“

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) =$„$\infty-\infty$“$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}\right) =$„$\frac{0}{0}$“

Beispiel 71. $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{(\cot(x))^2}$ =„1^∞ “
$= \exp(\lim_{x\to 0}\ln((\cos(x))^{(\cot(x))^2})$. Wir nehmen den Logarithmus und machen eine Nebenrechnung:
$\lim_{x\to 0}(\cot(x))^2\cdot\ln(\cos(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{(\tan(x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{(\sin(x))^2}(\cos(x))^2$
$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{(\sin(x))^2}\cdot\lim_{x\to 0}(\cos(x))^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2\sin(x)\cos(x)} = -\frac{1}{2}$.
Es ist also $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{(\cot(x))^2} = \exp(\lim_{x\to 0}\ln((\cos(x))^{(\cot(x))^2}) = \exp(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Beispiel 72. $\lim_{x\to 0+}x^x$ =„0^0“
$= \exp(\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln(x)) = \exp(0) = 1$

3.9.3 Die Taylorsche Formel

Wir hatten die Ableitung als 1. Näherung motiviert:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)r(x),\ \text{mit}\ \lim_{x\to x_0} r(x) = 0$$

Wir wollen nun höhere Näherungen studieren:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n r_n(x)$$

mit $\lim_{x\to x_0} r_n(x) = 0$. $f(x)$ wird um x_0 durch ein Polynom vom Grad n angenähert. Der Fehler ist größenordnungsmäßig kleiner als $(x-x_0)^n$.

Definition 3.9.3. Höhere Ableitungen Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar.
Dann ist durch

$$\begin{aligned} f':\ & [a,b]\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

die erste Ableitungsfunktion definiert.

Wenn f' differenzierbar ist, dann definieren wir $f'' = (f')'$ usw. $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$, sofern $f^{(n)}$ differenzierbar ist.

f heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn alle Ableitungen von f bis zur n-ten Ableitung existieren und $f^{(n)}$ noch stetig ist.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} C^{(n)}([a,b]) &= \{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a,b]\} \\ C^{(0)}([a,b]) &= \{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f \text{ ist stetig auf } [a,b]\} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$C^{(0)}\supseteq C^{(1)}\supseteq C^{(2)}\supseteq\cdots\supseteq C^{(n)}\supseteq C^{(n+1)}$$

Wir definieren auch

$$C^{(\infty)}([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}$$

Wir suchen eine Darstellung von f in der Form:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\cdot r_n(x).$$

Wir wissen bereits, dass $a_0 = f(x_0)$ und $a_1 = f'(x_0)$ sein müssen (1. Näherung). Wir wählen nun die weiteren Koeffizienten $a_2, \ldots, a_n$ so, dass die ersten n Ableitungen der linken und der rechten Seite an der Stelle x_0 übereinstimmen. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{\ell=k}^{n} \ell(\ell-1)\ldots(\ell-k+1)a_\ell(x-x_0)^{\ell-k} + R^{(k)}(x) \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \end{aligned}$$

Definition 3.9.4. Das Polynom

$$T_n(f,x,x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt das n-te Taylor-Polynom von f an der Stelle x_0.

Sei f nun $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann betrachten wir:

$$(x-x_0)^n r_n(x) = f(x) - T_n(f,x,x_0)$$

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{x\to x_0} r_n(x) = 0$, dass also $T_n(f,x,x_0)$ tatsächlich die Eigenschaften einer n-ten Näherung hat.

Wir betrachten ein festes $x \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ und setzen

$$K = \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left(f(x) - T_n(f,x,x_0)\right).$$

Wir wollen für K einen alternativen Ausdruck finden. Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion

$$g(t) = f(t) - T_n(f,t,x_0) - K(t-x_0)^{n+1}.$$

Nach Definition gilt dann $g(x_0) = g(x) = 0$. Daraus schließen wir nach Satz 3.8.3, dass es ein $\theta_1 \in (0,1)$ geben muss, sodass $g'(x_0 + \theta_1(x-x_0)) = 0$ ist. Weiters erhalten wir aus der Definition von g, dass $g'(x_0) = 0$ gilt. Wieder können wir Satz 3.8.3 anwenden, um die Existenz von $\theta_2 \in (0,1)$ mit $g''(x_0+\theta_1\theta_2(x-x_0)) = 0$ zu erhalten. Durch wiederholtes Anwenden dieses Arguments ($g^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1,\ldots,n$) erhalten wir schließlich $\theta_3,\ldots,\theta_n \in (0,1)$ mit

$$g^{(k)}(x_0 + \theta_1\theta_2\cdots\theta_k(x-x_0)) = 0$$

für $k = 1,\ldots,n$. Im letzten Schritt ($k = n$) wenden wir noch einmal Satz 3.8.3 auf die n-te Ableitung an:

$$g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0 + \theta_1\theta_2\cdots\theta_n(x-x_0)) = 0$$

ergibt die Existenz eines $\theta_{n+1} \in (0,1)$ mit

$$g^{(n+1)}(x_0 + \theta_1\theta_2\cdots\theta_{n+1}(x-x_0)) = 0.$$

Andererseits können wir $g^{(n+1)}$ berechnen:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!.$$

Daraus erhalten wir, dass

$$K = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_1\theta_2\cdots\theta_{n+1}(x-x_0))$$

gelten muss. Die Stelle $\xi = x_0 + \theta_1\theta_2\cdots\theta_{n+1}(x-x_0)$ ist einfach eine Stelle zwischen x_0 und x.

Wir fassen zusammen:

Satz 3.9.5 (Satz von Taylor). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in (a,b)$. Sei*

$$f(x) = T_n(f,x,x_0) + R_n(f,x,x_0).$$

Dann gibt es für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi \in (\min(x_0,x), \max(x_0,x))$ (ξ liegt zwischen x_0 und x), sodass für das Restglied

$$R_n(f,x,x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

gilt. (Diese Darstellung des Restgliedes nennt man „Restglied nach Lagrange".)

Bemerkung 61. Wenn f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist, dann folgt aus dem obigen Satz sofort, dass

$$\lim_{x \to x_0} r_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^n} R_n(f,x,x_0) = 0$$

gilt. T_n ist also tatsächlich die gesuchte n-te Näherung.

Definition 3.9.6. Sei $h : [a,b] \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$. Dann schreiben wir

$$h(x) = \mathcal{O}((x-x_0)^n),$$

wenn es eine Konstante c und ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\forall |x-x_0| < \varepsilon : |h(x)| \leq c|x-x_0|^n$$

gilt.

Weiters schreiben wir

$$h(x) = o((x-x_0)^n),$$

wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Bemerkung 62. Damit können wir Satz 3.9.5 etwas einfacher formulieren:

$$f(x) = T_n(f,x,x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1}) = T_n(f,x,x_0) + o((x-x_0)^n).$$

Beispiel 73.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), x_0 = 0 \\
f(0) &= \ln(1) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= +\frac{2}{(1+x)^3}, f'''(0) = 2 \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}(-n) = (-1)^n\frac{(n)!}{(1+x)^{n+1}} \\
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k + (-1)^n\frac{n!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!(1+\xi)^{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, \xi = \theta x, \theta \in (0,1)
\end{aligned}$$

3.9.4 Anwendungen des Satzes von Taylor

Extrema

Wir wissen bereits, dass in einer lokalen Extremstelle der Funktion f die erste Ableitung verschwinden muss, die Umkehrung dieser Aussage aber falsch ist. Mit dem Satz von Taylor gelingt es nun, ein allgemein brauchbares Kriterium für das Vorliegen von Extremstellen zu finden.

Satz 3.9.7. *Sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und gelte $f'(x_0) = 0$. Dann liegt bei x_0 ein lokales Extremum von f vor, wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ gilt und n gerade ist. Dieses Extremum ist ein* lokales Maximum, *wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ gilt, bzw. ein* lokales Minimum, *wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$ gilt.*

Wenn unter der selben Bedingung an die Werte der Ableitungen n ungerade ist, liegt kein Extremum vor.

Beweis. Nach dem Satz von Taylor gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^{n+1}r(x)$$

für eine beschränkte Funktion $r(x)$ (alle weiteren Terme verschwinden nach unserer Annahme). Wenn n nun gerade ist, gilt $(x-x_0)^n \geq 0$ und auf einer Umgebung von x_0 nimmt $f(x)-f(x_0)$ nur das Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$ an. Damit ist x_0 ein lokales Extremum von f.

Wenn n ungerade ist, dann nimmt $(x-x_0)^n$ beide Vorzeichen an. In jeder Umgebung von x_0 nimmt $f(x) - f(x_0)$ daher positive und negative Werte an. Es liegt damit kein lokales Extremum vor. □

Monotonie

Wir wollen Bedingungen für die Monotonie von reellen Funktionen finden. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, also

$$\forall x, y \in [a, b] : y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Dann gilt

$$\forall x, y \in [a, b] : y \neq x \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b] : f'(x) \geq 0.$$

Sei umgekehrt

$$\forall x \in [a, b] : f'(x) \geq 0.$$

Dann gilt

$$x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \text{ (nach Satz 3.8.4) } \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0, \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Bemerkung 63.

- Wenn $\forall x \in [a, b] : f'(x) \geq 0$ gilt, dann ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend.
- Wenn $\forall x \in [a, b] : f'(x) \leq 0$ gilt, dann ist f auf $[a, b]$ monoton fallend.
- Wenn $\forall x \in [a, b] : f'(x) > 0$ gilt, dann ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.
- Wenn $\forall x \in [a, b] : f'(x) < 0$ gilt, dann ist f auf $[a, b]$ streng monoton fallend.

Wendepunkte

Definition 3.9.8. Ein Punkt x_0 heißt *Wendepunkt* von f, wenn der Funktionsgraph in x_0 die Tangente „durchdringt“, d.h. wenn $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ in jeder Umgebung von x_0 beide Vorzeichen annimmt.

Unter Verwendung von Satz 3.9.5 können wir

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(f, x_k, x_0)$$

schreiben. Wir wollen, dass die rechte Seite in x_0 das Vorzeichen wechselt, dazu muss der erste nichtverschwindende Term eine ungerade Potenz von $x - x_0$ tragen. Also

$$f''(x_0) = 0 = f'''(x_0) = \cdots = f^{(\ell-1)}(x_0), \quad f^{(\ell)}(x_0) \neq 0, \quad \ell \text{ ungerade.}$$

Bemerkung 64. In jedem Wendepunkt verschwindet die 2. Ableitung ($f''(x_0) = 0$). Umgekehrt liegt ein Wendepunkt vor, wenn $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(\ell-1)}(x_0)$, $f^{(\ell)}(x_0) \neq 0$, ℓ ungerade.

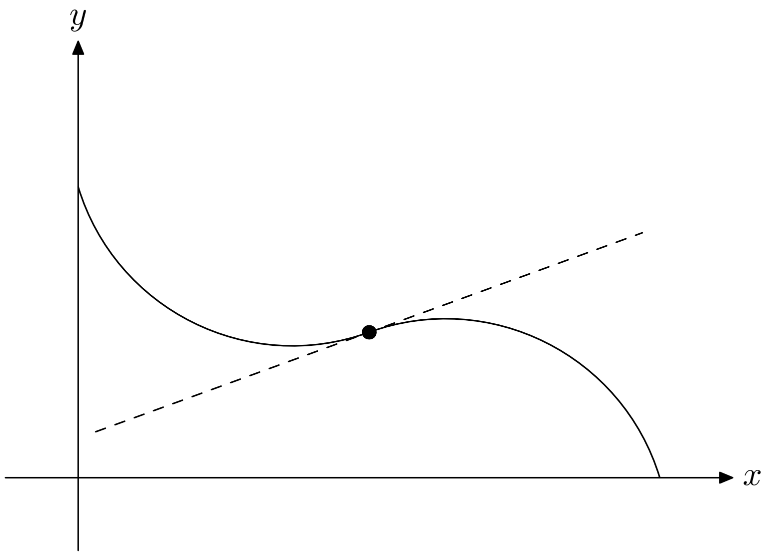


Abbildung 3.5: Wendepunkt

Krümmung

Wir wollen nun das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen von reellen Funktionen genauer untersuchen.

Definition 3.9.9. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (strikt) *konvex* („links gekrümmt"), wenn jeder Punkt $(x, f(x))$, mit $a \leq u < x < w \leq b$ (strikt) unterhalb der Verbindungsgeraden von $(u, f(u))$ und $(w, f(w))$ liegt. (Abb. 3.6)

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (strikt) *konkav* („rechts gekrümmt"), wenn jeder Punkt $(x, f(x))$, mit $a \leq u < x < w \leq b$ (strikt) oberhalb der Verbindungsgeraden von $(u, f(u))$ und $(w, f(w))$ liegt. (Abb. 3.7)

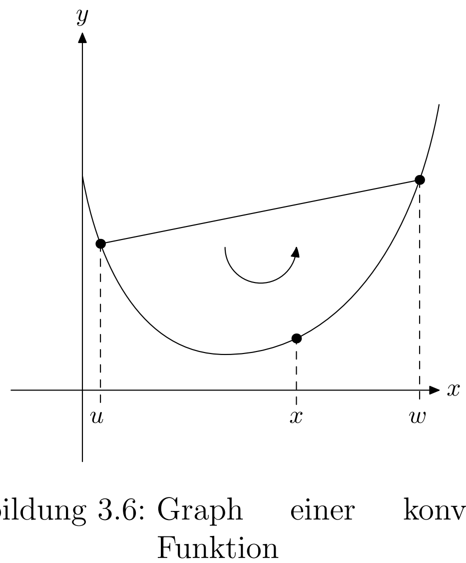


Abbildung 3.6: Graph einer konvexen Funktion

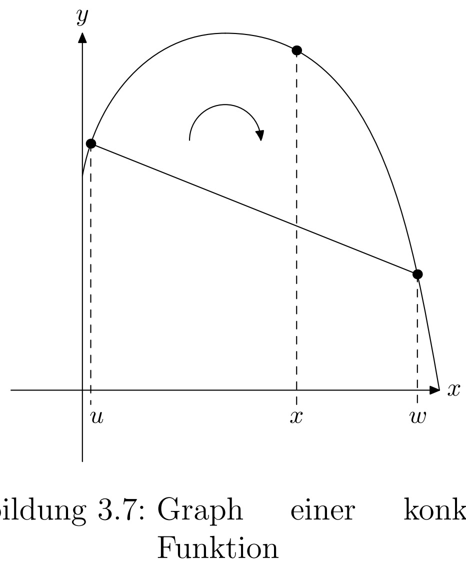


Abbildung 3.7: Graph einer konkaven Funktion

Wir untersuchen im Folgenden konvexe Funktionen genauer. Analoge Ergebnisse kann man für konkave Funktionen durch „Umdrehen" aller Ungleichungen erhalten. Aus der Definition der Konvexität folgt für $u < v < w$

$$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-u}{w-u} f(w)$$

und daher

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}.$$

Die Steigung der Sekante zwischen $(u, f(u))$ und $(v, f(v))$ ist kleiner als die Steigung der Sekante zwischen $(u, f(u))$ und $(w, f(w))$. Diese Steigung ist wiederum kleiner als die Steigung der Sekanten zwischen $(v, f(v))$ und $(w, f(w))$.

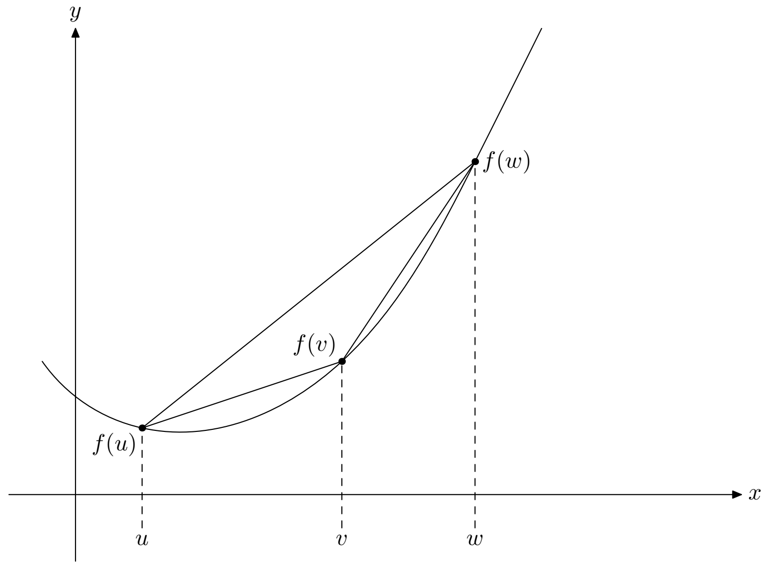


Abbildung 3.8: Graph einer Funktion mit drei Sekanten

Wenn f differenzierbar ist, erhalten wir aus Satz 3.8.4

$$f'(\xi_1) = \frac{f(w)-f(v)}{w-v} \geq \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \geq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(\xi_2)$$

also

$$u < \xi_2 < v < \xi_1 < w \quad f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1).$$

Wenn f konvex ist, dann ist also f' monoton wachsend und nach unseren Überlegungen zur Monotonie daher $f''(x) \geq 0$. Umgekehrt ist f auf $[a, b]$ konvex, wenn $\forall x \in [a, b] : f''(x) \geq 0$.

Wir fassen zusammen:

Bemerkung 65.
- f ist auf $[a, b]$ konvex, wenn $\forall x \in [a, b] : f''(x) \geq 0$
- f ist auf $[a, b]$ strikt konvex, wenn $\forall x \in [a, b] : f''(x) > 0$
- f ist auf $[a, b]$ konkav, wenn $\forall x \in [a, b] : f''(x) \leq 0$
- f ist auf $[a, b]$ strikt konkav, wenn $\forall x \in [a, b] : f''(x) < 0$

Das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen hängt also vom Vorzeichen der 2. Ableitung ab.

Bemerkung 66. Sei x_0 Wendepunkt. Dann gilt $f''(x_0) = 0$ und die erste nichtverschwindende Ableitung ist ungerade. Daher gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(\ell-1)}(x_0)}{(\ell-3)!}(x-x_0)^{\ell-3} + \frac{f^{(\ell)}(x_0)}{(\ell-2)!}(x-x_0)^{\ell-2} + R \\ &= 0 + \frac{f^{(\ell)}(x_0)}{(\ell-2)!}(x-x_0)^{l-2} + R \end{aligned}$$

ℓ ist ungerade, daher ist auch $\ell - 2$ ungerade. In einem Wendepunkt wechselt also f'' das Vorzeichen. Der Funktionsgraph wechselt im Wendepunkt das Krümmungsverhalten.

3.9.5 Kurvendiskussion

Wir wollen zu einer gegebenen Funktion f eine Sammlung von Informationen über f auf D_f angeben. Folgende Punkte sind enthalten:

1. Definitionsbereich von f:
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \text{ ist definiert}\}$$
Diskussion der Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
2. Nullstellen von $N_f = \{x \in D_f | f(x) = 0\}$
3. Extremstellen von f: alle lokalen Extrema mit ihren Typ (Minimum oder Maximum)
4. Wendepunkte von f, sowie die Steigung der Tangente in den Wendepunkten
5. Monotonieintervalle: Intervalle, auf denen f monoton wachsend, bzw monoton fallend ist.
6. Krümmung: Intervalle, auf denen f konvex oder konkav ist
7. Verhalten für $x \to \pm\infty$, Verhalten bei Polstellen, Asymptoten
8. Skizze des Funktionsgraphen

Beispiel 74.

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \tfrac{x(x+2)}{x^2+x+2} \end{aligned}$$

1. $D_f : f$ definiert für $x^2 + x + 2 \neq 0$, $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 2 > 0$, f ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, $D_f = \mathbb{R}$

   f ist als Quotient von stetigen Funktionen im Nenner ungleich Null definiert. f ist also wieder stetig und differenzierbar.

$$\begin{aligned} f' &= \frac{(2x+2)(x^2+x+2) - x(x+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-x^2+4x+4}{(x^2+x+2)^2} \\ f'' &= \frac{(-2x+4)(x^2+x+2)^2 - 2(-x^2+4x+4)(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^4} = \frac{2x^3-12x^2-24x}{(x^2+x+2)^3} \\ f''' &= -\frac{6(x^4-8x^3-24x^2+8)}{(x^2+x+2)^4} \end{aligned}$$

2. Nullstellen:

$$f(x) = 0, x^2 + x + 2 \neq 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2 \Rightarrow N_f = \{0, -2\}$$

3. Extrema: Punkte die in Frage kommen:

$$\begin{aligned} f' = 0 &\Rightarrow -x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = +2 \pm \sqrt{8} \\ f''(2+\sqrt{8}) &= -0,006 \neq 0 < 0 \Rightarrow \text{ lokales Maximum} \\ f''(2-\sqrt{8}) &= 1,639 \neq 0 > 0 \Rightarrow \text{ lokales Minimum.} \end{aligned}$$

4. Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{21} \\ f'(0) &= 1 \text{ ist die Steigung der Tangente.} \\ f'(3+\sqrt{21}) &= -0.00514843 \text{ ist die Steigung der Tangente.} \\ f'(3-\sqrt{21}) &= -0.56628 \text{ ist die Steigung der Tangente.} \\ f'''(x) &\neq 0 \text{ an diesen Stellen.} \end{aligned}$$

5. Monotonie: $2 \pm \sqrt{8}$ sind Extrema $\Rightarrow f'$ wechselt das Vorzeichen.

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0, x < 2 - \sqrt{8} \text{ fallend auf } (-\infty, 2-\sqrt{8}) \\ &f'(x) > 0, 2 - \sqrt{8} < x < 2 + \sqrt{8} \text{ wachsend auf } (2-\sqrt{8}, 2+\sqrt{8}) \\ &f'(x) < 0, x > 2 + \sqrt{8} \text{ fallend auf } (2+\sqrt{8}, \infty) \end{aligned}$$

6. Krümmung:

$$\begin{aligned} x < 3 - \sqrt{21} &\Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{ konkav} \\ 3 - \sqrt{21} < x < 0 &\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{ konvex} \\ 0 < x < 3 + \sqrt{21} &\Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{ konkav} \\ x > 3 + \sqrt{21} &\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{ konvex} \end{aligned}$$

7. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

8. Skizze:

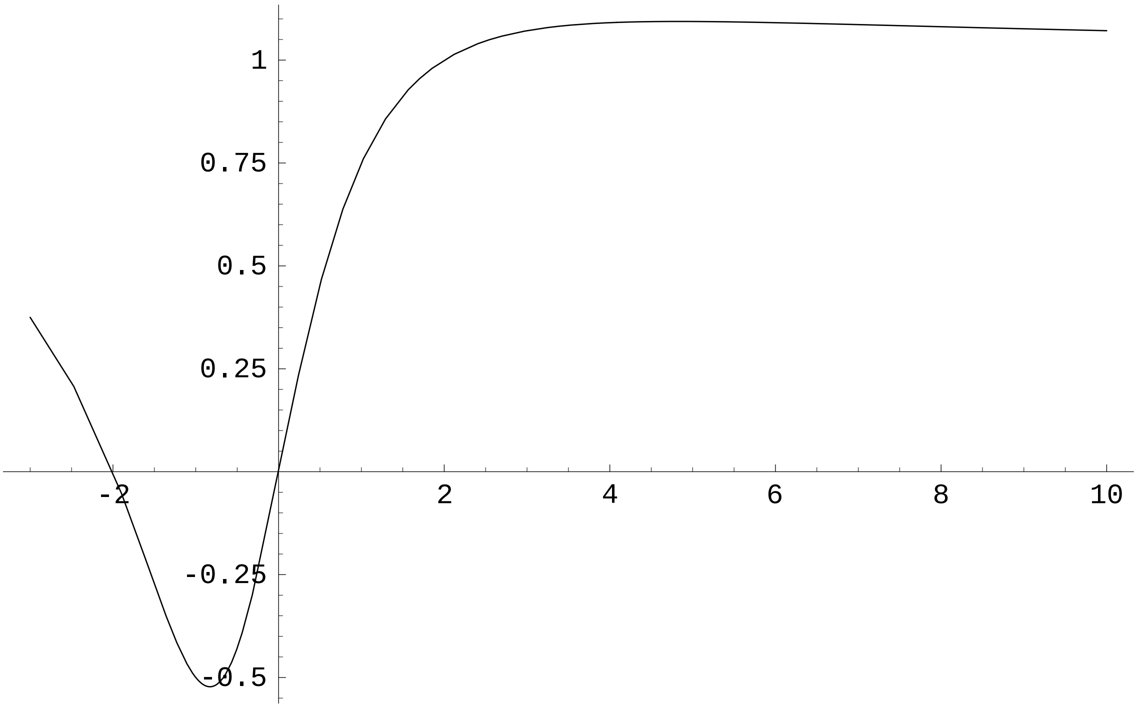


Abbildung 3.9: Graph der Funktion

4 Integralrechnung

4.1 Das unbestimmte Integral

Frage: Gegeben seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Gibt es eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, sodass $F' = f$? Wie bestimmt man F?

Definition 4.1.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Dann heißt F eine *Stammfunktion* von f. Wir schreiben dann:

$$F(x) = \int f(x)dx + c.$$

$\int f(x)dx + c$ heißt das *unbestimmte Integral.*

Satz 4.1.2. *Seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.*

Beweis.

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow (F - G)'(x) = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = c \text{ (konstant)}.$$

□

Bemerkung 67. Die Stammfunktion von f ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Rechenregeln

(zu gewinnen aus der Rechenregel der Differentialrechnung)

- $$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + c$$

  (aus der Summenregel)

- $$A \in \mathbb{R} : \int Af(x)dx = A \int f(x)dx = A \cdot F(x) + c$$

- Produktregel

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

$$\int (f(x)G(x) + F(x)g(x))dx + c = F(x) \cdot G(x)$$

$$\int (f(x)G(x))dx + c + \int (F(x)g(x))dx + c = F(x)G(x)$$

Hieraus folgt die partielle Integration:

$$\int (f(x)G(x))dx = F(x)G(x) - \int (F(x)g(x))dx + c$$

üblicherweise geschrieben als:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx + c$$

Tabelle von Grundintegralen

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$ für $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

Beispiel 75.

$$\begin{aligned} I &= \int \ln(x)dx \\ u'(x) = 1 &\quad v = \ln(x) \\ u(x) = x &\quad v'(x) = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow I &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + c \end{aligned}$$

Beispiel 76.

$$\begin{aligned} I &= \int x\sin(x)dx \\ v(x) &= x \Rightarrow v'(x) = 1 \\ u'(x) &= \sin(x) \Rightarrow u(x) = -\cos(x) \\ I &= -(x)\cos(x) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c \end{aligned}$$

Probe:

$$(-x\cos(x) + \sin(x))' = -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)$$

Beispiel 77.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \sin(x)dx \\
u'(x) &= e^x \Rightarrow u(x) = e^x \\
v(x) &= \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x) \\
I &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx, \\
u'(x) &= e^x \Rightarrow u(x) = e^x \\
v(x) &= \cos(x) \Rightarrow v'(x) = -\sin(x) \\
I &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx \\
2I &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + c \\
\int e^x \sin(x)dx &= \frac{1}{2}(e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) + c
\end{aligned}$$

Satz 4.1.3. ***Die Substitutionregel*** *Sei g streng monoton (wachsend oder fallend) und stetig. $\forall t \in \mathbb{R} : g'(t) \neq 0$ und sei Φ eine Stammfunktion von $f(g(t))g'(t)$, dann ist $\Phi(g^{(-1)}(x))$ eine Stammfunktion von f.*

Beweis. $g^{(-1)}$ existiert unter den Voraussetzungen.

$$(\Phi(g^{(-1)}(x)))' = \Phi'(g^{(-1)}(x))(g^{(-1)}(x))' = f(g(g^{(-1)}(x)))g'(g^{(-1)}(x))(g^{(-1)}(x))'$$

Nebenrechnung:

$$x = g(g^{(-1)}(x)) \Rightarrow 1 = g'(g^{(-1)}(x))(g^{(-1)}(x))' \Rightarrow (g^{(-1)}(x))' = \frac{1}{g'(g^{(-1)}(x))}$$

und damit

$$f(g(g^{(-1)}(x)))g'(g^{(-1)}(x))\frac{1}{g'(g^{(-1)}(x))} = f(x) \Rightarrow (\Phi(g^{(-1)}(x)))' = f(x)$$

□

Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int f(g(t))g'(t)dt \\
x = g(t), &\quad dx = g'(t)dt
\end{aligned}$$

Beispiel 78.

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}dx &= \int e^t(-dt) = -e^t + c = -e^{-x} + c \\
t = -x, &\quad dx = -1 \cdot dt, \quad dt = -dx
\end{aligned}$$

Beispiel 79.

$$\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}F(t)+c = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$$
$$a \neq 0, \quad t = ax+b, \quad x = \frac{t-b}{a} = \frac{1}{a}(t-b), \quad dt = a \cdot dx$$

Beispiel 80.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\cos^2(t)}(-\sin(t))dt = -\int \sin^2(t)dt = I$$
$$x = \cos(t), \quad dx = -\sin(t)dt$$
$$I = \int (-\sin(t))(\sin(t))dt =$$
$$= \cos(t)\sin(t) - \int \cos(t)\cos(t)dt = \cos(t)\sin(t) - \int (1-\sin^2(t))dt =$$
$$\cos(t)\sin(t) - \int dt + \int \sin^2(t)dt = -t + \cos(t)\sin(t) + \int \sin^2(t)dt \Rightarrow$$
$$I = \frac{-t+\cos(t)\sin(t)}{2} + c \Rightarrow$$
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{-t+\cos(t)\sin(t)}{2} + c = -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

Beispiel 81. Sei f differenzierbar:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$
$$u = f(x), \quad du = f'(x)dx$$

$$I = \int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}dx$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \Rightarrow I = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

4.2 Integration rationaler Funktionen

Definition 4.2.1. R ist eine *rationale Funktion*, wenn es 2 Polynome p und q gibt, sodass $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

Bemerkung 68. Polynomdivision: Seien p, q Polynome, dann gibt es Polynome r, s, sodass $p(x) = r(x)q(x) + s(x)$ gilt. Dabei ist entweder $s = 0$ oder der Grad$(s) <$ Grad(q) (r heißt der Quotient, s der Rest).

Beispiel 82. $p(x) = x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x + 5$, $q = x^2 + 6x + 7$, $r(x), s(x) =?$

$$\begin{array}{rrrrrll}
(x^4 & +7x^3 & -6x^2 & +8x & +5) & :(x^2+6x+7) & = x^2 + x - 19 \\
-x^4 & -6x^3 & -7x^2 & & & & \\
\hline
 & +x^3 & -13x^2 & & & & \\
 & -x^3 & -6x^2 & -7x & & & \\
\hline
 & & -19x^2 & +x & & & \\
 & & +19x^2 & -114x & +133 & & \\
\hline
 & & & 115x & 138 & &
\end{array}$$

Damit gilt $x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x + 5 = (x^2 + 6x + 7)(x^2 + x - 19) + 115x + 138$

Bemerkung 69. Wenn der Grad$(p) <$ Grad(q):
$p(x) = r(x)q(x) + s(x) \Rightarrow r(x) = 0$, $s = p$
$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r(x)q(x)+s(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$, Grad$(s) <$ Grad(q)

Bemerkung 70. Sei $q(x)$ ein Polynom mit Grad$(q) = n \geq 1$. Dann hat q genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Gelte $q(\alpha_1) = 0$, dann gilt wegen

$$q(x) = (x - \alpha_1)q_1(x) + s_1(x) \text{ mit } \operatorname{Grad}(s_1) = 0.$$

Durch Einsetzen von $x = \alpha_1$ erhält man $s_1 = 0$. Damit können wir einen Linearfaktor abspalten:

$$q(x) = (x - \alpha_1)q_1(x), \text{ mit } \operatorname{Grad}(q_1) = n - 1 = \operatorname{Grad}(q) - 1$$

Durch Iteration dieses Argumentes erhalten wir eine Zerlegung von $q(x)$ in Faktoren:

$$\begin{aligned}
q(x) &= A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n) \\
q(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,
\end{aligned}$$

durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $A = a_n$. Die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ müssen nicht alle verschieden sein. Damit können wir gleiche Faktoren zusammenfassen:

$$q(x) = A(x - \beta_1)^{k_1}(x - \beta_2)^{k_2}\dots(x - \beta_r)^{k_r}$$

mit $\beta_i \neq \beta_j$ für $i \neq j$ und $k_1 + \dots + k_r = n$; k_i heißt die Vielfachheit der Nullstelle β_i

Beispiel 83. $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1$, $q(1) = 0$ d.h. 1 ist eine Nullstelle.

$$\begin{array}{rrrrll}
(x^4 & -x^3 & -x & +1) & :(x-1) & = x^3 - 1 \\
-x^4 & +x^3 & & & & \\
 & & -x+1 & & & \\
 & & +x+1 & & &
\end{array}$$

$q_1(x) = x^3 - 1$, $q_1(1) = 0$, 1 ist also eine doppelte Nullstelle

$$\begin{array}{rrrrll}
(x^3 & & & -1) & :(x-1) & = x^2 + x + 1 \\
-x^3 & +x^2 & & & & \\
 & x^2 & & -1 & & \\
 & -x^2 & +x & & & \\
 & & x & -1 & & \\
 & & -x & +1 & &
\end{array}$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$q(x) = (x-1)^2 \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bemerkung 71. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 0, \ldots, n$

Wenn $a_n = 1$ und $\alpha \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle ist: $f(\alpha) = 0$. Dann gilt „α teilt a_0“. Jede ganzzahlige Lösung von $f(x) = 0$ muss a_0 teilen.

Wenn $a_n \neq 1$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f ist, $\alpha = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd seien, dann gilt „p teilt a_0“ und „q teilt a_n“. Rationale und ganzzahlige Nullstellen von f lassen sich also durch Probieren finden.

Satz 4.2.2 (Partialbruchzerlegung)**.** *Seien p und q Polynome* Grad(p) < Grad(q)*. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Dann gibt es komplexe Zahlen A_{ij} ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq k_i$), sodass*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - \alpha_i)^j}$$

gilt.

Beweis. Induktion nach Grad(q).

1. **Induktionsbasis:** Grad$(q) = 1 \Rightarrow$ Grad$(p) = 0$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{P}{Ax + B} = \frac{\frac{P}{A}}{x - (-\frac{B}{A})}$$
$$A_{11} = \frac{P}{A}, \quad \alpha_1 = -\frac{B}{A}$$

2. **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung des Satzes gelte für Grad$(q) < n$

3. **Induktionsbehauptung:** Die Behauptung des Satzes gelte auch für Grad$(q) = n$

Induktionsschritt: Sei q ein Polynom von Grad n und α eine Nullstelle von q mit Vielfachheit k

$$q(x) = (x - \alpha)^k q_1(x) \text{ und } q_1(\alpha) \neq 0.$$

Dann gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k q_1(x)} = \left(\frac{p(x)}{(x-\alpha)^k q_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^k}\right) + \frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

Wir wollen nun A so wählen, dass wir kürzen können.

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha)^k q_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \frac{p(x) - Aq_1(x)}{(x-\alpha)^k q_1(x)}.$$

Damit $(x-\alpha)$ gekürzt werden kann, muss

$$p(\alpha) - Aq_1(\alpha) = 0$$

gelten. Wir müssen also

$$A = \frac{p(\alpha)}{q_1(\alpha)}$$

setzen. Dann ist

$$p(x) - Aq_1(x) = (x-\alpha)p_1(x)$$

und wir erhalten

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha_1)^k} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)(x-\alpha_1)^{k-1}}.$$

Weil der Grad des Nenners nun $n-1$ ist, können wir nach Induktionsvoraussetzung den zweiten Summanden in der behaupteten Form schreiben. □

4.2.1 Bestimmung der Partialbruchzerlegung (Anhand eines Beispiels)

$$\frac{x^2-5x+8}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18}$$

1)Bestimmung der Nullstellen des Nenners:

Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur die Teiler von 18 in Frage: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$$\begin{aligned} x = 1 &: 1 - 9 + 29 - 39 + 18 = 0 \\ x = -1 &: 1 + 9 + 29 + 39 + 18 \neq 0 \\ x = 2 &: 16 - 72 + 116 - 78 + 18 = 0 \\ (x-1)(x-2) &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Wir können also zwei Faktoren abdividieren:

$$\begin{array}{rrrrrl} (x^4 & -9x^3 & +29x^2 & -39x & +18) & :(x^2-3x+2) \quad = x^2-6x+9 \\ -x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & & \\ \hline & -6x^3 & +27x^2 & -39x & & \\ & +6x^3 & -18x^2 & -12x & & \\ \hline & & 9x^2 & -27x & 18 & \\ & & -9x^2 & +27x & -18 & \end{array}$$

$x_{3,4} = \frac{6\pm\sqrt{0}}{2} = 3$, 3 hat die Vielfachheit 2

Damit haben wir den Nenner in Linearfaktoren zerlegt

$$x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = (x-1)(x-2)(x-3)^2.$$

Nach Satz 4.2.2 können wir daher ansetzen

$$\frac{x^2-5x+8}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2}$$

gesucht sind $A = A_{11}$, $B = A_{21}$, $C = A_{31}$, $D = A_{32}$.

2)Bestimmung von A, B, C, D:

$A=?$:
$$\frac{(x-1)(x^2-5x+8)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = A + (x-1)\left(\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2}\right)$$
$$x=1: \frac{1-5+8}{-4} = A+0 \Rightarrow A=-1$$

$B=?$:
$$\frac{(x-2)(x^2-5x+8)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = B + (x-2)\left(\frac{A}{x-1}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2}\right)$$
$$x=2 \quad \frac{4-10+8}{1} = B+0 \Rightarrow B=2$$

$C,D=?$:
$$\frac{(x-3)^2(x^2-5x+8)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2} = D + (x-3)^2\left(\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{A}{(x-1)}\right)$$
$$x=3: D=1$$

Um C zu bestimmen, differenzieren wir nach x:
$$\frac{x^2-5x+8}{(x-1)(x-2)} = C(x-3)+D+(x-3)^2\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\right)$$
$$\left(\frac{x^2-5x+8}{(x-1)(x-2)}\right)' = \frac{(2x-5)(x-1)(x-2)-(x^2-5x+8)(2x-3)}{((x-1)(x-2))^2} = C+(x-3)(\dots)$$
$$x=3: \left.\frac{(2x-5)(x-1)(x-2)-(x^2-5x+8)(2x-3)}{((x-1)(x-2))^2}\right|_{x=3} = C \Rightarrow C=-1$$

Wir haben also:
$$\frac{x^2-5x+8}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18} = -\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}$$

und damit
$$\begin{aligned}\int &\frac{x^2-5x+8}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18}dx \\ &= -\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2}{x-2}dx-\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{1}{(x-3)^2}dx = \\ &\qquad -\ln|x-1|+2\ln|x-2|-\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+c\end{aligned}$$

Beispiel 84. Gesucht ist
$$\int\frac{1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5}{2-3x+5x^2-6x^3+4x^4-3x^5+x^6}dx.$$
Durch Probieren findet man die Nullstellen des Nenners: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ und die Faktorzerlegung des Nenners
$$\begin{aligned}2-3x+5x^2-6x^3+4x^4-3x^5+x^6 &= (x-1)(x-2)(x^4+2x^2+1)\\ &= (x-1)(x-2)(x^2+1)^2 = (x-1)(x-2)(x+i)^2(x-i)^2\end{aligned}$$

Wir können wieder ansetzen

$$\frac{1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5}{2-3x+5x^2-6x^3+4x^4-3x^5+x^6} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-i}+\frac{D}{(x-i)^2}+\frac{E}{x+i}+\frac{F}{(x+i)^2}.$$

Für die reellen einfachen Nulstellen $x=1$ und $x=2$ erhalten wir $A=-2$, $B=3$.

Für die komplexen Nullstellen $x=\pm i$ haben wir $E=\overline{C}$ und $F=\overline{D}$. Es genügt also C und D zu bestimmen. Dazu multiplizieren wir den Ansatz mit $(x-i)^2$ und erhalten

$$\frac{1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5}{(x-1)(x-2)(x+i)^2} = D + C(x-i) + (x-i)^2(\ldots)$$

$$x=i :\Rightarrow D = \frac{-1+3i}{(-4)(1-3i)} = \frac{1}{4}$$

$F=\overline{D}=\frac{1}{4}$.

Differenzieren nach x ergibt:

$$\frac{(5x^4+8x^3-3x^2+8x+1)}{(x-1)(x-2)(x+i)^2} - \frac{(1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5)((2x-3)(x+i)^2+(x^2-3x+2)2(x+i))}{(x-1)^2(x-2)^2(x+i)^4} = C + (x-i)(\ldots) =$$

$$x=i : C = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \Rightarrow E = \frac{i}{4}.$$

Damit haben wir

$$\frac{1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5}{2-3x+5x^2-6x^3+4x^4-3x^5+x^6} = \frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+i)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x-i)^2}-\frac{i}{4}\frac{1}{x-i}+\frac{i}{4}\frac{1}{x+i}.$$

Wegen

$$-\frac{i}{4}\frac{1}{x-i}+\frac{i}{4}\frac{1}{x+i} = \frac{1}{2(x^2+1)}$$

erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1+x+4x^2-x^3+2x^4+x^5}{2-3x+5x^2-6x^3+4x^4-3x^5+x^6}dx = \\
&\quad \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{1}{4}\frac{1}{(x+i)^2}dx + \int \frac{1}{4}\frac{1}{(x-i)^2}dx + \int \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \\
&\quad 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + \frac{1}{4}(-1)(x-i)^{-1} + \frac{1}{4}(-1)(x+i)^{-1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c = \\
&\qquad 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c
\end{aligned}$$

Bemerkung 72 (Komplexe Terme in der Partialbruchzerlegung)**.** Komplexe Terme $\frac{A}{x-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ kommen in der Partialbruchzerlegung paarweise vor: $\frac{\overline{A}}{x-\overline{\alpha}}$ kommt ebenfalls vor.

Für die Integration werden diese beiden zusammengefasst, um einen reellen Ausdruck zu ergeben

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{\overline{A}}{x-\overline{\alpha}} = \frac{(A+\overline{A})x-(A\overline{\alpha}+\overline{A}\alpha)}{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}} = \frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

Zur Bestimmung der Stammfunktion gehen wir wie folgt vor:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \int \frac{-\frac{Bp}{2}+C}{x^2+px+q} =$$
$$\frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

Es verbleibt damit noch das Integral

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{dx}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Hier substituieren wir

$$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}t = x+\frac{p}{2}, \quad \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dt = dx$$

und erhalten

$$\int \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dt}{(q-\frac{p^2}{4})t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan(t)+c =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+c \Rightarrow$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+c$$

Beispiel 85.

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}t = x+\frac{1}{2}, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$$
$$\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$\sqrt{3}\arctan(t)+c = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c = \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$
$$\text{das ergibt: } \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Integration rationaler Funktionen:

Wir können also für die Integration rationaler Funktionen folgendes Verfahren angeben:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = ?$$

1. Wenn der Grad$(p) \geq$ Grad(q): Polynomdivision.

$$p(x) = s(x)q(x) + p_1(x), \quad \mathrm{Grad}(p_1) < \mathrm{Grad}(q) \Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

2. Partialbruchzerlegung von $\frac{p_1(x)}{q(x)}$

   a) Bestimmung aller Nullstellen des Nenners mit Vielfachheiten. Ganzzahlige Nullstellen teilen das konstante Glied; komplexe Nullstellen treten paarweise auf.

   $$q(x) = A(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}$$

   b) Ansatz:

   $$\frac{p_1(x)}{q(x)} = \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_\ell} \frac{A_{\ell j}}{(x-\alpha_\ell)^j}$$

   Bestimmung von A_{lj} durch Multiplikation der Gleichung mit $(x-\alpha_\ell)^{k_\ell}$, Differentiation nach x und Einsetzen von $x = \alpha_\ell$

3. Integration der Partialbruchzerlegung:

   $$\int \frac{A_{\ell j}}{(x-\alpha_\ell)^j} dx$$

   a) $j > 1$:

   $$\int \frac{A_{\ell j}}{(x-\alpha_\ell)^j} dx = -\frac{1}{j-1} A_{\ell j} \frac{1}{(x-\alpha_\ell)^{j-1}} + c$$

   b) $j = 1$:

      i. $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$:

      $$\int \frac{A_{\ell 1}}{x-\alpha_\ell} dx = A_{\ell 1} \ln|x-\alpha_\ell| + c$$

      ii. $\alpha_\ell \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned}\int \left(\frac{A_{\ell 1}}{x-\alpha_\ell} + \frac{\overline{A_{\ell 1}}}{x-\overline{\alpha_\ell}}\right) dx &= \int \frac{(A_{\ell 1} + \overline{A_{\ell 1}})x - (A_{\ell 1}\overline{\alpha_\ell} + \overline{A_{l1}}\alpha_\ell)}{x^2 - (\alpha_\ell + \overline{\alpha_\ell})x + \alpha_\ell + \overline{\alpha_\ell}} dx \\ &= \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx\end{aligned}$$

4. Zusammenfassen: Die Ergebnisse für komplexe Wurzeln α_ℓ können noch paarweise zu reellen Ausdrücken zusammengefasst werden.

4.2.2 Standard Substitutionen

$R(\dots)$ bezeichnet eine rationale Funktion ihrer Argumente, also einen Ausdruck der sich nur unter Verwendung von $+, -, \cdot, :$ bilden lässt.

Rationale Funktionen von e^x

$$\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$$

$$e^x = t, \quad e^x dx = dt, \quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

Beispiel 86.

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{1}{t+1}\frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{t+1}dt + \int \frac{1}{t}dt =$$

$$e^x = t$$

$$\frac{1}{t+1}\frac{1}{t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}$$

$$\frac{1}{t} = A + \frac{B}{t}(t+1) \Rightarrow A = -1$$

$$\frac{1}{t+1} = B + \frac{A}{t+1}t \Rightarrow B = 1$$

$$= -\ln|t+1| + \ln|t| + c = -\ln|e^x+1| + x + c$$

Rationale Funktionen von $\sqrt{x^2+1}$

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$$

Wir suchen eine Substitution, sodass x und $\sqrt{x^2+1}$ rational in der neuen Variablen sind.

$$(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) = 1, \quad \sqrt{x^2+1}+x = t, \quad \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{t},$$

also

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), \quad x = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}), \quad dx = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt.$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx = \int R\left(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

ist eine rationale Funktion in t, $t = x + \sqrt{x^2+1}$

Beispiel 87.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}+x} = \int \frac{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})}{\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})+\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})}dt =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{t^4-1}{t^4}dt = \frac{1}{4}\int(1-\frac{1}{t^4})dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{12}\frac{1}{t^3} + c = \frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{12(x+\sqrt{x^2+1})^3} + c$$

Rationale Funktionen von $\sqrt{x^2-1}$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$$

$$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1$$

$$x+\sqrt{x^2-1} = t, \quad x-\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{t}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \quad dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

Beispiel 88.

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2})dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2-1)^2}{t^3}dt = \frac{1}{4}\int (t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3})dt$$

$$= \frac{t^2}{8} - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + c = \frac{1}{8}((x+\sqrt{x^2-1})^2 - \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}) - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c =$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x) + c$$

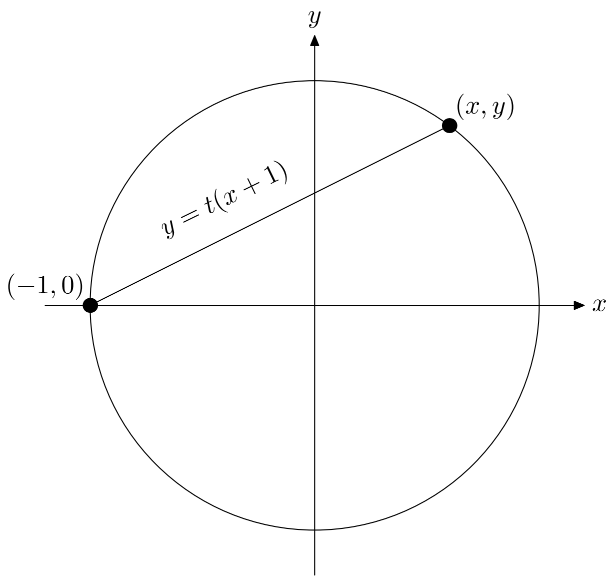
Rationale Funktionen von $\sqrt{1-x^2}$

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$$

Die Gleichung

$$\sqrt{1-x^2} = y, \quad x^2+y^2 = 1$$

beschreibt einen Kreis.



Wir legen eine Gerade durch den Punkt $(-1,0)$ mit Steigung t

$$y = t(x+1)$$

und schneiden diese Gerade mit dem Kreis:

$$\begin{aligned}&x^2 + t(x+1)^2 = 1\\&x^2(1+t^2) + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \text{ hat die Lösung } x = -1\\&(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 : x + 1 = (1+t^2)x + (t^2-1)\end{aligned}$$

Der zweite Schnittpunkt löst die Gleichung: $(1+t^2)x - (t^2-1) = 0$. Damit ergibt sich

$$x = \frac{t^2-1}{1+t^2}$$

und

$$y = t(x+1) = t(\frac{1-t^2}{t^2+1} + 1) = \frac{2t}{t^2+1}$$

Für die Substitution ergibt sich daher

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = \frac{2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx = \int R\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

Beispiel 89.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}dt = \dots$$

Rationale Funktionen von $\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ heißt die *Diskriminante*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = \frac{|\Delta|}{4|a|}\left(\frac{4|a|}{|\Delta|} \cdot a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \operatorname{sgn}(\Delta) \cdot \operatorname{sgn}(a)\right)$$

mit

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1 & \alpha > 0\\ 0 & \alpha = 0\\ -1 & \alpha < 0.\end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$ax^2 + bx + c = \frac{|\Delta|}{4|a|}\left(\operatorname{sgn}(a)\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta}}\right)^2 - \operatorname{sgn}(a\Delta)\right)$$

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta}}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|\Delta|}{|a|}}\sqrt{\operatorname{sgn}(a)t^2 - \operatorname{sgn}(a\Delta)}.$$

Je nach den Vorzeichen von a und Δ liegt einer der Fälle 4.2.2, 4.2.2 oder 4.2.2 vor.

Rationale Funktionen von $\sqrt{x-a}$ und $\sqrt{x-b}$

$$\int R(x, \sqrt{x-a}, \sqrt{x-b})dx, \quad a \neq b$$

$$(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}) = b-a$$

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b} = t \quad \sqrt{x-a}-\sqrt{x-b} = \frac{b-a}{t}$$

$$\sqrt{x-a} = \frac{1}{2}\left(t+\frac{b-a}{t}\right)$$

$$\sqrt{x-b} = \frac{1}{2}(t-\frac{b-a}{t}) \ dx = \left(\frac{t}{2}-\frac{(b-a)^2}{2t^3}\right)dt$$

$$x = a + \left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{b-a}{t}\right)\right)^2 = \frac{a+b}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{(b-a)2}{4t^2},$$

$$\int R(x, \sqrt{x-a}, \sqrt{x-b})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{a+b}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{(b-a)^2}{4t^2}, \frac{1}{2}\left(t+\frac{b-a}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t-\frac{b-a}{t}\right)\right)\left(\frac{t}{2}-\frac{(b-a)^2}{2t^3}\right)dt$$

Beispiel 90.

$$\int \frac{x \cdot dx}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4t^2}}{t+\frac{1}{t}+\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t^3}\right)dt = \int \frac{(t^4+6t^2+1)(t^4-1)}{4t^4(3t^2+1)}dt$$

Rationale Funktionen der Winkelfunktionen

$$\int R(\cos(x), \sin(x))dx = \int R(\cos(x), \sin(x), \tan(x), \cot(x))dx$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2\arctan(t), \quad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

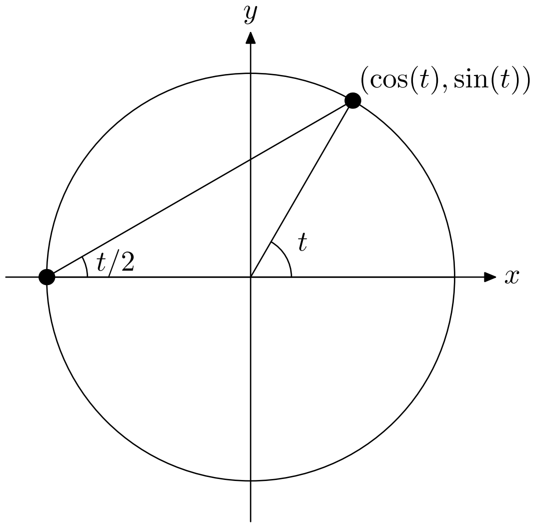
$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(x), \quad \frac{2t}{1+t^2} = \sin(x)$$

Beispiel 91.

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+2t+1}dt$$

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{2}{(t+1)^2}dt = -\frac{2}{t+1}+c = -\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1}+c$$



4.3 Das bestimmte Integral

Wir wollen die Fläche von Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bestimmen. Besonders Flächen, die von Funktionsgraphen begrenzt sind.

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Spezialfall: $f(x) = 0$

$$G = \{(x, y) | x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

Gesucht ist die Fläche von G.

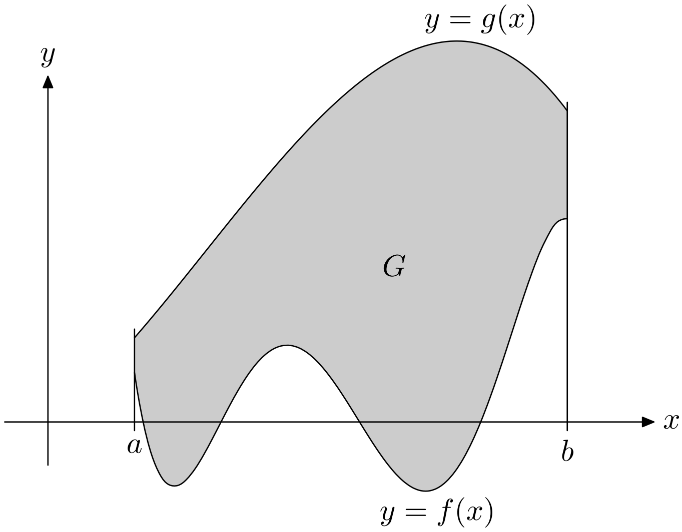


Abbildung 4.1: Die Fläche G

Idee: Schließe die Fläche A zwischen 2 Bereichen ein, deren Fläche bestimmt werden kann, also Vereinigungen von Rechtecken ($A = a \cdot b$).

Definition 4.3.1. $\mathfrak{Z}$ heißt eine *Zerlegung* von [a,b], wenn $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

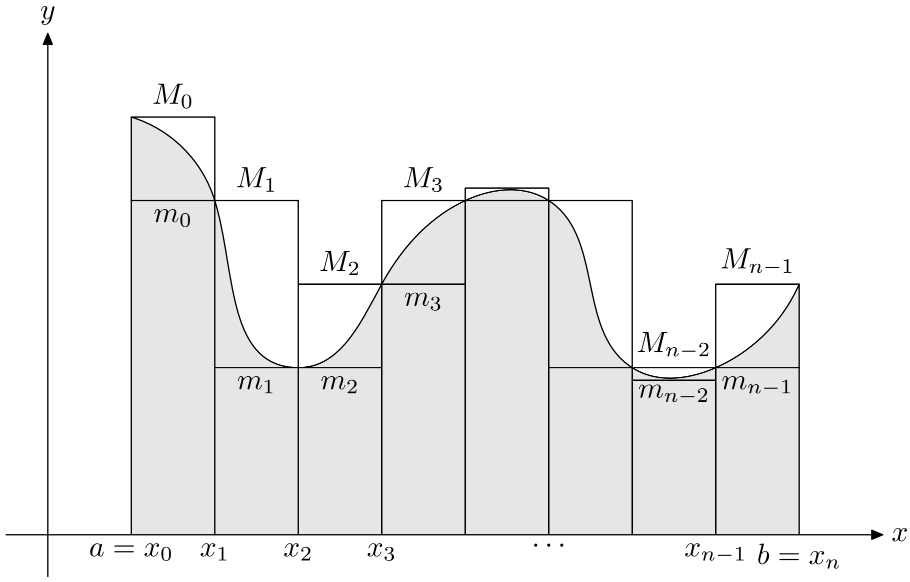


Abbildung 4.2: Ober- und Untersummen

Definition 4.3.2. Seien

$$m_i = \inf\{f(x)|x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
$$M_i = \sup\{f(x)|x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Die größere Fläche

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) =: \overline{S}(f, \mathfrak{Z})$$

heißt *Obersumme* von f zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Die kleinere Fläche

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) =: \underline{S}(f, \mathfrak{Z})$$

heißt *Untersumme* von f zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Bemerkung 73. Damit gilt (sofern A existiert):

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leq A \leq \overline{S}(f, \mathfrak{Z})$$

4.3.1 Eigenschaften von Ober- und Untersummen

1. Sei $\mathfrak{Z}_1 \subseteq \mathfrak{Z}_2$. Dann gilt

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1) \leq \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_2)$$
$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1) \geq \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_2)$$

Beweis. Sei $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 \cup \{\xi\}$ mit $x_j < \xi < x_{j+1}$

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\mathfrak{Z}_2) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_1) = \\ &\inf\{f(x)|x \in [x_j,\xi]\}(\xi - x_j) + \inf\{f(x)|x \in [\xi, x_{j+1}]\}(x_{j+1} - \xi) - \\ &\quad \inf\{f(x)|x \in [x_j, x_{j+1}]\}(x_{j+1} - x_j) \geq \\ &\qquad m_j(\xi - x_j + x_{j+1} - \xi) - m_j(x_{j+1} - x_j) = 0\end{aligned}$$

□

2. Seien $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ Zerlegungen. Dann gilt

$$\overline{S}(f,\mathfrak{Z}_1) \geq \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_2)$$

Jede Obersumme ist also größer als jede Untersumme.

Beweis.
$$\overline{S}(f,\mathfrak{Z}_1) \geq \overline{S}(f,\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \geq \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \geq \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_2)$$

□

Definition 4.3.3. Riemann-Darboux-Integral :

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\mathfrak{Z}} \overline{S}(f,\mathfrak{Z})$$

heißt das *obere Riemann-Darboux-Integral*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\mathfrak{Z}} \underline{S}(f,\mathfrak{Z})$$

heißt das *untere Riemann-Darboux-Integral.*

Definition 4.3.4. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = A.$$

Dann schreibt man
$$\int_a^b f(x)dx := A$$

$\int_a^b$ heißt das Riemann Integral oder bestimmte Integral.

Satz 4.3.5 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn:*
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \mathfrak{Z} : \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

Beweis. Sei f Riemann-integrierbar mit dem Integral $= A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\inf \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) = A = \sup \underline{S}(f,\mathfrak{Z})\\
&\inf \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) = A \Rightarrow \varepsilon > 0 : \exists \mathfrak{Z}_1 : \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) < A + \frac{\varepsilon}{2}\\
&A = \sup \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) \Rightarrow \varepsilon > 0 : \exists \mathfrak{Z}_2 : \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_2) > A + \frac{\varepsilon}{2}\\
&\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2 : \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) \le \overline{S}(f,\mathfrak{Z}_1) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}_2) < A + \frac{\varepsilon}{2} - (A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Umgekehrt: Gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathfrak{Z} : \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

Dann gilt auch

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Nach Definition ist f daher Riemann-integrierbar. □

Satz 4.3.6. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathfrak{Z}$, sodass $\overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$:

$$\forall x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Sei $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ die Zerlegung:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b,$$

und sei n so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$ gilt. Dann gilt

$$\overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\} = f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\\
m_i &= \inf\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\} = f(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]
\end{aligned}$$

$$|\xi_i - \eta_i| \le \frac{b-a}{n} < \delta \Rightarrow f(\xi_i) - f(\eta_i) \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Somit ist

$$\overline{S}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{S}(f,\mathfrak{Z}) \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \frac{b-a}{n} = n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

□

Bemerkung 74. Wir haben im Beweis folgende Eigenschaft verwendet:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Eine Funktion f mit dieser Eigenschaft heißt *gleichmäßig stetig* auf $[a,b]$.
Zum Vergleich: f ist stetig im Punkt x:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f ist stetig auf $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b] : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Hier hängt δ vom Punkt x ab. Die gleichmäßige Stetigkeit besagt gerade, dass man ein von x unabhängiges δ finden kann.

Auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen ist aber jede stetige Funktion gleichmäßig stetig (der Beweis kann z.B. mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß geführt werden). Unsere Annahme im Beweis ist also gerechtfertigt.

Beispiel 92.

$$\begin{aligned} f: \ & [a,b] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{Z} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n}{n}\right\}, \quad x_i = \frac{i}{n}$$

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}$$

Beispiel 93.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = ?$$

$$\mathfrak{Z} = \left\{x_i \mid x_i = 2^{\frac{i}{n}} \quad \text{und} \quad i = 0, \dots, n\right\}$$

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1\right) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n1} \left(1 - \frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = n(1 - 2^{-\frac{1}{n}})$$

$$n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln(2)\right) - 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln(2)\right) - 1\right) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2)$$

Beispiel 94.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$x \in [0,1]$:

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\} = 1,$$

also gilt $\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 1$.

$$m_i = \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\} = 0$$

also gilt $\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0$ und damit

$$\inf \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 1 \neq \sup \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0.$$

f ist also nicht Riemann-integrierbar.

Satz 4.3.7. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei f ohne Beschränkung der Allgemeinheit monoton wachsend.

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\} = f(x_{i+1}) \\
m_i &= \inf\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}] = f(x_i) \\
\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\frac{b-a}{n} \\
\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\
\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))(b-a)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) = 0$$

□

Bemerkung 75. Sei f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Dann gilt für $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bemerkung 76. Wenn f, g Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ sind, dann sind auch $f \pm g$; $f \cdot g$ Riemann-integrierbar auf $[a,b]$. Es gilt:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Bemerkung 77. Sei f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und sei $[c, d] \subseteq [a, b]$, dann ist f auch auf $[c, d]$ Riemann-integrierbar.

Satz 4.3.8. ***Mittelwertsatz der Integralrechnung:*** *Sei f stetig auf $[a, b]$, dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} M &= \sup\{f(x)|x \in [a,b]\} = f(x_1) \\ m &= \inf\{f(x)|x \in [a,b]\} = f(x_2) \end{aligned}$$

$$m(b-a) = \underline{S}(f, \{a, b\}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f, \{a, b\}) = M(b-a)$$

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)$$

nach Satz 3.2.8 gibt es daher ein ξ, sodass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

□

Definition 4.3.9. Sei $a < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Bemerkung 78. Mit dieser Definition gilt weiterhin: $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, für beliebige Werte von a, b, c im Definitionsbereich.

Wie betrachten nun für eine stetige Funktion f: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ das Riemann-Integral als Funktion der oberen Grenze. Dann gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi(h)), \text{ mit } \quad \lim_{h \to 0} \xi(h) = x$$
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi(h)) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi(h)) = f(x).$$

F ist also in x differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$. F ist also eine Stammfunktion von f. Sei G eine Stammfunktion von f. Es gibt daher nach Satz 4.1.2 eine Konstante C, sodass $G(x) = F(x) + C$ gilt für alle x.

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad x = a \Rightarrow G(a) = \int_a^a f(t)dt + C \Rightarrow$$
$$C = G(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

Dies fassen wir zusammen:

Satz 4.3.10 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei f stetig auf $[a,b]$ und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b$$

Beispiel 95. Sei

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

ein Halbkreis mit Radius 1. Die Fläche des Kreises mit Radius 1 ist:

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1-x^2}dx = ?\\
x &= \cos(t), \quad dx = -\sin(t)dt\\
I &= \int \sqrt{1-\cos^2(t)}dx = \int \sin(t)(-\sin(t)dt) = -\int \sin^2(t)dt\\
\cos(2t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t) \Rightarrow \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\\
I &= -\frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))dt = -\frac{-t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = -\frac{\arccos(x)}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\\
A &= \left(-\arccos(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 + 0 - (-\pi + 0) = \pi
\end{aligned}$$

Eine andere, bessere Möglichkeit das Integral zu lösen wäre:

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} 2\sin(t)(-\sin(t))dt = -\int_{\pi}^{0} 2\sin^2(t)dt = \int_0^{\pi} 2\sin^2(t)dt$$

Wegen $\sin(t) = -\cos(t+\frac{\pi}{2})$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(t)dt\\
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt\\
\text{und damit} \int_0^{\pi} \sin^2(t)dt &= \int_0^{\pi} \cos^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$, um

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))dt &= \int_0^{\pi} 1dt = t|_0^{\pi} = \pi\\
\text{und damit} \int_0^{\pi} \sin^2(t)dt &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi} 2\sin^2(t)dt = \pi
\end{aligned}$$

zu erhalten

Substitutionregel für bestimmte Integrale

Satz 4.3.11. *Sei $g : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv und differenzierbar. Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(g(t))|g'(t)|dt = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt$$

Beispiel 96.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \\
u &= (x+1), \quad du = dx \\
x &= 0 \to u = 1, \quad x = 1 \to u = 2 \\
I &= \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\
u &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \Rightarrow \sqrt{u^2+1} = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), t = u + \sqrt{u^2+1} \\
du &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt, \quad u = 1 \to t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad u = 2 \to t = 2 \pm \sqrt{5} \\
I &= \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{dt}{t} = \ln|t||_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} = \ln(2+\sqrt{5}) - \ln(1+\sqrt{2}) = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

4.3.2 Weitere Aufgaben die auf bestimmte Integrale führen

Definition 4.3.12. Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{n-1}$ Punkte aus $[a,b]$ mit $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{n-1}\},$$

$$R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

heißt *Riemannsche Zwischensumme* zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und zu den Stützstellen Ξ.

$$\max(x_{i+1} - x_i) = \|\mathfrak{Z}\|$$

heißt die *Feinheit der Zerlegung* $\mathfrak{Z}$

Es gilt:

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}) \leq R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) \leq \overline{S}(f, \mathfrak{Z})$$

Wenn die Feinheit der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ klein wird, wird auch die Differenz

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z})$$

klein. D.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathfrak{Z} : \|\mathfrak{Z}\| < \delta \Rightarrow \overline{S}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathfrak{Z} : \forall \Xi : \|\mathfrak{Z}\| < \delta \Rightarrow |R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

Definition 4.3.13. Wir schreiben

$$\lim_{\|\mathfrak{Z}\| \to 0} R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) = \int_a^b f(x)dx$$

für

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathfrak{Z} : \forall \Xi : \|\mathfrak{Z}\| < \delta \Rightarrow |R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Bogenlänge von Kurven

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, y = f(x)$ ist der Graph oder die Kurve. Wir wollen dieser Kurve eine Länge zuordnen. Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann definieren wir:

$$L(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

die Länge des Polygonzuges.

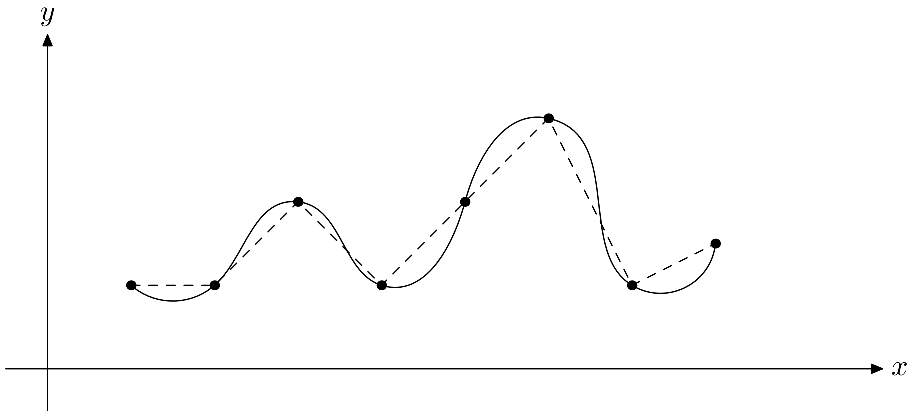


Abbildung 4.3: Bogenlänge

$L(f, \mathfrak{Z})$ ist immer kleiner als die Länge der Kurve und es gilt

$$\mathfrak{Z}_1 \subseteq \mathfrak{Z}_2 \Rightarrow L(f, \mathfrak{Z}_1) \leq L(f, \mathfrak{Z}_2)$$

wegen der Dreiecksungleichung

Definition 4.3.14. Die Kurve G heißt *rektifizierbar*, wenn

$$L = \sup_{\mathfrak{Z}} L(f, \mathfrak{Z}) < \infty$$

gilt, L heißt dann die *Bogenlänge*.

$$L(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

f sei differenzierbar auf $[a, b]$:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i)) = (x_{i+1} - x_i) f'(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}.$$

Dann können wir

$$L(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\xi))^2}(x_{i+1}-x_i) = R(\sqrt{1+(f'(\xi))^2},\mathfrak{Z},\Xi)$$

schreiben. $L(f,\mathfrak{Z})$ lässt sich also als Riemannsche Zwischensumme ausdrücken.

Wenn f' stetig ist, dann ist $\sqrt{1+(f')^2}$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Beispiel 97.

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2=1, \quad y=\sqrt{1-x^2}, \quad -1\le x\le 1\\
&y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
&1+(y')^2 = \frac{1}{1-x^2}\\
&\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi
\end{aligned}$$

Achtung! Der Integrand ist nicht beschränkt.

Beispiel 98. Beispiel einer nicht rektifizierbaren Kurve: die Koch-Kurve in Abbildung 4.4 (fraktale Kurve). Für die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wählen wir die Teilungspunkte im n-ten Schritt.Dann besteht das Näherungspolygon aus 4^n Strecken der Länge 3^{-n} also

$$L(C,\mathfrak{Z}) = 4^n\cdot 3^{-n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Sei die Kurve C gegeben durch eine Parameterdarstellung:

$$C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t\in[a,b]$$

also:

$$\begin{aligned}
x &= x(t)\\
y &= y(t)\\
z &= z(t) \quad \text{(im 3-Dimensionalen)}
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von $[a,b]$,

$$\mathfrak{Z} = \{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$$

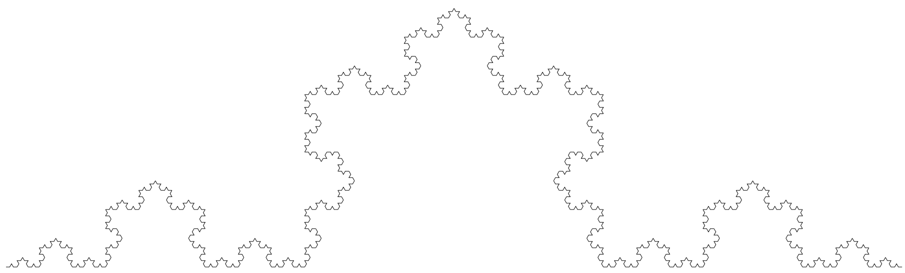


Abbildung 4.4: Die Koch-Kurve

$$L(C,\mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\|.$$

C ist rektifizierbar, wenn $\sup L(C,\mathfrak{Z}) < \infty$

$$L(C,\mathfrak{Z}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

$$(x(t_{i+1}) - x(t_i)) = \dot{x}(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \quad (y(t_{i+1}) - y(t_i)) = \dot{y}(\tilde{\tau}_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Im Zusammenhang mit Kurven schreibt man die Ableitung von x: $\dot{x}$ und nicht x'

$$\begin{aligned} L(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\dot{x}(\tau_i))^2 + (\dot{y}(\tilde{\tau}_i))^2}(t_{i+1} - t_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\dot{x}(\tau_i))^2 + (\dot{y}(\tau_i))^2}(t_{i+1} - t_i) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{(\dot{x}(\tau_i))^2 + (\dot{y}(\tilde{\tau}_i))^2}) - \sqrt{(\dot{x}(\tau_i))^2 + (\dot{y}(\tau_i))^2})(t_{i+1} - t_i) \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\dot{x}(\tau_i))^2 + (\dot{y}(\tau_i))^2}(t_{i+1} - t_i) = R(\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}, \mathfrak{Z}, T), \\ T &= \{\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{n-1}\} \end{aligned}$$

Seien $\dot{x}, \dot{y}$ stetig. Dann ist auch $\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}$ stetig und daher Riemann-integrierbar. Es gilt daher

$$L = \sup L(C,\mathfrak{Z}) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Und im 3-Dimensionalen:

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Bemerkung 79.

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

heißt das *Bogenelement*

Und im 3-Dimensionalen:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt$$

Man schreibt gelegentlich

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2 + (\dot{z}dt)^2 \\
\dot{x}dt &= \frac{dx}{dt}dt = dx, \dots \\
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2
\end{aligned}$$

Beispiel 99. Kreislinie

$$x = \cos(t), y = \sin(t), t \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned}
L(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt &= \int_0^t 1dt = t|_0^t = t \\
\dot{x} = -\sin(t), \quad \dot{y} = \cos(t), \quad & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1
\end{aligned}$$

$L(2\pi) = 2\pi$ Umfang des Einheitskreises.

Bemerkung 80. Der in Definition 3.4.5 definierte Wert von π hat also tatsächlich etwas mit dem Kreisumfang und der Kreisfläche zu tun.

Die Leibnizsche Sektorformel

Wir wollen die Fläche des Sektors bestimmen, der von der Kurve

$$C : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b],$$

sowie den beiden Strahlen, die den Ursprung mit dem Anfangs- bzw. Endpunkt der Kurve verbinden, begrenzt wird.(Abb.4.5

Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Dann approximieren wir die Fläche des Sektors durch Dreiecke.

$$\begin{aligned}
F(C, \mathfrak{Z}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_{i+1}) + x(t_{i+1})y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y(t_{i+1})(x(t_i) - x(t_{i+1})) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x(t_{i+1})(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \\
&\approx R(-\frac{1}{2}y\dot{x}, \mathfrak{Z}, T) + R(\frac{1}{2}x\dot{y}, \mathfrak{Z}, \tilde{T})
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$F(C) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)dt =: \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx)$$

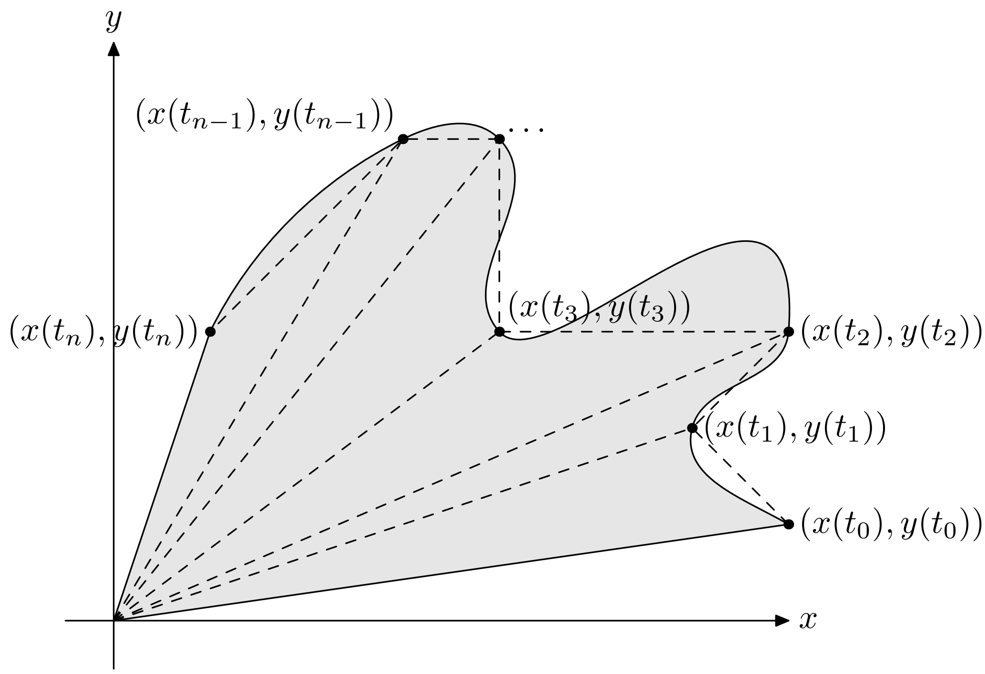


Abbildung 4.5: Leibnizsche Sektorformel

Beispiel 100. Kreissegment:(Abb. 4.6)

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos(t), \quad \dot{x} = -r\sin(t), \quad y = r\sin(t), \quad \dot{y} = r\cos(t), \quad t \in [0, \varphi] \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^\varphi (r^2\cos^2(t) + r^2\sin^2(t))dt = \frac{1}{2}r^2\int_0^\varphi (\cos^2(t) + \sin^2(t))dt \\ &= \frac{1}{2}r^2\int_0^\varphi dt = \frac{1}{2}r^2 t\Big|_0^\varphi = \frac{1}{2}r^2\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel 101. Hyperbelsegment:(Abb. 4.7)

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh(t), \quad \dot{x}(t) = \sinh(t), \quad y(t) = \sinh(t), \quad \dot{y}(t) = \cosh(t) \\ &\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^t (\cosh^2(t) - \sinh^2(t))dt = \frac{1}{2}\int_0^t dt = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$\frac{t}{2}$ ist also die *Fläche* des Hyperbelsegments. Daher heißen die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen *Area*, weil ihr Wert eine Fläche bestimmt.

Volumen eines Rotationskörpers

Zunächst unterteilen wir (wie gehabt) das Intervall $[a, b]$ in viele kleine Teilstücke $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_0 = a$ und $x_{N+1} = b$. In jedem solchen Teilstück kann das Volumen des entsprechenden Teilkörpers einigermaßen gut durch das eines Zylinders ($V = r^2\,\pi\,h$) angenähert werden für Ober- und Untersummen erhält man also $f\big(\underline{\xi}_i\big)^2\,\pi\,\Delta x_i \leq \Delta V_i \leq f\big(\overline{\xi}_i\big)^2\,\pi\,\Delta x_i$ mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und gelte: $f(\underline{\xi}_i) \leq f(x) \leq f(\overline{\xi}_i)$ für alle $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

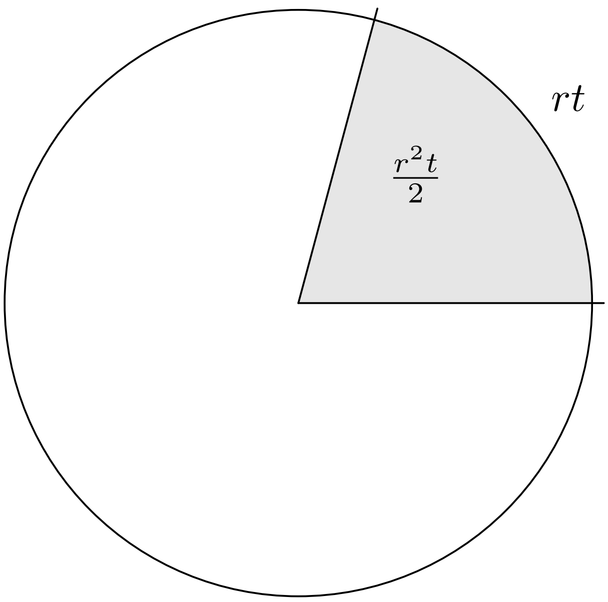


Abbildung 4.6: Kreissegment

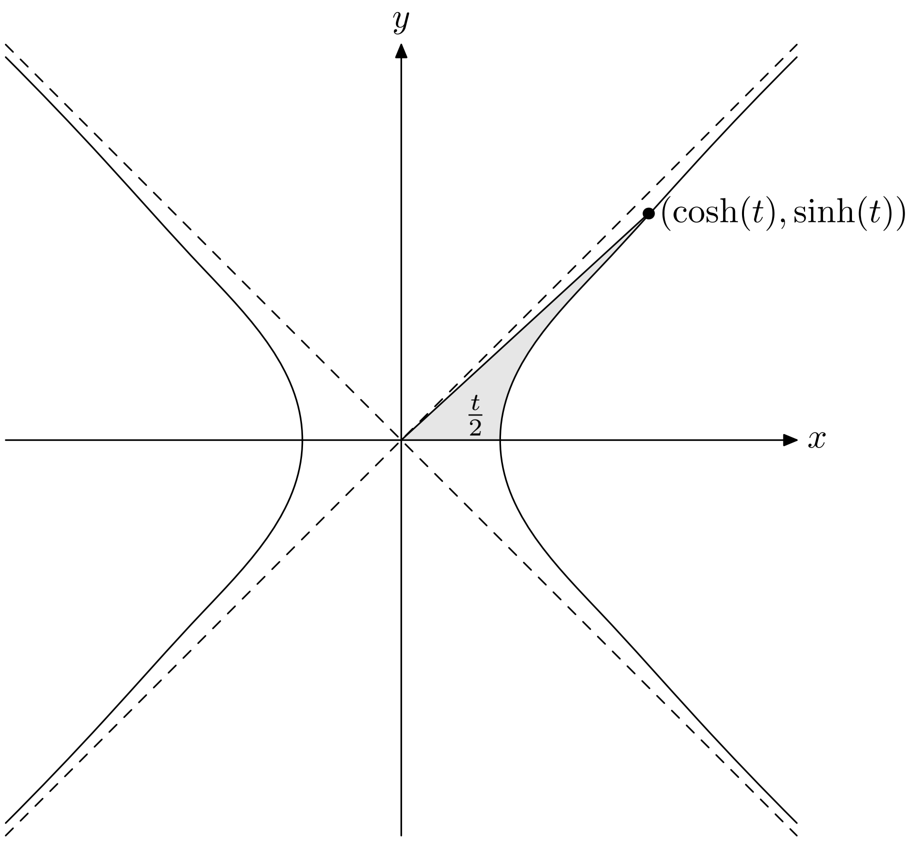


Abbildung 4.7: Hyperbelsegment

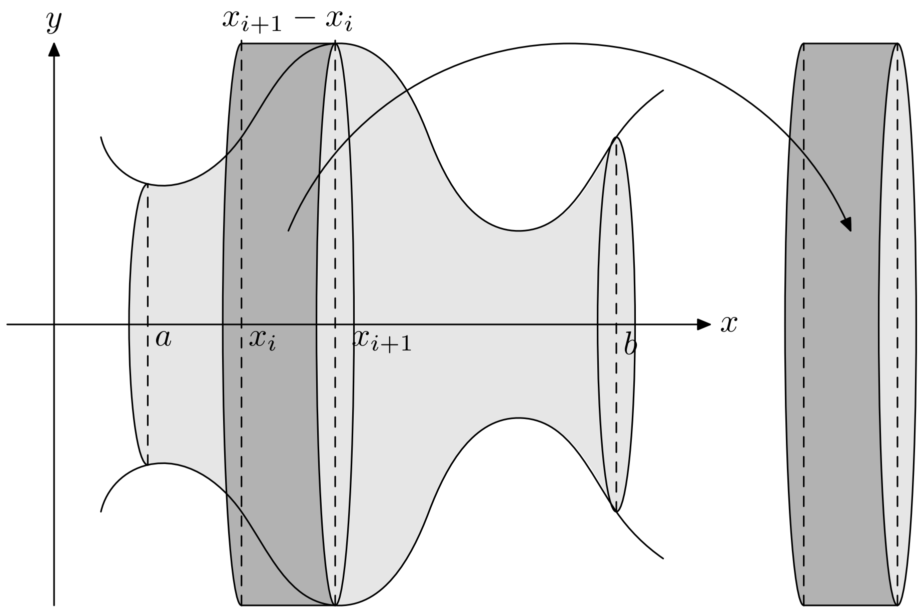


Abbildung 4.8: Volumen eines Rotationskörper

Arbeitet man lieber mit Riemann-Summen, so kann man direkt schreiben: $\Delta V_i \approx f\big(\xi_i\big)^2 \pi \, \Delta x_i$ mit $\xi_i \in [x_i,\, x_{i+1}]$. Macht man nun die Zerlegung immer feiner und feiner, so konvergiert (unter entsprechenden Voraussetzungen) die Näherung $O \approx \sum_{i=0}^{N} f\big(\xi_i\big)^2 \pi \, \Delta x_i$ gegen den Wert $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

Oberfläche eines Rotationskörpers

Ähnlich, nur ein wenig komplizierter lässt sich die Oberfläche eines Rotationskörpers bestimmen. (Auch hier setzen wir wieder voraus, dass f auf $[a,\, b]$ differenzierbar und integrierbar.)

In diesem Fall genügt die Näherung durch den Zylinder nicht mehr, da sie die „Schräge“ der Oberfläche naturgemäß nicht erfasst. Ein Oberflächenelement zwischen x_i und x_{i+1} wird stattdessen angenähert durch den Mantel eines Kegelstumpfes:
Rollt man diesen ab, so ergibt sich für die Fläche: (Abb. 4.10)

$$\Delta O_i = \frac{\phi}{2}\big((r+s)^2 - r^2\big) = \frac{\phi}{2}\big(2rs + s^2\big) = s \cdot \frac{1}{2}\big(\underbrace{r \cdot \phi}_{=b_1} + \underbrace{(r+s) \cdot \phi}_{=b_2}\big)$$

mit $b_1 = \phi\, r = 2\pi\, f(x_i)$ und $b_2 = \phi\,(r+s) = 2\pi\, f(x_{i+1})$. Der Winkel ϕ ist hier unbekannt, man benötigt ihn aber auch nicht, denn b_1 und b_2 hat man ja ohnehin, und für das Stück s ergibt er sich nach Pythagoras

$$s = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

mit $\Delta f_i := f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Damit folgt für das Oberflächenelement

$$\Delta O_i \approx 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \frac{f(x_i) + f(x_i + 1)}{2}\, \Delta x_i$$

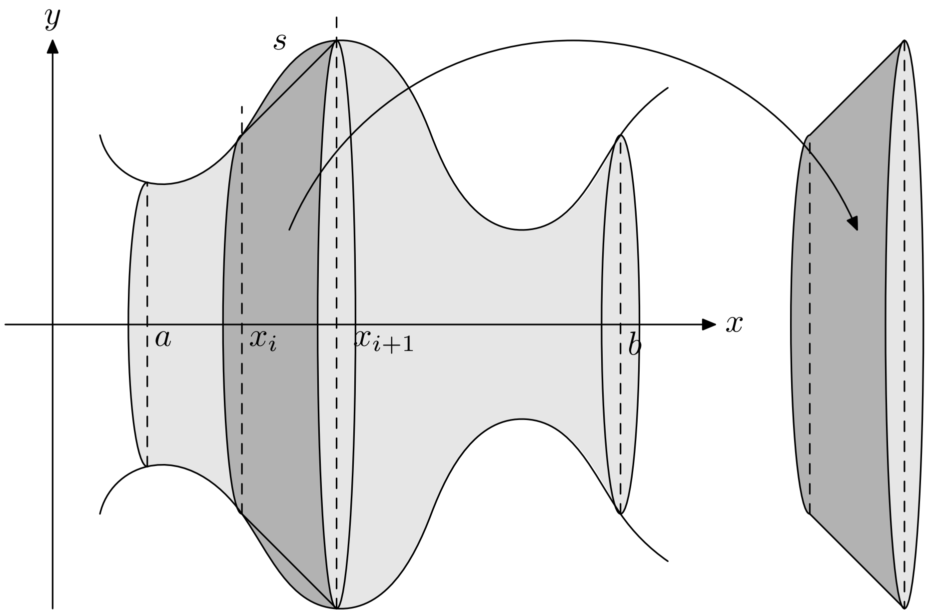


Abbildung 4.9: Oberfläche eines Rotationskörpers

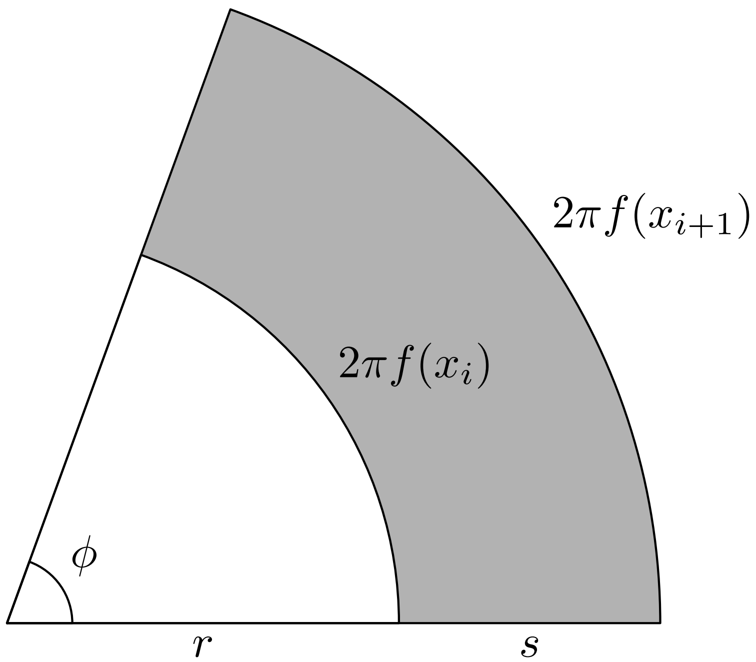


Abbildung 4.10: Kegelstumpf

Durch Anwendung des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen und des (ersten) Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erhält man die Summe

$$O \approx 2\pi \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\, f(\chi_i)\, \Delta x_i$$

mit ξ_i und χ_i aus dem Intervall $[x_i,\, x_{i+1}]$. Macht man nun die Aufteilung immer feiner, so konvergiert der obige Ausdruck wiederum gegen den Wert

$$O = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, f(x)\, dx$$

Beispiel 102. Volumen und Oberfläche der Kugel Als Beispiel für die Anwendung der beiden vorhin hergeleiteten Formeln betrachten wir zunächst die Kugel mit dem Radius R. Diese entsteht durch Rotation eines Halbkreises

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad x \in [-R,\, R]$$

um die x-Achse. Das Volumen ergibt sich damit als

$$V_\circ = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Analog erhält man für die Oberfläche (wobei $f'(x) = -x\,(R^2 - x^2)^{-1/2}$ ist):

$$\begin{aligned} O_\circ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, f(x)\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi\, R \int_{-R}^{R} dx = 2\pi\, Rx\big|_{-R}^{R} = 4\pi\, R^2 \end{aligned}$$

Das Volumen der Kugel erhält man übrigens ebenfalls, wenn man sich die Vollkugel aus Kugelschalen der Dicke dr aufgebaut denkt, von denen dann jede (näherungsweise) das Volumen $4\pi r^2\, dr$ hat. Das Gesamtvolumen ist dann

$$V_\circ = 4\pi \int_0^R r^2\, dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

4.4 Uneigentliche Integrale

Es ist schon einmal bei der Berechnung der Bogenlänge des Kreises vorgekommen, dass der Integrand unbeschränkt war. Dort hat sich herausgestellt, dass trotzdem unsere Rechnung das richtige Ergebnis geliefert hat.

Wir wollen nun systematisch studieren, wie man Integrale sowohl mit unbeschränktem Integranden als auch mit unbeschranktem Integrationsintervall definieren kann.

Definition 4.4.1. Uneigentliche Integrale

1. $\int_a^b f(x)dx$ mit $\limsup_{x\to a_+} |f(x)| = \infty$ existiert (konvergiert), wenn
$$\lim_{T\to a_+} \int_T^b f(x)dx$$
existiert.

2. $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, wenn
$$\lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$$
existiert.

Beispiel 103.

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-x}dx = \lim_{B\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^B = \lim_{B\to\infty} -e^{-B} + e^0 = 1$$

Beispiel 104.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = ?$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = ?$$
$$\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \int x^{-\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 \frac{1}{x^\alpha}dx =$$
$$\lim_{A\to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_A^1 = \lim_{A\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

Also
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^\alpha}dx =$$
$$\lim_{B\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right),$$

also
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Satz 4.4.2. ***Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale:***

1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei a eine uneigentliche Stelle, aber alle Integrale $\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$, (mit $\delta > 0$) existieren. Dann konvergiert $\int_a^b f(x)dx$ genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall t_1, t_2 \in (a, a+\delta) : \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

2. *$\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists T \in \mathbb{R}, \forall t_1, t_2 > T : \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Definition 4.4.3. Die uneigentlichen Integrale $\int_a^b f(x)dx$ bzw. $\int_a^\infty f(x)dx$ heißen absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f(x)|dx$ bzw. $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergieren.

Satz 4.4.4. *Seien die uneigentlichen Integrale $\int_a^b f(x)dx$ bzw $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergent. Dann sind sie auch konvergent.*

Beweis. $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in (a, a+\delta) : \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

Dann gilt

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Dann konvergiert $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$ nach dem Cauchy-Kriterium. □

Satz 4.4.5. ***Majorantenkriterium:***

1. *Sei f auf $[a, b]$ positiv und $\int_a^b f(x)dx$ konvergiere. Sei weiters $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann konvergiert $\int_a^b g(x)dx$.*

2. *Sei f auf $[a, \infty)$ positiv und $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiere. Sei weiters $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$, dann konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$.*

Satz 4.4.6. ***Minorantenkriterium:***

1. *Seien f, g auf $[a, b]$ positiv und gelte: $f(x) \leq g(x)$ für alle $\in [a, b]$. Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ sei divergent, dann ist auch $\int_a^b g(x)dx$ divergent.*

2. *Seien f, g auf $[a, \infty)$ positiv und gelte: $f(x) \leq g(x)$ für alle $\in [a, \infty)$. Das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ sei divergent, dann ist auch $\int_a^\infty g(x)dx$ divergent.*

Beispiel 105.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$$

Das Integral ist positiv. Die Stammfunktion ist keine uns bekannte Funktion.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \text{ konvergiert.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \text{ konvergiert.}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$$

$$x \geq 1 : \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \leq e^{-x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{T \to \infty} \int_1^T e^{-x} dx = \lim_{T \to \infty} \left(e^{-x}\right)\Big|_1^T = \frac{1}{e} \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x} dx \text{ konvergiert.}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \text{ konvergiert}$$

Beispiel 106.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} e^{-x} \geq \frac{1}{ex}$$

$$\frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{x} \text{ divergiert}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-x} dx \text{ divergiert}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx \text{ divergiert.}$$

4.5 Numerische Berechnung von Integralen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Gesucht ist dann $\int_a^b f(x)dx =$ Die Bestimmung einer Stammfunktion ist oft sehr aufwendig (gelegentlich auch unmöglich). Oft genügt aber ein numerischer Wert für das Integral mit einer gewissen vorgegebenen Genauigkeit.

Wir versuchen einen Näherungswert für das Integral unter Verwendung von äquidistanten Stützstellen zu erhalten ($x_i = a + i\frac{b-a}{n}$).

Satz 4.5.1 (Trapezformel)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und*

$$A = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right).$$

Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - A \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Die Näherungsformel für die Fläche entsteht, indem man die Fläche unter dem Funktionsgraphen durch die Fläche unter dem Polygonzug approximiert, der die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,... $(x_n, f(x_n))$ miteinander verbindet.

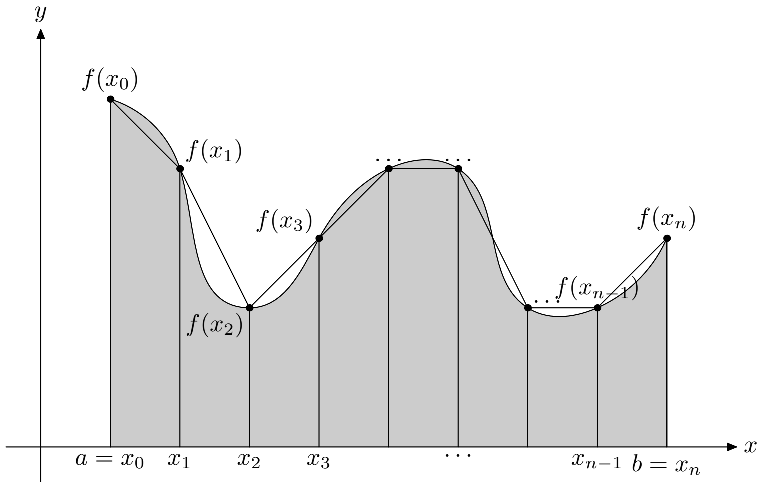


Abbildung 4.11: Zur Trapezformel

Beweis. Wir betrachten der Einfachheit halber das Intervall $[0, h]$ mit $h = (b-a)/n$. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_0^h f(x)\,dx = \left(x - \frac{h}{2}\right) f(x)\Big|_0^h - \int_0^h (x - \frac{h}{2}) f'(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \frac{1}{2}\left(x^2 - hx\right) f'(x)\Big|_0^h + \frac{1}{2}\int_0^h (x^2 - hx) f''(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) + \frac{1}{2}\int_0^h (x^2 - hx) f''(x)\,dx.$$

Die Näherung $\frac{h}{2}(f(0) + f(h))$ unterscheidet sich vom Integral also um $\frac{1}{2}\int_0^h (x^2 - hx) f''(x)\,dx$. Dieses Integral schätzen wir nach dem Mittelwertsatz ab

$$\frac{1}{2}\int_0^h (x^2 - hx) f''(x)\,dx = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_0^h (x^2 - hx)\,dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

für ein $\xi \in [0, h]$. Indem wir die obige Rechnung auf jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ anwenden und $|f''(\xi)|$ durch das Maximum der zweiten Ableitung auf $[a, b]$ ersetzen, erhalten wir die Behauptung. $\square$

Satz 4.5.2 (Die Simpsonformel). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar, $h = \frac{b-a}{2n}$ und*

$$A = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=1}^{n-1} f(a+(2k+1)h) + f(b)\right) =$$
$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2f(a+h) + 4f(a+2h) + 2f(a+3h) + 4f(a+4h) + \cdots + f(b)\right).$$

Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - A\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)|.$$

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis der Trapezformel genügt es das Integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{0} f(x)\,dx + \int_0^h f(x)\,dx$ zu betrachten und mehrfach partielle Integration anzuwenden:

$$\int_{-h}^{0} f(x)\,dx = \left(x + \frac{2h}{3}\right) f(x)\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0}\left(x + \frac{2h}{3}\right) f'(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{3}f(-h) + \frac{2h}{3}f(0) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2hx}{3} + \frac{h^2}{6}\right) f'(x)\Big|_{-h}^{0} + \int_{-h}^{0}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2hx}{3} + \frac{h^2}{6}\right) f''(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{3}f(-h) + \frac{2h}{3}f(0) - \frac{h^2}{6}f'(0) + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{hx^2}{3} + \frac{h^2x}{6}\right) f''(x)\Big|_{-h}^{0} -$$
$$\int_{-h}^{0}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{hx^2}{3} + \frac{h^2x}{6}\right) f'''(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{3}f(-h) + \frac{2h}{3}f(0) - \frac{h^2}{6}f'(0) - \left(\frac{x^4}{24} + \frac{hx^3}{9} + \frac{h^2x^2}{12} - \frac{h^4}{72}\right) f'''(x)\Big|_{-h}^{0} +$$
$$\int_{-h}^{0}\left(\frac{x^4}{24} + \frac{hx^3}{9} + \frac{h^2x^2}{12} - \frac{h^4}{72}\right) f''''(x)\,dx =$$
$$\frac{h}{3}f(-h) + \frac{2h}{3}f(0) - \frac{h^2}{6}f'(0) + \frac{h^4}{72}f'''(0) + \int_{-h}^{0}\left(\frac{x^4}{24} + \frac{hx^3}{9} + \frac{h^2x^2}{12} - \frac{h^4}{72}\right) f''''(x)\,dx.$$

Ebenso formen wir das zweite Integral um:

$$
\begin{aligned}
\int_0^h f(x)\,dx = \left(x-\frac{2h}{3}\right)f(x)\Big|_0^h - \int_0^h \left(x-\frac{2h}{3}\right)f'(x)\,dx = \\
\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2hx}{3}+\frac{h^2}{6}\right)f'(x)\Big|_0^h + \int_0^h\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2hx}{3}+\frac{h^2}{6}\right)f''(x)\,dx = \\
\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)+\left(\frac{x^3}{6}-\frac{hx^2}{3}+\frac{h^2x}{6}\right)f''(x)\Big|_0^h - \\
\int_0^h\left(\frac{x^3}{6}-\frac{hx^2}{3}+\frac{h^2x}{6}\right)f'''(x)\,dx = \\
\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)-\left(\frac{x^4}{24}-\frac{hx^3}{9}+\frac{h^2x^2}{12}-\frac{h^4}{72}\right)f'''(x)\Big|_0^h + \\
\int_0^h\left(\frac{x^4}{24}-\frac{hx^3}{9}+\frac{h^2x^2}{12}-\frac{h^4}{72}\right)f''''(x)\,dx = \\
\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)-\frac{h^4}{72}f'''(0)+\int_0^h\left(\frac{x^4}{24}-\frac{hx^3}{9}+\frac{h^2x^2}{12}-\frac{h^4}{72}\right)f''''(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Indem wir diese beiden Gleichungen addieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^h f(x)\,dx = \frac{h}{3}f(-h)+\frac{4h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+ \\
\int_{-h}^0\left(\frac{x^4}{24}+\frac{hx^3}{9}+\frac{h^2x^2}{12}-\frac{h^4}{72}\right)f''''(x)\,dx+\int_0^h\left(\frac{x^4}{24}-\frac{hx^3}{9}+\frac{h^2x^2}{12}-\frac{h^4}{72}\right)f''''(x)\,dx = \\
\frac{h}{3}f(-h)+\frac{4h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{1}{72}\int_{-h}^h(h-|x|)^3(3|x|+h)f''''(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Das Restglied schätzen wir mit der Dreiecksungleichung unter Verwendung des Mittelwertsatzes ab

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{72}\int_{-h}^h(h-|x|)^3(3|x|+h)f''''(x)\,dx\right| \le \\
\frac{1}{72}\max_{x\in[-h,h]}|f''''(x)|\int_{-h}^h(h-|x|)^3(3|x|+h)\,dx = \frac{h^5}{90}\max_{x\in[-h,h]}|f''''(x)|.
\end{aligned}
$$

□

5 Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Variablen

5.1 Stetige Funktionen von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^q$

Definition 5.1.1. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^p$ heißt offen, wenn zu jedem Element $\mathbf{x}_0 \in U$ noch eine kleine Umgebung auch zu U gehört.
$\forall \mathbf{x}_0 \in U\ \exists \varepsilon > 0$, so dass gilt: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ ist $\mathbf{x} \in U$.

Definition 5.1.2. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$, dann heißt $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^q$ stetig in $\mathbf{x}_0 \in U$ genau dann, wenn für jede Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ auch $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ gilt,

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in U : \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon.$$

Bemerkung 81. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (f_1(x_1, \ldots, x_p), f_2(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_q(x_1, \ldots, x_p))$, $f_1, \ldots, f_q$ heißen Koordinatenfunktionen.

Bemerkung 82. Wenn es gelingt eine Ungleichung: $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|$ für $c > 0$ und $\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < d$ (für ein $d > 0$) zu zeigen, ist die Stetigkeit nachgewiesen.

5.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 5.2.1. $A = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow$ für alle Folgen $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbf{x}_n \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ und $\mathbf{x}_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ gilt:

$$A = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in U : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - A\| < \varepsilon$$

Beispiel 107. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ definiert auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ Existiert: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0$$

Damit haben wir nur Annäherungen zu $(0, 0)$ parallel zu den Koordinatenachsen studiert. Für die Existenz des Grenzwertes müssen aber alle Annäherungen berücksichtigt werden.

$$\lim_{t\to 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Der Grenzwert hängt von der Richtung der Annäherung ab, also existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht.

5.3 Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Variablen

Bisher haben wir Funktionen in einer Variablen studiert. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig auf U. $\mathbf{x}_0 \in U$. Wir wollen f in $\mathbf{x}_0$ differenzieren.

Wir erinnern uns an die 1. Näherung für Funktionen einer Variablen

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + |x - x_0| r(g, x_0, x), \text{ mit } \lim_{x \to x_0} r(g, x_0, x) = 0$$

Diese Gleichung verallgemeinern wir für Funktionen in mehreren Variablen

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| r(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \text{ mit } \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} r(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 0,$$

wobei A eine *lineare Abbildung* bezeichnet:

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (a_1 \dots a_p) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ x_2 - x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_p - x_p^{(0)} \end{pmatrix} = a_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + a_p(x_p - x_p^{(0)})$$

Unter der Annahme, dass f in $\mathbf{x}_0$ eine erste Näherung zulässt, wollen wir die *Koordinaten* $(a_1, \dots, a_p)$ der linearen Abbildung A bestimmen.

Dazu fixieren wir alle Koordinaten bis auf die i-te:

$$x_1 = x_1^{(0)} \dots x_{(i-1)} = x_{(i-1)}^{(0)}, x_{(i+1)} = x_{(i+1)}^{(0)} \dots x_p = x_p^{(0)}$$

und setzten diese Werte in die erste Näherung ein

$$f(x_1^{(0)} \dots x_{(i-1)}^{(0)}, x_i, x_{(i+1)}^{(0)} \dots x_p^{(0)}) - f(x_1^{(0)} \dots x_p^{(0)}) =$$

$$a_i(x_i - x_i^{(0)}) + |x_i - x_i^{(0)}| r(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x})$$

Indem wir dann durch $x_i - x_i$ dividieren ergibt sich

$$\frac{f(x_1^{(0)} \dots x_{(i-1)}^{(0)}, x_i, x_{(i+1)}^{(0)} \dots x_p^{(0)}) - f(x_1^{(0)} \dots x_p^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}} = a_i + \frac{|x_i - x_i^{(0)}|}{x_i - x_i^{(0)}} r(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x})$$

und daher

$$\lim_{x_i \to x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)} \dots x_{(i-1)}^{(0)}, x_i, x_{(i+1)}^{(0)} \dots x_p^{(0)}) - f(x_1^{(0)} \dots x_p^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}} = a_i$$

.

Definition 5.3.1. Der Grenzwert

$$\lim_{x_i \to x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)} \dots x_{(i-1)}^{(0)}, x_i, x_{(i+1)}^{(0)} \dots x_p^{(0)}) - f(x_1^{(0)} \dots x_p^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}}$$

heißt die *partielle Ableitung* von f nach x_i, wenn dieser existiert. Wir schreiben dafür :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

Bemerkung 83. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ kann nach den selben Regeln der Differentiation von Funktionen von einer Variablen bestimmt werden. Dabei sind alle Variablen außer x_i als Konstante zu behandeln.

Beispiel 108.

$$f(x,y) = e^{(x+y)}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{(x+y)}\sin(xy) + e^{(x+y)}\cos(xy)y = e^{(x+y)}(\sin(xy) + \cos(xy)y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{(x+y)}\sin(xy) + e^{(x+y)}\cos(xy)x = e^{(x+y)}(\sin(xy) + \cos(xy)x)$$

Bemerkung 84. Wenn die 1.Näherung existiert, dann sind die Koordinaten der linearen Abbildung A genau die partiellen Ableitungen.

Beispiel 109.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \leq \sqrt{y^2+x^2} \qquad \text{f ist stetig}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Wenn f differenzierbar an der Stelle $(0,0)$ wäre, dann müßte

$$f(x,y) = f(0,0) + 0x + 0y + \|(x,y)\| r(f,\mathbf{0},\mathbf{x})$$

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\, r(f,\mathbf{0},\mathbf{x})$$

gelten mit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} r(f,\mathbf{0},\mathbf{x}) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Es gilt aber

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2t}{(t^2+t^2)\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

ist also in $(0,0)$ nicht differenzierbar, obwohl die partiellen Ableitungen existieren.

Idee: Wir definieren Ableitungen für jede Richtung. Sei $\mathbf{e}$ ein Vektor mit $\|\mathbf{e}\| = 1$. Dann definieren wir normierte Richtungsableitungen in Richtung $\mathbf{e}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Beispiel 110.

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \mathbf{e} = (e_1, e_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+te_1, 0+te_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(te_1)^2 te_2}{(te_1)^2 + (te_2)^2} \frac{1}{t} = \frac{e_1 e_2^2}{e_1^2 + e_2^2}$$

Die Richtungsableitungen existieren für jede Richtung, obwohl die Funktion in dem Punkt nicht differenzierbar ist.

Satz 5.3.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und seien die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig in $\mathbf{x}_0$. Dann ist f differenzierbar in $\mathbf{x}_0$.*

- Interpretation der Differenzierbarkeit

  $$\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^2 : G = \left\{(x,y,z) | z = f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \text{ Funktionsgraph}$$

  Die 1. Näherung in (x_0, y_0) :

  $$z = g(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

  ist eine Ebenengleichung mit

  $$f(x,y) - g(x,y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| r(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x})$$

  Die Ebene $z = g(x,y)$ berührt den Funktionsgraphen in (x_0, y_0) (die Tangentialebene). Wenn f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, dann existiert diese Ebene.

- Interpretation der Richtungsableitung
  Die Richtungsableitung ist die Steigung der Tangente im Schnittbild der entsprechenden Ebene. Wenn bei einer Funktion alle Richtungsableitungen existieren, aber die Funktion selbst nicht differenzierbar ist, spannen die Tangenten der Schnittkurven keine Ebene auf.

5.4 Der Gradient

Definition 5.4.1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}_0$, nach allen Variablen partiell differenzierbar, dann nennt man den Vektor

$$\operatorname{grad} f = \bigtriangledown f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{den } \textit{Gradienten} \text{ von } f \text{ in } \mathbf{x}_0.$$

Schreibweise: $\bigtriangledown$="Nabla"

$$\bigtriangledown = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Satz 5.4.2. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^1(U_\varepsilon(\mathbf{x}_0))$ und in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar. Dann gilt für alle Richtungen $\mathbf{a}$ mit $\|\mathbf{a}\| = 1$:*

- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\Big|_{\mathbf{x}_0} = \left\langle \mathbf{a}, \operatorname{grad} f|_{\mathbf{x}_0} \right\rangle$ *(das Skalarprodukt)*
- $\left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}\Big|_{\mathbf{x}_0} \right\| \leq \left\| \operatorname{grad} f|_{\mathbf{x}_0} \right\|$
- $\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ *ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f in $\mathbf{x}_0$*
- $-\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ *ist die Richtung des stärksten Abfalls von f in $\mathbf{x}_0$*

5.5 Funktionen f: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Für Abbildungen $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist die "Ableitung" eine $q \times p$-Matrix, deren Einträge die partiellen Ableitungen sind. Diese wird *Jacobi-Matrix* oder auch *Ableitungsmatrix* genannt:

$$\mathbf{f}' = D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial(f_1, \dots f_q)}{\partial(x_1, \dots x_p)}(\boldsymbol{\xi}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{\xi}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\boldsymbol{\xi}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(\boldsymbol{\xi}) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$$

Die einzige Differentiationsregel, die sich nicht unmittelbar aus den Ableitungsegeln für Funktionen einer Variablen ableiten läßt, ist die Kettenregel.

Satz 5.5.1. *Gegeben seien die beiden Funktionen:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: &\quad X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \quad X \text{ offen} \\ \boldsymbol{g}: &\quad Y \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r \quad Y \text{ offen, } \boldsymbol{f}(X) \subset Y \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{f}$ im Punkt $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$ differenzierbar sei. Dann ist die Funktion

$$\boldsymbol{h}: \ X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$$

mit $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, also $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$, in (ξ) differenzierbar und es gilt

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}))\, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})$$

bzw. in ausführlicherer Schreibweise:

$$\frac{\partial(h_1, \dots, h_r)}{\partial(x_1, \dots, x_p)} = \frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(y_1, \dots, y_q)} \cdot \frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}.$$

Bei der mehrdimensionalen Kettenregel handelt sich um eine *Matrixgleichung* der Form $[r \times p] = [r \times q] \cdot [q \times p]$. Schlüsselt man die Kettenregel komponentenweise auf, hat man $p \cdot r$ Gleichungen der Form ($i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, p$)

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial f_q}{\partial x_j}.$$

Polarkoordinaten

Für den besonders häufig vorkommenden Fall der Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten und umgekehrt sind die entsprechenden Ableitungen zusammengestellt (mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r}
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke erhält man, wenn man die Transformationsformeln $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ nach x sowie nach y ableitet und das entstehende lineare Gleichungssystem löst.

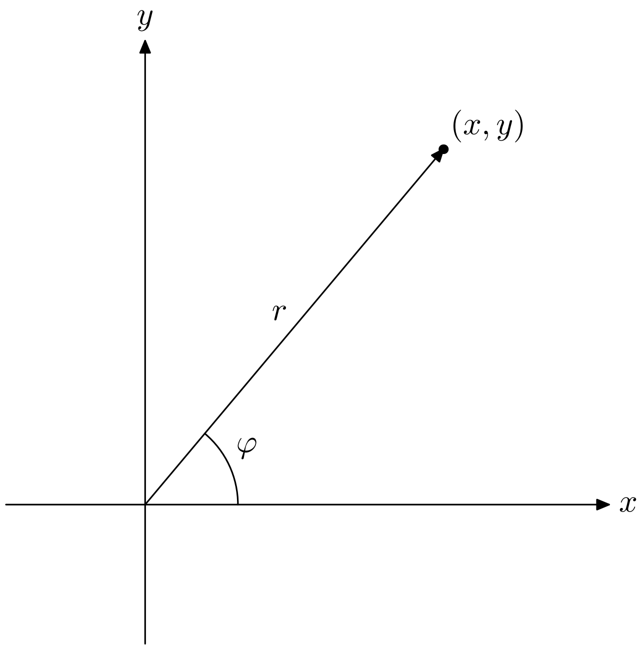


Abbildung 5.1: Ebene Polarkoordinaten

Beispiel 111. Wir nehmen eine beliebige genügend oft diffeernzierbare Funktion $U(x,\, y)$ als gegeben an und betrachten den Differentialausdruck

$$W = x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x},$$

den wir auf Polarkoordinaten transformieren wollen.Wir definieren

$$u(r,\, \varphi) := U(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$$

und rechnen um

$$\begin{aligned}
W &= x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \\
&= r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right) - r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin^2\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Wir transformieren den Ausdruck $W = xy\frac{\partial U}{\partial x} + y^2\frac{\partial U}{\partial y}$ auf Polarkoordinaten. Dabei definieren wir wieder $u(r, \varphi) := U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:

$$\begin{aligned}
W &= xy\frac{\partial U}{\partial x} + y^2\frac{\partial U}{\partial y} = \\
&= r^2\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \\
&= r^2\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right) = \\
&= r^2\sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\frac{\partial u}{\partial r} + r\cos\varphi\sin^2\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} - r\cos\varphi\sin^2\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \\
&= r^2\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}
\end{aligned}$$

5.6 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor für $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Wir suchen ein Analogon zu den höheren Näherungen, die wir in Analysis T1 für Funktionen einer Variablen aus dem Satz von Taylor gewonnen haben. Dazu brauchen wir aber zuerst eine Definition höherer Ableitungen für Funktionen in mehreren Variablen.

5.6.1 Höhere Ableitungen

Definition 5.6.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_0 \in U$. Dann definieren wir für $1 \leq i_1, i_2, \ldots i_n \leq p$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}(\mathbf{x}_0),$$

sofern diese Ableitungen existieren.

Es gilt dann

Satz 5.6.2 (Satz von Schwarz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Sei f in $\mathbf{x}_0 \in U$ zweimal nach allen Variablen differenzierbar und seien die Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ stetig in $\mathbf{x}_0$. Dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

Die höheren Ableitungen hängen also nicht von der Reihenfolge der Differentiation ab.

Bemerkung 85. Damit können wir gleichnamige Ableitungen zusammenfassen und etwas einfacher

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_p^{n_p}}(\mathbf{x}_0)$$

für $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ schreiben.

Definition 5.6.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\mathbf{x}_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt n-mal differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, wenn alle Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_p^{k_p}}(\mathbf{x}_0)$$

für $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = k \leq n$ existieren.

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar auf U, wenn diese Ableitungen in allen Punkten von U existieren und dort stetige Funktionen sind.

Definition 5.6.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann definieren wir

$$C^n(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \ n\text{-mal stetig differenzierbar auf } U\}.$$

Die Hesse-Matrix ist die Matrix der zweiten Ableitungen von f

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Wir werden sehen, dass wir mit ihrer Hilfe ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von Extremstellen formulieren können. Dazu brauchen wir aber noch einige Vorarbeiten.

5.6.2 Der Satz von Taylor

Motivation: $g(x, y)$ haben wir gegeben und wir suchen ein Polynom $P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$ und es soll gelten: $P(x, y) \approx f(x, y)$. Dabei bezeichnet $\approx$ wie beim eindimensionalen Satz von Taylor die Übereinstimmung der ersten n Ableitungen.

$$f(0,0) = P(0,0) = a_{00}$$

$$f_x(0,0) = P_x(0,0) = (a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + \ldots)\Big|_{(0,0)} \Rightarrow a_{10} \quad \text{differenzieren}$$

$$f_y(0,0) = P_y(0,0) = a_{01}$$

$$f_{xx}(0,0) = P_{xx}(0,0) = [2a_{20} + 6a_{30}x + 2a_{21}y + \ldots]\Big|_{(0,0)} \Rightarrow a_{20} = \frac{f_{xx}(0,0)}{2!}$$

$$f_{xy}(0,0) = P_{xy}(0,0) = [a_{11} + 2a_{21}x + \ldots]\Big|_{(0,0)} = a_{11}$$

$$a_{n_1 \ldots n_p} = \frac{\binom{n}{n_1, n_2 \ldots n_p}}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial {x_1}^{n_1} \ldots \partial {x_p}^{n_p}}, \quad n_1 + \cdots + n_p = n$$

Definition 5.6.5. Multinomialkoeffizient:

$$\binom{n}{n_1, n_2 \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_p!} \qquad n_1 + \cdots + n_p = n$$

Es gilt dann der *multinomiale Lehrsatz*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, n_2 \ldots, n_p} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_p^{n_p}.$$

Wir verwenden die Schreibweise

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^n$$
$$= \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_p \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_p = n}} \binom{n}{n_1, n_2 \ldots, n_p} h_1^{n_1} h_2^{n_2} \cdots h_p^{n_p} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_p^{n_p}}.$$

Satz 5.6.6. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^{n+1}(G)$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^p$, liegen Punkte $\mathbf{x_0}$ und $\mathbf{x_0} + \boldsymbol{h}$ samt Verbindungsstrecke in G. Dann gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit*

$$f(\mathbf{x_0} + \boldsymbol{h}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{\nu} f \Bigg|_{\mathbf{x_0}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{n+1} f \Bigg|_{\mathbf{x_0} + \theta \boldsymbol{h}}}_{Rest}$$

5.7 Extremwerte für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

In Punkten in denen eine Funktion extremal wird, liegt die Tangentialebene parallel zur $xy-$Ebene.

Die Gleichung $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ liefert nach unseren geometrischen Überlegungen Kandidaten für Extremwerte, weil in diesen Punkten die Tangentialebene parallel zur (x, y)-Ebene liegt. Wie im Eindimensionalen können wir nicht erwarten, dass $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle liefert. Wir wollen für den Fall von Funktionen in zwei Variablen hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen unter Verwendung der zwei Ableitungen ansetzten.

Definition 5.7.1. Sei A eine symmetrische Matrix. Dann nennt man :

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

eine quadratische Form.

Definition 5.7.2. Sei A eine symmetrische Matrix, dann heißt A:

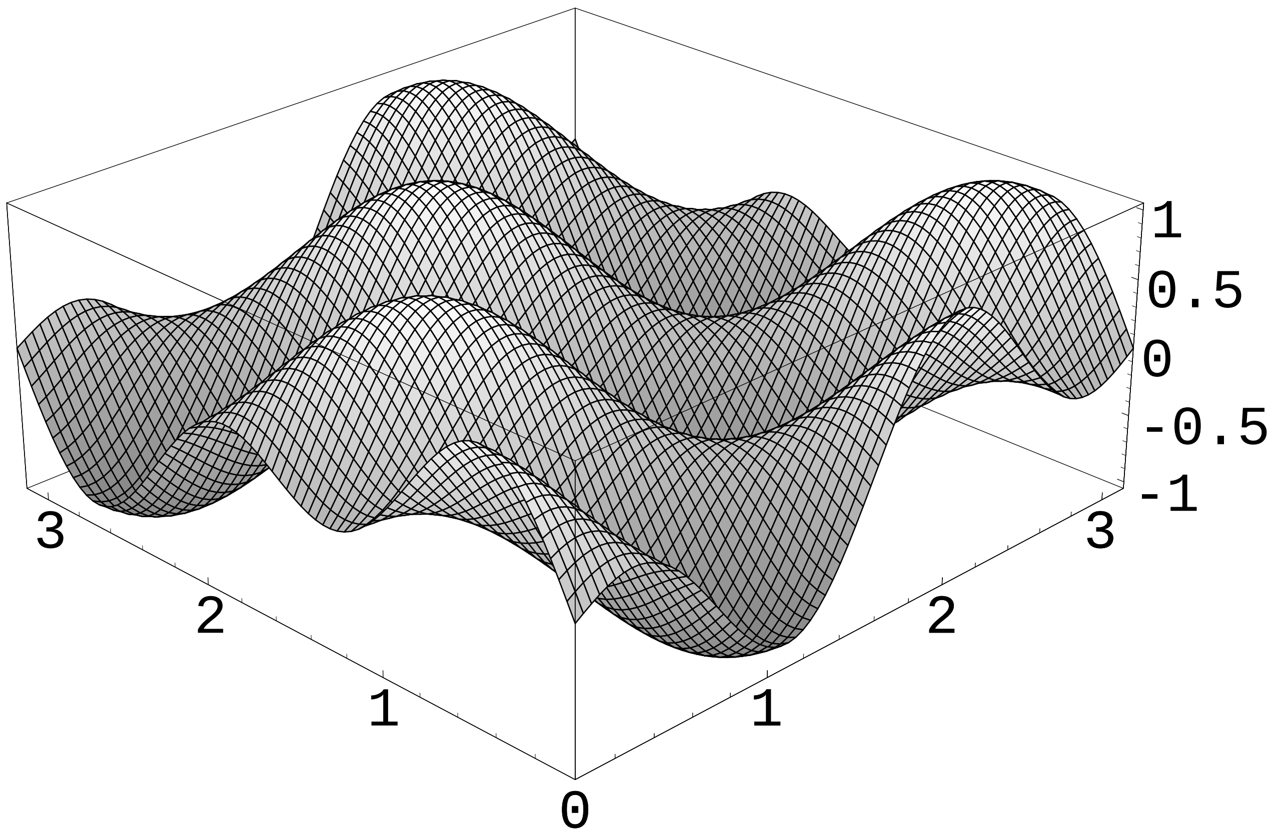


Abbildung 5.2: Graph einer Funktion in zwei Variablen

- positiv definit, wenn $Q_A(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$
- positiv semi-definit, wenn $Q_A(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$
- negativ definit, wenn $Q_A(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$
- negativ semi-definit, wenn $Q_A(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}$
- indefinit, wenn $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} : Q_A(\mathbf{x}) > 0 \wedge Q_A(\mathbf{y}) < 0$

Durch Anwendung des Satzes von Taylor für $n = 2$ erhalten wir (ganz analog zum hinreichenden Kriterium für Extrema im Eindimensionalen)

Satz 5.7.3. *Sei $f \in C^2(G), \operatorname{grad} f\big|_P = \binom{0}{0}$, P kritischer Punkt. Dann gilt*

- *$H\big|_P$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in P ein relatives Minimum*
- *$H\big|_P$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat in P ein relatives Maximum*
- *$H\big|_P$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremum (Sattelpunkt)*

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine symmetrische Matrix. Dann setzen wir

$$\Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

Satz 5.7.4. *Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn für $j = 1, \dots, n$: $\Delta_j > 0$ gilt.*

Eine symmetrische Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn für $j = 1, \dots, n$: $(-1)^j \Delta_j > 0$ gilt.

Für die Hesse-Matrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt dann

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{und } \Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

also

1. $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ Extremum
   a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow$ Minimum
   b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow$ Maximum
2. $\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, (Sattelpunkt)
3. $\Delta_2 = 0 \Rightarrow$ keine Aussage.

5.8 Hauptsatz über implizite Funktionen

Wir wollen allgemeine Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

nach den Variablen $(y_1, \dots, y_q)$ auflösen, also $(y_1, \dots, y_q)$ als Funktionen von $(x_1, \dots, x_p)$ schreiben.

Beispiel 112. Der implizite Ausdruck $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ beschreibt den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, also zwei Funktionen $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Geben wir aber einen Punkt (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis vor und wollen die implizite Gleichung in einer Umgebung davon nach $y = \varphi(x)$ auflösen, so ist das stets eindeutig möglich – außer für die beiden Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. (Analog ist eine eindeutige Auflösung nach $x = \psi(y)$ überall außer in den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$ möglich.)

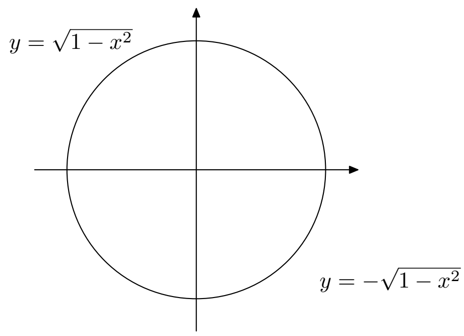


Abbildung 5.3: Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$

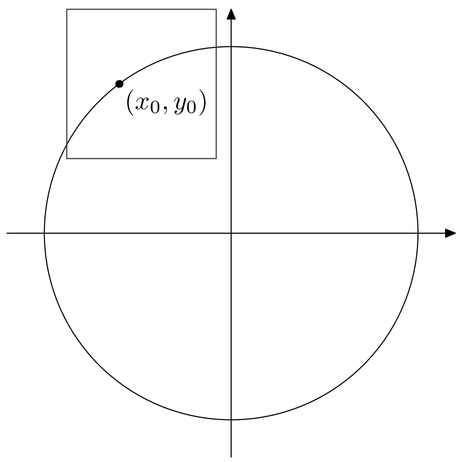


Abbildung 5.4: Lokales Auflösen der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$

Beispiel 113. Ein lineares Gleichungssystem

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p + a_{i,p+1}x_{p+1} + \ldots + a_{i,p+q}x_{p+q} = b_i \qquad i = 1, \ldots, p$$

kann man natürlich umschreiben auf

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 - a_{1,p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{1,p+q}x_{p+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p & = & b_p - a_{p,p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{p,p+q}x_{p+q} \end{array}$$

und eine Auflösung nach x_1 bis x_p ist genau dann möglich, wenn die entsprechende Koeffizientenmatrix eine Inverse besitzt. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Determinante nicht verschwindet. Natürlich wird nach Lösung des Gleichungssystems jedes x_i mit $i = 1, \ldots, p$ im allgemeinen von allen x_j mit $j = p + 1, \ldots, p + q$ abhängen, also $x_i = x_i(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ sein.

Nun lässt sich aber jede differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ in der Umgebung eines Punktes P_0 durch eine lineare Abbildung approximieren, wobei die Koeffizienten die Elemente der Jacobi-Matrix sind, $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Satz 5.8.1 (Hauptsatz über implizite Funktionen)**.** *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcll} f : M \subset \mathbb{R}^{p+q} & \to & \mathbb{R}^p & (M \text{ offen}) \\ (x_1, \ldots, x_{p+q}) & \mapsto & f_i(x_1, \ldots, x_{p+q}) & i = 1, \ldots, p \end{array}$$

ist in $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \in M$ *nach den Variablen* x_1 *bis* x_p *auflösbar, (d.h. es gibt Funktionen* $\varphi_i(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$, $i = 1, \ldots, p$, *so dass in einer Umgebung* $U_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ *gilt:*
$f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \equiv 0$ *für* $i = 1, \ldots, p$*), wenn*

1. $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = 0$ *für alle* $i = 1, \ldots, p$ *ist,*

2. $f_i \in C^1(U_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}))$, $i = 1, \ldots, p$, *d.h. alle* f_i *in in einer Umgebung von* $\boldsymbol{\xi}$ *zumindest einmal stetig partiell differenzierbar sind und*

3. $\det(Df(\boldsymbol{\xi})) = \det \left(\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} \right)_{\boldsymbol{\xi}} \neq 0$, *die Jacobi-Determinante der Abbildung an diesem Punkt also nicht verschwindet.*

Man beachte, dass die angegebenen Bedingungen zwar hinreichend, die beiden letzten aber keineswegs notwendig sind. So erfüllt etwa

$$f(x, y) = x^3 - y^3 = 0$$

weder $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ noch $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dennoch ist mit $y = x$ eine eindeutige Auflösung nach x bzw. y möglich.

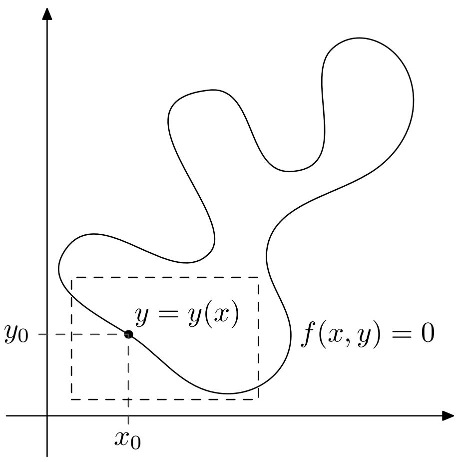


Abbildung 5.5: Lokales Auflösen einer Gleichung $f(x, y) = 0$

Beispiel 114. Im Fall $p = q = 1$, also einer Gleichung $f(x,\, y) = 0$ wird implizit eine Kurve definiert, nämlich die Schnittkurve der durch $z = f(x,\, y)$ gegebenen Fläche mit der x-y-Ebene. Diese Kurve kann nun als Funktion $y(x)$ interpretiert werden, wenn die Voraussetzungen von Satz 7.8 erfüllt sind. Wenn f einmal stetig partiell differenzierbar ist, dann ist das in einer geeigneten Umgebung jedes Punktes (ξ, η) möglich, wo $f(\xi,\, \eta) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(\xi,\,\eta)} \neq 0$ ist.

Beispiel 115. Wir betrachten nun konkret die Funktion $f(x,\, y) := x - y + \frac{1}{2} \sin y$ in einer Umgebung von $(x_0,\, y_0) := (0,\, 0)$. Diese Funktion ist sicher in $C^1(\mathbb{R}^2)$, es ist auch $f(0,\, 0) = 0 - 0 + 0 = 0$ und für die Ableitung $f_y(x,\, y) = -1 + \frac{1}{2} \cos y$ erhält man $f_y(0,\, 0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$. Eine Auflösung $y = y(x)$ ist also in einer Umgebung von $x = 0$ möglich.

Implizites Differenzieren

Nun hat man doch einige Möglichkeiten, durch *implizites Differenzieren* Aussagen über die Funktionen φ_j zu machen, indem man die Eigenschaften $f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \equiv 0$ und $\varphi_j(x^0_{p+1}, \ldots, x^0_{p+q}) = x^0_j$ für $j = 1, \ldots, p$ benutzt. Dazu definieren wir Hilfsfunktionen

$$F_i(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) := f_i(\varphi_1(x_{p+1}, ..., x_{p+q}), \ldots \varphi_p(x_{p+1}, ..., x_{p+q}),\ x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \equiv 0$$

und leiten diese nach den Variablen x_{p+1} bis x_{p+q} ab. Auch wenn über das konkrete Aussehen der φ_j nichts bekannt ist, so müssen für sie doch die üblichen Ableitungsregeln wie etwa Produkt- und Kettenregel gelten. Die gesamte Funktion ist in einer Umgebung des Punktes $\boldsymbol{\xi}$ identisch Null, damit verschwinden auch alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung.

So erhält man ein Gleichungssystem, das sich nach den Ableitungen $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^0_{p+1}, \ldots, x^0_{p+q})$ auflösen läßt. ($i = 1, ..., p$ und $j = p+1, ..., p+q$).

Beispiel 116. Durch $f(x, y) = xe^y + ye^x = 0$ und $y(0) = 0$ wird um $x_0 = 0$ eine stetige Funktion $y = y(x)$ mit $y(0) = 0$ gegeben, weil $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$ gilt. Wir haben damit

$$g(x) = xe^{y(x)} + y(x)e^x \equiv 0$$

auf einem Intervall um $x_0 = 0$. Damit gilt

$$g'(x) = e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x) + y'(x)e^x + y(x)e^x = 0,$$

woraus wir $y'(0) = -1$ bestimmen können.

Für die zweite Ableitung differenzieren wir noch einmal und erhalten

$$\begin{aligned} g''(x) = e^{y(x)}y'(x) + e^{y(x)}y'(x) + xe^{y(x)}(y'(x))^2 \\ + xe^{y(x)}y''(x) + y''(x)e^x + y'(x)e^x + y'(x)e^x + y(x)e^x = 0, \end{aligned}$$

woraus sich nach Einsetzen von $y(0) = 0$ und $y'(0) = -1$ $y''(0) = 4$ ergibt.

5.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Wir wollen Extrema der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} N_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ N_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ N_k(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

finden. Die Nebenbedingungen beschreiben eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

Idee: Löse die Nebenbedingungen nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen nach den Variablen $(x_1, \ldots, x_k)$ auf und setze diese Funktionen von $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ in f ein. Damit ergibt sich eine neue Funktion

$$g(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(x_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

deren Extremstellen wir bestimmen wollen.

Im Falle von zwei Variablen und einer Nebenbedingung sieht das so aus: $N(x,y)=0$ ergibt $y=y(x)$. Die Funktion $f(x)=H(x,y(x))$ habe an der Stelle x_0 ein Extremum, also ($y_0 = y(x_0)$)

$$f'(x_0)=\frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y(x_0))+\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y(x_0))y'(x_0)=0.$$

Aus $N(x,y(x))=0$ ergibt sich

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial N}{\partial y}(x,y(x))y'(x)=0,$$

also

$$y'(x_0)=\frac{-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial N}{\partial y}}(x_0,y_0) \text{ wenn } \frac{\partial N}{\partial y}\neq 0.$$

Wir setzen

$$\lambda=\frac{\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial N}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}f'(x_0)=\frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0)y'(x_0)&=\frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0)-\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial N}{\partial y}(x_0,y_0)}\\&=\frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0)-\lambda\frac{\partial N}{\partial x}(x_0,y_0)=0.\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aus der Definition von λ

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0)-\lambda\frac{\partial N}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

Allgemein ergibt sich

Satz 5.9.1. *Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f:M\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn f an der Stelle $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ ein Extremum unter den Nebenbedingungen*

$$N_1(x_1,\dots,x_n)=\dots=N_k(x_1,\dots,x_n)=0$$

annimmt, dann gibt es Konstanten $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, sodass für $i=1,\dots,n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-\lambda_1\frac{\partial N_1}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-\dots-\lambda_k\frac{\partial N_k}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})=0$$

gilt.

Bemerkung 86. Im Falle einer Funktion $H(x,y)$ deren Extremwerte unter einer Nebenbedingung $N(x,y)=0$ berechnet werden, kann der Satz 5.9.1 geometrisch einfach interpretiert werden: Die Niveaulinie von H, die durch das Extremum unter der Nebenbedingung $N(x,y)=0$ geht, muss die Niveaulinie $N[x,y]=0$ berühren. Dies ist gleich bedeutend damit, dass die Gradienten von H und N in diesem Punkt kollinear sind (also grad $H\ \mathbf{x}_0=\lambda$ grad $N\ \mathbf{x}_0$)

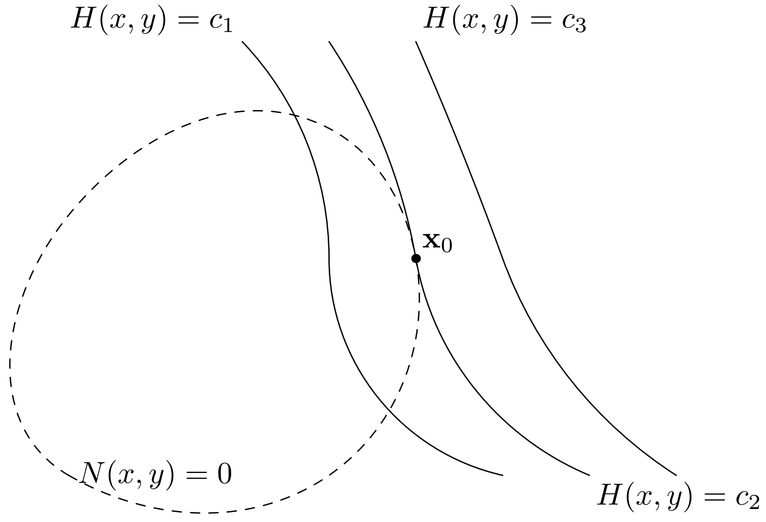


Abbildung 5.6: Zur Lagrangeschen Multiplikatorenmethode

Dass dies eine nützliche Methode zur Bestimmung von Extremstellen unter Nebenbedingungen darstellt, zeigen Beispiele.

Beispiel 117. Bestimme die Extrema der Funktion $f(x,y)=xy$ und der Nebenbedingung: $x^2+xy+y^2=3$

$$H(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+xy+y^2-3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=y-\lambda(2x+y)=0;\frac{\partial H}{\partial y}=x-\lambda(2y+x)=0$$

$$x^2+xy+y^2-3=0$$

$$\left.\begin{array}{l}-2\lambda x+(1-\lambda)y=0\\(1-\lambda)x-2\lambda y=0\end{array}\right\}\quad \text{linear in } x \quad \text{und } y \quad \text{mit Parameter } \lambda$$

Dieses hat immer die Lösung $x=y=0$, diese erfüllt die Nebenbedingung nicht. Wenn die zwei Gleichungen linear abhängig ist, gibt es weitere Lösungen für x und y. Wenn wir das Gleichungssystem mit einer Matrix umschreiben, muss die Determinante dieser Matrix gleich Null sein, damit weitere Lösungen existieren.
In diesen Fall ist die Determinante: $(-2\lambda)(-2\lambda)-(1-\lambda)(1-\lambda)=0 \Rightarrow 3\lambda^2+2\lambda-1=0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}\Rightarrow \lambda_1=-1$ und $\lambda_2=\frac{1}{3}$
$\lambda_1=-1: 2x+2y=0\Rightarrow y=-x$ in der Nebenbedingung eingesetzt:
$x^2+xy+y^2=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ und $y=\pm\sqrt{3}\Rightarrow P_1(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ und $P_2(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
$\lambda_2=\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=0\Rightarrow y=x$ in der Nebenbedingung eingesetzt: $\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$ und $y=\pm 1\Rightarrow P_3(1,1)$ und $P_4(-1,-1)$. Hier könnten Extrema liegen:

$$f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=-3$$

$$f(1,1)=f(-1,-1)=1$$

Untersuchung der Hessematrix führt hier auf einen Unterminor links oben, der Null ist, dies führt also nicht weiter.

$x^2+xy+y^2=3$ ist die Gleichung einer Ellipse, die schief in der Ebene liegt. Wenn man die Ellipse entlangfährt, ist dies eine geschlossene Kurve. Der Definitionsbereich ist beschränkt

und abgeschlossen. Wir wenden den Satz von Weierstraß an (Satz 3.2.12), der besagt, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Definitionsbereich ein Maximum und ein Minimum hat. In diesen Punkten verschwinden die Ableitungen. Hier kommen nur die genannten vier kritischen Punkte in Frage, und aus den Funktionswerten sieht man, dass man abwechselnd ein Maximum und ein Minimum hat:
Minimum bei $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
Maximum bei $(1, 1)$
Minimum bei $(\sqrt{-3}, \sqrt{3})$
Maximum bei $(-1, -1)$.

Beispiel 118. Es sei $0 \leq x_i \leq n$. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$

$$H = x_1 x_2 \ldots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} - \lambda = 0, i = 1 \ldots n$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \cdots + x_n &= n \\ x_2 x_3 \ldots x_n &= \lambda \\ x_1 x_3 \ldots x_n &= \lambda \\ &\vdots \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-1} &= \lambda \end{aligned}$$

Division der Gleichungen liefert: $x_i = x_j$, woraus wir durch Einsetzen in die erste Gleichung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ erhalten.

An dieser Stelle liegt ein kritischer Punkt vor. Wir wollen den Punkt genauer untersuchen. Die Hessematrix führt hier nicht weiter, da der linke obere Unterminor $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$ ist, (also kann man hieraus nicht auf positiv/negativ definit schließen).

Wir wenden den Satz von Weierstraß an (Satz 3.2.12), der besagt, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Definitionsbereich ein Maximum und ein Minimum hat.

Mit der obigen Methode findet man alle kritischen Punkte im Innern des Definitionsbereiches, aber man muss noch den Rand absuchen. Für einen Randpunkt ist mindestens eine der Variablen gleich 0 oder gleich n. Wenn ein $x_i = n$ ist, ist ein anderes x_j gleich 0. In diesen Fällen ist $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Der Wert 0 ist das Minimum (da alle $x_i \geq 0$ sind). Es gibt also am Rand viele Minima. Es bleibt nur noch ein kritischer Punkt, nämlich der Punkt $(1, 1, \ldots, 1)$. Dieser Punkt *muss* nach dem Satz von Weiestraß daher das Maximum sein.

Index