Analysis T1

1. Klausur, 1.12.2020
Gruppe A

---

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die unten angegebenen Folgen.

   a)
   $$a_n = 2 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{n}, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{3n^3 - 2n}{n^3 + n + 2}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(2 + \frac{2}{n}\right)\left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(4 + \frac{4}{n}\right)\left(5 + \frac{5}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

2. Bestimmen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent oder divergent ist. Dabei ist

   a)
   $$a_n = \frac{2n - 1}{4n^3 - n^2}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = n^2, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \left(\frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right), \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

3. Sind diese Funktionen injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

a)

$$f(x) = x^2, \qquad f:\ [-4,4] \mapsto [-16,16].$$

b)

$$f(x) = 0, \qquad f:\ [-1,1] \mapsto \{0\}.$$

4. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (6k-3)^2 = 3n(2n-1)(2n+1).$$

   b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für jede relle Zahl $x \geq 0$ für alle $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Geben Sie alle Rechenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 5 + 5 + 4 + 6; maximale Gesamtpunktezahl = 20.

Analysis T1

1. Klausur, 1.12.2020
Gruppe B

---

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die unten angegebenen Folgen.

   a)
   $$a_n = 3 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = \frac{1 - \frac{2}{n}}{n}, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{3n^3 - 4n}{n^3 + 2n + 1}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(2 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n}\right)\left(2 + \frac{4}{n}\right)\left(2 + \frac{5}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

2. Bestimmen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent oder divergent ist. Dabei ist

   a)
   $$a_n = \frac{3n - 1}{5n^3 - n^2}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = n^2, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

3. Sind diese Funktionen injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

a)

$$f(x) = x^2, \qquad f: \ [-3,3] \mapsto [-9,9].$$

b)

$$f(x) = 0, \qquad f: \ [-2,2] \mapsto \{0\}.$$

4. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (6k-3)^2 = 3n(2n-1)(2n+1).$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für jede relle Zahl $x \geq 0$ für alle $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Geben Sie alle Rechenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 5 + 5 + 4 + 6; maximale Gesamtpunktezahl = 20.

Analysis T1

1. Klausur, 1.12.2020
Gruppe C

---

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die unten angegebenen Folgen.

   a)
   $$a_n = 4 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = \frac{3 - \frac{1}{n}}{n}, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{5n^3 - 4n}{n^3 + 4n^2 + 1}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right)\left(5 + \frac{1}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

2. Bestimmen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent oder divergent ist. Dabei ist

   a)
   $$a_n = \frac{4n - 1}{2n^3 - 2n^2}, \qquad n \geq 1.$$

   b)
   $$a_n = n^2, \qquad n \geq 1.$$

   c)
   $$a_n = \frac{5^n}{n!}, \qquad n \geq 1.$$

   d)
   $$a_n = \left(\frac{6}{n} - \frac{3}{n^2}\right), \qquad n \geq 1.$$

   e)
   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

3. Sind diese Funktionen injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

a)

$$f(x) = x^2, \qquad f: \ [-2,2] \mapsto [-4,4].$$

b)

$$f(x) = 0, \qquad f: \ [-3,3] \mapsto \{0\}.$$

4. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (6k-3)^2 = 3n(2n-1)(2n+1).$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass für jede relle Zahl $x \geq 0$ für alle $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Geben Sie alle Rechenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 5 + 5 + 4 + 6; maximale Gesamtpunktezahl = 20.