Analysis 1 für Informatikstudien

3. Übungsblatt

---

1. Das Polynom
$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120$$
besitzt vier reelle Nullstellen. Zwei der Nullstellen sind $x = -2$ und $x = 4$. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die beiden anderen Nullstellen. Hinweis: Polynomdivision.[1]

2. Bestimmen Sie jene $x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$, für die gilt
$$\frac{x-2}{x-1} < 3.$$

3. Im Skriptum auf S.24/25 wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist (anders gesagt: dass es keinen Buch p/q gibt so dass $(p/q)^2 = 2$ ist). Wenn man mit einem Beweis von genau derselben Struktur beweisen will dass $\sqrt{4}$ nicht rational ist (was natürlich schiefgehen muss), warum klappt das dann nicht (an welcher Stelle exakt scheitert der "Beweis"?).

4. Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes*[2]
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

5. Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes* dass
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$
Hinweis: Skriptum S. 12 (Beispiel 7 und Beispiel 8).

6. Beweisen Sie *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes* dass
$$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^3 = 8.$$

---

[1] Polynomdivision wird in der Vorlesung nicht unterrichtet, wenn Sie das nicht können müssen Sie es selbstständig erlernen. Wir werden es immer wieder brauchen. Verwenden Sie für Bsp. 1 folgende Tatsache: Wenn α eine Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ ist, dann ist $p(x)$ ohne Rest durch den Linearfaktor $(x - \alpha)$ teilbar.

[2] "Unmittelbar anhand der Definition" (Definition 2.6.2) heißt: gegeben $\varepsilon > 0$, ich zeige dass es eine Zahl N gibt (indem ich einen geeigneten Wert von N angebe) so dass der Abstand von a_n zum Grenzwert kleiner als ε ist, für alle $n \geq N$.

1. Das Polynom

$$p(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120$$

besitzt vier reelle Nullstellen. Zwei der Nullstellen sind $x = -2$ und $x = 4$. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die beiden anderen Nullstellen. Hinweis: Polynomdivision.[1]

$x = -2$ $x = 4$ Nullstellen bei $(x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$

$$\begin{aligned}
&(x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120) : (x^2 - 2x - 8) = x^2 - 2x - 15 \\
&-(x^4 - 2x^3 - 8x^2) \\
&\quad 0 - 2x^3 - 11x^2 + 46x \\
&\quad -(-2x^3 + 4x^2 + 16x) \\
&\qquad 0 - 15x^2 + 30 + 120 \\
&\qquad -(-15x^2 + 30 + 120) \\
&\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{aligned}$$

$x^2 - 2x - 15$ | quadratisches Ergänzen um binomische Formel anwenden zu können

$= (x^2 - 2x + 1 - 1) - 15$

$= (x-1)^2 - 1 - 15$

$= (x-1)^2 - 16$

$\Rightarrow$

$(x-1)^2 = 16 \quad | \sqrt{\ }$

$x - 1 = \pm 4$

$x = \pm 4 + 1$

$x_{1/2}$: $4 + 1 = 5$, $-4 + 1 = -3$

d.h. es gibt Nullstellen bei $x = \{-2, 4, 5, -3\}$

2. Bestimmen Sie jene $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, für die gilt

$$\frac{x-2}{x-1} < 3.$$

$$\frac{x-2}{x-1} < 3 \quad | -3$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-1} - 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2-3(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2-3x+3}{x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{x-1} < 0$$

$$x \neq 1$$

Fall 1: Nenner positiv $\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$$\frac{-2x+1}{x-1} < 0 \quad | \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow -2x+1 < 0 \quad | -1$$

$$-2x < -1 \quad | : (-2)$$

Achtung: Division durch negativ dreht die Ungleichung

$$x > \frac{1}{2}$$

$$x_1 \in (1, \infty) \cap (\tfrac{1}{2}, \infty) = (1, \infty)$$

Fall 2: Nenner negativ $\Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$

$$\frac{-2x+1}{x-1} < 0 \quad | \cdot (x-1)$$

Multiplikation mit negativ dreht die Ungleichung

$$-2x+1 > 0 \quad | -1$$

$$-2x > -1 \quad | : (-2)$$

Siehe oben

$$x < \frac{1}{2}$$

$$x_2 \in (-\infty, 1) \cap (-\infty, \tfrac{1}{2}) = (-\infty, \tfrac{1}{2})$$

$$x \in x_1 \cup x_2 = (1, \infty) \cup (-\infty, \tfrac{1}{2}) = \mathbb{R} \setminus [\tfrac{1}{2}, 1]$$

3. Im Skriptum auf S.24/25 wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist (anders gesagt: dass es keinen Buch p/q gibt so dass $(p/q)^2 = 2$ ist). Wenn man mit einem Beweis von genau derselben Struktur beweisen will dass $\sqrt{4}$ nicht rational ist (was natürlich schiefgehen muss), warum klappt das dann nicht (an welcher Stelle exakt scheitert der "Beweis"?).

Beweis durch Widerspruch: $\sqrt{4}$ wäre rational

$p, q \in \mathbb{N} \qquad ggT(p, q) = 1$

$$\sqrt{4} = \frac{p}{q} \qquad |^2$$

$$\Rightarrow 4 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{p^2}{q^2} \qquad | \cdot q^2$$

$$\Rightarrow 4q^2 = p^2$$

| p^2 ist gerade, denn eine Multiplikation durch eine gerade Zahl ergibt immer eine gerade Zahl

Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, ist diese Zeit auch gerade, d.h p ist auch gerade

$\Rightarrow p = 2k \qquad |^2 \qquad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow p^2 = 4k^2$ und das kann man dann einsetzen

$$\Rightarrow 4q^2 = 4k^2 \qquad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$q^2 = k^2 \qquad | \sqrt{\ }$$, da $q, k \in \mathbb{N}$ brauchts kein $\pm$

$$q = k \qquad | \; p = 2k \qquad k = \frac{p}{2}$$

$$q = \frac{p}{2}$$ | p muss doppelt so groß sein wie q

Beim Beweis von $\sqrt{2}$ folgte hier, dass q nun auch gerade sein muss und somit $ggT(p, q) \neq 1$. Das ist hier nicht mehr der Fall, denn so kann q irgend eine natürliche Zahl sein und nur p muss gerade sein. und das bestätigt sich auch wenn man die richtige Werte für p und q einsetzt

$p = 2 \qquad \sqrt{4} = \frac{2}{1} = 2$

$q = 1$

4. Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes*[2]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N):\ |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \Big|\ n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Wähle $N = \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n \geq N$ gilt:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

5. Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, a_2, a_3. Beweisen Sie außerdem *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes* dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Hinweis: Skriptum S. 12 (Beispiel 7 und Beispiel 8).

$a_1 = \frac{1}{2^0} = 1$ $\quad a_2 = 1 + \frac{1}{2^1} = \frac{3}{2}$ $\quad a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{7}{4}$

$a_n = \sum_{0}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

| Bsp. 7 S. 12

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$

$a_n = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{2}{2^n}$

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N):\ |a_n - a| < \varepsilon$

$\left|\cancel{2} - \frac{2}{2^n} - \cancel{2}\right| < \varepsilon$ $\qquad - \frac{2}{2^n} > 0 \quad \forall n \geq 1$ d.h. $\left|-\frac{2}{2^n}\right| = \frac{2}{2^n}$

$\Rightarrow \frac{2}{2^n} < \varepsilon$ $\qquad$ | Bsp 8 S. 12 $\quad 2^n > n$ d.h. $\frac{2}{2^n} < \frac{2}{n}$

$\Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon$ $\qquad n > \frac{2}{\varepsilon}$

$N = \frac{2}{\varepsilon}$ $\qquad \forall n \geq N$ gilt:

$\left|2 - \frac{2}{2^n} - 2\right| = \frac{2}{2^n} < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\varepsilon = \varepsilon$

6. Beweisen Sie *unmittelbar anhand der Definition des Grenzwertes* dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 = 8.$$

$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N):\ |a_n - a| < \varepsilon$

$$\left|\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 - 8\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left(\frac{2n+(-1)^n}{n}\right)^3 - 8\right| < \varepsilon$$

Fall 1: n gerade $\Rightarrow (-1)^n = 1$

$$\left|\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 8\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{8n^3} + 12n^2 + 6n + 1 - \cancel{8n^3}}{n^3}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{12n^2+6n+1}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{12\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}} + \frac{6\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{n^3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3} < \varepsilon \quad \Big|\ n^3 > n^2 > n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{6}{n^2} < \frac{6}{n} \quad \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n} + \frac{6}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{12+6+1}{n} = \frac{19}{n} < \varepsilon$$

Wähle $N_1 = \frac{19}{\varepsilon}$ $\quad \forall n \geq N_1$ gilt:

$$\left|\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 - 8\right| = \frac{12n^2+6n+1}{n^3} < \frac{19}{n} \leq \frac{19}{N_1} = \frac{19}{\frac{19}{\varepsilon}} = \frac{19}{19}\cdot\varepsilon = \varepsilon$$

Fall 2: n ungerade $\Rightarrow (-1)^n = -1$

$$\left|\left(\frac{2n-1}{n}\right)^3 - 8\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{8n^3} - 12n^2 + 6n - 1 - \cancel{8n^3}}{n^3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|-\frac{12n^2 - 6n + 1}{n^3}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{12n^2-6n+1}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{12\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}} - \frac{6\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{12}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3} \quad \Big|\ 0 < \frac{6}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n} - \cancel{\frac{6}{n^2}} + \frac{1}{n} + \cancel{\frac{6}{n^2}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{12}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{12+1}{n} = \frac{13}{n} < \varepsilon$$

Wähle $N_2 = \frac{13}{\varepsilon}$ $\quad \forall n \geq N_2$ gilt:

$$\left|\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 - 8\right| = \frac{12n^2-6n+1}{n^3} < \frac{13}{n} \leq \frac{13}{N_2} = \frac{13}{\frac{13}{\varepsilon}} = \frac{13}{13}\cdot\varepsilon = \varepsilon$$

Allgemein: Wähle $N = \max(N_1, N_2) = \frac{19}{\varepsilon}$