

**Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung  
Grundlagen der Elektrotechnik  
(437.201) für  
Elektrotechnik-Studierende und  
Biomedical Engineering-Studierende**

Renhart Werner

29. September 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das elektrische Feld</b>	<b>1</b>
1.1	Die elektrische Ladung . . . . .	1
1.2	Wirkung elektrischer Ladungen . . . . .	2
1.3	Arbeit, Potential und Spannung . . . . .	5
1.4	Materie im elektrischen Feld . . . . .	7
1.5	Energie im elektrostatischen Feld . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Gleichförmig bewegte Ladungen</b>	<b>17</b>
2.1	Der elektrische Strom . . . . .	17
2.2	Das Ohmsche Gesetz . . . . .	20
2.3	Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes . . . . .	24
2.4	Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld . . . . .	25
2.5	Die Leistung im stationären Strömungsfeld . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Gleichstromschaltungen</b>	<b>28</b>
3.1	Der einfache elektrische Stromkreis . . . . .	28
3.2	Zweipole . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse linearer Gleichstromnetzwerke</b>	<b>44</b>
4.1	Äquivalenz von Quellen . . . . .	45
4.2	Zusammenschaltung von Quellen . . . . .	45
4.3	Ersatzquellenverfahren . . . . .	47
4.4	Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip . . . . .	48
4.5	Das elektrische Netzwerk als Graph . . . . .	49
4.6	Die Zweigstromanalyse . . . . .	52
4.7	Das Knotenspannungsverfahren . . . . .	54
4.8	Maschenstromverfahren . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Ungleichförmig bewegte Ladungen</b>	<b>61</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	61
5.2	Periodische Wechselgrößen . . . . .	61
5.3	Kennwerte sinusförmiger Größen . . . . .	62
5.4	Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen . . . . .	66

<b>6</b>	<b>Das magnetische Feld</b>	<b>72</b>
6.1	Grunderscheinungen . . . . .	72
6.2	Kraft auf bewegte Ladungen . . . . .	75
6.3	Magnetische Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter . . . . .	77
6.4	Die Erregung des magnetischen Feldes . . . . .	78
6.5	Materie im magnetischen Feld . . . . .	83
6.6	Das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise . . . . .	87
6.7	Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld . . . . .	87
6.8	Wirkungen im Magnetfeld . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Verhalten Passiver Bauelemente bei zeitharmonischen Vorgängen</b>	<b>96</b>
7.1	Allgemeines . . . . .	96
7.2	Der Ohm'sche Widerstand . . . . .	96
7.3	Die Induktivität . . . . .	98
7.4	Der Kondensator . . . . .	101
7.5	Zusammenschaltung von passiven Bauelementen . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Die Frequenzabhängigkeit passiver Schaltungen</b>	<b>110</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	110
8.2	Übertragungsfunktion und Bode-Diagramm . . . . .	110
8.3	Beispiele . . . . .	119
<b>9</b>	<b>Messung elektrischer Größen</b>	<b>120</b>
9.1	Die Messung von Strom, Spannung und Leistung . . . . .	120
9.2	Schaltung von Meßgeräten . . . . .	121
9.3	Zusammenstellung der wichtigsten Meßgeräte . . . . .	127
9.4	Klasseneinteilung . . . . .	127
<b>10</b>	<b>Elektrische Schwingkreise und Resonanz</b>	<b>129</b>
10.1	Der verlustbehaftete Reihenschwingkreis . . . . .	129
10.2	Der verlustbehaftete Parallelresonanzkreis . . . . .	133

# 10 Elektrische Schwingkreise und Resonanz

Lineare Netzwerke werden in der Praxis sehr häufig bei unterschiedlichen Frequenzen betrieben. Beispielsweise finden in der Elektroakustik Netzwerke Anwendung, welche zumindest über den hörbaren Frequenzbereich (etwa 20 Hz bis 20 kHz) betrieben werden. Die Frequenzabhängigkeit entsprechender elektrischer Netzwerke bei zeitharmonischer Anregung wird in diesem Abschnitt diskutiert. Im Besonderen werden anhand der elektrischen Schwingkreise die Erscheinungen der Resonanz erläutert.

## 10.1 Der verlustbehaftete Reihenschwingkreis

An eine Spannungsquelle werden die Elemente  $R$ ,  $L$  und  $C$  seriell, entsprechend Abb. 10.1 zusammengeschlossen.

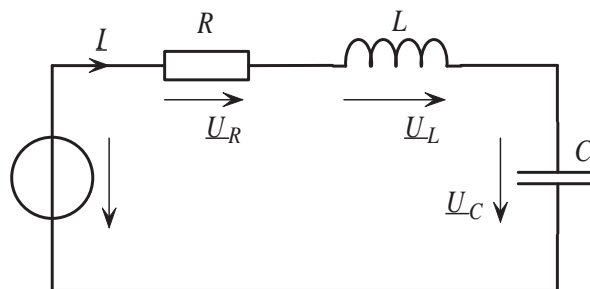


Abbildung 10.1: RLC-Serienresonanzkreis.

Die Impedanz  $\underline{Z}$  ergibt sich dabei zu:

$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (10.1)$$

Aus 10.1 erkennt man die Frequenzabhängigkeit des Imaginärteiles und die Frequenzunabhängigkeit des Realteiles der Impedanz.

$\Re\{\underline{Z}\}$  ist frequenzunabhängig

$\Im\{\underline{Z}\}$  ist frequenzabhängig

Betrag und Phase errechnen sich aus:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Der, sich bei eingprägter Spannung  $\underline{U}$  einstellende Strom  $\underline{I}$  durch die Schaltung folgt zu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \underline{U} \underline{Y}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{Z} = U Y$$

Der Strom erreicht sein Maximum, wenn  $\Im\{\underline{Z}\}$  Null wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\omega = \omega_0$  ist. Darin wird  $\omega_0$  als Resonanz-Kreisfrequenz bezeichnet. Damit gilt:

$$\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = 0 \quad (10.2)$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0. \quad (10.3)$$

Es liegt Stromresonanz vor ( $Z \Rightarrow \text{Min.}, Y \Rightarrow \text{Max.}$ ). Bei der Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0$  wird die Gesamtimpedanz reell, Strom  $\underline{I}$  und Spannung  $\underline{U}$  sind in Phase!

Resonanz: $\underline{Z} = Z_0 = R, \quad I_0 = \frac{U}{R}$
--

$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$	$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Resonanzkreisfrequenz
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$	Resonanzfrequenz
$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = X_0$	Resonanzblindwiderstand, Schwingungswiderstand

Der Verlauf des Stromes, abhängig von der Frequenz ist für unterschiedliche Widerstände  $R$  in Abb. 10.2 (a), den sogenannten Resonanzkurven, dargestellt. Die Kurven

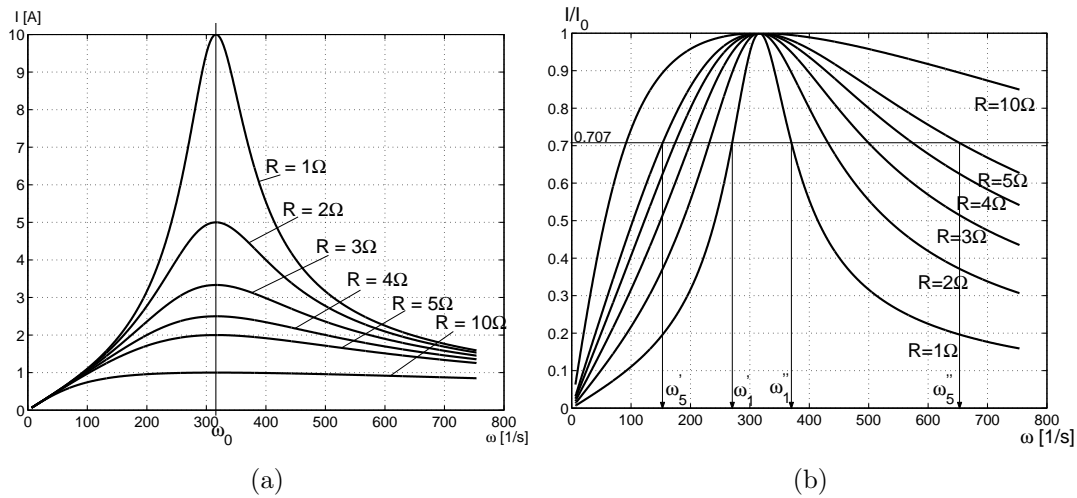


Abbildung 10.2: (a) Resonanzkurven und (b) Normierte Resonanzkurve beim Reihenschwingkreis

gelten bei einer eingepprägten Spannung von  $10\text{ V}$ , für  $L = 10\text{ mH}$ ,  $C = 1\text{ mF}$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass sich bei Ändern des Widerstandes  $R$  die Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0$  nicht verändert. Die Maximalwerte des Stromes bei Resonanz nehmen mit zunehmenden Widerstandswerten entsprechend ab. Zudem werden die Kurven breiter, dh. die Maxima werden immer weniger ausgeprägt.

Ein Maß für die Qualität eines Schwingkreises ist nun grafisch aus der Breite der Resonanzkurven bei den unterschiedlichen Widerständen ablesbar. Um einen eindeutigen visuellen Vergleich der Kurven durchführen zu können, normiert man jede Kurve für sich auf den Maximalwert **Eins**. Das heisst, jeder Funktionswert der Kurve wird auf den Stromwert  $I_0$  im Resonanzpunkt bezogen. Man erhält hernach die in Abb. 10.2 (b) dargestellten normierten Resonanzkurven.

Aus dem Verlauf dieser Kurven kann nun deutlich erkannt werden, welche Resonanzkurve schmaler und welche breiter ist. Für die Resonanzkurven bei  $R = 1\ \Omega$  und  $R = 5\ \Omega$  sind bereits die später beschriebenen Grenzfrequenzen  $\omega'_1$ ,  $\omega''_1$  bzw.  $\omega'_5$ ,  $\omega''_5$  mit eingezeichnet.

Aus der Diskussion der Impedanzbeziehung (10.1) können die Verläufe der Phasenverschiebungen der unterschiedlichen Resonanzkurven dargestellt werden:

Man erkennt, dass bei Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz ein ohmsch-kapazitives Verhalten (Phasenwinkel der Impedanz  $\varphi_Z$  ist negativ) vorliegt. Bei Frequenzen über der Resonanzfrequenz überwiegt hingegen der induktive Blindanteil. Aus dem Verlauf der Kurven erkennt man auch, dass mit zunehmendem ohmschen Widerstand die Kurven immer flacher werden.

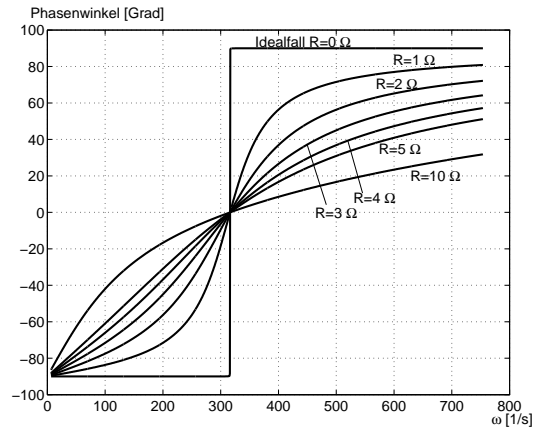


Abbildung 10.3: Phasenverläufe beim Reihenschwingkreis.

### 10.1.1 Resonanzschärfe oder Gütefaktor $Q$

Die Resonanzschärfe oder der Gütefaktor, kurz die Güte  $Q$  eines Schwingkreises ist über die gespeicherte Energie und die Verlustenergie, wie folgt, definiert:

$$Q = \frac{2\pi \times \text{gesamte Speicherenergie}}{\text{Verlustenergie je Periode}} \bigg|_{\text{bei Resonanz}}$$

$$= \frac{\omega_0 \times \text{gesamte Speicherenergie}}{\text{Verlustleistung}} \bigg|_{\text{bei Resonanz}}$$

Die Energien  $W_L$  und  $W_C$  sind gleich groß. Durch Einsetzen der bekannten Begriffe folgt:

$$Q = \frac{\omega_0(W_L + W_C)}{P} = \frac{\omega_0 L I^2}{R I^2} = \frac{X_0}{R}. \quad (10.4)$$

Die Güte  $Q$  ergibt sich somit aus dem Verhältnis des Blindwiderstandes  $X_0$  bei Resonanz zum ohmschen Widerstand  $R$  des Schwingkreises. Die Inverse der Güte wird als Dämpfungsfaktor  $d$  bezeichnet:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{X_0} = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (10.5)$$

### 10.1.2 Grenzfrequenzen und Bandbreite

Für den Resonanzkreis sind eine untere und eine obere Grenzfrequenz  $\omega'$  bzw.  $\omega''$  genau dort definiert, wo der Strom auf das  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache des Maximalwertes (=Strom  $I_0$  bei der

Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0$ ) zurückgegangen ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2}R = \sqrt{2}Z_0 \\ I &= \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{2}Z_0} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Der Strom ist gegenüber dem Höchstwert  $I_0$  bei Resonanz auf das  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache, dh. um 3 dB abgesunken:

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2}} \right|_{dB} = 20 \log 2^{-\frac{1}{2}} = -10 \log 2 \approx -3 \text{ dB}$$

Die Differenz  $\omega'' - \omega'$  entspricht der Bandbreite des Schwingkreises. Es lässt sich zeigen, dass sich diese durch

$$\omega'' - \omega' = \frac{R}{L} \quad (10.6)$$

berechnen lässt. Durch Erweitern mit  $\omega_0$  folgt:

$$\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0} = \frac{R}{L} \sqrt{LC} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{X_0} = d = \frac{1}{Q}$$

Misst man im Labor die Resonanzfrequenz und die beiden Grenzfrequenzen  $\omega'$  und  $\omega''$ , so hat man damit die Möglichkeit, die Güte des Reihenschwingkreises messtechnisch zu ermitteln.

## 10.2 Der verlustbehaftete Parallelresonanzkreis

Der nachfolgend dargestellte Parallelschwingkreis ist in seinem Verhalten dual zum Reihenschwingkreis zu beschreiben.

Anstelle der Impedanz wird die Admittanz betrachtet:

$$\underline{Y} = G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (10.7)$$

Wiederum ist der Realteil der Admittanz  $\Re\{\underline{Y}\}$  frequenzunabhängig und der Imaginärteil  $\Im\{\underline{Y}\}$  frequenzabhängig. Betrag und Phase folgen zu:

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{G^2 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \\ \varphi_y &= \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \end{aligned}$$



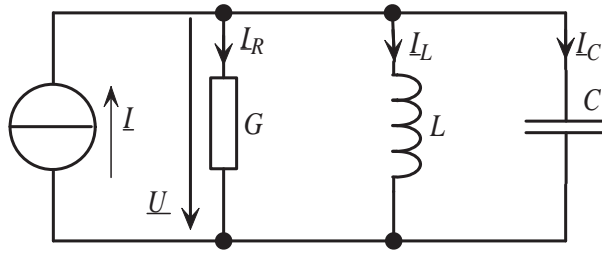


Abbildung 10.4: RLC-Parallelresonanzkreis.

Bei eingprägtem Strom  $\underline{I}$  der Stromquelle stellt sich die Spannung mit

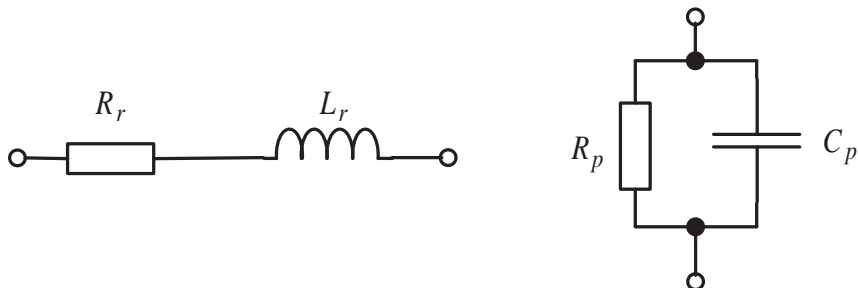
$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \underline{I} \underline{Z}$$

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{I}{Y} = I Z$$

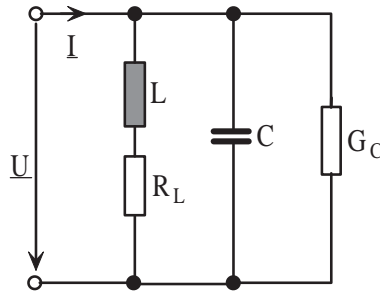
ein. Die Spannung erreicht ihr Maximum, wenn  $\Im\{\underline{Y}\}$  Null wird. Es liegt dann Spannungsresonanz vor ( $Y \Rightarrow \text{Min.}$ ,  $Z \Rightarrow \text{Max.}$ ). Dies wird wieder erreicht, wenn die Kreisfrequenz gleich  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ist (vgl. (10.3)).

$$\begin{aligned} \omega C = \frac{1}{\omega L} &\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} &\text{ Resonanzkreisfrequenz} \\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} &\text{ Resonanzfrequenz} \\ \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = B_0 &\text{ Resonanzblindleitwert} \end{aligned}$$

In der Praxis lassen sich die Schwingkreise mit den idealen Netwerkelementen nicht realisieren, da die realen Bauelemente immer verlustbehaftet sind. Die technischen Blindwiderstände sehen folgend aus:



Der praktische Parallelresonanzkreis kann nachfolgendes Aussehen haben.



Bei dieser Schaltung wurde angenommen, dass das Dielektrikum des Kondensators nicht ideal, dh. kein vollkommener Isolator ist. Es muss somit ein zu  $C_p$  paralleler Widerstand  $R_C$  bzw. dessen Leitwert  $G_C$  mitberücksichtigt werden.

$$\begin{aligned}\underline{Y}(j\omega) &= G_C + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} = G + jB \\ &= G_C + \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right)\end{aligned}$$

Bei Resonanz gilt:  $\text{Im}\{\underline{Y}(j\omega)\} = 0$ :

$$\begin{aligned}\left( \omega_p C - \frac{\omega_p L}{R_L^2 + \omega_p^2 L^2} \right) &= 0 \\ \omega_p^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2} \\ \omega_p &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{R_L}{L} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left( \frac{R_L}{L} \right)^2}.\end{aligned}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_p$ , bei welcher hier Resonanz vorherrscht, ist von  $\omega_0$  unterschiedlich! Abhängig vom ohmschen Widerstandes  $R_L$  der Spule wird es zu einer Verschiebung der Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_p$  kommen. Dies ist aus den Resonanzkurven in Abb. 10.5 deutlich ersichtlich. Die dargestellten Resonanzkurven wurden bei nachfolgenden Schaltungselementen ermittelt.  $R_C = 1000 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ ,  $I = 10 \text{ A}$ .

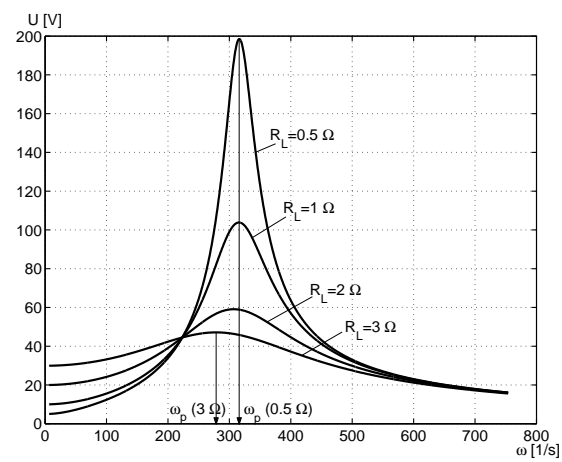


Abbildung 10.5: Resonanzkurve eines praktischen Parallelschwingkreises.