NRLA Blatt 02

Mittwoch, 5. Oktober 2022 17:26

Aufgabe 2-1 Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $A+B$, $B+A$, AB, BA und CD.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 19 & 2 \\ 19 & 4 & 49 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2-2 Es sei $C = (3, 2, 4)$ und $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Es sei weiter C^t der entsprechende Spaltenvektor, und D^t der entsprechende Zeilenvektor. Berechnen Sie CD, DC, C^tD^t und D^tC^t.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad D^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (15)$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -6 & -4 & -8 \\ 12 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C^t \cdot D^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 2 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (15)$$

Aufgabe 2-3 Es sei $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix, und B^2 bezeichne BB; B^3 bezeichne BBB usw. Berechnen Sie B^2, B^3, B^6. Es sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie analog C^2, C^3, C^6. Es sei $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie F^2, F^3 und F^{10}. (Nach ein paar Schritten sehen Sie, dass man das effizient machen kann.)

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F^5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

das heißt, wenn $n = 2 \Rightarrow g(2) = 1^2 + 2^2 = 5$
$\Leftrightarrow g(2) = f(1) + f(2)$

$g(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
weil $g(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$

?

Aufgabe 2-4 Im Skript wird die Summe $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ betrachtet. Man kann solche Formeln wie folgt finden. Es sei f ein Polynom vom Grad d, dann ist $g(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ ein Polynom vom Grad $d+1$, siehe oben für $d = 2$. (Diese Aussage beweisen wir hier nicht allgemein, aber in den konkreten Fällen unten.) Wenn wir nun z.B. für $f(n) = n^2$ das Polynom g finden wollen, gehen wir wie folgt vor: Ansatz $g(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$. Wir wollen die Koeffizienten A, B, C, D berechnen. Es gilt $g(0) = 0$ (leere Summe), $g(1) = f(1) = 1^2 = 1, g(2) = 1^2 + 2^2 = g(1) + 2^2 = 5, g(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = g(2) + 3^2 = 14$.

Teil a) Wir stellen nun ein lineares Gleichungssystem auf, in dem obige Informationen, und die Unbekannten A, B, C, D vorkommen, und lösen es:
$g(0) = 0A + 0B + 0C + D = 0$, also $D = 0$.
$g(1) = 1A + 1B + 1C + D = 1$.
$g(2) = 8A + 4B + 2C + D = 5$.
$g(3) = 27A + 9B + 3C + D = 14$.
Lösen Sie dies System und vergleichen mit dem bereits bekannten Ergebnis.

$\rightsquigarrow g(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$

Für $n = 0$: $g(0) = A\,0 + B\,0 + C\,0 + D \cdot 1 = 0$
$n = 1$: $g(1) = A\,1 + B\,1 + C\,1 + D \cdot 1 = 1$
$n = 2$: $g(2) = A\,8 + B\,4 + C\,2 + D \cdot 1 = 5$
$g(3) = A\,27 + B\,9 + C\,3 + D \cdot 1 = 14$

↳ lösen

Gls. Lösen:

$$\begin{aligned} I.&: 0A + 0B + 0C + 1D = 0 \\ II.&: 1A + 1B + 1C + 1D = 1 \\ III.&: 8A + 4B + 2C + 1D = 5 \\ IV.&: 27A + 9B + 3C + 1D = 14 \end{aligned}$$

Weil $D = 0$ ist, muss nicht das ganze Gls. berechnet werden.
Wir stellen ein neues Gls. auf.

$$\begin{aligned} I.&: 1A + 1B + 1C = 1 \\ II.&: 8A + 4B + 2C = 5 \\ III.&: 27A + 9B + 3C = 14 \end{aligned}$$

Berechnen Gls. nach Gauß.:

Pivotelement

$$\begin{array}{l|ccc|c|l} I.: & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ II.: & 8 & 4 & 2 & 5 & II - 8 \cdot I \\ III.: & 27 & 9 & 3 & 14 & III - 27 \cdot I \\ \hline I.: & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ II.: & 0 & -4 & -6 & -3 & \\ III.: & 0 & -18 & -24 & -13 & III - \frac{18}{4} \cdot II \\ \hline I.: & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ II.: & 0 & -4 & -6 & -3 & \\ III.: & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$\frac{18 \cdot 6}{4} = 27$

$\frac{18 \cdot 3}{4} = \frac{27}{2} = 13{,}5$

Rückeinsetzen

- $3C = \frac{1}{2}$
  $C = \frac{1}{6}$
- $-4B - 6 \cdot \frac{1}{6} = -3 \quad | + 1$
  $-4B = -2$
  $B = \frac{1}{2}$
- $A + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \quad | - \frac{4}{6}$
  $A = \frac{2}{6}$
  $A = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$
$B = \frac{1}{2}$
$C = \frac{1}{6}$
$D = 0$

$g(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + 1n}{6} = \frac{n \cdot (n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$ ✓

Teil 2: Es gilt $f(n) = n^3$, sonst gleich wie Teil 1
und $g(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$

↳ Überprüfung, ob $g(n) - g(n-1) = f(n)$ ist

- A, B, C, D, E einsetzen:

$\Rightarrow$ dann ausrechnen

Wie kann man vorgehen, um zu beweisen, dass diese Formel für alle n gilt? Vollständige Induktion ist ein allgemeines Mittel, (das Sie primär in der Analysis lernen). Wenn man aber die Rechnung schon wie oben gemacht hat, kann man allgemein für jedes $n \geq 1$ testen, ob $g(n) - g(n-1) = f(n)$ gilt. Rechnen Sie nach, dass hier $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = n^2$ gilt! Wie kann man das zu einem Beweis vervollständigen?

Teil b) Führen Sie dies nun für $f(n) = n^3$ durch.
Ansatz $g(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$.
Wir wollen die Koeffizienten A, B, C, D, E berechnen. Es gilt $g(0) = 0$ (leere Summe), $g(1) = f(1) = 1^3 = 1, g(2) = 1^3 + 2^3 = 9, g(3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = g(2) + 3^3 = 36, g(4) = g(3) + 4^3 = 100$.
Stellen Sie nun ein lineares Gleichungssystem auf, in dem obige Informationen, und die Unbekannten A, B, C, D, E vorkommen, und lösen Sie es, und verifizieren Sie, dass für alle n gilt $g(n) - g(n-1) = f(n)$ gilt, und komplettieren Sie es zu einem Beweis.

$g(n) - g(n-1) = f(n)$

Nachrechnen:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = n^2$$

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = n^2$$

$$\frac{n \cdot \big((n+1) \cdot (2n+1) - (n-1) \cdot (2n-1) \big)}{6} = n^2$$

$n \cdot \big(2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - 3n + 1) \big)$

$$\frac{n\cdot\big((n+1)\cdot(2n+1)-(n-1)\cdot(2n-1)\big)}{6}=n^2$$

$$\frac{n\cdot\big(2n^2+3n+1-(2n^2-3n+1)\big)}{6}=n^2$$

$$\frac{n\cdot(2n^2+3n+1-2n^2+3n-1)}{6}=n^2$$

$$\frac{n\cdot(6n)}{6}=n^2$$

$$\frac{6n^2}{6}=n^2$$

$$n^2=n^2 \quad ✓$$

Wie kann man es Beweisen?

Durch vollständige Induktion, also für alle $(n+1)$, so beweist man, dass es wirklich für alle n Zahlen gilt.

Zuerst testen für $n=1$:

IA:

$n=1$

$$\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}-\underbrace{\frac{(1-1)\cdot1\cdot(2\cdot1-1)}{6}}_{=0}=1^2$$

$$\frac{6}{6}=1$$

$$1=1 \quad ✓$$

IS:

$n\to n+1$

$$\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)\cdot(2\cdot(n+1)+1)}{6}-\frac{((n+1)-1)\cdot(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)-1)}{6}=(n+1)^2$$

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)-n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=(n+1)^2$$

$$\frac{(n+1)\cdot\big((n+2)\cdot(2n+3)-n\cdot(2n+1)\big)}{6}=(n+1)^2$$

$$\frac{(n+1)\cdot\big(2n^2+7n+6-(2n^2+n)\big)}{6}=(n+1)^2$$

$$\frac{(n+1)\cdot(6n+6)}{6}=(n+1)^2$$

$$\frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot6}{6}=(n+1)^2$$

$$(n+1)\cdot(n+1)=(n+1)^2$$

$$(n+1)^2=(n+1)^2 \quad \square$$

Es ist bewiesen, dass die Gleichung für "alle" Zahlen gilt.

Neues Gls. aufstellen & lösen

$$g(n)=n^4A+n^3B+n^2C+nD+E$$

$$\begin{aligned}
g(0)&=0A+0B+0C+0D+E=0\\
g(1)&=1A+1B+1C+1D+1E=1\\
g(2)&=16A+8B+4C+2D+1E=9\\
g(3)&=81A+27B+9C+3D+1E=36\\
g(4)&=256A+64B+16C+4D+1E=100
\end{aligned}$$

Wissen $E=0$

⇒

I.:	1	1	1	1	1	
II.:	16	8	4	2	9	II − 16 I
III.:	81	27	9	3	36	III : 3
IV.:	256	64	16	4	100	IV : 4

I.:	1	1	1	1	1	
II.:	0	−8	−12	−14	−7	
III.:	27	9	3	1	12	III − 27·I
IV.:	64	16	4	1	25	IV − 64·I

I.:	1	1	1	1	1	
II.:	0	−8	−12	−14	−7	
III.:	0	−18	−24	−26	−15	III − $\frac{18}{8}$ II
IV.:	0	−48	−60	−63	−39	IV − 6 II

I.:	1	1	1	1	1	
II.:	0	−8	−12	−14	−7	
III.:	0	0	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{4}$	
IV.:	0	0	12	21	3	IV − 4 III

I.:	1	1	1	1	1
II.:	0	−8	−12	−14	−7
III.:	0	0	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{4}$
IV.:	0	0	0	−1	0

NR:

$$\frac{18\cdot12}{8}=\frac{9\cdot12}{4}=\frac{9\cdot6}{2}=\frac{54}{2}=27$$

$$\frac{18\cdot14}{8}=\frac{9\cdot7}{2}=\frac{63}{2}=\quad-\frac{52}{2}+\frac{63}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\frac{18\cdot7}{8}=\frac{63}{4}=\quad-\frac{60}{4}+\frac{63}{4}=\frac{3}{4}$$

Rückeinsetzen:

- $D=0$
- $3C+0=\frac{3}{4} \quad |:3$

Ruckeinsetzen:

- $D = 0$
- $3C + 0 = 3/4 \quad | :3$
  $C = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{1}} = \frac{3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$
- $-8B - 12 \cdot \frac{1}{4} - 0 = -7 \quad | +3$
  $-8B = -4$
  $B = \frac{1}{2}$
- $1A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = 1 \quad | -\frac{3}{4}$
  $A = 1/4$

$\Rightarrow$
$A = 1/4$
$B = 1/2$
$C = 1/4$
$D = 0$
$E = 0$

Beweis $g(n) - g(n-1) = f(n)$

$g(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$
$g(n-1) = A(n-1)^4 + B(n-1)^3 + C(n-1)^2 + D(n-1)^2 + E$
$f(n) = n^3$

Setzen unsere berechneten Variablen ein

$n^2 \cdot (\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}) - ((n-1)^2 \cdot (\frac{1}{4}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{4})) = n^2 \cdot (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) - ((n-1) \cdot (\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2})$

$g(n) - g(n-1) = f(n)$

$$\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + 1/4 n^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (n-1)^4 + \frac{1}{2}(n-1)^3 + 1/4 (n-1)^2\right) = n^3$$
$$\frac{1}{4}n^4 + 1/2 n^3 + 1/4 n^2 - 1/4 \cdot (n^2-2n+1)^2 - \frac{1}{2}(n^2-2n+1) \cdot (n-1) - 1/4 (n^2-2n+1) = n^3$$
$$\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + 1/4 n^2 - 1/4 \cdot (n^4 - 2n^3 + n^2 - 2n^3 + 4n^2 - 2n + n^2 - 2n + 1) - \frac{1}{2}(n^3 - n^2 - 2n^2 + 2n + n - 1) - \frac{1}{4} \cdot (n^2 - 2n + 1) = n^3$$
$$1/4 n^4 + \frac{1}{2}n^3 + 1/4 n^2 - 1/4 \cdot (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) - \frac{1}{2}(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 1/4 (n^2 - 2n + 1) = n^3$$
$$1/4 n^4 + 2/4 n^3 + 1/4 n^2 - 1/4 \cdot (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) - \frac{2}{4}(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 1/4 (n^2 - 2n + 1) = n^3$$
$$\frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) - 2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - (n^2 - 2n + 1)}{4} = n^3$$
$$\frac{\cancel{n^4} + 2\cancel{n^3} + \cancel{n^2} - \cancel{n^4} + 4n^3 - \cancel{6n^2} + \cancel{4n} - \cancel{1} - \cancel{2}n^3 + \cancel{6n^2} - \cancel{6n} + \cancel{2} - \cancel{n^2} + \cancel{2n} - \cancel{1}}{4} = n^3$$
$$\frac{4n^3}{4} = n^3$$
$$n^3 = n^3 \quad \checkmark$$

Beweis durch vollständige Induktion:

IA: $n = 1$

$$1^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \underbrace{(1-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{2}\right)^2}_{=0} = 1^3$$
$$1 = 1 \quad \checkmark$$

IS: $n \to n+1$

$$\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + 1/4 n^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (n-1)^4 + \frac{1}{2}(n-1)^3 + 1/4 (n-1)^2\right) = n^3$$
$$\rightsquigarrow 1/4 (n+1)^4 + \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 - \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right) = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^4 + 2(n+1)^3 + (n+1)^2 - n^4 - 2n^3 - n^2}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot ((n+1)^2 + 2(n+1) + 1) - n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1)}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 + 1) - n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4) - n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 - n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot ((n+2)^2 - n^2)}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (4n+4)}{4} = (n+1)^3$$
$$\frac{(n+1)^2 \cdot (n+1) \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = (n+1)^3$$
$$\Rightarrow (n+1)^3 = (n+1)^3 \quad \square$$

$\Rightarrow$ gilt für alle n