Übungsblatt 03

Aufgabe 03-1 Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 3 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Ohne zu rechnen, wieviele Lösungen würden Sie erwarten?

(b) Benutzen Sie Gauß-Jordan Elimination zum Auffinden aller Lösungen.

(c) Welcher Teil Ihrer Lösung löst das zugehörige homogene System?

Aufgabe 03-2 Beispiel 13 in der Übungsbeispielsammlung.

Aufgabe 03-3 Beispiel 30 in der Übungsbeispielsammlung. [1]

Anleitung: Jeder Zwischenschritt (Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division) ist gemäß der vorgegebenen Gleitkomma-Arithmetik zu machen. Taschenrechner können benutzt werden. Es ist mit den üblichen Rundungsregeln zu runden. Die Reihenfolge der Rechenschritte kann Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

Anmerkung: Beim Ermitteln des exakten Ergebnisses ist davon auszugehen, dass alle Zahlen exakt sind; d.h., z.B. $0.89 = 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} = \frac{89}{100}$ *usw.*

Aufgabe 03-4 Beispiel 32(cef) und 34(y) in der Übungsbeispielsammlung.

[1] Bei Rechnung mit p-stelliger Gleitkomma-Arithmetik wird jede Zahl zur nächsten *Maschinenzahl* der Bauart $\pm m \times 10^k$ mit Mantisse $0 \leq m \leq 10^p - 1$ und Exponent $k \in \mathbb{Z}$ gerundet. (Specherbeschränkungen werden in diesem vereinfachten Modell nicht beachtet.)

Aufgabe 03-1 Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 3 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Ohne zu rechnen, wieviele Lösungen würden Sie erwarten?

(b) Benutzen Sie Gauß-Jordan Elimination zum Auffinden aller Lösungen.

(c) Welcher Teil Ihrer Lösung löst das zugehörige homogene System?

a) Da es mehr Variablen als Gleichungen gibt, würde ich unendlich viele Lösungen erwarten

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -7 & 3 \\ -3 & -6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \; (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 3 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \; (-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad x_4 = u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 2x_2 + u &= 0 \\ x_3 - 3u &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \left\{ \left(0, -\frac{x_4}{2}, 1 + 3x_4, x_4\right), x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $x_3 - 3u = 0$ löst das dazugehörige homogene System, da dann auf der rechten Seite nur mehr 0en sind.

$$\mathbb{L}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \left\{ \left(0, -\frac{x_4}{2}, 3x_4, x_4\right), x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

13. Gegeben ist $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^3$.

(a) Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ existiert eine Lösung?

(b) Man bestimme die Lösung in Abhängigkeit von b.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & -1 & b_2 \\ 5 & 7 & 3 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-\frac{2}{3}) \quad (-\frac{5}{3}) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2-(b_1\cdot\frac{2}{3}) \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_3-(b\cdot\frac{5}{3}) \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2-\frac{2b_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b_3-\frac{5b_1}{3}-(b_2-\frac{2b_1}{3}) \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile muss eine Nullzeile werden, dass kein Widerspruch ensteht.

$$\Rightarrow b_3 - \frac{5b_1}{3} - b_2 + \frac{2b_1}{3} = 0 \quad \Rightarrow b_3 - b_2 - \frac{\cancel{3}b_1}{\cancel{3}} = 0 \quad \Rightarrow b_3 - b_2 - b_1 = 0$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2-\frac{2b_1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ (-\frac{6}{11}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4+\frac{\cancel{22}^{\,2}}{\cancel{11}_{\,1}} & b_1-\frac{6}{11}\cdot(b_2-\frac{2b_1}{3}) \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2-\frac{2b_1}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & b_1-\frac{6b_2}{11}+\frac{12b_1}{33} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & b_2-\frac{2b_1}{3} \end{array}\right) \qquad x_3 = u \in \mathbb{R}$$

$$3x_1 + 6u = \frac{45b_1}{33} - \frac{6b_2}{11} \quad \Big| -10u \Rightarrow \quad 3x_1 = \frac{\overset{15}{\cancel{45}}b_1}{\underset{11}{\cancel{33}}} - \frac{6b_2}{11} - 6u \quad \Big| \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\,b_1}{11\cdot\cancel{3}} - \frac{\overset{2}{\cancel{6}}b_2}{11\cdot\cancel{3}} - \frac{6u}{3} = \frac{5b_1}{11} - \frac{2b_2}{11} - 2u$$

$$\frac{11x_2}{3} - \frac{11u}{3} = -\frac{2b_1}{3} + b_2 \quad \Big| + \frac{11u}{3} \quad \Rightarrow \frac{11x_2}{3} = -\frac{2b_1}{3} + b_2 + \frac{11u}{3} \quad \Big| \cdot 3$$

$$\Rightarrow 11x_2 = -2b_1 + 3b_2 + 11u \quad \Big| \cdot \frac{1}{11} \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{2b_1}{11} + \frac{3b_2}{11} + u$$

$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R} \wedge b_3 = b_1 + b_2$ gilt:

$$\mathbb{L}_{(x_1,x_2,x_3)} = \left\{ \left(\frac{5b_1}{11} - \frac{2b_2}{11} - 2x_3 \,,\, -\frac{2b_1}{11} + \frac{3b_2}{11} + x_3 \,,\, x_3 \right),\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

30. Man verwende eine 2–stellige Gleitkommaarithmetik zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned} 0.89\,x_1 + 0.53\,x_2 &= 0.36 \\ 0.47\,x_1 + 0.28\,x_2 &= 0.19 \end{aligned}$$

und vergleiche dies mit dem exakten Ergebnis.

Anleitung: Jeder Zwischenschritt (Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division) ist gemäß der vorgegebenen Gleitkomma-Arithmetik zu machen. Taschenrechner können benutzt werden. Es ist mit den üblichen Rundungsregeln zu runden. Die Reihenfolge der Rechenschritte kann Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

Anmerkung: Beim Ermitteln des exakten Ergebnisses ist davon auszugehen, dass alle Zahlen exakt sind; d.h., z.B. $0.89 = 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} = \frac{89}{100}$ *usw.*

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 0,89 & 0,53 & 0,36 \\ 0,47 & 0,28 & 0,19 \end{array}\right) \left(-\frac{0,47}{0,89}\right) + \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0,89 & 0,53 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$0,89x_1 + 0,53x_2 = 0,36 \Rightarrow 0,89x_1 = 0,36 - 0,53x_2 \quad |:0,89$

$\Rightarrow x_1 = 0,4 - 0,6x_2$

$\mathbb{L}_{(x_1,x_2)} = \{(0,4 - 0,6x_2\, ,\, x_2)\, ,\, x_2 \in \mathbb{R}\}$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} \frac{89}{100} & \frac{53}{100} & \frac{36}{100} \\ \frac{47}{100} & \frac{28}{100} & \frac{19}{100} \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 100 \\ |\cdot 100 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 47 & 28 & 19 \end{array}\right) \left(-\frac{47}{89}\right) +$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 0 & \frac{1}{89} & -\frac{1}{89} \end{array}\right) |\cdot 89 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 89 & 53 & 36 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) (-53)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 89 & 0 & 89 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) |\cdot \frac{1}{89} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\mathbb{L}_{(x_1,x_2)} = \{(1,-1)\}$

32. Man berechne die folgenden Determinanten

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & a \\ -3 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 4 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

~~(c)~~ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ~~(e)~~ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix}$

~~(f)~~ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 2$$
$$= 0 + 12 - 6 - 45 - 4 - 0$$
$$= -43$$

e) $$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{a} & \overset{-}{0} \\ 0 & 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} - \overbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}}^{0} + a\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \overbrace{0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}}^{0}$$
$$= \overset{0}{1\cdot 0\cdot 1} + \overset{0}{0\cdot 0\cdot 0} + \overset{ab}{a\cdot 1\cdot b} - \overset{0}{0\cdot 0\cdot a} - \overset{0}{b\cdot 0\cdot 1} - \overset{0}{1\cdot 1\cdot 0} - 0 + a\big(\overset{0}{0\cdot 1\cdot 1} + \overset{0}{1\cdot 0\cdot 0} +$$
$$+ \overset{0}{a\cdot b\cdot 0} - \overset{0}{0\cdot 1\cdot a} - \overset{0}{0\cdot 0\cdot 0} - \overset{-b}{1\cdot b\cdot 1}\big) + 0$$
$$= ab + a(-b) = ab - ab = 0$$

f) $$\begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{0} & \overset{-}{3} & \overset{+}{-7} \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} + 0 - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\big(\overset{-20}{1\cdot 4\cdot(-5)} + \overset{10}{2\cdot(-5)(-1)} + \overset{-3}{(-1)\cdot 3\cdot 1} - \overset{-4}{(-1)\cdot 4\cdot(-1)} - \overset{5}{1\cdot(-5)\cdot 1} - \overset{30}{(-5)\cdot 3\cdot 2}\big) - 3\big(\overset{-45}{3\cdot 3\cdot(-5)} + 0 + \overset{1}{(-1)\cdot 1\cdot(-1)} - 0 - \overset{-15}{(-1)\cdot(-5)\cdot 3} - \overset{5}{(-5)\cdot 1\cdot 1}\big)$$
$$- 7\big(\overset{9}{3\cdot 3\cdot 1} + 0 + \overset{-2}{2\cdot 1\cdot(-1)} - 0 - \overset{12}{(-1)\cdot 4\cdot 3} - \overset{-1}{1\cdot 1\cdot 1}\big)$$
$$= -2\cdot 18 - 3\cdot\overset{-18\cdot 3}{(-54)} - 7\cdot 18 = -18(2 - 3\cdot 3 + 7) = -18(9-9) = -18\cdot 0 = 0$$

y) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplikation der Hauptdiagonale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Achtung Vorzeichenwechsel} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = -1$$