Klausurangabe 30.11.2019 Teil A, C und D

1. Übungstest, A

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme, Inverse von Matrizen, Determinanten)

(a) [4] Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 + \quad\quad x_3 = -1 \\ x_1 + \quad \alpha x_2 + \quad\quad x_3 = 1 \\ 2x_1 + (2\alpha - 2\beta)x_2 + (2+\alpha)x_3 = \alpha + \beta. \end{cases}$$

Für welche reelle Werte von α und β hat das obige lineare System keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. unendlich viele Lösungen? ✓

Anleitung: *In Matrixform auf ZSF bringen und ggf. Fallunterscheidungen.*

[1 Bonus] für geometrische Veranschaulichung des Lösungsverhalten mittels α, β-Ebene.

(b) [3] Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = (1), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie an, welche Matrizen singulär bzw. regulär sind (a, b, c sind reell). ✓

Aufgabe 2 (Lineare Vektorräume, Lineare Abbildungen)

(a) [3] Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch den Punkt $P(1,2,3)$ und der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Systems

$$\begin{cases} 5y + 7z = 40 \\ \quad\;\; 3z = 15 \end{cases}$$

definierten Ebene. **[1 Bonus]** für die parameterfreie Darstellung dieser Ebene.

(b) [4] Folgende lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist gegeben:

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \overset{F}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Kern(F) als Span einer Basis und seine Dimension. Ist F injektiv? ✓

Aufgabe 3 (Wahr/Falsch) **[2 Punkte pro Behauptung.]** Begründung oder Gegenbeispiel.

(a) Ein inhomogenes System mit 3 Gleichungen ~und?~ in 10 Variablen hat immer ∞ viele Lösungen. ✓

(b) Es gibt mindestens vier äquivalente Kriterien für die Invertierbarkeit einer Matrix. ✓

(c) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ ist l.u. mit orthogonalen Vektoren der Länge 1. ?

(d) **[1 Bonus]** Die Menge der Polynome $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $p(0) = 1$, ist ein Teilraum von $C(\mathbb{R})$, dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen. ?

NRLA 30.11.2019

1. Übungstest, C

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme, Inverse von Matrizen, Determinanten)

(a) [4] Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \quad 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + (-1+\alpha)x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (2\alpha - 2\beta)x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha + \beta. \end{cases}$$

Für welche reelle Werte von α und β hat das obige lineare System keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Anleitung: *In Matrixform auf ZSF bringen und ggf. Fallunterscheidungen.*

[**1 Bonus**] für geometrische Veranschaulichung des Lösungsverhalten mittels α, β-Ebene.

(b) [3] Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = (1), \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie an, welche Matrizen singulär bzw. regulär sind (a, b, c sind reell).

Aufgabe 2 (Lineare Vektorräume, Lineare Abbildungen)

(a) [3] Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch den Punkt $P(3,1,2)$ und der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Systems

$$\begin{cases} 5x - 7z = -40 \\ \quad 3z = 15 \end{cases}$$

definierten Ebene. [**1 Bonus**] für die parameterfreie Darstellung dieser Ebene.

(b) [4] Folgende lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist gegeben:

$$\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{F}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -6 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 3 \\ -3 & 4 & -14 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Kern($\boldsymbol{F}$) als Span einer Basis (falls möglich) und seine Dimension. Ist $\boldsymbol{F}$ injektiv?

Aufgabe 3 (Wahr/Falsch) [**2 Punkte pro Behauptung.**] Begründung oder Gegenbeispiel.

(a) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem hat immer eine Lösung. ✓

(b) Eine Matrix kann stets mit sich selbst multipliziert werden ✓

(c) Es gibt mindestens vier äquivalente Kriterien für die Invertierbarkeit einer Matrix. ✓

(d) [**1 Bonus**] Die Menge $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$ ist mit der geerbten Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$.

NRLA [redacted]

WS 2019/20
30.11.2019

1. Übungstest, D

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme, Inverse von Matrizen, Determinanten)

(a) [4] Gegeben ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x_2 + \quad x_3 = -1 \\ x_1 + \quad (-2+\alpha)x_2 + \quad x_3 = 1 \\ 2x_1 + (2\alpha - 2\beta)x_2 + \alpha x_3 = \alpha + \beta. \end{cases}$$

Für welche reelle Werte von α und β hat das obige lineare System keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Anleitung: *In Matrixform auf ZSF bringen und ggf. Fallunterscheidungen.*

[**1 Bonus**] für geometrische Veranschaulichung des Lösungsverhalten mittels α, β-Ebene.

(b) [**3**] Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = (1)\,, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie an, welche Matrizen singulär bzw. regulär sind (a, b, c sind reell).

Aufgabe 2 (Lineare Vektorräume, Lineare Abbildungen)

(a) [**3**] Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch den Punkt $P(1,2,3)$ und der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Systems

$$\begin{cases} 5y - 7z = -40 \\ \quad\quad 3z = 15 \end{cases}$$

definierten Ebene. [**1 Bonus**] für die parameterfreie Darstellung dieser Ebene.

(b) [**4**] Folgende lineare Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist gegeben:

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{F}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 2 \\ -5 & 10 & -12 & 3 \\ -3 & 4 & -16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Kern($\boldsymbol{F}$) als Span einer Basis (falls möglich) und seine Dimension. Ist $\boldsymbol{F}$ injektiv?

Aufgabe 3 (Wahr/Falsch) [**2 Punkte pro Behauptung.**] Begründung oder Gegenbeispiel.

(a) Die Koeffizentenmatrix $\boldsymbol{A}$ allein bestimmt, ob ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ eine Lösung besitzt.

(b) Zwei Matrizen können stets miteinander multipliziert werden. F

(c) Es gibt mindestens vier äquivalente Kriterien für die Invertierbarkeit einer Matrix.

(d) [**1 Bonus**] Die Determinante einer 4×4 Matrix ist Null, wenn drei Spalten l.a. sind.

F

annahme: linear abhängig