Analysis T1

1. Test, 21.11.2018
Gruppe B

---

1. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass $4^n \geq n^2$ für $n \geq 1$.

   b) Seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ positive relle Zahlen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass

$$(b_1 + \cdots + b_n)\left(\frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_n}\right) \geq n^2.$$

2. a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} b_n$ für folgende Folgen (Sie dürfen alles verwenden was Sie über das Rechnen mit Grenzwerten wissen):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2+\cos n}{n}, \quad n \geq 1,\\
b_n &= \frac{9n^2+2}{3n^2-2n+1}, \quad n \geq 1,\\
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}, \quad n \geq 1,\\
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n^2}\right), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

   b) Verwenden Sie die Definition des Grenzwertes, um direkt zu beweisen dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7+(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

   c) Beweisen Sie dass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ keinen Grenzwert besitzt.

3. a) Bestimmen Sie ob diese Reihen konvergent oder divergent sind.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{13n^4-2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

   b) Beweisen Sie dass es eine relle Zahl x gibt für die gilt:

$$\cos x = 2x.$$

   c) Welche dieser Funktionen ist injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2, \quad f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.\\
f(x) &= 1+x, \quad f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.\\
f(x) &= 0, \quad f: \mathbb{R} \mapsto \{0\}.
\end{aligned}$$

Geben Sie alle Rechnenschritte an! Geben Sie an welche Sätze/Resultate aus dem Skriptum Sie verwenden! Begründen Sie alle Antworten! Erklären Sie was Sie tun! Es soll immer klar ersichtlich sein was das Ergebnis ist!

Punkteverteilung: 6 + 7 + 7; maximale Gesamtpunktezahl = 20.