Pregunta 1

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Link al archivo base para la resolución de la tarea: ROL-tarea-4.ipynb

----

En esta tarea estudiaremos una clase de EDPs llamadas parabolicas, en particular, la ecuación de calor unidimensional, que es una ecuación en derivadas parciales en donde se describen las concentraciones de temperatura en una dimensión espacial, a lo largo de un tiempo t, hasta alcanzar un estado estable. Para el caso de una variable espacial, la ecuación de calor está dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ (ec 1)},$$

en donde K es una constante de conductividad térmica del material en estudio.

Para lo que sigue se considerará una barra de largo L , y $u(x,t)$ la temperatura de la barra en un punto x, para un tiempo $t,\ x \in]0, L]$.

Lo que se busca es una aproximación para $u(x,t)$, un acercamiento puede ser logrado aplicando el método de lineas; La idea es reemplazar la derivada espacial (derivada respecto a x) en la ecuación, usando aproximaciones algebraicas. Una vez hecho esto, las derivadas espaciales no necesitan ser expresadas de forma explicita en términos de variables espaciales independientes. Con lo anterior, en efecto, solo queda una variable independiente, la temporal (t), formando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que aproximan la ecuación diferencial parcial original.

A continuación se muestran los pasos de lo expresado en el párrafo anterior para la ecuación de calor:

El termino $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ puede ser aproximado de la siguiente forma usando diferencias finitas centradas para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \text{ (ec 2)},$$

en donde i es un indice que designa la posición a lo largo de una grilla en el eje x, y Δx es el espacio a lo largo del eje x a través de la grilla (considerar Δx constante en este caso). Luego, si tenemos una grilla equiespaciada en N puntos interiores(sin contar bordes), entonces la (ec 1) queda dada por:

$$\frac{du_i}{dt} = K(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}), 1 \leq i \leq N \quad \text{(ec 3)},$$

ecuación que representa un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias, con una variable independiente (t).

Para asegurar la unicidad de la solución se deben considerar condiciones de borde y condiciones iniciales; Como tenemos N ecuaciones diferenciales, necesitamos N condiciones iniciales para $t = 0$ y ademas, t es variable independiente, por lo que podemos considerar condiciones de borde de Dirichlet (una función que describe el comportamiento de la temperatura en los bordes de la barra):

Condiciones iniciales: $u(x_i, t=0) = f(x_i), 1 \leq i \leq N$.

Condiciones de borde: $u(0,t) = g_1(t)$ y $u(L,t) = g_2(t)$.

Lo que tenemos es un sistema dinámico con valores iniciales, que puede ser resuelto con métodos muy interesantes (incluidos los vistos en clases), uno de ellos es usar el método de los valores y vectores propios; El sistema de la ecuación 3, puede ser visto de forma matricial:

$$\frac{DU}{dt} = AU + b \text{ (ec 4)},$$

como conocemos el valor de u_0 y u_{N+1} (por las condiciones de borde), las incógnitas del sistema son $U = [u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$, el vector b es un vector columna de dimensiones $Nx1$ que incluye las variables conocidas para apartarlas de la matriz A:

$$b = \frac{K}{\Delta x^2}[u_0, 0, \ldots, 0, u_{N+1}]$$

Se pide implementar:

- **Función 1 (20 ptos):** La primera función se denomina matrix_A. Esta función retorna la matriz A asociada a la ecuación 4(HINT: A incluye el escalado por constante K, ademas es tridiagonal).

A continuación se deben encontrar los valores y vectores propios de la matriz A, llamemos $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N]$ al vector de valores propios, y $V = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ldots, \overrightarrow{v_N}]$ una matriz de vectores columnas correspondientes a los vectores propios. Cada vector valor propio α_i tiene un vector propio v_i asociado de la matriz V, $0 \leq i \leq N$.

Luego la solución del sistema de ecuaciones viene dada por la siguiente combinación lineal:

$$u = c_1 * \exp(\alpha_1 t) * \overrightarrow{v_1} + c_2 * \exp(\alpha_2 t) * \overrightarrow{v_2} + \ldots + c_N * \exp(\alpha_N t) * \overrightarrow{v_N} \text{ (ec 5)}$$

Para encontrar las constantes c_i es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales formado con las condiciones de valor inicial (recordar que estas son dadas cuando $t = 0$).

Se pide implementar:

- **Función 2 (10 pts)**: La segunda función se denomina GMREs, recibe como input la matriz A y el vector b, en donde A es el lado 'izquierdo' asociado a un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, y b es el lado 'derecho'. La función retorna el vector solución y un residuo. Como condición inicial, iteraciones y treshhold, use los valores por defecto que están en el .ipynb del curso.

- **Función 3(40 pts):** La tercera función se denomina eig_vals_and_vects, esta función recibe como input la matriz A y un vector de condiciones iniciales llamado u_0 (notar que u_0 es de largo N). La función debe retornar un vector con los valores propios, una matriz de dimensiones NxN, en donde cada columna de la matriz corresponde a un vector propio en una posición i asociado a un valor propio en una posición i. Ademas debe retornar la solución al sistema de ecuaciones asociado a la ecuación 5, usando GMREs, y finalmente retornar el residuo de GMREs. Para realizar esta función usted debe hacer uso de la función linalg.eig de scipy (HINT:leer bien la documentación, revisar que es lo que retorna, si hay números complejos aplicar .real, revisar muy bien que es lo que retorna como vectores propios, i.e: en que orden están? son vectores fila? columna? [:,i]).

- **Función 4(20 pts)**: La función cuatro se denomina build_u, esta función recibe como parámetro N, iv y k, en donde N es el número de puntos internos en la grilla a discretizar (sin tomar bordes), iv representa un array de largo N y K es la difusividad térmica del material. La función debe hacer uso de todas las funciones anteriores para entregar un 'calleable' que reconstruye u discretizado para N espacios interiores de la grilla. El callable a su vez debe tener como input t y retorna un vector de dimensiones $Nx1$.
- **IMPORTANTE**: Por simplicidad se asume barra con $L = 1$, Usar $\Delta x = \frac{1}{N+1}$.

Nota: Al utilizar GMREs, dejar el número de iteraciones con el parámetro por defecto que está en los Jupyters Notebooks del curso.

NOTA IMPORTANTE: Borrar prints, inputs, variables globales, revisar nombre del jupyter antes de enviar, revisar correcta ejecución de inicio a fin reiniciando el kernel.

NOTA IMPORTANTE 2: Borrar prints aunque provengan de los jupyters del curso.

Actividad previa

◄ Jupyter Notebook Tarea 3 - parte 2

Ir a...

Siguiente actividad

Jupyter Notebook Tarea 4 - parte 2 ►