“Чему мы должны научиться делать,
мы учимся, делая.”
Аристотель

Раздел 1

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 1. Вектор в повернутой системе координат или взаимосвязь основных понятий линейной алгебры

Нам предстоит убедиться, что такие известные со школы понятия как вектор и система линейных алгебраических уравнений имеют связь, которая естественным образом описывается такими новыми понятиями как матрица и определитель.

Вектор	Скаляр

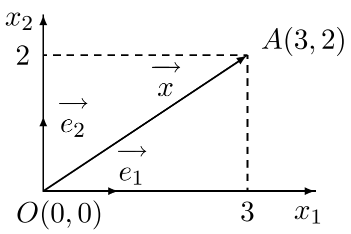
графическое определение:

Направленный отрезок прямой	Длина отрезка прямой

аналитическое определение:

Набор чисел, который *меняется,* при повороте системы координат $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	Число, которое *не меняется,* при повороте системы координат $OA = \left\lvert \overrightarrow{x} \right\rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Пример 1. *Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ и скаляр OA заданы графически. Задать их аналитически в декартовой системе координат.*



$\triangleright$ *Выразим $\overrightarrow{OA}$ через единичные базисные векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$:*

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$OA = \left\lvert \overrightarrow{x} \right\rvert = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,; \quad \text{а} \quad \left\lvert \overrightarrow{e_1} \right\rvert = \left\lvert \overrightarrow{e_2} \right\rvert = 1\,. \quad \triangleleft$$

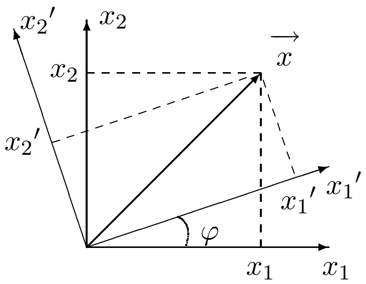
$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$ — матричная форма вектора

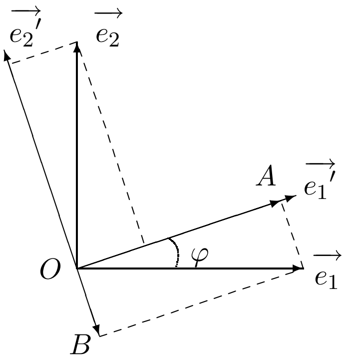
Задача 1

Пусть задан вектор в декартовой системе координат в двухмерном пространстве

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}\,.$$

Найти проекции этого вектора в повернутой системе координат.





► $\quad \overrightarrow{x} = x_1'\overrightarrow{e_1'} + x_2'\overrightarrow{e_2'}\,, \quad x'_{1,2} = ?$
Но $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}\,,$ где $\left|\overrightarrow{e_1'}\right| = \left|\overrightarrow{e_2'}\right| = 1,\ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left\{\left|\overrightarrow{OA}\right| = \cos\varphi\,,\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sin\varphi\right\} =$
$= \cos\varphi\,\overrightarrow{e_1'} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_2'}\,,$
$\overrightarrow{e_2} = \sin\varphi\,\overrightarrow{e_1'} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_2'}$. *Итак,*
$\overrightarrow{x} = x_1(\cos\varphi\,\overrightarrow{e_1'} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_2'}) +$
$+x_2(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_1'} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_2'}) =$
$= \overrightarrow{e_1'}(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi) +$
$+\overrightarrow{e_2'}(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi).$
Векторы равны, если равны соответствующие проекции этих векторов:

$$x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = x_1'\,,$$
$$-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi = x_2'\,.$$

Полученное решение можно записать в матричной и операторной формах:

$$\begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$R(\varphi)\,\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}, \ \text{ где}$$

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \ (2\times 2) \ \text{— матрица поворота.}$$ ◄

• *Преобразование вектора или система линейных алгебраических уравнений могут записываться различным образом:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{(2\times 2)(2\times 1) = (2\times 1)} \quad \text{— матричная форма}$$

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1'} \quad \text{— операторная форма}$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j = x_i' \quad \text{— тензорная форма}$$

Задача 2

Убедиться, что $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{{x_1'}^2 + {x_2'}^2}$ *, т.е. что длина отрезка прямой при повороте не меняется (самостоятельно).*

Задача 3

Пусть задана матрица поворота A и координаты вектора в штрихованной системе координат x_1', x_2'. Найти x_1, x_2.

► *Решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений, которую решаем вычитанием уравнений после умножения их на подходящие коэффициенты.*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = x_1' \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x_2' \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a_{21} \\ a_{11} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a_{22} \\ a_{12} \end{array} \right.$$

$$a_{12}a_{21}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}x_1' - a_{11}x_2'$$

$$x_2 = \frac{a_{21}x_1' - a_{11}x_2'}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = \frac{a_{11}x_2' - a_{21}x_1'}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}x_1' - a_{12}x_2'$$

$$x_1 = \frac{a_{22}x_1' - a_{12}x_2'}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\Delta \\[2ex] a_{22}x_1'-a_{12}x_2'=\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} \\ x_2' & a_{22} \end{vmatrix}=\Delta_1 \\[2ex] a_{11}x_2'-a_{21}x_1'=\begin{vmatrix} a_{11} & x_1' \\ a_{21} & x_2' \end{vmatrix}=\Delta_2 \end{array}\right\} \text{ определители } \blacktriangleleft$$

• *Полученное решение известно в математике как формула Крамера (правило Крамера).*

Формула Крамера

Формула Крамера — формула решения квадратной системы n линейных алгебраических уравнений:

$$\boxed{x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}};\quad \Delta\neq 0,\quad \text{где } i=1,2,\ldots,n.$$

Δ_i — *дополнительные определители,*
Δ — *определитель системы (детерминант матрицы системы).*

★ *Дополнительный определитель образуется из определителя системы, заменой i-того столбца на столбец свободных членов.*

Пример 2. *Найти:* Δ , Δ_1 , Δ_2 , x_1 , x_2, *если*

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=6, \\ -4x_1+5x_2=1. \end{cases}$$

$$\triangleright\quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=10+12=22,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=27,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=26,\quad x_1=\tfrac{27}{22},\quad x_2=\tfrac{26}{22}=\tfrac{13}{11}\quad \triangleleft$$

Лекция 2. Определители и их свойства

Рассмотренные ниже свойства определителя нам пригодятся как для вычисления определителей, так и для нахождения рангов матриц при решении систем линейных алгебраических уравнений.

★ *Определителем или детерминантом квадратной матрицы называется скаляр, образованный из элементов этой матрицы следующим образом*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Здесь $j = j_1, j_2, \dots, j_n$ — это всевозможные перестановки натуральных чисел $j = 1, 2, 3, \dots, n$, при этом сам этот набор чисел: $j = 1, 2, 3, \dots, n$ — основная перестановка, а t_j — число транспозиций, которое необходимо совершить, чтобы перевести данную перестановку к основной.

★ *Порядком определителя называется число столбцов (строк) квадратной матрицы*

Детерминант 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}.$$

j_1, j_2	t_j
$1, 2$	0
$2, 1$	1

Определитель 3-го порядка

Вопрос: Сколько перестановок можно составить из трёх элементов?

Ответ: 3! *(три факториал).* $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j} (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\ .$$

$$3!\ \left\{ \begin{array}{c|l} j_1, j_2, j_3 & t_j \\ 1,2,3 & 0 \\ 3,2,1 & 3 \\ 2,3,1 & 2 \\ 2,1,3 & 1 \\ 1,3,2 & 1 \\ 3,1,2 & 2 \end{array} \right.$$

t_j – чётная $\qquad$ t_j – нечётная

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Свойства определителя

1. *Определитель n-го порядка сводится к вычислению определителей $n-1$-го порядка посредством его разложения по какой-либо строке (столбцу).*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}.$$

★ *M_{ik} — определитель $n-1$-го порядка, называемый минором, полученный из основного определителя, вычеркиванием i-той строки и k-того столбца.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.*

★ *Транспонированной матрицей называется такая матрица, у которой все строки заменены соответствующими столбцами.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \textit{при } a_{12} \neq a_{21}.$$

$$\det A = \det A^T.$$

3. *Если поменять в определителе местами какие-либо две строки (столбца), то определитель изменит знак.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

$$a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}).$$

4. *Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на число, то такой определитель будет отличаться от исходного умножением на это число.*

$$\det A' = \sum_j (-1)^{t_j} a'_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = \left\{ \ a'_{1j_1} = k a_{1j_1} \ \right\} =$$

$$= \sum_j (-1)^{t_j} k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = k \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

$$\det A' = k \det A.$$

5. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны* 0*, то такой определитель равен* 0*.*

6. *Если в определителе какие-либо две строки (столбца) равны между собой, то такой определитель равен* 0*.*

По третьему свойству, после перестановки строк (столбцов) определитель должен сменить знак, но с другой стороны после перестановки одинаковых строк (столбцов) определитель не должен измениться, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= -\Delta \\ \Delta' &= \Delta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta' = \Delta = 0.$$

7. *Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на любое число, то определитель не изменится.*

$$\det A' = \sum_j (-1)^{tj} a'_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{tj} (a_{1j_1} + k a_{2j_2}) a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{tj} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} + \underbrace{k \sum_j (-1)^{tj} a_{2j_2} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}}_{= 0 \text{ по 6-ому свойству}} = \det A.$$

Пример 1. *Вычислить определитель.*

$$\triangleright \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \triangleleft$$

• *Вычисление определителей проводится путём последовательного понижения порядка определителя посредством элементарных преобразований, не меняющих его значение (7-ое свойство).*

Лекция 3. Матрицы и действия над ними

Произведение матриц в отличие от произведения чисел зависит от порядка сомножителей, и более того, не всякие матрицы можно перемножать или складывать.

★ *Матрицей называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, содержащая m-строк и n-столбцов.*

$$A = (a_{ij}) = \widehat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (m \times n).$$

★ *Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов* — $(n \times n)$.

★ *Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.*

$$A = B,\ \text{если} \quad a_{ij} = b_{ij},\ \text{где} \quad \begin{aligned} i &= \overline{1,m}; \\ j &= \overline{1,n}. \end{aligned}$$

★ *Матрица,содержащая один столбец или одну строку, называется вектором.*

$$(m \times 1) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \overrightarrow{c}\,; \quad (1 \times m) = (c_1\, c_2 \ldots c_m) = \overrightarrow{c}^{\,T}.$$

★ *Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы равны нулю.*

$$\widehat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{в частности,}\ \overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение матриц

★ *Результатом сложения двух матриц является матрица, каждый элемент которой представляет собой сумму соответствующих элементов матриц.*

$$\underbrace{\widehat{a}+\widehat{b}=\widehat{c}}_{(m\times n)+(m\times n)=(m\times n)}, \quad \text{где } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{не имеет} \\ \text{смысла} \end{array} \right.$$

- *Складываются только матрицы одинаковой размерности.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{не имеет} \\ \text{смысла} \end{array} \right.$$

а) $A+B=B+A$ — переместительное свойство.

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$ — сочетательное свойство.

Умножение матрицы на число

★ *Результатом умножения матрицы на число является матрица, каждый элемент которой умножен на это число.*

$$\underbrace{\lambda\cdot\widehat{a}=\widehat{c}}_{\lambda\cdot(m\times n)=(m\times n)}, \quad \text{где } c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \\ 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad \text{Сравни!}$$

Умножение матриц

★ *Результатом умножения матриц, будет матрица, каждый элемент которой является результатом перемножения соответствующей строки первой матрицы на соответствующий столбец второй матрицы.*

$$\underbrace{\widehat{a}\cdot\widehat{b}=\widehat{c}}_{(m\times n)(n\times k)=(m\times k)}\quad,\quad \text{где}\ \ c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

• *Перемножаются только такие две матрицы, у которых число столбцов первой равно числу строк второй матрицы.*

Пример 1. *Вычислить.*

$$\triangleright\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 20 \\ 6 & 8 & 32 \end{pmatrix}}_{(3\times 2)(2\times 3)=(3\times 3)}\quad\triangleleft$$

Пример 2. *Вычислить.*

$$\triangleright\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}}_{(2\times 3)(3\times 2)=(2\times 2)}\quad\triangleleft$$

• *Умножение матриц не обладает перестановочным свойством, более того, при перестановке может меняться размерность.*

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

★ *Единичной матрицей называется такая квадратная матрица, диагональные элементы которой равны единицам, а остальные равны нулю.*

$$E = \widehat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Единичная матрица, а также нулевая квадратная матрица, обладают перестановочным свойством по отношению к квадратной матрице той же размерности.*

$$\widehat{0} \cdot \widehat{a} = \widehat{a} \cdot \widehat{0} = \widehat{0}; \quad \widehat{1} \cdot \widehat{a} = \widehat{a} \cdot \widehat{1} = \widehat{a}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

★ *Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, порожденного данной матрицей.*

• *При вычислении ранга матрицы производят те же преобразования, что и при вычислении определителя.*

Пример 3. *Найти ранг матрицы.*

$$\triangleright \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(\text{ранг}) = 2 \quad \triangleleft$$

• *Ранг матрицы фактически равен числу отличных от нуля элементов, примыкающих к гипотенузе нулевого треугольника.*

Лекция 4. Системы линейных уравнений и их исследование

Не только в математике, но и в жизни, люди нередко ставят и пытаются решать задачи, которые не имеют решения. Нам нужно научиться определять: имеет ли система одно решение, нуль решений или множество решений.

★ *Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется выражение следующего вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$; x_j — неизвестные, b_i — свободные члены.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{— матричная форма}$$

$$A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad \text{— операторная форма}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \quad \text{— тензорная форма}$$

★ *Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ или $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ называется решением системы, если она обращает все уравнения в тождества.*

★ *Система совместна, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместна, если она не имеет ни одного решения.*

★ *Система называется однородной, если все свободные члены равны нулю*

$$A\overrightarrow{x} = 0,$$

где под 0 *подразумевается нулевой вектор* $\overrightarrow{0}$.

• $\boxed{\det A = \Delta}$ — определитель системы

★ *Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов*

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли

Система совместна, если ранг A равен рангу B и несовместна, если ранг B больше ранга A.

▶ 1. *Пусть система совместна, тогда*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

т.е. столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы. Исходя из седьмого свойства определителя и определения ранга матрицы приходим к выводу, что ранг A равен рангу B ($r_A = r_B$).

2. *Пусть $r_B > r_A$. В этом случае столбец свободных членов не может сводиться к линейной комбинации столбцов матрицы системы, т.е.*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \not\equiv \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Последнее означает, что система несовместна. ◄

Вопрос: В чём нестрогость проведённого доказательства?

Ответ: В первом пункте показано обратное.

Первый случай

Пусть $m = n$, $\overrightarrow{b} \neq 0$.

а) *Если $\Delta \neq 0$, то $r_A = r_B = r = n$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.*

б) *Если $\Delta = 0$, то либо $r_B > r_A$, либо $r_A = r_B = r < n$.*

Последние два случая рассмотрены в Примерах 1 и 2.

Пример 1. *Решить:* $\begin{cases} x + y = 1\,, \\ -x - y = 2\,. \end{cases}$

▷ 1. *Исследование на совместность.*

$$B = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} r_A = 1, \\ r_B = 2 \end{array}\right\} \; r_B > r_A\,.$$

Ответ: Система несовместна. ◁

Пример 2. *Решить:* $\begin{cases} x + y = 1\,, \\ -x - y = -1\,. \end{cases}$

▷ 1. *Исследование на совместность.*

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r_A = r_B = r = 1$ — *система совместна.*

2. *Число свободных параметров (неизвестных).*

$n - r = 2 - 1 = 1$ — *один свободный параметр.*

3. *Нахождение неизвестных.*

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -x - y = -1; \end{cases} \quad y = c\ , \quad \textit{тогда} \quad x = 1 - c\,.$$

4. *Проверка.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c + c \\ -1 + c - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 - c \\ c \end{pmatrix}$ ◁

Второй случай

$m = n, \quad \overrightarrow{b} = 0.$

Очевидно, что однородная система всегда совместна.

$$r_A = r_B = r \leqslant n\,, \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\,, \quad \textit{причём} \quad \Delta_i = 0\,.$$

а) *Если* $\Delta \neq 0$, *то* $x_i = \dfrac{0}{\Delta} = 0$ — тривиальное решение.

б) *Если* $\Delta = 0$, *то* $x_i = \left\{ \dfrac{0}{0} \right\}$ — бесконечно много решений.

Пример 3. *Решить:* $\begin{cases} x - y + 3z = 0\,, \\ 2x + 3y - z = 0\,, \\ 3x + 2y + 2z = 0\,. \end{cases}$

$\triangleright$ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r = 2\,.$$

2. $n = 3\,,\quad n - r = 3 - 2 = 1\,.$

3. $z = c\ + \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y = -3c \\ 2x + 3y = c \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3c & -1 \\ c & 3 \end{vmatrix} = -8c, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3c \\ 2 & c \end{vmatrix} = 7c\,.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{8}{5}c, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{5}c, \quad z = c\,.$$

4. *Проверка:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 - 7 + 15 \\ -16 + 21 - 5 \\ -24 + 14 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x} = \dfrac{c}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Лекция 5. Решение систем линейных уравнений

Существует несколько методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В частности, решение системы может быть сведено к перемножению двух матриц.

Третий случай

Число уравнений не равно числу неизвестных: $m \neq n$.

Пример 1. *Решить:* $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0\,, & n = 3\,, \\ 2x + y - z = 0\,; & m = 2\,. \end{cases}$

$\triangleright$ 1. $\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)}_{r=2,\ \text{система совместна}}$

2. $r = 2\,,\quad n - r = 3 - 2 = 1\,.$

3. $z = c \quad + \quad \left\{ \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = -3c\,, \\ 2x + y = c\,. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3c & -2 \\ c & 1 \end{vmatrix} = -c\,.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3c \\ 2 & c \end{vmatrix} = c + 6c = 7c \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{c}{5}\,, \quad y = \tfrac{7c}{5}\,.$$

4. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} \\ \frac{7c}{5} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} - \frac{14c}{5} + 3c \\ -\frac{2c}{5} + \frac{7c}{5} - c \end{pmatrix} =}_{(2\times3)(3\times1)=(2\times1)}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{15c}{5} + \frac{15c}{5} \\ \frac{5c}{5} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Ответ:}\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{5} \\ \frac{7c}{5} \\ c \end{pmatrix} \quad \triangleleft$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

$\boxed{A^{-1}}$ — обратная матрица

★ *Матрица называется обратной к данной квадратной матрице, если их произведение равно единичной матрице.*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \widehat{1} = \widehat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

• *Обратная матрица существует только для невырожденной квадратной матрицы.*

★ *Вырожденной квадратной матрицей называется такая матрица, определитель которой равен нулю.*

Задача 1

Пусть $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, где A — *квадратная матрица.*
Выразить $\overrightarrow{x}$ через A^{-1}.

► $A^{-1}|\ A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \ \Rightarrow\ A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ т.к. $\widehat{1}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$, то

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b} \quad \text{— операторная форма}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{-1} b_j \quad \text{— тензорная форма} \quad ◄$$

Задача 2

Найти элементы обратной матрицы ${a_{ij}}^{-1}$.

► *Для нахождения элементов обратной матрицы воспользуемся формулой Крамера.*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\,, \quad \Delta_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j M_{ji}$$

$$\underbrace{x_i = \sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^{-1} b_j, \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta} b_j}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta}} \quad ◄$$

Пример 2. *Найти* A^{-1}, *если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

▷ $\begin{array}{ll} M_{11} = 4\,, & M_{12} = 3\,, \\ M_{21} = 2\,, & M_{22} = 1\,. \end{array} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

$$\begin{array}{ll} {a_{11}}^{-1} = -2\,, & {a_{12}}^{-1} = 1\,, \\ {a_{21}}^{-1} = \frac{3}{2}\,, & {a_{22}}^{-1} = -\frac{1}{2}\,. \end{array}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ◁

Пример 3. *Решить методом обратной матрицы:*

$$\begin{cases} x + 2y = 4\,, \\ 3x + 4y = 12\,. \end{cases}$$

$\triangleright$ $$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Алгоритм вычисления обратной матрицы методом Гаусса состоит в следующем преобразовании:

$$\boxed{(A|E) \Rightarrow (E|A^{-1})}$$

которое проводится посредством тех же элементарных действий, что и при вычислении определителей.

Пример 4. *Найти* A^{-1}, *если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\triangleleft$

Лекция 6. Скалярное произведение векторов

В этой лекции мы углубим школьное знакомство со скалярным произведением векторов, а также с преобразованием векторов из прямоугольной системы координат в косоугольную.

Вектор в n-мерном пространстве

★ *Множество R называется линейным пространством, а его элементы — векторами, если для любых двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ определена их сумма $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in R$ и произведение $\alpha\overrightarrow{a} \in R$, где α — любое число; и выполнены условия:*

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.
3. $\alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
4. $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{a}$.
5. $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$.
6. $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.
7. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$, где $\overrightarrow{0}$ — нуль-вектор.
8. $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

★ *Заданные векторы пространства R называют линейно зависимыми, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{a_k} = 0\,, \text{ где } \alpha_k \neq 0\,.$$

В противном случае эти векторы называют линейно независимыми.

★ *Размерность пространства — это максимальное число содержащихся в нём линейно независимых векторов.*

★ *Упорядоченную систему n линейно независимых векторов называют базисом пространства R_n.*

★ *Вектор в линейном n-мерном пространстве R_n представляет собой матрицу размерности $(n \times 1)$ или $(1 \times n)$.*

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (n \times 1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}$$

$\overrightarrow{a}^T = (1 \times n) = (a_1\, a_2\, \dots a_n)$ — транспонированный вектор.

Скалярное произведение векторов

★ *Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется матричное произведение этих векторов (строка на столбец), результатом которого является скаляр:*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = (a_1\, a_2\, \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}$$

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}^T \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

• *Выше приведены различные обозначения скалярного произведения векторов. Знак транспонирования у векторов обычно для краткости опускают.*

$\boxed{(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)}$ — скаляр.

$$a^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2$$ — квадрат модуля вектора

$$\boxed{\left|\overrightarrow{a}\right| = a = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)}}$$ — модуль вектора

• *В скалярном произведении комплексных векторов первый вектор должен быть подвергнут не только операции транспонирования, но и комплексного сопряжения.*

Вектор в трёхмерном пространстве

★ *Вектор в трёхмерном пространстве в декартовой системе координат определяется одним из выражений*

$$\boxed{\overrightarrow{x} = (x\,y\,z) = \overrightarrow{i}\,x + \overrightarrow{j}\,y + \overrightarrow{k}\,z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}},$$

где x, y, z — координаты или проекции вектора, а

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

единичные ортогональные векторы, задающие декартов базис.

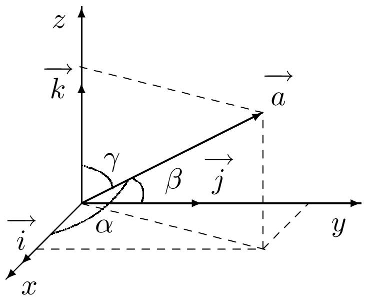
$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$ — скалярное произведение в трёхмерном пространстве

Задача 1

Показать, что векторы $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ являются единичными и ортогональными (самостоятельно).

Задача 2

Установить связь между направляющими косинусами вектора.



► $\vec{a} = a(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma)$,

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{i} = a\cos\alpha = \text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}}$ — проекция вектора $\vec{a}$ на базисный вектор $\vec{i}$, т.к.

$$(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}}{a},\quad \cos\beta = \frac{\text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a}}{a},\quad \cos\gamma = \frac{\text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a}}{a}$$

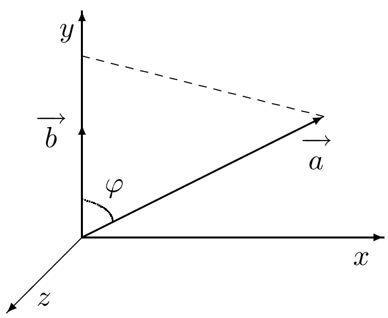
$$\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = a^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \quad ◄$$

Задача 3

Выразить $\vec{a}\cdot\vec{b}$ через косинус угла между этими векторами.



► *Вектор $\vec{b}$ направим по оси y, тогда*

$$\vec{b} = b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{a} = a\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\cos\varphi\\\cos\gamma\end{pmatrix}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\,(0\cdot\cos\alpha + {}$
$+1\cdot\cos\varphi + 0\cdot\cos\gamma) = ab\cos\varphi$.

• *Скалярное произведение векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.*

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ab\cos\varphi} \implies \boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{ab} = \cos \widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}} \quad ◄$$

• *Скалярное произведение ортогональных (перпендикулярных) векторов равно нулю.*

• *Сказанное верно в n-мерном пространстве.*

Неравенство Коши-Буняковского

Задача 4

Показать, что в n-мерном пространстве выполняется неравенство

$$\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \leqslant \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}\right).$$

► *Введём вспомогательный вектор* $\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}$

Очевидно, что
$$\left(\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}\right) \geqslant 0$$
$$\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right) + 2\lambda\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) + \lambda^2\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}\right) \geqslant 0$$

Пусть $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = C,$ *Тогда* $A\lambda^2 + B\lambda + C \geqslant 0,$

$2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = B,$ *если* $D = B^2 - 4AC \leqslant 0.$

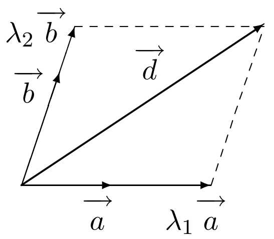
$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = A.$ *Отсюда:*

$$\underbrace{4\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}\right) \leqslant 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \leqslant \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}\right)} \quad ◄$$

Вектор в косоугольном базисе трёх векторов

Задача 5

Пусть задано 4 вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *и* $\overrightarrow{d}$ *в декартовой системе координат. Требуется найти вектор* $\overrightarrow{d}$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$.



▶ $\overrightarrow{d} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b} + \lambda_3\overrightarrow{c}$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = ?$$

Если расписать это векторное равенство, то получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x & m=3 \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y & n=3 \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z & \Delta \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Ответ: $\overrightarrow{d} = \frac{\Delta_1}{\Delta}\overrightarrow{a} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\overrightarrow{b} + \frac{\Delta_3}{\Delta}\overrightarrow{c}$ ◀

Пример 1. *Пусть* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *и* $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Найти вектор* $\overrightarrow{d}$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$.

▷ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$

Аналогично находятся: $\Delta_2 = 1,\quad \Delta_3 = -1.$

Ответ: $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

или $\overrightarrow{d} = (2, 1, -1)$ *в базисе* $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right\}$. ◁

Лекция 7. Векторное и смешанное произведение векторов

Результатом перемножения двух векторов может быть не только скаляр, но и вектор, скалярное умножение которого на третий вектор даёт смешанное произведение.

Задача 1

Найти вектор, ортогональный двум заданным векторам.

Дано: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$. *Найти вектор* $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}$.

► *По условию и свойству скалярного произведения*

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

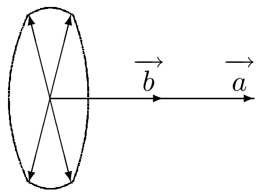
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0. \quad \text{или}$$

и тем самым задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} xa_x + ya_y + za_z = 0, & m = 2, \\ xb_x + yb_y + zb_z = 0; & n = 3. \end{cases}$$

1. *Если векторы коллинеарны, то* $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ *и тогда*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda b_x & \lambda b_y & \lambda b_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \lambda \left(\begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$



Отсюда $r = 1, \quad n - r = 3 - 1 = 2.$ *Здесь решением является множество векторов, лежащих в плоскости, ортогональной векторам* $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$.

2. *Если* $\overrightarrow{a} \neq \lambda \overrightarrow{b}$, *то* $r=2$, $n-r=3-2=1$ *(один свободный параметр).*

$$z = c \quad + \quad \left\{ \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} xa_x + ya_y = -ca_z, \\ xb_x + yb_y = -cb_z; \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -ca_z & a_y \\ -cb_z & b_y \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$x = \frac{c \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{-c \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}.$$

Зададим c *таким образом, чтобы решение упростилось, а именно,* $c = \Delta$. *Тогда*

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

★ *Векторным произведением двух векторов называется вектор ортогональный этим векторам и определяемый формулой:*

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}} \quad ◄$$

Свойства векторного произведения

1. *Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.*

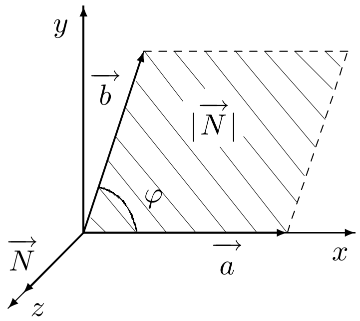
2. $\left[\lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \lambda \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

3. $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]$.

• *Первые три свойства следуют из свойств определителя.*

Задача 2

Выразить модуль векторного произведения через угол между векторами.



▶ *Выбираем систему координат таким образом, чтобы*

$\overrightarrow{a} = (a, 0, 0)$,

$\overrightarrow{b} = (b\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$.

Векторное произведение, после подстановки $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *в формулу, полученную в предыдущей задаче, принимает вид:*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & 0 & 0 \\ b\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} a & 0 \\ b\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{k}\, ab\sin\varphi. \quad \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = ab\sin\varphi = S = \left|\overrightarrow{N}\right| \quad ◀$$

4. *Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Смешанное произведение векторов

★ *Смешанным произведением трёх векторов называется скалярное произведение одного из векторов на векторное произведение двух других.*

Задача 3

Представить смешанное произведение векторов в виде определителя.

▶ *Поскольку*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{i}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_x + \overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_y + \overrightarrow{k}\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_z, \text{ то}$$

$$\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = c_x\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_x + c_y\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_y + c_z\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)_z =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$ — смешанное произведение векторов ◀

Свойства смешанного произведения

1. *Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.*

★ *Компланарными векторами называются векторы, лежащие в одной плоскости.*

Задача 4

Доказать 1-ое свойство.

▶ *Если* $\overrightarrow{c}$ *лежит в той же плоскости, что и* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$, *то*

$$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}.$$

Тогда смешанное произведение векторов $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *равно*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x & \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y & \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

2. *Чётная перестановка векторов в смешанном произведении его не меняет:*

$$\left(\overrightarrow{c}, \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\right) = \left(\overrightarrow{a}, \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = \left(\overrightarrow{b}, \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]\right).$$

Задача 5

Доказать 2-ое свойство.

▶ *Согластно известному свойству определителя (*Лекция 2*)*

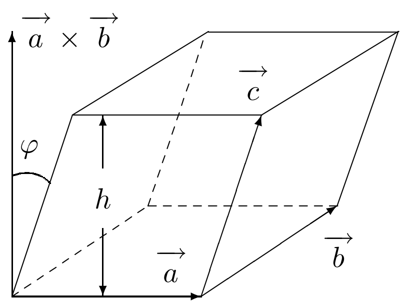
$$\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

чётная перестановка строк его не изменит. ◀

3. *Модуль смешанного произведения равен объёму параллепипеда, построенного на этих векторах.*

Задача 6

Доказать 3-е свойство.



▶ $\left|\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right| =$

$= c\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| \cos\varphi =$

$= \left\{h = c\cos\varphi\right\} =$

$= Sh = V_{\text{параллепипеда}}$ ◀

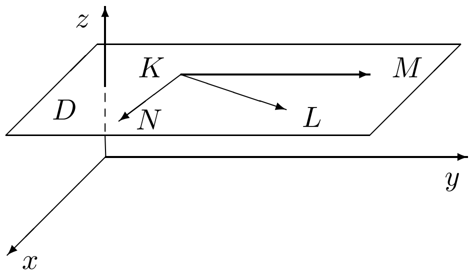
Лекция 8. Уравнения плоскости и прямой

В различных по размерности пространствах одно и то же линейное уравнение описывает различные геометрические объекты.

Общие уравнения плоскости и прямой

Задача 1

Пусть плоскость задана тремя точками K, N и L с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) соответственно. Найти условия принадлежности произвольной точки $M(x, y, z)$ этой плоскости.



► *Решение будем искать, основываясь на известном свойстве смешанного произведения для компланарных векторов:*

$$\overrightarrow{KM} \cdot \left(\overrightarrow{KN} \times \overrightarrow{KL}\right) = 0$$

Поскольку $\begin{array}{rl} \overrightarrow{KM} = & (x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1) \\ \overrightarrow{KN} = & (x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1) \\ \overrightarrow{KL} = & (x_3 - x_1, \quad y_3 - y_1, \quad z_3 - z_1) \end{array}$, то

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad \Longrightarrow$$

$$(x - x_1)\underbrace{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}_{A} + (y - y_1)\underbrace{\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}}_{B} +$$

$$+(z-z_1)\underbrace{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}_{C}=0;$$

$$\underbrace{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}; \\ \Downarrow$$

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ — общее уравнение плоскости ◄

Задача 2

Определить, какой геометрический объект описывается уравнением $z=0$.

► *пространство:*

одномерное	$\{z\}$	$z=0$		*точка*
двухмерное	$\{x,z\}$	$z=0$	x *- любые*	*прямая*
трёхмерное	$\{x,y,z\}$	$z=0$	x,y *- любые*	*плоскость* ◄

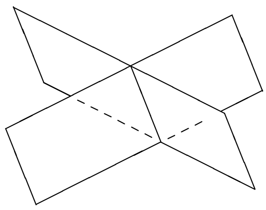
Задача 3

Исследовать уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей.

► $\boxed{\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}}$ — общее уравнение прямой

1. *Если* $(A_1B_1C_1)=\lambda\,(ABC)$, *т.е. векторы коллинеарны.*
$$\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ 0 & 0 & 0 & -D_1+\lambda D \end{array}\right),$$
$$r_A=1\neq r_B=2.$$
Система несовместна и плоскости не пересекаются.

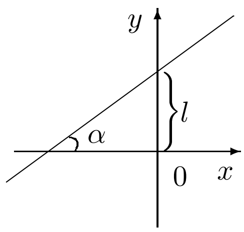
2. *Если* $(A_1B_1C_1)\neq\lambda\,(ABC)$, *т.е. векторы неколлинеарны.* $r_A=r_B=2$ *и система совместна;* $n-r=3-2=1$.



$$\begin{cases} By + Cz &= -Ax - D, \\ B_1y + C_1z &= -A_1x - D_1. \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -Ax - D & C \\ -A_1x - D_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}} = kx + l.$$

Аналогично $z = k_1x + l_1$.



Если $z = 0$, *т.е.* $A_1 = B_1 = D_1 = 0$, *то заданная система уравнений даёт известное со школы* уравнение прямой на плоскости*:*

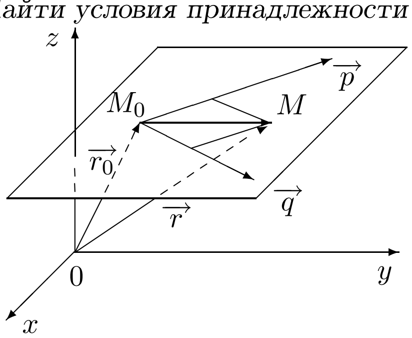
$$\boxed{y = kx + l}$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент. ◀

Параметрические уравнения плоскости и прямой

Задача 4

Пусть плоскость задана двумя векторами $\overrightarrow{p}$ *и* $\overrightarrow{q}$, *лежащими на ней, и точкой* M_0 *с координатами* (x_0, y_0, z_0).
Найти условия принадлежности точки $M(x, y, z)$ *плоскости* D.



▶ $\lambda_1 \overrightarrow{p} + \lambda_2 \overrightarrow{q} = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$. *Отсюда*

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 p_x + \lambda_2 q_x = x - x_0 \\ \lambda_1 p_y + \lambda_2 q_y = y - y_0 \\ \lambda_1 p_z + \lambda_2 q_z = z - z_0 \end{cases}}$$

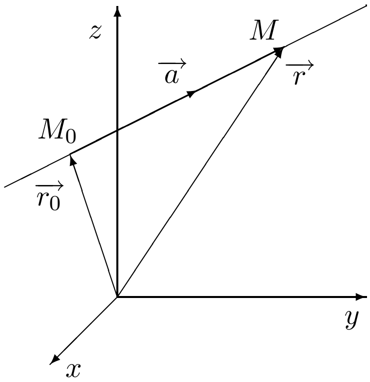
$$\Downarrow$$

параметрическое уравнение плоскости

$n = 5$, $r = 3$, $n - r = 2$ — *число свободных параметров.* ◀

Задача 5

Пусть прямая задана направляющим вектором $\overrightarrow{a} = (a_x\ a_y\ a_z)$ *и точкой* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$. *Найти условия принадлежности точки* $M\,(x, y, z)$ *этой прямой.*



► $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda\,\overrightarrow{a}$

$$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_x \\ y - y_0 = \lambda a_y \\ z - z_0 = \lambda a_z \end{cases}}$$

$\Downarrow$

параметрическое уравнение прямой

Исключая параметр λ *получим:*

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}}$$ — каноническое уравнение прямой ◄

Пример 1. *Пусть* $\overrightarrow{a} = (2\ \ -1\ 0)$ *и точка* $M_0\,(1, 2, 1)$ *принадлежат прямой. Записать каноническое уравнение этой прямой.*

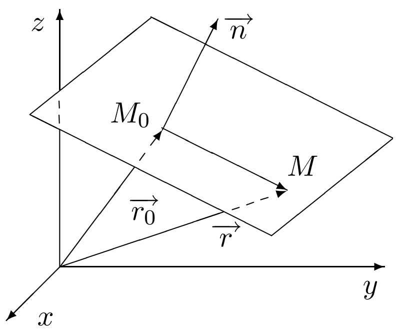
$$\triangleright \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{0} \quad \triangleleft$$

Векторные уравнения плоскости и прямой

Задача 6

Пусть плоскость задана нормальным единичным вектором $\overrightarrow{n}$ $\left(\left|\overrightarrow{n}\right| = 1\right)$ *и точкой на плоскости* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$.
Записать уравнение этой плоскости.

★ *Нормальным вектором плоскости называется такой вектор, который ортогонален любому вектору, лежащему на этой плоскости.*



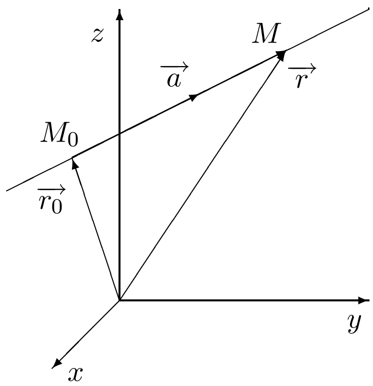
► *По условию* $\overrightarrow{M_0M}$ *перпендикулярен* $\overrightarrow{n}$. *По свойству скалярного произведения:*

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Поскольку $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$, *то получим*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \overrightarrow{n} = 0}$$ — векторное уравнение плоскости ◄

Задача 7 *Пусть вектор* $\overrightarrow{a}$ *и точка* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ *принадлежат прямой. Записать уравнение прямой через векторы, без привлечения параметра.*



► *Поскольку*

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \parallel \overrightarrow{a},$$

то используя свойство векторного произведения, получим

$$\boxed{\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \times \overrightarrow{a} = 0}$$ — векторное уравнение прямой ◄

Лекция 9. Уравнения прямой и плоскости

Одна и та же прямая или плоскость могут быть описаны различными уравнениями. Выбор того или иного уравнения определяется постановкой задачи.

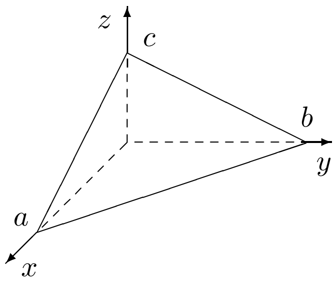
Уравнение плоскости в отрезках

Задача 1

Найти связь между уравнениями

$Ax + By + Cz + D = 0$ (1) *и* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (2) ,

и определить смысл a, b, c.



► *Вопрос: Как осуществить переход от* (1) *к* (2)*?*

Ответ: Поделить на $-D$.

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1}$ — уравнение плоскости в отрезках ◄

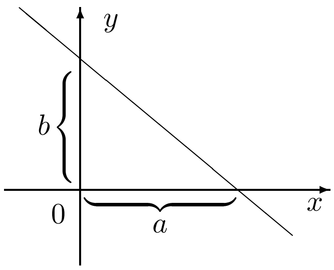
Уравнение прямой в отрезках

Задача 2

Преобразовать общее уравнение прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

к уравнению прямой в отрезках.



► $\underbrace{Ax + By + D = 0 \quad | : (-D)}$

$\Downarrow$

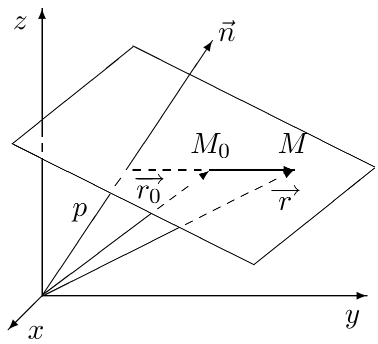
$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ — уравнение прямой в отрезках

где $a = -\frac{D}{A} \quad b = -\frac{D}{B}$ ◄

Уравнение плоскости в нормальном виде

Задача 3

Пусть нормальный вектор плоскости задан направляющими косинусами
$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$, *и известно кратчайшее расстояние* p *от этой плоскости до начала координат. Уравнение плоскости выразить через эти величины.*



► $\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n}, \quad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n},$

где $\left|\overrightarrow{n}\right| = 1.$

Поскольку $\overrightarrow{r_0}\,\overrightarrow{n} = \text{пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{r_0} = p$, *то получим*

$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p}$ — уравнение плоскости в нормальном виде ◄

Задача 4

Дано уравнение плоскости в общем виде.
Найти расстояние p от плоскости до начала координат.

► *Вопрос: Каким образом вы предлагаете решать эту задачу?*

Ответ: Необходимо перейти от уравнения плоскости в общем виде к уравнению плоскости в нормальном виде.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$Ax + By + Cz = -D, \text{ где } \quad \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{N}\right| \neq 1$$

Перейдём от $\overrightarrow{N}$ к $\overrightarrow{n}$.

$$\frac{\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = \boxed{\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{r} = -D \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = p \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p = -\frac{D}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \quad ◄$$

Пример 1. *Найти расстояние от плоскости* $x - 2y + 4z + 5 = 0$ *до начала координат, направляющие косинусы нормального вектора и отрезок, лежащий на оси x между плоскостью и началом координат.*

▷ $$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{5}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = -\frac{5}{\sqrt{21}}$$

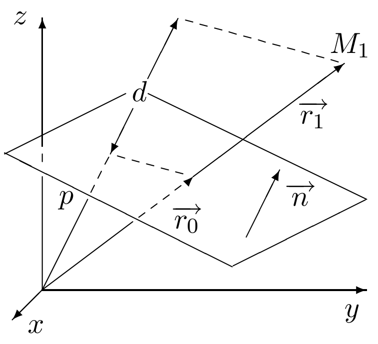
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a = -5 \quad ◁$$

Задача 5

Пусть уравнение плоскости задано в общем виде.
Найти расстояние d от точки M_1 до плоскости.

▶ $Ax + By + Cz + D = 0, \quad M_1\,(x_1, y_1, z_1) \notin$ *плоскости*



Вопрос: Каким образом можно выразить искомое расстояние d через радиус-вектор $\overrightarrow{r_1}$ точки M_1?

Ответ:

$$d = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{r_0} \cdot \overrightarrow{n} = \\ = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} - p$$

Поскольку $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, *то*

$$\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(Ax_1 + By_1 + Cz_1 \right),$$

Согласно Задаче 4

$$p = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

и расстояние от точки $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости равно:

$$\boxed{d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right)} \quad ◀$$

Пример 2. *Найти расстояние от точки $M_1\,(3, 0, 1)$ до плоскости $x - 2y + 4z + 5 = 0$.*

$$\triangleright \quad d = \frac{1}{\sqrt{21}} \left(1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \right) = \frac{12}{\sqrt{21}} \quad \triangleleft$$

Лекция 10. Линейные операторы

Линейные операторы описывают самые различные преобразования, взаимодействия и объекты практически во всех областях науки. Так, например, атом водорода описывается линейным оператором Шрёдингера, при этом его собственные векторы называют волновыми функциями, а собственные значения — энергетическими уровнями.

★ *Квадратную матрицу, под действием которой любой вектор* $\overrightarrow{x}$*, принадлежащий пространству* R_n*, преобразуется по определённому закону в некоторый вектор* $\overrightarrow{y}$*, принадлежащий тому же пространству называют линейным оператором.*

$$\overrightarrow{x} \in R_n \overset{A}{\Longrightarrow} \overrightarrow{y} \in R_n, \quad \text{т.е. } A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}.$$

Вопрос: Какой линейный оператор вам известен?
Ответ: Оператор или матрица поворота.

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R(\varphi)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}, \quad \left|\overrightarrow{x}\right| = \left|\overrightarrow{y}\right|.$$

Собственные векторы, собственные числа линейного оператора

★ *Собственным вектором линейного оператора* A *называется такой вектор* $\overrightarrow{x}^{(i)}$*, который под действием этого оператора испытывает только масштабное преобразование:*

$$\boxed{A\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)}}, \qquad (*)$$

где λ_i *— собственные числа,* $\overrightarrow{x}^{(i)}$ *— собственные векторы.*

Задача 1

Показать, что единичные базисные векторы $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ являются собственными векторами диагональной матрицы Λ.
Найти собственные числа диагональной матрицы.

★ *Диагональной матрицей называется такая матрица, у которой отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали.*

► *По условию* $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (3 \times 3),$

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{i}$$

Аналогично $\Lambda \overrightarrow{j} = \lambda_2 \overrightarrow{j}$, $\Lambda \overrightarrow{k} = \lambda_3 \overrightarrow{k}$. ◄

Задача 2

Показать, что любой вектор является собственным вектором единичной матрицы, при этом собственные значения равны единице.

► *По правилам умножения* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Следовательно, $E \overrightarrow{x} = 1 \overrightarrow{x} \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ ◄

Задача 3

Преобразовать уравнение $(*)$, определяющее собственные векторы и собственные числа линейного оператора, к однородному уравнению, т.е. $(*) \Rightarrow B\overrightarrow{x} = 0$.

► *Очевидно* $A\overrightarrow{x}^{(i)} - \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)} = 0$

Поскольку, согласно Задаче 2: $\overrightarrow{x}^{(i)} = E\overrightarrow{x}^{(i)}$, *то*

$A\overrightarrow{x}^{(i)} - \lambda_i E\overrightarrow{x}^{(i)} = 0.$ *Ответ:* $(A - \lambda_i E)\overrightarrow{x}^{(i)} = 0.$ $(**)$ ◄

Задача 4

Найти условие, при котором система $(**)$ имеет нетривиальное решение.

$$\blacktriangleright \quad \begin{cases} x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ \text{все } \Delta_i = 0 \end{cases} \implies x_i \neq 0, \text{ если } \Delta = 0.$$

$\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$ — характеристическое уравнение ◄

Задача 5

Решить характеристическое уравнение для двухмерного пространства.

► *Вопрос: Как выглядит характеристическое уравнение для двухмерного пространства в явном виде?*

Ответ:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \implies$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ — характеристическое уравнение}$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

По теореме Виета: $\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2} =$$

$$= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \quad ◀$$

Задача 6

Найти собственные векторы линейного оператора в двухмерном пространстве.

▶ *Вопрос: Каким уравнением мы воспользуемся?*

Ответ: Уравнением $(*)$, *где* λ_i *определены* Задачей 5.

$$A\overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda_i)x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} = 0 \quad \text{т.к.} \quad n - r = 2 - 1 = 1.$$

$$\begin{array}{l} x_1^{(i)} = ca_{12} \\ x_2^{(i)} = c(\lambda_i - a_{11}) \end{array} \Longrightarrow \overrightarrow{x}^{(i)} = c\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix} \quad ◀$$

Пример 1. *Найти* $\overrightarrow{x}^{(i)}$ *и* λ_i *матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

▷ 1. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, -1$

2. $\overrightarrow{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_{1,2} = 2, -1;$ $\overrightarrow{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x}^{(2)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ◁

Лекция 11. Квадратичные формы и классификация кривых второго порядка

До сих пор векторы использовались для описания линейных объектов. В этой лекции будет рассмотрено, как векторы и матрицы можно использовать для описания нелинейных объектов.

★ *Квадратичной формой в n-мерном пространстве называется скалярное произведение следующего вида:*

$$\boxed{\begin{gathered} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \\ = (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n) \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \end{gathered}}$$

где матрица A — симметрическая.

★ *Квадратная матрица, которую не меняет транспонирование $A^T = A$, называется симметрической.*

★ *Канонической квадратичной формой называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных*

$$\boxed{\begin{gathered} Q(x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}') = \left(\overrightarrow{x'}, \Lambda\overrightarrow{x'}\right) = \\ = (x_1'\, x_2'\, \cdots\, x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i{}'^2 \end{gathered}}$$

Квадратичная форма в двухмерном пространстве

$$Q(x,y) = \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = (x\,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (xa_{11} + ya_{12} \quad xa_{12} + ya_{22})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Каноническая квадратичная форма имеет вид:

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

Классификация кривых второго порядка

★ *Кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола — задаются уравнениями, которые содержат квадратичные формы в двухмерном пространстве, причём, если*

1. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ — *эллипс,*
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ — *гипербола,*
3. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ — *парабола.*

Пример 1. *Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением:* $x^2 + xy + y^2 = 1$.

$\triangleright$ $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ *Согласно* Задаче 5 *предыдущей лекции*

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} > 0$

Ответ: $x^2 + xy + y^2 = 1$ — *эллипс.* $\triangleleft$

Пример 2. *Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением:* $xy = 1$.

$\triangleright$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$

Ответ: $xy = 1$ — *гипербола.* $\triangleleft$

Диагонализация матрицы квадратичной формы

Задача 1

Найти оператор T, диагонализирующий матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

▶ *Требуется найти такой оператор T, чтобы $TAT^{-1} = \Lambda$.*

Будем исходить из уравнения (1) Лекции 10 *:* $A \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{x}^{(i)}$

Подействуем оператором T: $TA \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T \overrightarrow{x}^{(i)}$ *и далее*

$TA\underbrace{T^{-1}T}_{E} \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T \overrightarrow{x}^{(i)}$ *или* $TAT^{-1}T \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T \overrightarrow{x}^{(i)}$

По условию задачи $TAT^{-1} = \Lambda$, *а значит*

$$\Lambda T \overrightarrow{x}^{(i)} = \lambda_i T \overrightarrow{x}^{(i)}. \qquad (*)$$

Согласно Задаче 1 Лекции 10 *собственными векторами диагональной матрицы являются единичные базисные векторы, т.е.*

$$\Lambda \overrightarrow{e}^{(i)} = \lambda_i \overrightarrow{e}^{(i)}, \qquad (**)$$

Из сопоставления $(*)$ *и* $(**)$ *следует, что* $T \overrightarrow{x}^{(i)} = \overrightarrow{e}^{(i)}$ *или*

$$\overrightarrow{x}^{(i)} = T^{-1} \overrightarrow{e}^{(i)} \qquad (***)$$

Если расписать $(***)$, *то*

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

откуда очевидно, что $\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{pmatrix}}$ ◀

Задача 2

Найти, при каком условии верно $\left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{x}', \Lambda\overrightarrow{x}'\right)$.

$$\blacktriangleright \quad \left(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}^T A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T \underbrace{T^{-1}T}_{E} A \underbrace{T^{-1}T}_{E} \overrightarrow{x} =$$

$$= \overrightarrow{x}^T T^{-1}\Lambda\overrightarrow{x}' = \left(\overrightarrow{x}', \Lambda\overrightarrow{x}'\right).$$

Поскольку $\left(T\overrightarrow{x}\right)^T = \overrightarrow{x}^T T^T$, *то получим* $T^{-1} = T^T$ ◀

Задача 3

Найти при каких условиях диагонализирующий оператор одновременно является оператором поворота в двухмерном пространстве.

▶ *Вопрос:* Чему равен $R^{-1}(\varphi)$? *Ответ:* $R^{-1}(\varphi) = R(-\varphi) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Чтобы $T^{-1} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{pmatrix} = R^{-1}(\varphi)$, *необходимо:*

1. $x^{(1)} = y^{(2)}, \quad y^{(1)} = -x^{(2)}$
2. ${x^{(1)}}^2 + {y^{(1)}}^2 = 1$, т.е. $\left(\overrightarrow{x}^{(i)}, \overrightarrow{x}^{(i)}\right) = 1$ ◀

• *Чтобы диагонализирующий оператор матрицы квадратичной формы являлся оператором поворота необходимо собственные векторы этой матрицы нормировать на единицу и брать их в определённом порядке, как это показано соответственно в пунктах 2 и 1* Задачи 3.

Лекция 12. Кривые второго порядка

Простейшие нелинейные геометрические объекты — эллипс (окружность), парабола и гипербола. Ниже будут рассмотрены их свойства, а также их движение (сдвиг и поворот).

★ *Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:*

$$Q(x,y) + Ax + By + D = 0,$$

где квадратичная форма зависит от абсциссы и ординаты.

• *Если нет поворота и смещения кривой относительно начала координат, то кривая описывается каноническим уравнением.*

Канонические уравнения кривых второго порядка

Эллипс

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ — каноническое уравнение эллипса

Вопрос: Почему это уравнение эллипса?

Ответ: Потому, что

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$$

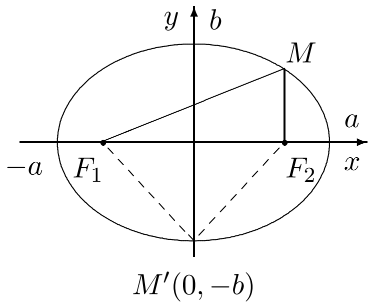
Вопрос: Каков смысл a и b?

Ответ: Очевидно, что $x = \pm a$ и $y = \pm b$ — это точки пересечения эллипса с координатными осями. Если $a > b$, то a — большая, а b — малая полуоси эллипса.

• *При повороте кривой второго порядка появляется смешанное произведение xy, а при сдвиге $Ax + By$. Это касается любой кривой второго порядка.*

Задача 1

Известно, что каждая точка эллипса $M(x, y)$ удовлетворяет равенству $F_1M + F_2M = 2a$, где $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — координаты фокусов. Выразить c через a и b.



► *По построению*
$F_1M' = F_2M'$.
Тогда по условию задачи:
$F_1M' = a$,
и по теореме Пифагора
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ◄

★ *Отношение* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ *называется эксцентриситетом эллипса (гиперболы).*

Гипербола

Задача 2

Найти уравнение кривой, любая точка которой $M(x, y)$, удовлетворяет равенству $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$, где $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — координаты фокусов.

► *По условию:* $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.
После уничтожения радикалов получим: $x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$, *откуда при* $c^2 = a^2 + b^2$ *следует*

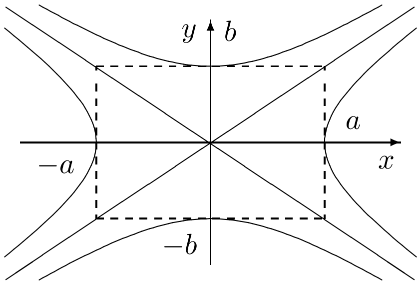
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{— каноническое уравнение гиперболы}$$

Действительно: $\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{a^2b^2} < 0$ ◄

Задача 3

Найти уравнение асимптот гиперболы.

★ *Асимптотой называется такая прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удалённой точке.*



► $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ll \infty$

$\Downarrow$ *если* $x, y \to \infty$

$y \simeq \pm\frac{b}{a}x$

$\boxed{y = \pm\dfrac{b}{a}x}$ — уравнение асимптот

Вопрос: Как построить асимптоты?

Ответ: Очевидно, что асимптоты являются продолжением диагоналей прямоугольника размером $2a \times 2b$. ◄

• *Построение гиперболы начинать с построения асимптот.*

Вопрос: Показать, что при заданных a *и* b *можно построить две гиперболы.*

Ответ: Неравенство $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *безусловно имеет два решения:* $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 < 0,\ \ \lambda_2 > 0$, *т.е. для второй гиперболы* $\lambda_1 = -1/a^2$ *и* $\lambda_2 = 1/b^2$.

Вопрос: Как расположены ветви этих гипербол?

Ответ: Чтобы определить, как относительно асимптот расположены ветви гиперболы, необходимо посмотреть какую ось они пересекают:

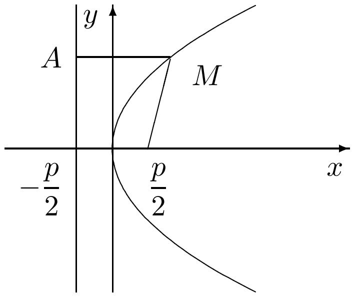
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \stackrel{y=0}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$$

Если бы $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *то* $y = 0$ — *исключено.*

Парабола

Задача 4

Найти уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от точки фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$ *и прямой* $x = -\frac{p}{2}$ *(директрисы).*



► *По условию* $AM = MF$, *т.е.*

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \;\Rightarrow$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2 = y^2 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad \text{— каноническое уравнение параболы}$$

Действительно: $\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ◄

Преобразование кривых второго порядка к каноническому виду

Пример 1 *Найти каноническое уравнение кривой*

$$x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 6 = 0,$$

угол её поворота и построить эту кривую.

▷ 1. *Чтобы избавиться от линейных по* x *и* y *слагаемых, совершим преобразование сдвига:* $\{x' = x - a,\ y' = y - b\}$.
После подстановки $x = x' + a,\ y = y' + b$ *получим*

$$(x' + a)^2 + (x' + a)(y' + b) + (y' + b)^2 - 4(x' + a) - 5(y' + b) + 6 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x' : & 2a + b - 4 = 0 \\ y' : & a + 2b - 5 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a = 1,\ b = 2.$$

В результате уравнение приобретает вид

$$x'^2 + x'y' + y'^2 = 1.$$

2. *Запишем матрицу квадратичной формы* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
и характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

3. *Решение характеристического уравнения*
$(1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; 1-\lambda = \pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{1}{2},\quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$
определяет каноническое уравнение:

$$\frac{1}{2}x''^2 + \frac{3}{2}y''^2 = 1.$$

4. *Решим уравнение на собственные векторы:*

$$(A - \lambda_i E)\overrightarrow{x}^{(i)} = 0$$

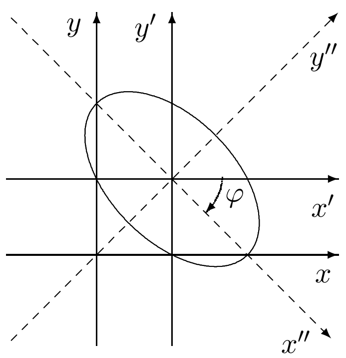
$$\overrightarrow{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{x}^{(2)} = c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

которые нормируем на единицу

$$\overrightarrow{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

5. *Запишем оператор поворота*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = R(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}.$$



Оператор поворота позволяет найти угол поворота дважды штрихованной системы координат относительно заданной.

Ответ: $\dfrac{x''^2}{2} + \dfrac{y''^2}{2/3} = 1\,,$

$\varphi = -45^0$ $\triangleleft$

Лекция 13. Поверхности второго порядка

Если кривые второго порядка задаются на плоскости, то поверхности второго порядка — в трёхмерном пространстве. Родственность этих геометрических объектов заключается в том, что их уравнения содержат квадратичную форму.

★ *Поверхностью второго порядка называется поверхность, описываемая в декартовой системе координат уравнением:*

$$\boxed{\left(\overrightarrow{x}, \mathbf{A}\,\overrightarrow{x}\right) + Ax + By + Cz - D = 0},$$

где $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = (3 \times 3)$ — матрица квадратичной формы.

Вопрос: Плоскость или поверхность в общем случае описываются функцией скольких переменных?

Ответ: Плоскость или поверхность в общем случае описываются функцией двух независимых переменных, поскольку для их описания достаточно одного уравнения в трёхмерном пространстве.

Поверхности вращения

★ *Поверхностью вращения называется такая поверхность, которая описывается уравнением инвариантным относительно преобразования поворота вокруг оси вращения.*

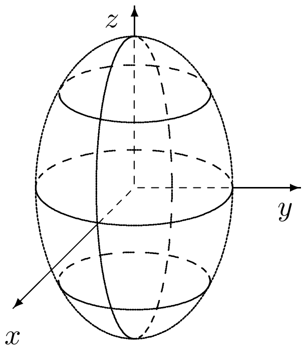
★ *Уравнение инвариантно относительно некоторого преобразования, если в результате этого преобразования оно остаётся неизменным.*

Вопрос: Какая кривая при повороте не меняет свой вид?
Ответ: Окружность.

$$x^2 + y^2 = x^{2'} + y^{2'}$$ — инвариант поворота

$$\boxed{F(x^2 + y^2, z) = 0}$$ — уравнение поверхности вращения

Эллипсоид вращения



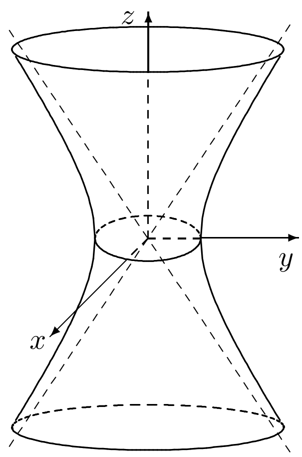
$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ — эллипс

Гиперболоид вращения

Гиперболоиды вращения бывают двух типов: однополостные и двуполостные.

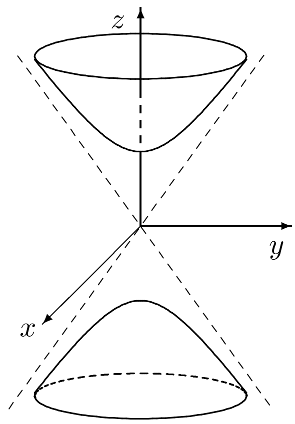


$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$ — однополостный

1. $z = 0 \Rightarrow$ *окружность:* $R = a$

2. $z > 0 \Rightarrow$ *окружность:* $R = a\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{c^2}}$

3. $x = 0 \Rightarrow$ *гипербола:* $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



$$\boxed{-\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$ — дву-полостный

1. $z=0 \quad \Rightarrow$ *нет решения*

2. $z>c \quad \Rightarrow$ *окружность:* $R=a\sqrt{\dfrac{z^2}{c^2}-1}$

3. $x=0 \quad \Rightarrow$ *гипербола:* $-\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Параболоид вращения

$$\boxed{x^2+y^2=2pz}$$

Цилиндрические поверхности

★ *Цилиндрической поверхностью называется такая поверхность, которая описывается уравнением, инвариантным относительно преобразования сдвига вдоль оси цилиндра.*

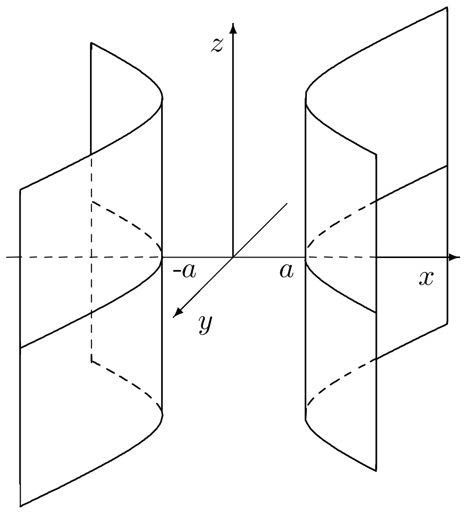
Вопрос: *Записать уравнение поверхности инвариантной относительно преобразования сдвига* $z \Rightarrow z-z_0$.

Ответ: $\boxed{F(x,y)=0}$ — уравнение цилиндрической поверхности

Вопрос: *Как выглядят уравнения параболического, эллиптического и гиперболического цилиндров.*

Ответ: *Эти уравнения тождественны уравнениям параболы, эллипса и гиперболы соответственно. Цилиндры эти уравнения описывают в трёхмерном пространстве.*

Гиперболический цилиндр

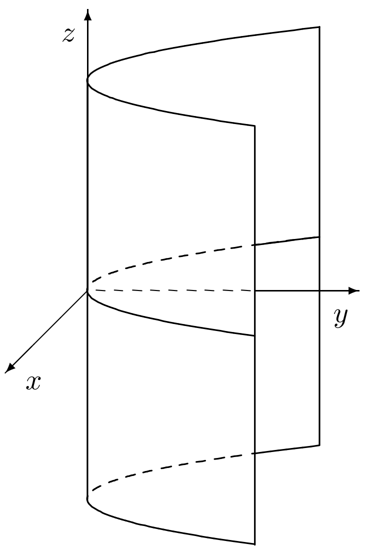


Вопрос: Изобразить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ответ: Множество точек, получаемое переносом гиперболы вдоль оси z, образует гиперболический цилиндр.

Параболический цилиндр



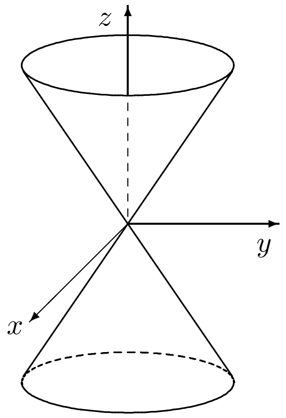
Вопрос: Записать уравнение изображенной поверхности.
Ответ: Поскольку сечение этой поверхности любой плоскостью $z = C$ представляет собой параболу, то эта поверхность описывается уравнением

$$y = 2px^2, \ p > 0,$$

инвариантным относительно преобразования сдвига $z \Rightarrow z - z_0$.

Коническая поверхность

★ *Конической поверхностью второго порядка будем называть такую поверхность, сечение которой плоскостью $x = 0$ представляет собой пару симметрично пересекающихся прямых.*



$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0}, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

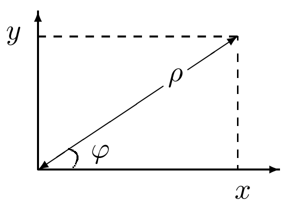
$$z = \pm\frac{c}{b}y \text{ — пересекающиеся прямые}$$

Полярная система координат

В полярной системе координат каждая точка задаётся двумя параметрами ρ и φ, где $\rho \in [0, \infty]$ — расстояние от точки до полюса, и $\varphi \in [0, 2\pi]$ — азимутальный угол от полярной оси до радиус-вектора точки. В трёхмерном пространстве полярная система координат, дополненная координатой z, называется цилиндрической системой координат.

Задача 1

Найти связь декартовой системы координат с полярной и наоборот.



► $x = \rho\cos\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$

$y = \rho\sin\varphi; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$ ◄