“Не ошибается тот,
кто ничего не делает,
хотя это и есть его основная ошибка.”

Алексей Толстой

Раздел 7

Интегральное исчисление функции нескольких переменных

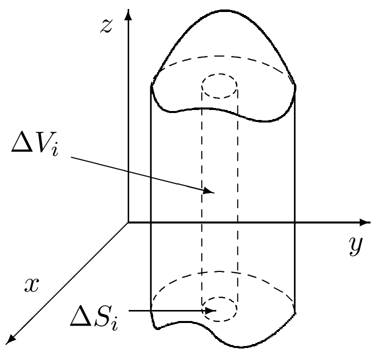
Лекция 49. Кратные интегралы

Интегрирование может проводиться не по одной, а по двум и более переменным; и такие интегралы называются кратными.

Задача 1

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D площади S. Найти объём тела, основанием которого служит область D на плоскости $z = 0$, боковая поверхность цилиндрическая, а сверху тело ограничено поверхностью $z = f(x, y)$.

► *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?



Ответ: Объём сколь угодно тонкого цилиндра

$$\Delta V_i = \Delta S_i f(x_i, y_i),$$

где ΔS_i — площадь основания, а $f(x_i, y_i)$ — высота цилиндра.

Вопрос: Что делать дальше?

Ответ: Запишем интегральную сумму:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

а затем возьмём её предел при стремлении максимального линейного размера $\Delta l_i = \sqrt{\Delta {x_i}^2 + \Delta {y_i}^2}$ площади основания i-того цилиндра к нулю

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \boxed{\lim_{\max\ \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)\, dS} \quad ◀$$

★ *Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральных сумм при стремлении максимального линейного размера площади основания i-того цилиндра к нулю.*

Свойства двойного интеграла

1. *Пусть $f(x, y) = Af_1(x, y) + Bf_2(x, y)$, тогда*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = A\iint\limits_D f_1(x, y)\, dS + B\iint\limits_D f_2(x, y)\, dS.$$

2. *Пусть область D разбита на две подобласти D_1 и D_2, т.е. $D = D_1 \cup D_2$, тогда*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

3. *Если подынтегральные функции удовлетворяют неравенству $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, тогда такому же неравенству удовлетворяют двойные интегралы*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,dS.$$

4. *Модуль двойного интеграла не больше двойного интеграла от модуля*

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dS\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,dS.$$

5. *Двойной интеграл от единицы равен площади области D*

$$\iint\limits_D dS = S.$$

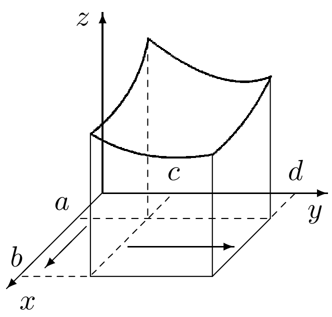
Вопрос: *Можете ли вы указать аналоги этих свойств?*

Ответ: *Приведённые свойства аналогичны свойствам определённого интеграла* (Лекция 27, Задача 4).

Выражение двойного интеграла через повторный

Задача 2

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D, которой является прямоугольник площади S. Выразить двойной интеграл через повторный, представляющий собой последовательно вычисляемые однократные определённые интегралы.



► $D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d. \end{cases}$

Вопрос: *Чему равен элемент площади в декартовой системе координат?*

Ответ: $dS = dxdy$.

Вопрос: *Выразите площадь прямоугольника через двойной интеграл и повторные.*

Ответ: *Поскольку площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон*

$$S = \iint\limits_D dS = (b-a)(d-c),$$

то, вспоминая формулу Ньютона-Лейбница, получим

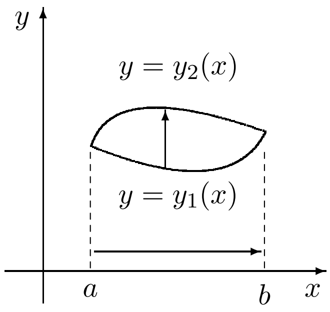
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy.$$

Очевидно, что те же пределы останутся, если подынтегральная функция отлична от единицы

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \quad ◄$$

Задача 3

Пусть функция $f(x,y)$ *определена и непрерывна в области* D, *которая представляет собой криволинейную трапецию площади* S. *Выразить двойной интеграл через повторный.*



► $D: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x). \end{cases}$

Вопрос: Выразите площадь криволинейной трапеции через двойной интеграл и повторный.

Ответ: Совершим переход от однократного интеграла (Задача 1 Лекция 31) *к повторному*

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \iint_D dS.$$

Можно показать, что те же пределы останутся, если подынтегральная функция отлична от единицы

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy} \quad ◄$$

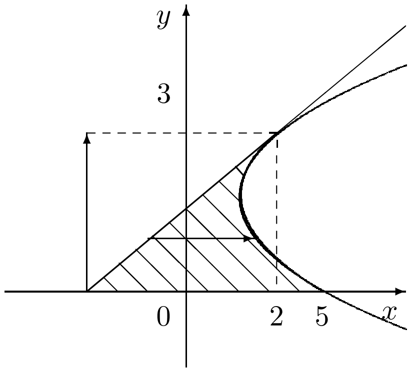
• *При нахождении пределов интегрирования полезно отмечать направление интегрирования стрелками, причём внешний интеграл всегда в постоянных пределах.*

Пример 1. *Вычислить площадь области D, если она ограничена кривой $(y-2)^2 = x - 1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью абсцисс.*

▷ *Вопрос: Как выглядет уравнение касательной?*

Ответ: Поскольку функция $y(x)$, соответствующая заданной кривой, неоднозначна, то в качестве функции будем брать $x(y)$

$$x - x_0 = x'(y_0)(y - y_0) \quad \Longrightarrow \quad x = 2y - 4.$$



Вопрос: *Интеграл от какой переменной возьмём в качестве внешнего?*

Ответ: *Интеграл по* y

$$S = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx,$$

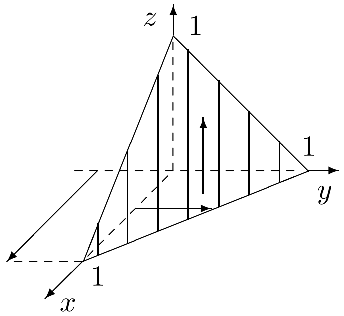
поскольку в противном случае пришлось бы вычислять три повторных интеграла.

• *Область интегрирования должна быть правильна, т.е. внутренняя стрелка может пересекать границу области только два раза.*

$$S = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{2y-4}^{y^2-4y+5} dx = \int\limits_0^3 [(y^2-4y+5)-(2y-4)]\,dy = 9 \quad \triangleleft$$

Пример 2. *Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле, если область интегрирования* D *ограничена поверхностями*

$$D: \begin{cases} x=0, & z=0, \\ y=0, & x+y+z=1. \end{cases}$$



$$\triangleright \quad \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz \quad \triangleleft$$

Лекция 50. Замена переменных в кратных интегралах

Замена переменных в кратных интегралах связана с переходом от одной системы координат к другой, и осуществляется с помощью определителя Якоби.

Задача 1

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D площади S. Записать двойной интеграл в полярной системе координат.

▶ *Вопрос: Представить элемент площади в декартовой системе координат в виде модуля векторного произведения.*

Ответ: Поскольку

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\, x + \overrightarrow{j}\, y + \overrightarrow{k}\, z,$$

то диффенциал радиуса-вектора равен

$$d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\, dx + \overrightarrow{j}\, dy + \overrightarrow{k}\, dz = d_x \overrightarrow{r} + d_y \overrightarrow{r} + d_z \overrightarrow{r}.$$

Следовательно

$$dS = \left| d_x \overrightarrow{r} \times d_y \overrightarrow{r} \right| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{matrix} \right\| = dxdy.$$

Вопрос: Представьте теперь элемент площади в полярной системе координат.

Ответ: Поскольку

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i}\, \rho \cos\varphi + \overrightarrow{j}\, \rho \sin\varphi + \overrightarrow{k}\, z,$$

то очевидно

$d_\rho \overrightarrow{r} = (\overrightarrow{i}\cos\varphi + \overrightarrow{j}\sin\varphi)d\rho,\quad d_\varphi \overrightarrow{r} = (-\overrightarrow{i}\sin\varphi + \overrightarrow{j}\cos\varphi)\rho d\varphi.$

Таким образом

$$dS = \left|d_\rho \overrightarrow{r} \times d_\varphi \overrightarrow{r}\right| = \left\|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{matrix}\right\| \rho d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

В результате

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 (о вычислении интеграла Пуассона)

Найти массу плоского бесконечного листа, если её плотность описывается распределением Гаусса

$$\sigma(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$

▶ *Вопрос: К вычислению какого интеграла сводится данная задача?*

Ответ: К вычислению интеграла Пуассона:

$$m = \iint\limits_D \sigma(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = J^2\,.$$

Вопрос: Что делать дальше?

Ответ: Вычислить интеграл в полярной системе координат

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,\rho d\rho = \pi \int\limits_0^{\infty} e^{-u}\,du = \pi = J^2\,. \quad \blacktriangleleft$$

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}} \quad \text{— интеграл Пуассона}$$

Задача 3

Преобразовать двойной интеграл от декартовой (x, y) к произвольной системе координат (u, v).

▶ *Вопрос: Представить элемент площади в произвольной системе координат.*

Ответ: Поскольку полный дифференциал $\overrightarrow{r}$ равен сумме частных дифференциалов

$$d\overrightarrow{r} = d_u\overrightarrow{r} + d_v\overrightarrow{r} = \left(\overrightarrow{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \overrightarrow{j}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\overrightarrow{i}\frac{\partial x}{\partial v} + \overrightarrow{j}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$$

то искомый дифференциал площади примет вид

$$dS = \left|d_u\overrightarrow{r} \times d_v\overrightarrow{r}\right| = \left\|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{matrix}\right\| dudv = I\,dudv,$$

где

$$\boxed{I = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\|} \quad \text{— модуль определителя Якоби.}$$

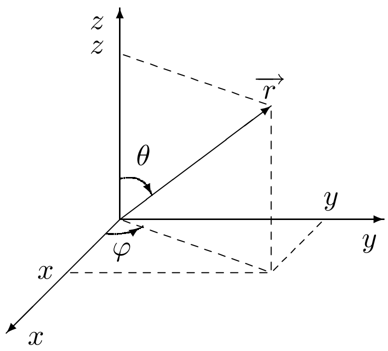
Следовательно

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\,I\,dudv} \quad ◀$$

- *В полярной системе координат определитель Якоби равен ρ.*

Задача 4

Записать тройной интеграл в сферической системе координат.



► *Вопрос: Выразить аналитически связь декартовой системы координат* (x, y, z) *со сферической* (r, θ, φ).

Ответ: Согласно рисунку

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Вопрос: Чему равен модуль определителя Якоби, описывающий связь тех же систем координат?

Ответ: Действуя согласно предыдущей задаче

$$I = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{matrix} \right\| = r^2\sin\theta$$

Следовательно, если при $(x, y, z) \Longrightarrow (r, \theta, \varphi)$ *подынтегральная функция* $f(x, y, z) \Longrightarrow g(r, \theta, \varphi)$, *то*

$$\boxed{\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{D'} g(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi} \quad ◄$$

Пример 1. *Показать, что объём шара определяется формулой* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ *(с помощью только что полученной формулы вы это сделайте за пару минут).*

Лекция 51. Криволинейные интегралы первого и второго рода

Если областью интегрирования является не отрезок прямой, а дуга кривой, то интеграл называют криволинейным.

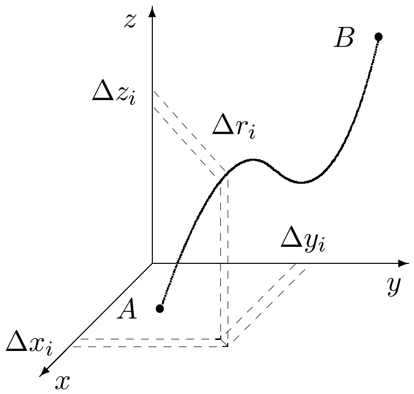
Криволинейные интегралы первого рода

Задача 1

Пусть вдоль дуги $\smile{AB}$ пространственной кривой L, описываемой радиусом-вектором

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i}\, x(t) + \overrightarrow{j}\, y(t) + \overrightarrow{k}\, z(t), \quad \textit{при} \;\; t_A \leqslant t \leqslant t_B,$$

распределены массы плотностью $f(x, y, z)$. Найти массу материальной нити, распределённую вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$.



► *Вопрос: Как в этом случае будет выглядеть интегральная сумма?*

Ответ: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta r_i$

где (см. лекцию 31)

$\Delta r_i = \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2 + \Delta z_i{}^2}.$

Предел данной интегральной суммы определяет криволинейный интеграл первого рода:

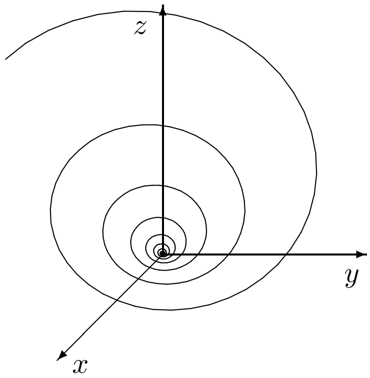
$$\boxed{m = \lim_{\max\ \Delta r_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta r_i = \int\limits_{\smile{AB}} f(x, y, z)\, dr}$$

Вопрос: А как вычислять такой интеграл?

Ответ: Нужно расписать дифференциал дуги

$$\boxed{m = \int\limits_{t_A}^{t_B} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt}. \quad ◀$$

Пример 1. *Вычислить массу дуги* $\breve{AB}$ *конической винтовой линии* $L:\ \{x = \sqrt{3}e^t\cos t,\ y = \sqrt{3}e^t \sin t,\ z = \sqrt{3}e^t\}$, *если плотность описывается функцией* e^t, *а* $A = (0,0,0)$, $B = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$.



▷ *Вопрос: Чему равны пределы интегрирования?*

Ответ: $(0,0,0) \implies t_A = -\infty$,

$$(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}) \implies t_B = 0.$$

В результате имеем

$$m = \int\limits_{-\infty}^{0} e^t\sqrt{3\cdot 3e^{2t}}\,dt = \frac{3}{2}. \quad ◁$$

Криволинейные интегралы второго рода

Задача 2

Пусть вдоль дуги $\breve{AB}$ *пространственной кривой* L, *описываемой радиусом-вектором*

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i}\,x(t) + \overrightarrow{j}\,y(t) + \overrightarrow{k}\,z(t), \quad \text{при } t_A \leqslant t \leqslant t_B,$$

на единичную массу действует силовое поле

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i}\,P(x,y,z) + \overrightarrow{j}\,Q(x,y,z) + \overrightarrow{k}\,R(x,y,z).$$

Найти работу, совершаемую силовым полем по перемещению единичной массы вдоль дуги $\breve{AB}$.

► *Вопрос:* *Чему равна работа, если перемещение тела происходит вдоль прямой, а сила постоянна?*

Ответ: *Скалярному произведению силы на перемещение.*

Вопрос: *Как бы вы подсчитали работу, если перемещение тела происходит не вдоль прямой, а сила не постоянна?*

Ответ: *В этом случае придётся составить интегральную сумму*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{F}(x_i, y_i, z_i)\Delta\overrightarrow{r_i},$$

а затем вычислить её предел.

$$\lim_{\max\ \Delta\overrightarrow{r_i}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{F}(x_i, y_i, z_i)\Delta\overrightarrow{r_i} = \int\limits_{\smile{AB}} \overrightarrow{F}(x, y, z)\, d\,\overrightarrow{r}\,.$$

Вопрос: *А как вычислять такой интеграл?*

Ответ: *Нужно расписать скалярное произведение векторной функции и дифференциала радиуса-вектора под знаком интеграла. В результате получим интеграл, который называют криволинейным интегралом второго рода:*

$$\boxed{\begin{aligned}\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + \int\limits_{\smile{AB}} Q\,dy + \int\limits_{\smile{AB}} R\,dz = \\ &= \int\limits_{t_A}^{t_B} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]\,dt\,.\end{aligned}}$$ ◄

Вопрос: *В чём вы видете отличие криволинейного интеграла второго рода от первого рода?*

Ответ: *В криволинейном интеграле второго рода интегрируется векторная, а не скалярная функция; а кроме того в него входит дифференциал радиуса-вектора, а не его модуль.*

Свойства криволинейных интегралов

1. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления интегрирования вдоль дуги*

$$\int\limits_{\smile \atop AB} F(x,y,z)\,dr = \int\limits_{\smile \atop BA} F(x,y,z)\,dr,$$

поскольку он зависит от модуля дифференциала дуги.

2. *Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления интегрирования вдоль дуги*

$$\int\limits_{\smile \atop AB} \overrightarrow{F}(x,y,z)\,d\overrightarrow{r} = -\int\limits_{\smile \atop BA} \overrightarrow{F}(x,y,z)\,d\overrightarrow{r},$$

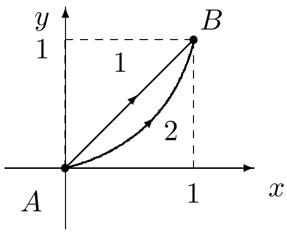
поскольку он зависит от вектора дифференциала дуги.

3. *Криволинейный интеграл равен сумме интегралов*

$$\int\limits_{\smile \atop AB} = \int\limits_{\smile \atop AC} + \int\limits_{\smile \atop CB},$$

если точка C лежит на дуге $\overset{\smile}{AB}$.

Пример 2. *Вычислить работу, совершаемую силовым полем $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i}\,x^2y + \overrightarrow{j}\,x^3/3$ по перемещению тела единичной массы из точки $A(0,0)$ в точку $B(1,1)$ двумя различными путями, по кривым:* 1. $y = x$, 2. $y = x^2$.



$\triangleright$ 1. $d\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dx$

$$\int\limits_{\smile \atop 1} = \int\limits_0^1 \frac{4}{3}x^3\,dx = \frac{1}{3};$$

2. $d\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dx^2$

$$\int\limits_{\smile \atop 2} = \int\limits_0^1 \frac{5}{3}x^4\,dx = \frac{1}{3} \quad \triangleleft$$

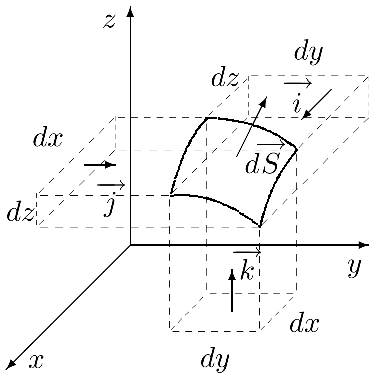
Лекция 52. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Если подынтегральная функция задана не на отрезке прямой, и не на дуге кривой, а на поверхности, то интеграл называют поверхностным.

Поверхностные интегралы первого рода

Задача 1

Пусть вдоль поверхности S, заданной функцией $z = f(x, y)$ и ограниченной областью D $(x, y \in D)$, распределены массы плотностью $\rho(x, y, z)$. Найти полную массу этой поверхности.



► *Вопрос: Чему равен вектор дифференциала поверхности в декартовой системе координат?*

Ответ: Поскольку дифференциал плоской площади равен $dxdy$, а нормальный единичный вектор её $\overrightarrow{k}$, то вектор дифференциала поверхности равен

$$d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{i}\,dydz + \overrightarrow{j}\,dxdz + \overrightarrow{k}\,dxdy.$$

Вопрос: Чему равен модуль дифференциала поверхности S в декартовой системе координат?

Ответ: Поскольку поверхность S определена $z = f(x, y)$, то

$$dS = |d\overrightarrow{S}| = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}dxdy.$$

Вопрос: Чему равна масса однородной пластинки плотности ρ и площади S?

Ответ: *Для однородной пластинки это произведение $\rho \cdot S$, а для неоднородной поверхности её масса равна поверхностному интегралу первого рода:*

$$\boxed{\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D \rho(x,y,z)\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}\,dxdy}\,. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, заключённой внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.*

$\triangleright$ *Вопрос:* *Какой функцией описывается поверхность цилиндра?*

Ответ: $y(x,z) = \pm\sqrt{Rx-x^2}$.

Вопрос: *Чему равны её частные производные?*

Ответ: $y'_x = \pm\dfrac{R/2-x}{\sqrt{Rx-x^2}}, \quad y'_z = 0.$

Вопрос: *Какими линиями ограничена область D?*

Ответ: *Область интегрирования определяется решением следующей системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^2+y^2=Rx, \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=\pm\sqrt{R^2-Rx}, \\ 0 \leqslant x \leqslant R. \end{cases}$$

Таким образом осталось вычислить двойной интеграл

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz = R\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx-x^2}} =$$

$$= 2R\sqrt{R}\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R^2. \quad \triangleleft$$

Поверхностные интегралы второго рода

Задача 2

Пусть через поверхность S, заданной функцией $F(x,y,z)=0$ и ограниченной плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0$, проходит поток жидкости единичной плотности со скоростью

$$\overrightarrow{v}(x,y,z)=\overrightarrow{i}P(x,y,z)+\overrightarrow{j}Q(x,y,z)+\overrightarrow{k}R(x,y,z).$$

Найти поток жидкости через эту поверхность.

• *Вектор дифференциала поверхности, определённый в предыдущей задаче, соответствует положительно ориентированной поверхности; для отрицательно ориентированной поверхности знак вектора дифференциала меняется на противоположный.*

► *Вопрос: Чему равен элемент потока?*

Ответ: Скалярному произведению вектора скорости на вектор дифференциала поверхности

$$\overrightarrow{v}(x,y,z)d\overrightarrow{S}=P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

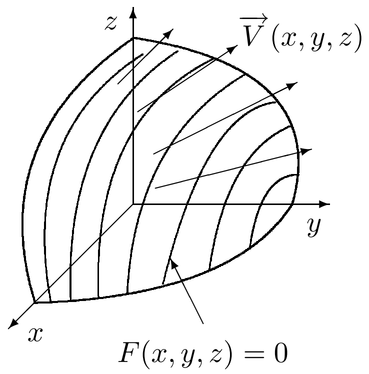
Весь поток равен поверхностному интегралу второго рода:

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_S \overrightarrow{v}(x,y,z)\,d\overrightarrow{S}=\\ =\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dxdz+R(x,y,z)\,dxdy.\end{gathered}}$$

Вопрос: Как вычислять этот интеграл?

Ответ: Поверхностный интеграл второго рода для не замкнутой поверхности сводится к трём двойным интегралам

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_S \overrightarrow{v}(x,y,z)\,d\overrightarrow{S}=\iint\limits_{D_x} P(x(y,z),y,z)\,dydz+\\ +\iint\limits_{D_y} Q(x,y(x,z),z)\,dxdz+\iint\limits_{D_z} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.\end{gathered}}$$



Переход от трёх переменным к двум переменным в каждом из двойных интегралов диктуется уравнением заданной поверхности $F(x,y,z)=0$, при этом границы области интегрирования:

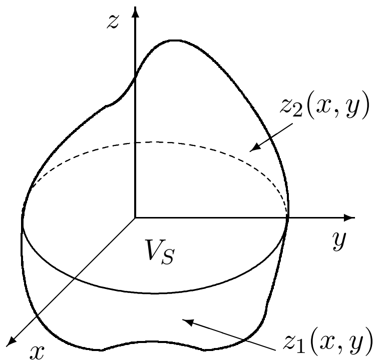
$D_x: \ F(0,y,z)=0, \ y=0, \ z=0;$

$D_y: \ F(x,0,z)=0, \ x=0, \ z=0;$

$D_z: \ F(x,y,0)=0, \ x=0, \ y=0.$

Пример 2. *Показать, что поток радиуса-вектора через замкнутую поверхность S, равен утроенному объёму, ограниченному этой поверхностью, т.е.*

$$\iint\limits_S \overrightarrow{r}\, d\overrightarrow{S} = \iint\limits_S z\,dxdy + x\,dydz + y\,dxdz = 3V_S.$$



$\triangleright$ *Если поверхности, ограничивающие объём V_S соответственно снизу и сверху определяются*

$$z=z_1(x,y) \text{ и } z=z_2(x,y),$$

тогда

$$\iint\limits_S z\,dxdy = \iint\limits_{D_{z+}} z_2(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_{z-}} z_1(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{z+}} [z_2(x,y)-z_1(x,y)]\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = V_S.$$

Совершенно аналогично можно показать, что второй и третий интегралы также равны объёму V_S (см. Лекцию 50*).* $\triangleleft$