“Каждому, кто хоть когда-нибудь изучал математические теории, знакомо то неприятное чувство, когда ... вдруг осознаёшь, что ровным счётом ничего не понял... .

Альберт Эйнштейн

Раздел 6

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Лекция 43. Частные производные

В отличии от функции одной переменной, функция двух переменных описывает не плоскую кривую, а поверхность в трёхмерном пространстве, в каждой точке которой можно провести множество касательных.

Функция нескольких переменных

★ *Пусть задано множество векторов* $\overrightarrow{x} \in R_n$, *и множество чисел* $z \in Z$, *и пусть по определённому закону* $\forall \overrightarrow{x} \in R_n \Longrightarrow z \in Z$, *тогда* R_n *— область определения функции, а*

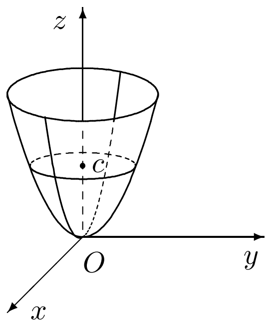
$\boxed{z = f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ — функция n переменных.

Вопрос: Как запишется функция двух переменных?

Ответ: Если переменные $x, y \in D$, *то* $\boxed{z = f(x, y)}$ — *функция двух переменных, а* D — *область определения функции.*

Пример 1. *Отобразить* $z = x^2 + y^2$ *и найти* D.

$\triangleright$ *Воспользуемся методом сечений*



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = y^2.$$

В пл. yOz — *парабола.*

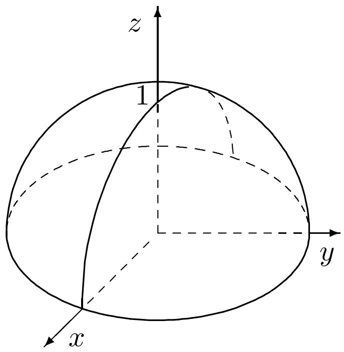
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = x^2.$$

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = C \end{cases} \Longrightarrow C = x^2 + y^2.$$

В пл. xCy — *окружность.*

Ответ: $D: \ x, y \in (-\infty, \infty)$, $z = x^2 + y^2$ — *параболоид вращения.* $\triangleleft$

Пример 2. *Отобразить* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *и найти* D.



$\triangleright$
$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = \sqrt{1 - y^2}.$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Ответ: $D: \ x, y \in [-1, 1]$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ — *полусфера.* $\triangleleft$

Предел функции нескольких переменных

★ *Число A является пределом функции $f(\overrightarrow{x})$ в точке $\overrightarrow{x^0}$, если функция определена в окрестности этой точки, за исключением, может быть, самой точки $\overrightarrow{x^0}$, и $\forall\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}| < \delta$ выполняется неравенство $|f(\overrightarrow{x}) - A| < \varepsilon$, и записывают*

$$\boxed{\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x^0}} f(\overrightarrow{x}) = A \quad \textit{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to x_1{}^0\\ x_2\to x_2{}^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n{}^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A}.$$

• *Предел существует, если он не зависит от пути устремления $\overrightarrow{x}$ к $\overrightarrow{x^0}$.*

Пример 3. *Вычислить предел $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$.*

▷ *Зададим путь устремления к точке $(0,0)$ по прямым $y = kx$, тогда*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \quad \text{— } \begin{array}{c}\textit{предел}\\ \textit{не существует}\end{array} \qquad \triangleleft$$

• *Предел суммы, частного и произведения функций n переменных равен сумме, частному и произведению пределов, если пределы этих функций существуют.*

Непрерывность функции

★ *Функция $f(\overrightarrow{x})$ непрерывна в точке $\overrightarrow{x^0}$, если*

$$\boxed{\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x^0}} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x^0})}.$$

Частное приращение и частная производная

★ *Частным приращением функции n переменных называется изменение функции при заданном приращении только одной переменной*

$$\boxed{\Delta_{x_i} f(\overrightarrow{x^0}) = f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}.$$

★ *Частной производной 1-го порядка функции n переменных называется предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{f'_{x_i}(\overrightarrow{x^0}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\overrightarrow{x^0})}{\Delta x_i} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_i}}.$$

Вопрос: Сколько различных частных производных 1-го порядка можно написать?

Ответ: Это число равно числу переменных функции.

Пример 4. *Вычислить производные* $z = \cos xy^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\triangleright \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin xy^2 \cdot y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin xy^2 \cdot 2xy + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \triangleleft$$

Частные производные высших порядков

★ *Частная производная от частной производной некоторой функции называется частной производной 2-го порядка*

$$\boxed{f''_{x_k x_i}(\overrightarrow{x^0}) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_i}}{\Delta x_k} = \frac{\partial^2 f(\overrightarrow{x^0})}{\partial x_k \partial x_i}}.$$

• *Частная производная 2-го порядка называется смешанной частной производной, если* $x_k \neq x_i$.

Пример 5. *Вычислить смешанную частную производную функции из* Примера 4.

$$\triangleright \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin xy^2 \cdot y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

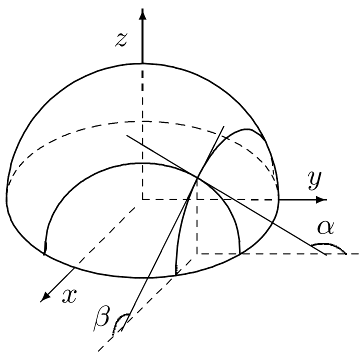
$$= -2y \sin xy^2 - 2xy^3 \cos xy^2 - xy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin xy^2 \cdot 2xy + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \triangleleft$$

• *Непрерывная смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования.*

Задача 1

Выяснить геометрический смысл частной производной, воспользовавшись сферической поверхностью (Пример 2).



► *Согласно определению частной производной*

$\Delta_x z \underset{x \to x_0}{\simeq} f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$,

а значит

$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$

определяет уравнение касательной в плоскости xy_0z, *где*

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - {x_0}^2 - {y_0}^2}}.$$

Таким образом частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ *равна тангенсу угла наклона касательной* $\operatorname{tg}\beta$ *в плоскости* xy_0z. *Аналогично показывается, что* $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$ *в плоскости* yx_0z. ◄

Лекция 44. Полный дифференциал

Для функции n переменных различают два вида дифференциалов: полный и частные.

Задача 1

Посредством частных приращений функции двух переменных выразить её полное приращение.

★ *Полным приращением функции нескольких переменных называется изменение функции при заданных приращениях всех переменных*

▶ $\Delta z = z - z_0 = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) + \Delta_x f(x_0, y_0) \quad ◀$$

Задача 2

Выразить полное приращение функции двух переменных через частные производные.

▶ *Согласно предыдущей лекции частные производные выражаются через частные приращения следующим образом*

$$\Delta_x f(x_0, y_0) \underset{\Delta x \to 0}{\simeq} f'_x(x_0, y_0)\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x_0 + \Delta x, y_0) \underset{\Delta y \to 0}{\simeq} f'_x(x_0 + \Delta x, y_0)\Delta y.$$

Если частная производная непрерывна, то

$$f'_x(x_0 + \Delta x, y_0) = f'_x(x_0, y_0) + o(1)\,.$$

Воспользовавшись результатом Задачи 1 *получим*

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y) + o(1)\Delta y \quad ◀$$

★ *Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется простейшая эквивалентная полного приращения этой функции*

$$\boxed{df(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy},$$

и он равен сумме частных дифференциалов

$$\boxed{dz=\partial_x z+\partial_y z}.$$

Задача 3

Найти уравнение касательной плоскости к поверхности, описываемой уравнением $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

▶ *Вопрос: Как запишется уравнение касательной прямой через дифференциал функции одной переменной?*

Ответ: $\Delta z=df(x_0)$.

Вопрос: Как запишутся уравнения касательных прямых через частные дифференциалы функции двух переменной?

Ответ: $\Delta z=\partial_x f(x_0,y_0)$ *в пл.*zy_0x, $\Delta z=\partial_y f(x_0,y_0)$ *в пл.*zx_0y.

★ *Касательной плоскостью к поверхности $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) называется такая плоскость, которая содержит множество касательных к этой точке.*

Следовательно, уравнение касательной плоскости, которая содержит множество касательных прямых, имеет вид:

$$\boxed{\Delta z=df(x_0,y_0)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$ ◀

Задача 4

Найти уравнение нормали к поверхности, описываемой уравнением $z = f(x, y)$, в точке (x_0, y_0).

★ *Нормалью к поверхности называется прямая, ортогональная касательной плоскости.*

► *Вопрос:* *Чему равен нормальный вектор к касательной плоскости?*

Ответ: *Согласно* Задаче 3 *он равен*

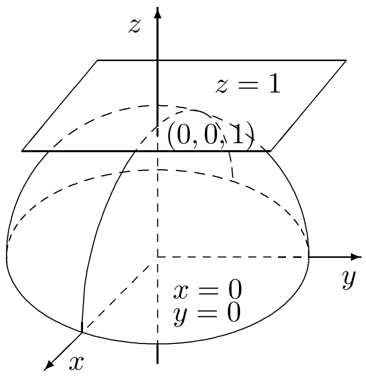
$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},\ -1 \right).$$

Вопрос: *Каким уравнением прямой следует воспользоваться?*

Ответ: *Каноническим уравнением, которое в данном случае имеет вид:*

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = -\frac{z - z_0}{1}} \quad \text{— уравнение нормали} \qquad ◄$$

Пример 1. *Найти уравнение касательной плоскости и нормали к сфере с $R = 1$ в точке $(0, 0, 1)$ и отобразить их.*



▷ *Из уравнения сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

следует

$$2x_0 + 2z_0 z'_x = 0 \implies z'_x = 0,$$
$$2y_0 + 2z_0 z'_y = 0 \implies z'_y = 0.$$

Значит уравнение нормали

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = -\frac{z - 1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Касательная плоскость: $0 \cdot x + 0 \cdot y - (z - 1) = 0 \Rightarrow z = 1$ ◁

Применение полного дифференциала для приближённого вычисления

Задача 5

Найти приближённое значение функции в точке (x, y) через значение функции в точке (x_0, y_0) с помощью полного дифференциала.

▶ *Согласно определения полного дифференциала*

$$z - z_0 = \Delta f(x_0, y_0) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\simeq} df(x_0, y_0).$$

Отсюда

$$f(x, y) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\simeq} f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Окончательно получим

$$\boxed{f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)} \blacktriangleleft$$

Пример 2. *Вычислить:* $(1.02)^{3.04}$.

▷ 1. *Сопоставим вычисляемому выражению функцию*

$$f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}\,.$$

2. *Выберем значения* x_0 *и* y_0

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1, & y_0 = 3, & z_0 = 1, \\ \Delta x = 0.02, & \Delta y = 0.04. & \end{array}$$

3. *Вычислим частные производные*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = yx^{y-1}\Big|_{(1,3)} = 3 \cdot 1^2 = 3\,,$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x\Big|_{(1,3)} = 0\,.$$

4. *Согласно формуле:* $z \approx 1 + 3 \cdot 0.02 + 0 \cdot 0.04 = 1.06.$ ◁

Лекция 45. Дифференциальные операторы

На этой лекции мы познакомимся с несколькими важными понятиями функции нескольких переменных: градиентом, дивергенцией, ротором.

Производная по направлению

★ *Производной по направлению называется выражение следующего вида*

$$\boxed{\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial \overrightarrow{n}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{n})-f(\overrightarrow{x})}{\varepsilon},} \qquad (*)$$

где $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ *— направляющий единичный вектор (см.* Лекцию 9*), а* $\overrightarrow{x} = (x,\ y,\ z)$ *— радиус-вектор точки в трёхмерном пространстве.*

Задача 1

Показать, что производная по направлению удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\cos\gamma,$$

если функция $f(\overrightarrow{x})$ *имеет непрерывные частные производные.*

► *Согласно определению дифференциала*

$$f(\overrightarrow{x}+\Delta\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{x}) = df(\overrightarrow{x}) + o(\Delta\overrightarrow{x}) =$$

$$= \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}dy + \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}dz + o(\Delta \overrightarrow{x}).$$

Поскольку в данном случае

$$\Delta \overrightarrow{x} = \varepsilon \overrightarrow{n} \iff (dx,\ dy,\ dz) = (\varepsilon \cos\alpha,\ \varepsilon\cos\beta,\ \varepsilon\cos\gamma),$$

то обращаясь к определению $(*)$, *получим*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}\varepsilon\cos\alpha + \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\varepsilon\cos\beta + \dfrac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\varepsilon\cos\gamma + o(\Delta\overrightarrow{x})}{\varepsilon} =$$

$$= \boxed{\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2

Представить производную по направлению в виде скалярного произведения двух векторов.

► *Вопрос: Как выглядит скалярное произведение двух векторов?*

Ответ: $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

Очевидно, что производная по направлению представляет собой скалярное произведение двух векторов, один из которых направляющий единичный вектор $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, *а другой образован из частных производных* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ *и имеет специальное обозначение* $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$*:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\overrightarrow{n}} \quad \blacktriangleleft$$

★ *Градиентом функции называется вектор*

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \vec{\nabla} f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}\,,}$$

в который входит дифференциальный оператор

$$\boxed{\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}} \text{ — оператор набла}$$

Вопрос: *Записать скалярное произведение операторов набла.*

Ответ: $$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \text{ — оператор Лапласа}$$

Задача 3

Показать, что $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$ *определяет максимальную скорость изменения функции как по величине, так и по направлению.*

★ *Производная по направлению определяет скорость изменения функции в направлении вектора* $\vec{n}$.

▶ *Воспользуемся решением* Задачи 2

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\vec{n} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cos\varphi = \left\{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi\right\} =$$

$$= \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right|\cos\varphi.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right)_{\max} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| \quad \textit{при} \quad \varphi = 0 \quad ◀$$

Пример 1. *Вычислить в точке $A(-1,0,2)$ производную функции $f(\overrightarrow{x}) = x+xy+xyz$ по направлению $\overrightarrow{n} = (1,\ 2,\ 3)$, а также градиент функции и его модуль.*

$$\triangleright\quad 1.\quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = 1+y+yz\Big|_A = 1\\ &\frac{\partial f}{\partial y} = x+xz\Big|_A = -3\\ &\frac{\partial f}{\partial z} = xy\Big|_A = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \begin{pmatrix} 1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}\\ &\left|\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right| = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$2.\ \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = (1\ \ -3\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{-5}{\sqrt{14}} \quad \triangleleft$$

Дивергенция и ротор

В предыдущем параграфе мы рассмотрели, как оператор набла действует на скалярную функцию. Оператор набла может действовать и на векторную функцию.

Вопрос: Составить простейшие комбинации оператора набла и векторной функции.

Ответ: Скалярное произведение:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{\nabla},\overrightarrow{W}\right) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \operatorname{div}\overrightarrow{W}} \text{ — дивергенция}$$

Векторное произведение:

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{W} = \left[\overrightarrow{\nabla},\overrightarrow{W}\right] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\overrightarrow{W}} \text{ — ротор}$$

Частные производные неявно заданных функций

Задача 4

Пусть $F(x,y,z)=0$. *Найти:* $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

▶ *Очевидно, что*

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0\,.$$

При вычислении частных производных по определению дифференциалы всех переменных кроме двух рассматриваемых полагаются равными нулю. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad ◀$$

Полная производная сложной функции

Задача 5

Найти $\dfrac{df}{dt}$, *если функция* $f(x,y,z)$ — *сложная функция, причём* $x=x(t), \ y=y(t), \ z=z(t)$.

▶ *Для решения задачи достаточно выписать полный дифференциал функции и поделить его на дифференциал аргумента, тогда*

$$\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}} \quad ◀$$

Пример 2. *Самостоятельно показать, что* $f(x,y)=\operatorname{arctg}(y/x)$ *удовлетворяет уравнению Лапласа:*

$$\boxed{\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0}\,.$$

Лекция 46. Безусловный экстремум

Для функции n переменных, в отличие от функции одной переменной, различают два вида экстремумов: безусловный и условный.

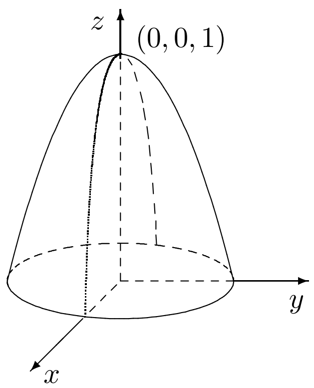
★ *Точка* $\overrightarrow{x^0}$ *называется точкой локального максимума или минимума функции* $f(\overrightarrow{x})$, *если в* δ*-окрестности этой точки функция непрерывна и удовлетворяет неравенству:*

$$\text{или}\quad \begin{array}{ll} f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x^0}) & \text{— max} \\ f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x^0}) & \text{— min} \end{array} \quad \text{при} \quad \begin{array}{c} \left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right| < \delta \\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x^0} \end{array}$$

★ *Локальный максимум или минимум функции* $f(\overrightarrow{x})$ *называют локальным безусловным экстремумом.*

• *Определение безусловного экстремума по сути совпадает с определением экстремума функции одной переменной.*

Пример 1. *Найти экстремум функции* $z = 1 - x^2 - y^2$ *путём построения её графика.*



$$\triangleright \quad \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z = 1 - x^2.$$

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z = 1 - y^2.$$

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Ответ: $(0, 0, 1)$ — max. $\triangleleft$

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Задача 1

Пусть функция $f(\overrightarrow{x})$ непрерывна и сколь угодное число раз дифференцируема в области D. Найти эквивалентную приращения функции в точке $\overrightarrow{x^0} \in D$ в виде многочлена n-ой степени.

► *Согласно* Лекции 21

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + o\left((x - x_0)^n\right) =$$

$$= df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Очевидно следующее обобщение этой формулы для функции нескольких переменных

$$\boxed{\begin{gathered} f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\overrightarrow{x^0})}{k!} + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^n\right) = \\ = df(\overrightarrow{x^0}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overrightarrow{x^0}) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^n\right) \end{gathered}},$$

куда входят полные дифференциалы. Полный дифференциал первого порядка для функции двух переменных был получен нами в Лекции 44

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy.$$

Вопрос: Как запишется для функции двух переменных полный дифференциал второго порядка?

Ответ: Полный дифференциал второго порядка определяется как дифференциал дифференциала

$$d^2 f = d(df) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy,$$

и, как легко видеть, равен

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}. \quad ◀$$

Необходимое условие экстремума

Задача 2

Получить необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

▶ *Для определенности положим, что в точке* (x_0, y_0) *имеет место максимум* $f(\overrightarrow{x})$. *Тогда из определения экстремума и приращения функции следует*

$$\left.\begin{array}{l} f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) < 0 \\ f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = df(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow df(\overrightarrow{x^0}) \leqslant 0.$$

Поскольку в δ*-окрестности точки* (x_0, y_0) *знаки* dx *и* dy *любые, то требуемое неравенство может выполняться только при*

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0} \quad \text{— необходимое условие экстремума}$$

★ *Точка, в которой все частные производные 1-го порядка равны нулю, называется стационарной.*

Достаточное условие экстремума

Задача 3

Определить на языке дифференциалов достаточное условие экстремума функции.

▶ *В окрестности стационарной точки формула Тейлора*

$$f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x^0}) = \underbrace{df(\overrightarrow{x^0})}_{=0} + \frac{1}{2!} d^2 f(\overrightarrow{x^0}) + o\left(\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x^0}\right|^2\right)$$

приводит к следующему выводу:

если $d^2 f(\overrightarrow{x^0}) > 0$, *то* $f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x^0})$	—	$\overset{+}{\smile}$ min	*если* $d^2 f(\overrightarrow{x^0}) < 0$, *то* $f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x^0})$	—	$\underset{-}{\frown}$ max ◀

• *Стационарная точка является точкой экстремума, если в её окрестности дифференциал второго порядка знакопостоянен.*

• *Если дифференциал второго порядка в стационарной точке больше нуля, то имеет место минимум, а если меньше нуля, то максимум.*

• *Мнемоническое правило: если плюс — котелок наполняется, если минус — опустошается.*

Задача 4

Выяснить, при каких условиях дифференциал второго порядка сохраняет свой знак независимо от знака dx и dy.

▶ *Перепишем дифференциал второго порядка*

$$d^2 f(\overrightarrow{x^0}) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{a} dx^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{b} dxdy + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{c} dy^2$$

с новой переменной $\xi = dx/dy$ в следующем виде

$$d^2 f(\overrightarrow{x^0}) = dy^2 \Big(a\xi^2 + b\xi + c\Big).$$

Вопрос: При каком условии квадратный трёхчлен имеет постоянный знак?

Ответ: Если дискриминант меньше нуля

$$\boxed{D = b^2 - 4ac < 0} \quad \text{— достаточное условие экстремума}$$

Вопрос: Как определить имеет место максимум или минимум?

Ответ: Знак дифференциала второго порядка, если дискриминант меньше нуля, определяется знаком a:

$$\boxed{a < 0 \ \text{—}\ \max, \ \ a > 0 \ \text{—}\ \min}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 2. *Исследовать на экстремум* $z = 1 - x^2 - y^2$.

$\triangleright$ 1. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -2x = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ — } \textit{стационарная точка.}$$

2. $$a = -2,\ b = 0,\ c = -2 \ \Rightarrow \begin{array}{c} D = -16 < 0, \\ a = -2 < 0 \end{array} \ \Rightarrow \begin{array}{c} (0,0,1) \\ \max \end{array} \quad \triangleleft$$

Пример 3. *Найти экстремум* $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

$\triangleright$ 1. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 3, \\ x + 2y = 6. \end{array}\right.$$

Нахождение стационарной точки сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \Longrightarrow$$

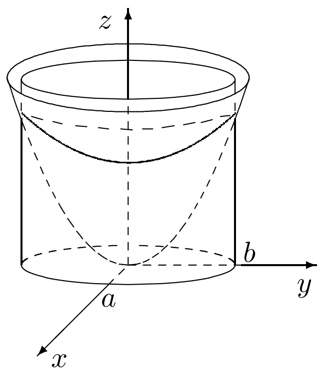
$x = \Delta_x/\Delta = 0, \ \ y = \Delta_y/\Delta = 3 \Rightarrow \ (0,3)$ — *стационарная точка.*

2. $$\begin{array}{l} a = z''_{xx} = 2, \\ b = 2z''_{xy} = 2, \\ c = z''_{yy} = 2 \end{array} \ \Longrightarrow \ \begin{array}{c} D = -12 < 0, \\ a = 2 > 0 \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} (0,3,-9) \\ \min \end{array} \quad \triangleleft$$

Лекция 47. Условный экстремум

Всякая деятельность или движение предопределены условиями их протекания. Эта лекция даст ключ к решению таких задач как распределения тока в цепи или получение максимальной прибыли предприятием.

Пример 1. *Найти графически экстремальные точки функции $z = x^2 + y^2$, при условии, что эти точки удовлетворяют уравнению: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(b > a)$.*



$\triangleright$ *Вопрос: На какой кривой будут лежать экстремальные точки?*

Ответ: Эта кривая образуется пересечением двух заданных поверхностей: параболоида вращения и эллиптического цилиндра, и описывается алгебраической системой заданных нелинейных уравнений.

Очевидно, что точки максимума $\left(0, \pm b, b^2\right)$ лежат в плоскости yOz, а в плоскости xOz лежат точки минимума $\left(\pm a, 0, a^2\right)$. $\triangleleft$

★ *Точка $\overrightarrow{x_0}$ называется точкой условного экстремума непрерывной функции $f(\overrightarrow{x})$, если выполняется*

$$\boxed{\text{или}\quad \begin{array}{lcl} f(\overrightarrow{x}) < f(\overrightarrow{x_0}) & — & \max \\ f(\overrightarrow{x}) > f(\overrightarrow{x_0}) & — & \min \end{array} \quad \text{при} \quad \begin{array}{c} \left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\right| < \delta \\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x_0} \end{array}}$$

при этом $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x_0}$ удовлетворяют уравнениям связи

$$\boxed{\Phi_i(\overrightarrow{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}.}$$

Необходимое и достаточное условия условного экстремума

Условным экстремумом функции $f(x,y)$ является экстремум этой функции при заданном уравнении связи $\Phi(x,y)=0$.
Для нахождения условного экстремума вводится

$$\boxed{L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\Phi(x,y)} \quad \text{— функция Лагранжа}$$

где λ — множитель Лагранжа, *а затем её исследуют на безусловный экстремум.*

Задача 1

Записать необходимое и достаточное условия для функции Лагранжа.

▶ *Необходимое условие:*

$$\boxed{dL(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \implies \frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0}.$$

Достаточное условие:

$$\boxed{d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0 \ \text{—}\ \min, \quad d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0 \ \text{—}\ \max}. \quad ◀$$

• *Следует иметь в виду, что дифференциалы переменных dx и dy в $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ зависимы, и эта зависимость диктуется уравнением связи.*

• *Поскольку λ не является обычной переменной, то при определении знака $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ величины $d\lambda$ не учитываются, т.е. полагается*

$$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2.$$

Пример 2. *Найти аналитически точки условного экстремума для* Примера 1.

$\triangleright$ *Функция Лагранжа, для нашего примера, запишется следующим образом*

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

1. *Согласно необходимому условию полагаем*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Нахождение стационарных точек сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

a. *Пусть* $x \neq 0$, *тогда*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -a^2 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm a \end{aligned} \right\}$$

первая пара стационарных точек

b. *Пусть* $y \neq 0$, *тогда*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -b^2 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm b \end{aligned} \right\}$$

вторая пара стационарных точек

Являются ли найденные стационарные точки точками экстремума позволяет определить достаточное условие.

2. *Вычисление производных второго порядка*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right), \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right),$$

позволяет выразить дифференциал второго порядка в виде

$$d^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2.$$

Для первой пары стационарных точек:

$$d^2 L(\pm a, 0, -a^2) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2 > 0 \ \text{—} \ \min.$$

Для второй пары стационарных точек:

$$d^2 L(0, \pm b, -b^2) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 < 0 \ \text{—} \ \max. \quad \lhd$$

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, необходимо:

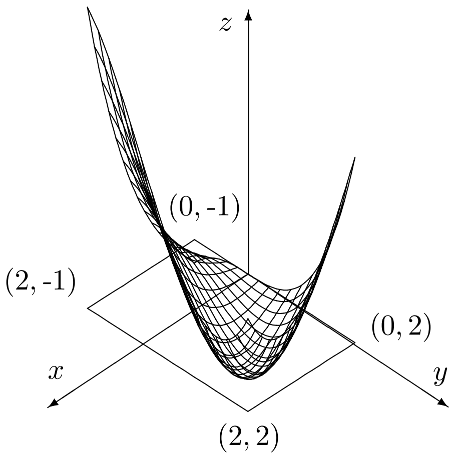
1. *Найти стационарные точки в этой области и вычислить в них значения функции.*
2. *Найти наибольшие и наименьшие значения функции на границах области.*
3. *Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.*

Пример 3. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $D: \ x \in [0, 2], \ y \in [-1, 2]$.*

$\rhd$ 1.
$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (0, 0) \Rightarrow z_1 = 0, \\ (1, 1) \Rightarrow z_2 = -1. \end{array}$$

Вопрос: Что представляют из себя границы области D и сколько их?

Ответ: Область D — это прямоугольник и границами его являются четыре отрезка.



2а. $x = 0$, *тогда*

$z = y^3$, *где* $y \in [-1, 2]$.

$\dfrac{dz}{dy} = 3y^2 = 0 \Rightarrow$ *снова* z_1.

На концах отрезка $[-1, 2]$:

$z\Big|_{(0,-1)} = -1, \; z\Big|_{(0,2)} = 8.$

2б. $y = 2$, *тогда*

$z = x^3 - 6x + 8$, *где* $x \in [0, 2]$.

$\dfrac{dz}{dx} = 3x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow$

$x = +\sqrt{2} \in [0, 2], \; z_3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = -4\sqrt{2} + 8; \quad z\Big|_{(2,2)} = 4.$

2в. $x = 2$, *тогда* $z = y^3 - 6y + 8$, *где* $y \in [-1, 2]$.

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 - 6 = 0 \Longrightarrow y = +\sqrt{2} \in [-1, 2].$$

$$z_4 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = -4\sqrt{2} + 8; \quad z\Big|_{(2,-1)} = 13.$$

2г. $y = -1$, *тогда* $z = x^3 + 3x - 1$, *где* $x \in [0, 2]$.

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow \text{ нет корней.}$$

На концах отрезка $x \in [0, 2]$ *все значения* z *уже вычислены.*

3. *Ответ:* $(1, 1, -1)$ *и* $(0, -1, -1)$ — *наименьшее;*
$(2, -1, 13)$ — *наибольшее.* ◁

Лекция 48. Условный экстремум в физике и экономике

Большое число задач из самых различных областей знания сводится к нахождению условного экстремума.

Задача 1

Дана некоторая система n проводников, каждый из которых имеет своё сопротивление R_i ($R_1 \neq R_2 \neq \cdots \neq R_n$). Требуется найти распределение токов в этой системе, т.е. I_i, если известно, что сумма этих токов постоянна.

▶ *Вопрос:* Какое отношение данная задача имеет к условному экстремуму?

Ответ: В этой задаче имеется следующее уравнение связи:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = I = \mathrm{const}\,.$$

Вопрос: Согласен, но экстремум какой функции вы будете искать?

Ответ: В природе существует принцип наименьшего действия. Применительно к данной задаче он будет выражаться в том, что токи в цепи распределятся таким образом, чтобы количество выделяемого тепла было минимальным. Из школьного курса физики известно, что количество тепла, выделяемого в n проводниках определяется формулой

$$Q = \sum_{i=1}^{n} {I_i}^2 R_i\,.$$

Вопрос: Что вы намерены делать дальше?

Ответ: Запишем функцию Лагранжа

$$L(I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n,\ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} {I_i}^2 R_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} I_i - I \right),$$

и исследуем её на экстремум.

$$1.\quad \begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial I_i} = 2I_iR_i - \lambda = 0,\\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} I_i - I = 0. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} I_i = -\frac{\lambda}{2R_i},\ \sum_{i=1}^{n} I_i = I \\ \text{стационарная точка} \end{gathered}$$

$$2.\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 L}{\partial {I_i}^2} = 2R_i > 0,\\ &\frac{\partial^2 L}{\partial I_i \partial I_k} = 0,\ \text{при } i \neq k. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} d^2L = \sum_{i=1}^{n} 2R_i d{I_i}^2 > 0 \\ \text{минимум} \end{gathered}$$

Ответ: Токи в проводниках распределятся следующим образом:

$$\boxed{\begin{gathered} I_1R_1 = I_2R_2 = \cdots = I_nR_n\,, \\ \text{при}\ \ I_1 + I_2 + \cdots + I_n = I\,. \end{gathered}} \quad \blacktriangleleft$$

• *Найденное нами распределение токов известно в электротехнике как закон Киргофа для параллельного соединения проводников, который был получен им экспериментально.*

Задача 2

Фирма решила ежемесячно ассигновать сто тысяч доларов на производство некоторой продукции. Пусть средняя заработная плата по фирме 2000\$, а стоимость единицы сырья — 1000\$. Требуется определить какое количество рабочих K и какое количество сырья C необходимо приобрести фирме для получения наибольшего объёма продукции Q, если известно, что он им прямо пропорционален, с коэффициентом пропорциональности равным 5.

▶ *Вопрос: Какую математическую задачу вы будете решать?*

Ответ: *Это вновь задача об условном экстремуме*

$$\underbrace{Q(K,C) = 5KC, \quad 2000K + 1000C = 100000.}$$

$$\Downarrow$$

$$L = 5KC + \lambda(2K + C - 100)$$

• *При составлении функции Лагранжа в уравнении связи был опущен общий множитель.*

1. $$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial K} = 5C + 2\lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial C} = 5K + \lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2K + C - 100 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} \quad 5C \ +2\lambda \ = 0, \\ 5K \qquad\quad +\lambda \ = 0, \\ 2K \ +C \qquad\ = 100. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20;$$

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 100 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 500; \qquad \Delta_C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 100 & 0 \end{vmatrix} = 1000;$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 100 \end{vmatrix} = -2500;$$

Стационарная точка: $K = 25$, $C = 50$, $\lambda = -125$.

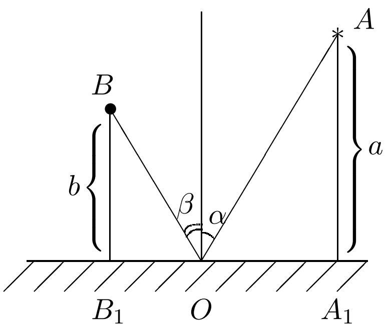
2. $$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial C^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial C} = 5 \ \Rightarrow \ d^2L = 10dKdC.$$

Поскольку $2dK = -dC$, *то* $d^2L = -20dK^2 < 0$ — max.

Ответ: 25 *рабочих и* 50 *единиц сырья.* ◂

Задача 3

Пусть даны источник света и наблюдатель, которые расположены соответственно на расстоянии a и b от зеркальной поверхности. Найти соотношение между углом падения α и углом отражения β луча света, если известно, что луч движется по кратчайшему расстоянию.



► *Вопрос: Каковы уравнения траектории,связи и Лагранжа?*

Ответ: $AO + OB = f(\alpha, \beta) = \dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\cos\beta}$,

$$A_1B_1 = a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = c = \text{const},$$

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \lambda(a\cos\alpha + b\cos\beta - c).$$

1. $$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{a\lambda}{\cos^2\alpha} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{b\sin\beta}{\cos^2\beta} + \frac{b\lambda}{\cos^2\beta} = 0, \quad \Longrightarrow \quad -\lambda = \sin\alpha = \sin\beta$$
стационарная точка
$$\frac{\partial L}{\partial\lambda} = a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta - c = 0.$$

2. $$\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2} = \frac{a}{\cos\alpha} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2} = \frac{b}{\cos\beta} > 0, \quad \Longrightarrow \quad d^2L = \frac{a}{\cos\alpha}d^2\alpha + \frac{b}{\cos\beta}d^2\beta > 0$$
минимум
$$\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.$$

Ответ: Угол падения равен углу отражения: $\alpha = \beta$ — *это известный в оптике закон Снеллиуса.* ◄