*“В математике логика называется анализом, анализ же значит разделение, рассечение.”*
*Анри Пуанкаре*

Раздел 2

# Введение в математический анализ

## Лекция 14. Комплексные числа и их свойства

*Из этой лекции вам станет ясно, что не всякое школьное утверждение является абсолютной истиной. В частности, если дискриминант меньше нуля, то квадратное уравнение имеет решения, правда, для этого потребуется выйти из множества действительных чисел.*

Задача 1

*Решить уравнение:*

$$\begin{aligned} z^2 &= 1; \\ \blacktriangleright \quad z^2 - 1 &= 0; \\ (z-1)(z+1) &= 0; \\ z_{1,2} &= \pm 1 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

*Вопрос:* Что вы можете сказать о полученных числах и какие ещё числа вы знаете?

*Ответ: Это вещественные, рациональные, целые числа. Множество вещественных чисел, помимо рациональных, включает в себя иррациональные числа, которые, в отличие от рациональных, не представимы периодической бесконечной десятичной дробью.*

### Задача 2

*Решить уравнение:*

$$\begin{aligned} z^3 &= 1; \\ \blacktriangleright \quad z^3 - 1 &= 0; \\ (z-1)(z^2+z+1) &= 0; \\ z_1 = 1, \quad z^2+z+1 &= 0; \end{aligned}$$

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 *привела нас к понятию мнимой единицы:*

$$\boxed{\mathrm{i} = \sqrt{-1}}\,.$$

★ *Комплексным числом называется выражение следующего вида:*

$$\boxed{z = a + \mathrm{i}b = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, z} \quad \text{— алгебраическая форма}$$

*где $a$ или $\mathrm{Re}\, z$ – действительная, а $b$ или $\mathrm{Im}\, z$ – мнимая части комплексного числа.*

★ *Комплексно сопряженным числом называется число, отличающиеся от исходного только знаком (знаками) перед мнимой единицей (единицами)*

$$z^* = a - \mathrm{i}b\,.$$

• *При комплексном сопряжении меняются знаки перед всеми мнимыми единицами, входящими в это комплексное число.*

## Свойства комплексных чисел

1. *Два комплексных числа равны, если их действительные и мнимые части соответсвенно равны*
$$z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2\,.$$

2. *Сумма комплексных чисел есть комплексное число*
$$z_1 + z_2 = z_3 \quad \Longrightarrow \quad a_1 + a_2 = a_3, \quad b_1 + b_2 = b_3\,.$$

3. *Произведение комплексных чисел есть комплексное число*
$$z_1 z_2 = z_3\,.$$
*Действительно*
$$(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2) = a_1a_2 + \mathrm{i}^2 b_1b_2 + \mathrm{i}a_1b_2 + +\mathrm{i}a_2b_1 =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{i}(a_1b_2 + b_1a_2),$$
*где используется*
$$\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1, \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1.$$

4. *Частное комплексных чисел равно комплексному числу*
$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \quad \Longrightarrow \quad z_3 = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}\,.$$

5. *Модуль комплексного числа определяется, как квадратный корень из произведения комплексного числа на его комплексно сопряжённое.*
$$zz^* = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$
$$\boxed{|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

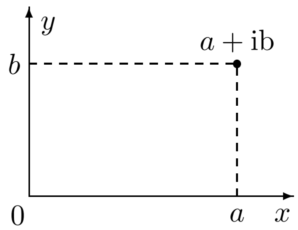
**Пример 1.** *Найти модули* $z_{2,3}$ из Задачи 2.

$$\triangleright \quad z_{2,3} \;=\; -\tfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$|z_{2,3}| \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1 \quad \triangleleft$$

## Комплексное число в декартовой и полярной системах координат

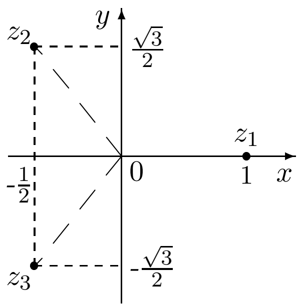
### Задача 3

*Каков геометрический образ комплексного числа $z = a + \mathrm{i}b$?*




► *Пара чисел — это точка на плоскости. Её отображение в декартовой системе координат для $z = x + \mathrm{i}y$, где $x$ и $y$ — координаты комплексного числа на комплексной плоскости, представлено на рисунке.* ◄

**Пример 2.** *Отобразить на декартовой плоскости решение уравнения из* Задачи 2.




▷ $z_1 = 1\,, \quad z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$

$x_1 = 1\,, \quad x_{2,3} = -\frac{1}{2}\,,$

$y_1 = 0\,, \quad y_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$ ◁

### Задача 4

*Выразить $x$ и $y$ через модуль комплексного числа и угол $\varphi$ и наоборот.*

► *Используя связь декартовой и полярной систем координат* (Лекция 13. Задача 1), *запишем:*

$$x = |z|\cos\varphi\,, \qquad y = |z|\sin\varphi\,,$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} y/x\,.$$ ◄

- $\boxed{z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}$ — тригонометрическая форма

Задача 5

*Попытайтесь проверить следующее очень важное равенство:*

$$\boxed{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi}} \quad \text{— формула Эйлера}$$

$$\begin{array}{llll} \blacktriangleright & |\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi| = 1, & & |e^{\mathrm{i}\varphi}| = 1, \\ \text{т.к.} & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1; & \text{т.к.} & \sqrt{e^{\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\varphi}} = \sqrt{e^0} = 1; \\ & \text{а также, при} & & \varphi = 0: \\ & \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1, & & e^{\mathrm{i}0} = 1 \quad \blacktriangleleft \end{array}$$

- $\boxed{z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}}$ — показательная форма

Задача 6

*Обосновать формулу Муавра:*

$$\boxed{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi}.$$

$$\blacktriangleright \quad (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = e^{\mathrm{i}\varphi n} = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \quad \blacktriangleleft$$

## Извлечение корня $n$-ой степени из комплексного числа.

Задача 7

*Найти все корни* $w = \sqrt[n]{z}$.

▶ *Примем* $z = a + \mathrm{i}b = |z|e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}$, *т.к.* $e^{\mathrm{i}2\pi k} = 1$, *и тогда*

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}{n}}}$$

*где* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, *а* $\sqrt[n]{|z|}$ — *арифметический корень* $n$*-ой степени. При* $k = n$ *корень тот же, что при* $k = 0$ . ◀

- *Корни* $n$*-ой степени — вершины правильного* $n$*-угольника.*

**Пример 3.** *Самостоятельно показать, что* $\sqrt[3]{1} = 1,\ e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

# Лекция 15. Последовательности и пределы

*Предел — это основное понятие математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий, как производная и интеграл, является слово предел.*

## Ограниченные и неограниченные последовательности

★ *Если каждому натуральному числу* $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ *по определённому закону поставлено в соответствие вещественное число* $x_n$*, то множество этих чисел называется последовательностью:*

$$\boxed{\{x_n\} = x_1,\ x_2, x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots} \quad \text{— последовательность}$$

где $x_n$ — *общий элемент (член) последовательности.*

**Пример 1.** *Записать элементы последовательности:*

$$\{x_n\} = \{an + b - a\}.$$

$$\triangleright \quad \{x_n\} = b,\ a+b,\ 2a+b,\ \ldots,\ na+b,\ \ldots \quad \triangleleft$$

★ *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число* $M$ $(m)$, что $\forall x_n$ этой *последовательности выполняется неравенство:*

$$x_n \leqslant M \qquad (x_n \geqslant m)\,.$$

*Вопрос:* *Назовите последовательность, ограниченную снизу.*

*Ответ:* *Натуральный ряд чисел* $\{x_n\} = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$

★ *Последовательность* $\{x_n\}$ *одновременно ограниченная и снизу и сверху называется ограниченной* $m \leqslant \forall x_n \leqslant M$ .

★ *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется неограниченной, если* $\forall M > 0$ *найдётся элемент последовательности* $x_n$*, удовлетворяющий неравенству:* $|x_n| > M$ .

*Вопрос: Назовите неограниченную последовательность.*

*Ответ:* $\{x_n\} = -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$ *, а также, подходит предыдущий ответ.*

*Вопрос: Назовите ограниченную последовательность.*

*Ответ:* $\{x_n\} = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots$, где $0 < 1/n \leqslant 1$ .

## Определение предела последовательности

★ *Число* $a$ *называется пределом последовательности* $\{x_n\}$*, если* $\forall \delta > 0$ *найдется такой номер* $N$*, что при* $n > N$ *выполняется* $|x_n - a| < \delta$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$ — предел последовательности

★ *Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. В противном случае она называется расходящейся.*

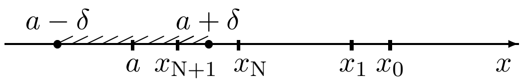
Задача 1

*Выяснить смысл неравенства:* $|x_n - a| < \delta$ .

► $$|x_n - a| = \begin{cases} x_n - a, & \text{если } x_n - a \geqslant 0 \\ -x_n + a, & \text{если } x_n - a < 0 \end{cases}$$

$$x_n - a < \delta \implies x_n < a + \delta$$

$$-x_n + a < \delta \implies x_n > a - \delta$$




$x_n \in (a - \delta, a + \delta)$ при $n > N$ ◄

★ $\delta$*-окрестностью точки* $a$ *называется интервал* $(a - \delta, a + \delta)$.

**Пример 2.** *Показать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\,.$

$\triangleright$ *Зададим произвольное* $\delta>0$ *и найдём такое* $N$, *что при* $n>N$ *выполняется* $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\delta\,.$ *Очевидно* $N=\dfrac{1}{\delta}$ $\triangleleft$

★ *Предел последовательности* $\{x_n\}$ *равен* $\infty$ *(бесконечности), если* $\forall>0$ *найдется такой номер* $N$, *что при* $n>N$ *выполняется* $|x_n|>A$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}x_n=\infty}$$ — бесконечный предел

★ *Величина называется бесконечно малой, если её предел равен* 0, *и бесконечно большой, если её предел равен* $\infty$ .

$\alpha_n\to 0$ — бесконечно малая

$\beta_n\to\infty$ — бесконечно большая

*Например:* $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ *б.м.*

$\beta_n=n$ *б.б.*

• *Обратная бесконечно малой является бесконечно большой и наоборот* $\beta_n=1/\alpha_n$ .

## Вычисление предела последовательности

**Пример 3.** *Вычислить предел.*

$\triangleright$ $$\lim_{n\to\infty}\tfrac{5n-10}{3n-6}=\left\{\tfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\tfrac{n(5-\frac{10}{n})}{n(3-\frac{6}{n})}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}}=\frac{5-\frac{10}{\infty}}{3-\frac{6}{\infty}}=\frac{5}{3}$$ $\triangleleft$

**Пример 4.** *Вычислить предел.*

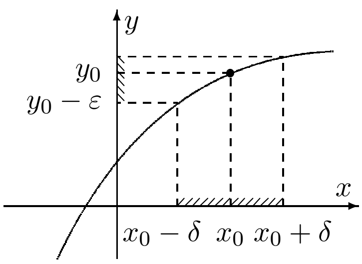
$\triangleright$ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\{\infty-\infty\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\infty}=0$$ $\triangleleft$

• *Вычисление предела — это, как правило, раскрытие неопределённости вида:* $0/0,\ \infty/\infty,\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0}$ *и т.д.*

## Определение функции

★ *Пусть задано два множества чисел $D$ и $G$, и пусть по определённому закону каждому $x \in D$ сопоставляется одно (несколько) $y \in G$, тогда говорят, что на множестве $D$ определена однозначная (многозначная) функция $y = f(x)$, при этом*

*$D$ — область определения функции,*
*$x$ — независимая переменная или аргумент,*
*$y$ — зависимая переменная или функция,*
*$G$ — область допустимых значений функции.*



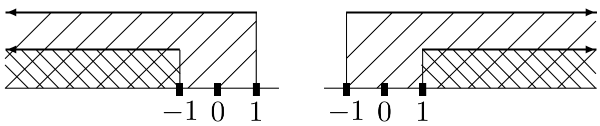

*Функции могут задаваться:*

1. *графически (см. рис.)*
2. *аналитически: $y = x^2$*
3. *таблично:*

| $x$ | 1 | 1.2 | 1.5 | 2 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1.44 | 2.25 | 4 | 6.25 |

**Пример 5.** *Найти область определения, т.е. то множество значений, при которых существует функция* $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$\triangleright \quad \left.\begin{array}{r} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ (x-1)(x+1) \geqslant 0; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x - 1 \leqslant 0; \\ x + 1 \leqslant 0; \\ \Downarrow \\ x \leqslant -1 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} (x - 1) \geqslant 0; \\ (x + 1) \geqslant 0; \\ \Downarrow \\ x \geqslant 1 \end{array}$$




*Ответ:* $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $\triangleleft$

• *Здесь и далее речь идёт о действительном переменном.*

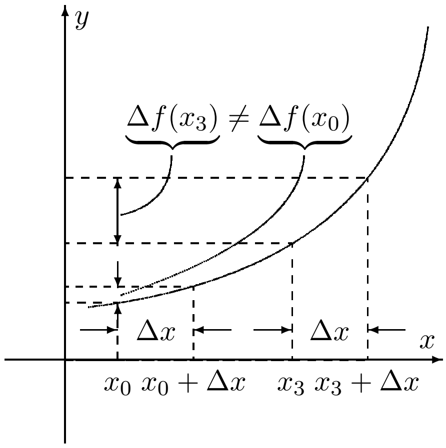
# Лекция 16. Непрерывность функции и её разрывы

*Из этой лекции мы узнаем, что разрывы функции подразделяют на два рода, а среди всевозможных пределов два предела названы замечательными.*

## Приращение аргумента и функции

★ *Приращением функции называется изменение функции при заданном приращении аргумента*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \, .$$




★ *Если* $x_1 = x_0$, *а* $x_2 = x_0 + \Delta x$, *то*

$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ — приращение аргумента

$f(x_2) - f(x_1) =$

$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$

$\Delta f(x_3) = f(x_3+\Delta x) - f(x_3)$

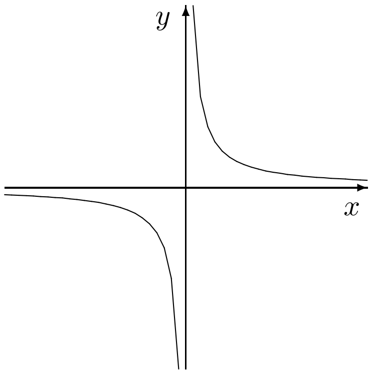
• *Приращение функции, в отличие от приращения аргумента, зависит от самого аргумента.*

## Определение непрерывности функции

★ *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$, *если в этой точке она определена, а её приращение стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента*

$$\boxed{\Delta f(x_0) \to 0 \, , \quad \text{если} \quad \Delta x \to 0} \, .$$

**Пример 1.** *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \frac{1}{x}$.




$\triangleright \quad \Delta f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$

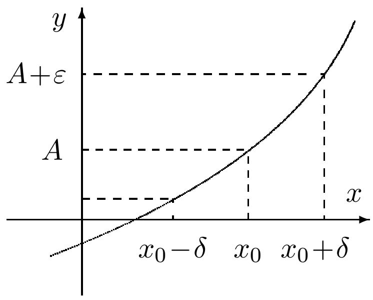
$\Delta f(x_0) \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$ *кроме точки* $x_0 = 0$.

★ *Точку, в которой приращение функции не стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента, называют точкой разрыва функции.* $\triangleleft$

## Определение предела функции в точке

★ *Число* $A$ *является пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$, *если* $\forall \varepsilon > 0$, *найдётся такое* $\delta > 0$, *что* $\forall x$, *удовлетворяющего неравенству* $0 < |x - x_0| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *и записывают* $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$.

- *В точке* $x_0$ *функция* $f(x)$ *может быть не определена.*




*Вопрос: Чему равен предел приращения функции в точке* $x_0$, *если в этой точке функция непрерывна?*

*Ответ: Поскольку* $\Delta f(x_0) \to 0$, *при* $\Delta x \to 0$, *то*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \Delta f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \Delta y = 0}$$

• *Функция непрерывна в точке* $x_0$, *если предел приращения функции в этой точке равен нулю.*

### Задача 1

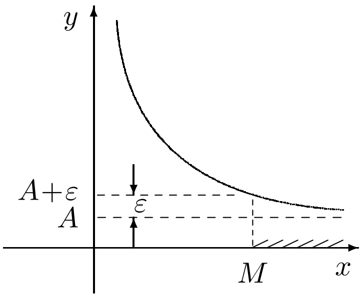
*Пусть функция определена и непрерывна в точке $x_0$. Найти предел функции в этой точке.*

$$\blacktriangleright \quad \lim_{x\to x_0} \Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \quad \blacktriangleleft$$

★ *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке.*

## Определение предела функции на бесконечности



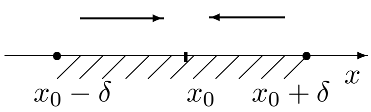

★ *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности (в бесконечно удалённой точке), если $\forall\varepsilon > 0$, найдётся такое $M > 0$, что при $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = A}.$$

## Предел функции слева и справа

★ *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ справа (слева), если $\forall\varepsilon > 0$, найдётся такое $\delta > 0$, что при $x_0 < x < x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta < x < x_0)$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают*

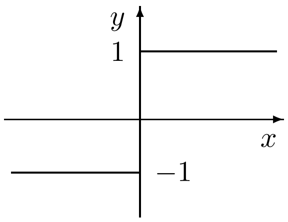
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x\to x_0-0)}} f(x) = A}$$




• *Предел функции в точке $x_0$ существует, если предел справа равен пределу слева.*

## Разрывы первого и второго рода

**Пример 2.** *Построить график функции* $y = \dfrac{x}{|x|}$.




$\triangleright$ *Очевидно, что*

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \qquad \triangleleft$$

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ разрыв первого рода, если пределы слева и справа конечны, но не равны друг другу.*

**Пример 3.** *Вычислить* $\lim\limits_{x \to 2\pm 0} e^{\frac{1}{x-2}}$.

$\triangleright$ $\lim\limits_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2+0-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = \infty, \quad \lim\limits_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = 0 \quad \triangleleft$

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ разрыв второго рода, если хотя бы один из пределов слева или справа бесконечен или не существует.*

**Пример 4.** *Вычислить:* $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

$\triangleright$ $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \left\{ \sin \frac{1}{0} \right\}$ — *предел не существует.* $\triangleleft$

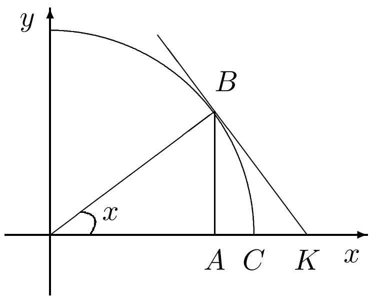
• *Постройте график этой функции.*

## Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = 1}$$

Задача 2

*Следуя рисунку, доказать первый замечательный предел.*




► *Согласно рисунку*

$AB < BC < BK$, где

$AB = \sin x,\ BC = x,\ BK = \operatorname{tg} x$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x\ :\ \sin x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$1 < \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ◄

## Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \{1^{\pm\infty}\} = e = 2.718...}$$

## Основные правила вычисления пределов

*1.* $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

*2.* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

*3.* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

*4.* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

*5.* $\lim\limits_{x \to x_0} f\,[u(x)] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} u(x)\right]$

- *Все правила имеют смысл, если пределы функций* $f(x)$, $g(x)$, $f\,[u(x)]$ *и* $u(x)$ *существуют.*

# Лекция 17. Бесконечно малые, бесконечно большие и эквивалентные функции

*Одна и та же функция в одной и той же точке может быть и бесконечно малой, и бесконечно большой; так же, как муравей мал относительно слона и велик относительно микроба.*

★ *Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными в окрестности точки $x_0$, если предел их отношения равен единице*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \quad \text{или} \quad f(x)\underset{x\to x_0}{\simeq} g(x)}$$

★ *Функция $f(x)$ является бесконечно малой относительно $g(x)$ в окрестности точки $x_0$, если*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{или} \quad f(x)\underset{x\to x_0}{\simeq} o(g(x))}$$

★ *Функция $g(x)$ является бесконечно большой относительно $f(x)$ в окрестности точки $x_0$, если*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty \quad \text{или} \quad f(x)\underset{x\to x_0}{\simeq} o(g(x))}$$

• *Согласно данным определениям*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o\,(g(x))}{g(x)}=0, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{o(g(x))}=\infty$$

## Задача 1

*Определить, какой является функция* $\sin x$ *относительно функций* $1$, $x$, $x^2$ *в окрестности нуля.*

► 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1}=\dfrac{0}{1}=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x \underset{x\to 0}{\simeq} o(1) \quad\Longrightarrow\quad$ *б.м.*

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=1 \quad\Rightarrow\quad \sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x \quad\Longrightarrow\quad$ *эквив.*

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\left\{\dfrac{1}{0}\right\}=\infty \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad x^2 \underset{x\to 0}{\simeq} o(\sin x) \quad\Longrightarrow\quad$ *б.б.* ◄

## Теорема об эквивалентных функциях

Теорема

*Чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна функции $g(x)$ в окрестности точки $x_0$, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\boxed{f(x)=g(x)+o(g(x)) \quad \text{при} \quad x\to x_0}$$

► 1. *При доказательстве достаточности исходят из доказываемого равенства:*

$$f(x)=g(x)+o(g(x)) \quad : \quad g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1+\frac{o(g(x))}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1+\lim_{x\to x_0}\frac{o(g(x))}{g(x)}=1 \quad\Rightarrow\quad f(x)\underset{x\to x_0}{\simeq} g(x)$$

2. *При доказательстве необходимости исходят из определения эквивалентных функций:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x)}{g(x)}-1 \underset{x\to x_0}{=} o(1)$$

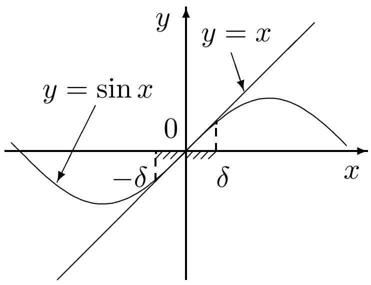
$$f(x)-g(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)o(1) \quad\Rightarrow\quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)+o(g(x)) \quad ◄$$

## Аппроксимация элементарных функций простейшими многочленами

- *Аппроксимация — приближённое описание.*

### Задача 2

*Найти эквивалентные следующих функций:* $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\exp x$, $\operatorname{tg} x$ *— в окрестности точки нуль, в виде простейших многочленов (степенью не выше двух).*



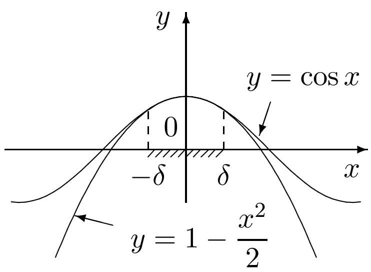

▶ 1. $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

*Согласно* Задаче 1

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

*иначе* $\boxed{\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x}$

- *В окрестности точки нуль прямая* $y = x$ *сливается с кривой* $y = \sin x$.




2. $\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

*Очевидно, что* $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$,

т.е. $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$

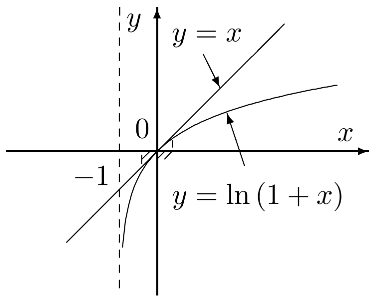
*Теперь* $o(1) = ?$ *Попробуем, не является ли* $o(1) \simeq x$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2(\sin x/2)^2}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2(x/2)^2}{x} = 0 \implies o(1) \not\simeq x$$

*Легко убедиться, что* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{-x^2/2} = 1$, т.е.

$$o(1) = \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} -x^2/2 \implies \boxed{\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - x^2/2}$$



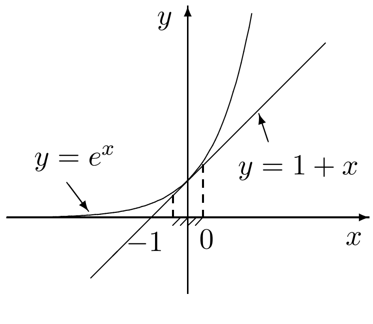

3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} =$

$= \ln \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$

*Следовательно* $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x}$




4. $e^x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

*Поскольку* $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, *то*

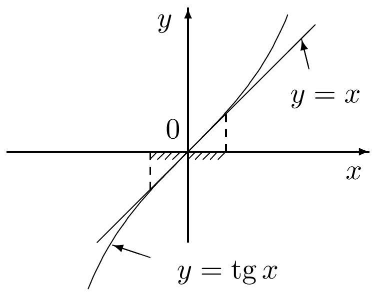
$$e^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + o(1)$$

$o(1) = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} y = e^x - 1 \\ x = \ln(1+y) \end{array} \right\} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{\ln(1+y)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{y} = 1$

*При вычислении последнего предела был использован результат пункта* 3. *Таким образом* $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} x$ *или* $\boxed{e^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + x}$




5. $\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} ?$

*Поскольку* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$, *то*

$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} o(1)$

$o(1) = ?$ *Так как*

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, *то*

$\boxed{\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\simeq} x}$ ◀

• *Рисунки наглядно показывают, что заданные функции и их эквивалентные в окрестности точки нуль почти не различимы.*

• *Вычисление пределов можно проводить путём замены под знаком предела заданных функций на их эквивалентные.*