“Нам нужна способность, которая позволяла бы видеть цель издали, а эта способность есть интуиция.”

Анри Пуанкаре

Раздел 3

Дифференциальное исчисление

Лекция 18. Производная, её геометрический и механический смысл

Важнейшим понятием математического анализа является производная, которая определяет скорость изменения функции.

★ *Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)}\,.$$

Пример 1. *Вычислить производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 5$.*

$\triangleright \quad \Delta f(5) = f(5+\Delta x) - f(5) = 10\Delta x + \Delta x^2,$

$$f'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

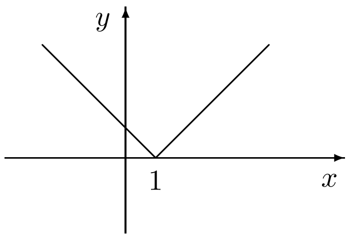
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(10+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(10+\Delta x) = 10. \quad \triangleleft$$

Производная справа и слева

★ *Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел справа (слева) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta f(x_0 \pm 0)}{\Delta x} = f'(x_0 \pm 0)}\,.$$

Пример 2. *Вычислить производную функции $f(x) = |x-1|$ в точке $x = 1$.*



$$\triangleright \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{при} \quad x \geqslant 1 \\ -x+1, & \text{при} \quad x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$f'(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{-x+1}{x-1} = -1.$$

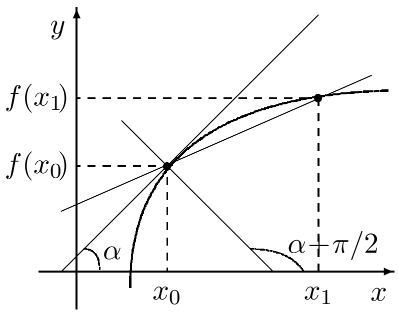
$$f'(1+0) \neq f'(1-0) \implies f'(1) \text{ — не существует} \quad \triangleleft$$

Геометрический смысл производной

Задача 1

Получить уравнение касательной.

★ *Касательной называется предельное положение секущей при стремлении второй точки секущей к первой.*



► *Запишем уравнение секущей*

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

и устремим вторую точку секущей к первой, тогда поскольку

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

то вычисление предела даёт

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad \text{— уравнение касательной}$$

где угловой коэффициент касательной $k_{кас} = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ ◄

★ *Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции.*

Задача 2

Получить уравнение нормали.

★ *Нормалью называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной.*

► $y - f(x_0) = k_{норм}(x - x_0)$, где

$$k_{норм} = \operatorname{tg}(\alpha + \pi/2) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \quad \text{— уравнение нормали}$$ ◄

Пример 3. *Найти уравнения касательной и нормали для функции* $f(x) = x^2$ *в точке* $x = 5$.

▷ $f'(5) = 10$, $f(5) = 25$, *и очевидно*

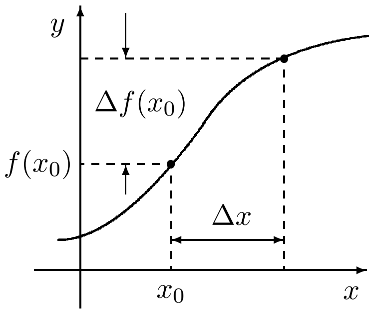
$$y_{кас} - 25 = 10(x - 5), \quad y_{норм} - 25 = -0.1(x - 5)$$ ◁

Задача 3

Показать, что если производная положительна, то функция возрастает, а если отрицательна, то убывает.

★ *Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b), если $\forall x_0 \in (a, b)$ выполняется:*

$$\Delta f(x_0) > 0 \quad (\Delta f(x_0) < 0) \quad \text{при } \Delta x > 0.$$



▶ *Пусть $f'(x_0) > \varepsilon > 0$, тогда из определения производной как предела следует*

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon,$$

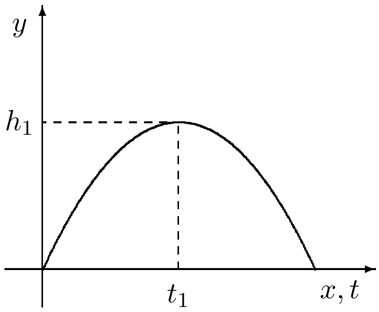
откуда

$$\Delta f(x_0) > 0 \quad \text{при } \Delta x > 0. \quad ◀$$

Механический смысл производной

Задача 4

Известно, что траекторией брошенного камня является парабола. Найти его скорость и ускорение.



▶ *Поскольку горизонтальное движение равномерное, то вертикальная координата равна:*

$$h(t) = -\frac{g}{2}(t - t_1)^2 + h_1, \qquad \text{тогда}$$

$$h'(t) = -g(t - t_1) \qquad \text{— скорость}$$

$$h''(t) = -g \qquad \text{— ускорение} \quad ◀$$

• *Вычисление производной позволило нам "получить" известный физический закон, что всякое брошенное тело испытывает постоянное ускорение свободного падения.*

Основные правила дифференцирования

★ *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она имеет производную в этой точке.*

Вопрос: Является ли непрерывной дифференцируемая функция?
Ответ: Да, поскольку для существования предела, определяющего производную, необходимо $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Задача 5

Показать, что производные суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & (u+v)' = u' + v' \\ 2. & (uv)' = u'v + v'u \\ 3. & (u/v)' = (u'v - v'u)/v^2 \end{array}}$$

► 1. $$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

2. $$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u(x_0+\Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0+\Delta x) = v + \Delta v \end{array} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv + \Delta vu + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + u' \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{=0} = u'v + v'u.$$

3. $$(u/v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \left\{ \Delta \frac{u}{v} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv - \Delta vu}{\Delta x v(v+\Delta v)} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad ◄$$

Лекция 19. Вывод таблицы производных

Так же, как при умножении чисел используют не определение действия умножения, а таблицу умножения, так и при вычислении производных используют не определение производной, а таблицу производных.

Задача 1

Показать, что производная сложной функции равна произведению производных составляющих функций, т.е.

$$\boxed{f'_x = f'_u u'_x, \quad \text{где} \quad f = f[u(x)]}$$

► $f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f \Delta u}{\Delta x \Delta u} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta u} \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u u'_x$ ◄

• *Прежде чем вычислять производную функции, необходимо определить число составляющих её функций.*

Задача 2

Используя определение производной, вычислить производные элементарных функций.

► 1. $C' =?$

$$C' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

2. $(x^n)' =?$

Поскольку $(x)' = 1,\ \ (x^2)' = 2x,$ то можно предположить, что $(x^n)' = nx^{n-1}$. *Последнее верно, если при этом предположении выполняется* $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. *Докажем это равенство*

$(x^{n+1})' = (xx^n)' = x'x^n + x\,(x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$

Следовательно $(x^n)' = nx^{n-1}$.

• *Доказательство дано методом математической индукции.*

3. $(e^x)' = ?$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} =$$

$$= \left\{e^{\Delta x}\underset{\Delta x\to 0}{\simeq} 1+\Delta x\right\} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

Найдём производную показательной функции

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' =$$

$$= \{f'_x = f'_u\cdot {u_x}'\} = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a.$$

4. $(\ln x)' = ?$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \left\{\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\simeq} u\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,.$$

5. $(\sin x)', (\cos x)' = ?$

Вычислить производную синуса через производную экспоненты.

$$(\sin x)' = \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)' = \frac{e^{\mathrm{i}x}(\mathrm{i})-e^{\mathrm{i}x}(-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2} = \cos x.$$

Вычислить производную косинуса через производную синуса.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

6. $(\operatorname{tg} x)', (\operatorname{ctg} x)' = ?$

Вычислить производную тангенса через производные синуса и косинуса.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Вычислить производную котангенса через производную тангенса.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. $(\operatorname{ch} x)', (\operatorname{sh} x)' = ?$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Для завершения таблицы производных потребуется решить следующую задачу.

Задача 3

Найти связь производной функции с производной обратной функции.

► *Пусть обе функции: прямая* $y = y(x)$ *и обратная* $x = x(y)$ — *непрерывны и дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$, *тогда*

$$x_y{}' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y_x{}'}.$$

$$\boxed{x_y{}' = 1/y_x{}'} \quad ◄$$

Продолжим решение Задачи 2.

8. $(\arcsin x)', (\arccos x)' = ?$

Пусть $y = \arcsin x$, *тогда* $x = \sin y$.

$$(\arcsin x)_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{(\sin y)_y{}'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Аналогично получим, что $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. $(\operatorname{arctg} x)', (\operatorname{arcctg} x)' = ?$

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$, *тогда* $x = \operatorname{tg} y$.

$$(\operatorname{arctg} x)_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Нетрудно показать, что $(\operatorname{arcctg} x)_x{}' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ ◄

Таблица производных		
N	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0
2	x^n	nx^{n-1}
3	e^x a^x	e^x $a^x \ln a$
4	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
5	$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$
6	$\operatorname{tg} x$ $\operatorname{ctg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7	$\operatorname{ch} x$ $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{ch} x$
8	$\arcsin x$ $\arccos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\operatorname{arctg} x$ $\operatorname{arcctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$ $-\dfrac{1}{1+x^2}$

Лекция 20. Дифференциал функции

Дифференциал функции — понятие столь же часто используемое в математике, как и производная.

Теорема о дифференцируемой функции

Теорема

Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно выполнения равенства:

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{=} f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).} \qquad (*)$$

Достаточность

Докажем, что если формула $(*)$ выполняется, то функция дифференцируема, т.е. имеет производную. Поделим обе части равенства $(*)$ на Δx, тогда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\,,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Необходимость

Исходим из определения производной. Поскольку

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,,$$

то согласно определения предела

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\simeq} f'(x_0)\,.$$

или

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0) \underset{\Delta x\to 0}{=} o(1),$$

и далее

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{=} o(1)\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{=} o(\Delta x),$$

что и требовалось доказать.

Вопрос: Что является эквивалентной приращению функции?

★ *Согласно доказанному равенству $(*)$, эквивалентной приращению функции является произведение производной функции на приращение аргумента, т.е.*

$$\boxed{df(x_0)=f'(x_0)\Delta x} \quad \text{— дифференциал функции.}$$

Вопрос: Чему равен дифференциал аргумента?

$$dx = x'\Delta x = \Delta x.$$

★ *Приращение аргумента тождественно равно дифференциалу аргумента:*

$$\boxed{dx=\Delta x} \quad \text{— дифференциал аргумента.}$$

Вопрос: Как выразится производная функции через дифференциалы функции и аргумента?

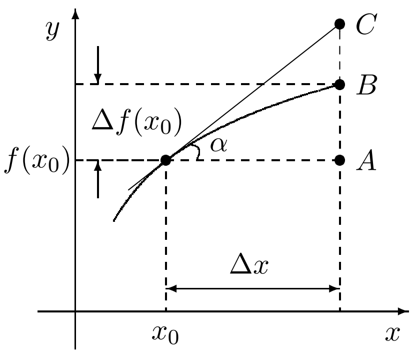
★ *Производная функции равна частному дифференциалов функции и аргумента:*

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}} \quad \text{— производная функции.}$$

Геометрический смысл дифференциала

Задача 1

Выяснить геометрический смысл дифференциала.



► *Согласно рисунку* $AB = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции, а* $AC = \operatorname{tg}\alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$ — *приращение ординаты касательной.* ◄

★ *Дифференциал функции — это приращение ординаты касательной.*

Задача 2

Самостоятельно показать, что дифференциалы суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & d(u+v) = du + dv \\ 2. & d(uv) = vdu + udv \\ 3. & d(u/v) = (vdu - udv)/v^2 \end{array}}$$

Дифференциал и приближённое вычисление

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

Пример 1. *Вычислить* $\sqrt{0.9}$.

$$\triangleright \quad \sqrt{0.9} = \sqrt{1 - 0.1} \approx \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 1, & \Delta x = -0.1 \\ f(x_0) = 1, & f'(x_0) = 1/2 \end{array} \right\} \approx$$

$$\approx 1 - 0.1/2 = 0.95 \quad \triangleleft$$

Производные и дифференциалы высших порядков

★ *Производной или дифференциалом второго порядка называется производная производной или дифференциал дифференциала первого порядка.*

$$\boxed{f''(x) = (f'(x))', \quad d^2f(x) = d(df(x))}$$

Задача 3

Выразить дифференциал и производную n-го порядка.

▶ $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\Delta x) =$

$$= d(f'(x))\Delta x + f'(x)\underbrace{d(\Delta x)}_{=0} = \left\{ \begin{array}{l} (\Delta x)' = 0 \quad \text{т.к.} \quad \Delta x \\ \textit{не зависит от} \quad x \end{array} \right\} =$$

$$= f''(x)\Delta x\Delta x = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

В последнем равенстве круглые скобочки подразумеваются: это тот редкий случай, когда математики пишут одно, а подразумевают другое. Отсюда

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\boxed{d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}} \quad ◀$$

Задача 4

Проверить инвариантность формы дифференциала первого порядка.

$$\boxed{df = f'_x dx = f'_u du, \quad \text{где} \ \ f = f[u(x)] \text{ — сложная функция}}$$

▶ $f'_x dx = f'_u u'_x dx = f'_u du$. *Самостоятельно показать, что*

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 \neq f''_{uu}du^2, \ \text{где} \ \ f''_{xx} = (f'_x)'_x \quad ◀$$

Лекция 21. Формула Тейлора

Если дифференциал функции описывает приращение функции в первом приближении, то многочлен Тейлора описывает приращение функции со сколь угодной точностью.

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Найти эквивалентную приращения функции в окрестности точки $x_0 \in [a,b]$ в виде многочлена n-ой степени.

► *Согласно предыдущей лекции*

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0),$$

а требуется найти такой $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k (x - x_0)^k$, *чтобы*

$$f(x) - f(x_0) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Для нахождения A_k необходимо n раз продифференцировать равенство

$f(x) - f(x_0) = A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \cdots$
$+ A_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$.

В результате получим

$f'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \cdots + nA_n(x - x_0)^{n-1} +$
$+ o\left(n(x - x_0)^{n-1}\right)$,

$f''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + \cdots + n \cdot (n-1)A_n(x - x_0)^{n-2} +$
$+ o\left(n \cdot (n-1)(x - x_0)^{n-2}\right)$,

$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)A_n(x - x_0)^{n-3} +$
$+ o\left(n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(x - x_0)^{n-3}\right)$,

....

$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1A_n + o\left(n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\right)$.

Положим $x = x_0$, *тогда*

$$\underbrace{f'(x_0)=A_1,\ f''(x_0)=2A_2,\ f'''(x_0)=3!A_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=n!A_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_k=\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}}\quad \text{— коэффициенты Тейлора}$$

Итак, приращение функции в точке x_0 *в виде многочлена* n*-ой степени имеет вид*

$$\Delta f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right),$$

где второе слагаемое дает погрешность многочлена Тейлора. То же равенство можно записать иначе

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)}\quad \text{— формула Тейлора}\quad ◀$$

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна и* $n+1$ *раз дифференцируема в окрестности точки* $x=0$*. Представить её в виде многочлена* n*-ой степени в окрестности этой точки.*

▶ *Согласно* Задаче 1

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)}\quad \text{— формула Маклорена}\quad ◀$$

Пример 1. *Представить* e^x *в виде многочлена Маклорена.*

▷ $f^{(k)}(0)=?$ *Очевидно* $e^{(k)}(0)=1$ *и*

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)\quad ◁$$

Пример 2. *Представить $(a+x)^n$ в виде многочлена Маклорена.*

$\triangleright$ $$f^{(0)}(0)=a^n,\ f^{(1)}(0)=na^{(n-1)},\ f^{(2)}(0)=n(n-1)a^{(n-2)},\ \dots$$
$$f^{(k)}(0)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{(n-k)},\ \dots$$
$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a^0=n!$$

Поскольку все последующие производные равны нулю, то подстановка производных в формулу Маклорена даст точное равенство

$$(a+x)^n=a^n+na^{(n-1)}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{(n-2)}x^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{(n-k)}x^k+\cdots+nax^{(n-1)}+x^n \quad \triangleleft$$

- *Полученный результат можно записать иначе*

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{(n-k)}b^k} \quad \text{— бином Ньютона}$$

Пример 3. *Известно, что* $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x$.
Найти следующее приближение.

$\triangleright$ $$\sin^{(0)}0=0,\ \sin^{(1)}0=\cos 0=1,\ \sin^{(2)}0=-\sin 0=0,$$
$$\sin^{(3)}0=-\cos 0=-1 \implies \sin x\approx x-\frac{x^3}{6} \quad \triangleleft$$

Дифференцирование параметрически заданных функций

Задача 3

Найти производные первого и второго порядка для параметрически заданных функций.

★ *Функция $y=y(x)$ задана параметрически, если*
$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in T,$
где T — *область определения функции.*

$$\blacktriangleright\quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} dy = \psi'(t)dt \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \boxed{\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'_x}\ ; \quad y''_{xx} = \frac{d}{dx} y'_x =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \boxed{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = y''_{xx}}\ . \quad \blacktriangleleft$$

Пример 4. *Найти производные функции* $\left\{ \begin{array}{l} y = b\sin t \\ x = a\cos t \end{array} \right.$.

$$\triangleright\quad y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}. \quad \triangleleft$$

Дифференцирование неявно заданных функций

★ *Функция задана неявно, если она определена уравнением* $F(x, y) = 0$.

Пример 5. *Найти производные функции* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

• *Можно догадаться, что задача дифференцирования неявно заданных функций решается простым дифференцированием уравнения по переменной* x.

$$\triangleright\quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \implies y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2y'^2 + 2yy''}{b^2} = 0 \implies y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \quad \triangleleft$$

Пример 6. *Выразив для эллипса явную зависимость* y *от* x *вычислить* y' *и* y''. *Полученный результат сравнить с результатами* Примеров 4 *и* 5. *Оценить какое задание функции быстрее приводит к результату (самостоятельно).*

Лекция 22. Теоремы о среднем

В этой лекции будут получены некоторые важные соотношения между производной функции и самой функцией.

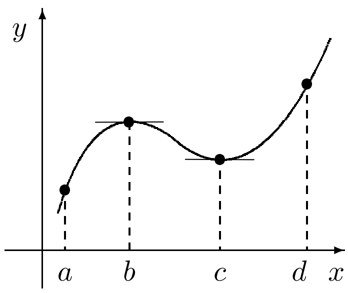
Экстремум функции

★ *Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если в некоторой δ-окрестности этой точки $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству:*

$$\begin{array}{c} f(x) < f(x_0) \quad — \quad \max \\ \Big(f(x) > f(x_0) \quad — \quad \min\Big) \end{array} \quad \text{при } x \neq x_0.$$

★ *Локальный максимум или минимум называют локальным экстремумом.*

Пример 1. *Указать точки локального экстремума функции, заданной на отрезке $[a, d]$.*



$\triangleright$ *Очевидно, что*

$$f(b) \quad — \quad \max,$$
$$f(c) \quad — \quad \min;$$

в то время как

$$f(d) \quad — \quad \text{наибольшее},$$
$$f(a) \quad — \quad \text{наименьшее} \quad \triangleleft$$

• *Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке могут не быть локальными экстремумами.*

Теорема Ферма

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то тогда её производная в этой точке равна нулю.

▶ *Если функция дифференцируема в точке* x_0, *то её левая и правая производные равны, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Пусть для определённости в точке x_0 — max. *Тогда*

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)\leqslant 0\ \ \text{при}\ \ x\leqslant x_0\ \text{и при}\ x\geqslant x_0}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{f'(x_0)=0}\quad ◀$$

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема на интервале* (a,b) *и* $f(a)=f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi\in(a,b)$ *такая, что* $f'(\xi)=0$.

▶ 1. *Если* $f(x)\equiv f(a)\equiv f(b)$ *при* $x\in(a,b)$,
тогда $f'(\xi)=0\ \ \forall\xi\in(a,b)$.

2. *Если* $f(x)\neq const$, *то на интервале* (a,b) *найдётся хотя бы одна точка* ξ *локального экстремума. Но тогда в этой точке, согласно теореме Ферма,* $f'(\xi)=0$. ◀

Теорема Коши

Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$:

— *непрерывны на отрезке* $[a,b]$,
— *дифференцируемы на интервале* (a,b),
— $g'(x)\neq 0$,

тогда найдётся такая точка $\xi\in(a,b)$, *в которой выполняется соотношение*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}\tag{$*$}$$

► *Для доказательства вводится вспомогательная функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ролля*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

а значит, найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, *что* $F'(\xi) = 0$. *Итак*

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \implies (*) \quad ◄$$

Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$:
— *непрерывна на отрезке* $[a, b]$,
— *дифференцируема на интервале* (a, b),
тогда найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой выполняется соотношение*

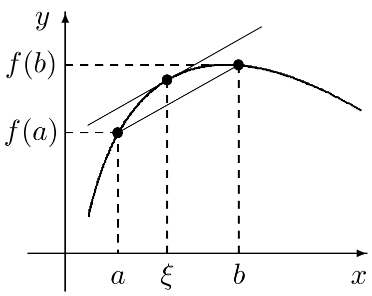
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)} \qquad (**)$$

► *Вопрос: Как с помощью соотношения* $(*)$ *получить* $(**)$?
Ответ: Ввести функцию $g(x) = x$. *Поскольку*

$$g'(\xi) = 1, \;\; g(b) - g(a) = b - a, \;\; \text{то} \;\; (*) \implies (**) \quad ◄$$

Задача 1

Определить геометрический смысл теоремы Лагранжа.



► *Так как* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\varphi$ *тангенс угла наклона секущей, а* $f'(\xi)$ — *тангенс угла наклона касательной, то согласно теореме Лагранжа найдётся такая точка* $\xi \in (a, b)$, *в которой они равны.* ◄

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке n нулей. Показать, что $f'(x)$ имеет на этом отрезке нулей не меньше чем $n-1$.

▶ *По условию*

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0, \quad \text{где} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b].$$

Тогда на отрезках

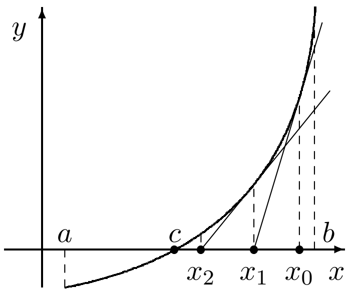
$$[x_i, x_{i+1}] \in [a, b], \quad \text{где} \quad i = \overline{1, n-1}$$

выполнены условия теоремы Ролля, а значит найдутся точки

$$\xi_i \in [a, b], \quad \text{где} \quad f'(\xi_i) = 0. \quad ◀$$

Задача 3 (метод Ньютона)

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную знакопостоянную производную на отрезке $[a, b]$ и $f(c) = 0$, где $a < c < b$. Получить с помощью уравнения касательной алгоритм нахождения нуля функции.



▶ *Проведём касательную к кривой в точке $x_0 \in [a, b]$*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Теперь проведём касательную к кривой в точке x_1, которая пересечет ось абсцисс в точке

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, получим искомый алгоритм:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_c \quad \text{при} \quad n \to \infty} \text{ — метод касательных} \quad ◀$$

Лекция 23. Правило Лопиталя

Доказанные в предыдущей лекции теоремы имеют важные приложения, в частности, теорема Коши приводит к новому для нас методу вычисления пределов.

Задача 1 (правило Лопиталя)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, причём

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,, \quad g(x)\neq 0\,.$$

Показать, что

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}. \qquad (*)$$

► *Доопределим заданные функции в точке x_0, а именно, $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда согласно теореме Коши найдётся такая точка $\xi \in (x, x_0)$, в которой выполняется соотношение*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Вычисление предела от этого соотношения

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left\{\begin{array}{c}\text{при } x\to x_0,\\ \xi\to x_0\end{array}\right\} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

приводит к правилу Лопиталя $(*)$. ◄

• *Предел частного дифференцируемых функций, в случае неопределённости вида $\{0/0\}$, равен пределу частного производных функций, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.*

Пример 1. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

$$\triangleright \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad \triangleleft$$

Пример 2. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos 1/x}{x}$.

$$\triangleright\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos 1/x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos 1/x+\sin 1/x}{1}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sin 1/x = \sin\infty$ — *не существует, а значит, правило Лопиталя не применимо. Правильное решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos 1/x}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos 1/x=0\quad\triangleleft$$

Замечание 1. *Если отношение функций представляет собой неопределённость вида* $\{\infty/\infty\}$, *то правило Лопиталя применимо (без доказательства).*

Пример 3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\pi/2+0}\dfrac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg}x}$.

$$\triangleright\quad \lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg}x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{1/(x-\pi/2)}{1/\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\cos^2 x}{(x-\pi/2)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi/2+0}\frac{\sin 2x}{1}=0\quad\triangleleft$$

Замечание 2. *Правило Лопиталя можно применять повторно, если вновь приходим к неопределённости.*

Пример 4. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

$$\triangleright\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{6}=\frac{1}{3}$$

$\triangleleft$

Замечание 3. *Правило Лопиталя можно применять для вычисления предела в бесконечно удалённой точке.*

Пример 5. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^{100}}$.

$$\triangleright \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{100}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{100x^{99}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{100!}=\infty \quad \triangleleft$$

Задача 2

Свести неопределённость вида $\{0\cdot\infty\}$ *к неопределённости вида* $\{0/0\}$ *или* $\{\infty/\infty\}$.

$$\blacktriangleright \text{ Пусть } \begin{cases} f(x)\to 0 \\ g(x)\to\infty \end{cases} \text{ при } x\to x_0.$$

Тогда очевидны следующие соотношения

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=(0\cdot\infty)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\} \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}\end{cases} \text{ или } \quad \blacktriangleleft$$

Замечание 4. *Правило Лопиталя после простого преобразования можно применять для раскрытия неопределённости вида* $\{0\cdot\infty\}$.

Пример 6. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)$.

$$\triangleright \lim_{x\to 1+0}\ln x\ln(x-1)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x-1)}{1/\ln x}=\{\infty/\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{-x\ln^2 x}{x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1+0}\frac{2\ln x}{x}=0 \quad \triangleleft$$

Задача 3

Свести неопределённость вида $\{\infty-\infty\}$ *к неопределённости вида* $\{0/0\}$.

► *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \{\infty-\infty\}$. *Тогда необходимо преобразовать разность к дроби*

$$f-g=\frac{1}{1/f}-\frac{1}{1/g}=\frac{1/g-1/f}{1/f\cdot 1/g}\underset{\substack{f\to\infty\\ g\to\infty}}{\longrightarrow}\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0} \quad ◄$$

Замечание 5. *Правило Лопиталя можно применять для раскрытия неопределённостей вида* $\{\infty-\infty\}$, *поскольку она сводится к неопределённости вида* $\{0/0\}$.

Пример 7. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2} \quad \triangleleft$$

ЗАДАЧА 4

Свести неопределённости вида 1^∞, 0^∞, ∞^0 *к неопределённости вида* $0\cdot\infty$.

$$► \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\exp\{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\}=e^{(0\cdot\infty)} \quad ◄$$

Замечание 6. *Правило Лопиталя после логарифмирования можно применять для раскрытия неопределённостей вида* 1^∞, 0^∞, ∞^0.

Пример 8. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\triangleright\ \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\right)=e^{\{0/0\}}=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\,\mathrm{tg}\,2x}{2x}\right)=e^{-2} \quad \triangleleft$$

Лекция 24. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Чтобы найти экстремум функции, требуется определить, в каких точках он возможен, а затем выяснить, действительно ли он имеет место и каков его характер.

Вспомним определение экстремума функции:

$$\boxed{\textit{или}\quad \begin{array}{lcl} f(x) < f(x_0) & — & \max \\ f(x) > f(x_0) & — & \min \end{array} \quad \textit{при} \quad \begin{array}{c} x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ x \neq x_0 \end{array}}$$

Необходимые условия экстремума: критические точки

★ *Критическими точками мы будем называть такие точки, в которых функция может иметь экстремум.*

Критические точки

1. *Стационарной точкой является такая точка x_0, в которой производная (скорость) равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0\,.$$

2. *Критической точкой для непрерывной функции $f(x)$ является также такая точка x_0, в которой её производная не существует или обращается в бесконечность:*

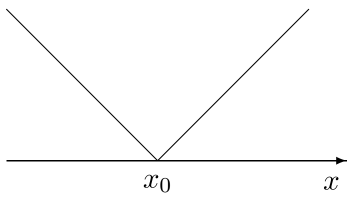
$$f'(x_0) \text{ — не существует или равна } \infty.$$

Вопрос: Привести три примера графиков, содержащих критические точки, но не имеющих экстремумов (самостоятельно).

Первое достаточное условие

Задача 1

Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в δ-окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки. Показать, что если в этой точке производная меняет знак, то имеет место локальный экстремум.



► *Пусть для определенности*

$$f'(x_0 - 0) < 0, \text{ а } f'(x_0 + 0) > 0.$$

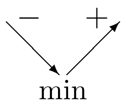
Покажем, что в этом случае имеет место минимум. Воспользуемся соотношением

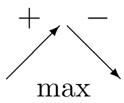
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x.$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{В левой окрестности:}\ \ \Delta x < 0,\ \ f'(x_0 - 0) < 0,\\ \textit{а значит } f(x_0 + \Delta x) > f(x_0).\\[1ex] \textit{В правой окрестности:}\ \ \Delta x > 0,\ \ f'(x_0 + 0) > 0,\\ \textit{и значит } f(x_0 + \Delta x) > f(x_0).\end{array}\right\} \Rightarrow \min \qquad \blacktriangleleft$$

• *Изображённая на рисунке функция $f(x) = |x - x_0|$ не имеет производной в точке минимума.*

• *Если в критической точке производная функции меняет знак с минуса на плюс, то имеет место минимум; а с плюса на минус — максимум.*





• *Первое достаточное условие годится для любых критических точек и является универсальным.*

Второе достаточное условие

Задача 2

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке стационарную точку ($f'(x_0) = 0$). Показать, что если в этой точке вторая производная отлична от нуля, то имеет место локальный экстремум.

▶ *Формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big)$$

в стационарной точке принимает вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big).$$

Так как в любой окрестности x_0 (правой и левой) $(x - x_0)^2 > 0$, то в δ-окрестности точки x_0 выполняются неравенства:

если $f''(x_0) > 0$, *то* $f(x) > f(x_0)$ — $\overset{+}{\smile}$ min

если $f''(x_0) < 0$, *то* $f(x) < f(x_0)$ — $\underset{-}{\frown}$ max ◀

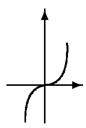
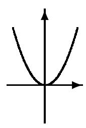
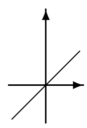
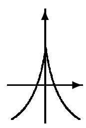
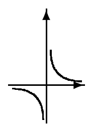
• *Если вторая производная в стационарной точке больше нуля, то имеет место минимум, а если меньше нуля, то максимум.*

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$, необходимо:

1. *Найти критические точки на этом отрезке.*
2. *Подсчитать значения функции в этих точках и на концах отрезка.*
3. *Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.*

Пример 1. *Исследовать на экстремум следующие функции:* x^3, x^2, x, $1-x^{\frac{2}{3}}$, x^{-1}. *Решение представить в виде таблицы.*

$f(x)$	x^3	x^2	x	$1-x^{\frac{2}{3}}$	x^{-1}
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$	$-x^{-2}$
x_0 *крит. т.*	0	0	*нет*	0	*разрыв в нуле*
$f'(x_0)$	0	0		*не сущ.*	
знак $f'(x_0)$ *лев., прав.*	$+$ $+$ $\nearrow$ $\nearrow$	$-$ $+$ $\searrow$ $\nearrow$		$+$ $-$ $\nearrow$ $\searrow$	
экстремум $f(x)$	*нет*	min	*нет*	max	*нет*
$f''(x)$	$6x$	2			
знак $f''(x_0)$	0	$+$			
графики					

Пример 2. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x)=x^3-3x+1$ *на отрезке* $[-2,2]$.

$\triangleright$ $f'(x)=3x^2-3=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm 1$. *Далее*

$f(-1)=3,\ f(1)=-1,\ f(-2)=-1,\ f(2)=3.$

$f(2,-1)=3$ — *наибольшее, а* $f(1,-2)=-1$ — *наименьшее.* $\triangleleft$

Лекция 25. Выпуклость, точка перегиба и асимптоты кривой

При исследовании функции и построении её графика, помимо экстремума, используется ещё несколько важных понятий.

Выпуклость вверх и вниз

★ *Функция $f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ выпуклость вверх (вниз), если касательная в окрестности этой точки располагается выше (ниже) этой кривой.*

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет производные первого и второго порядка.
Показать, что по знаку производной второго порядка можно судить о том, функция в этой точке выпукла вверх или вниз.

► *Формулу Тейлора*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{y_{\text{кас}}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\Big((x - x_0)^2\Big)$$

можно записать в следующем виде:

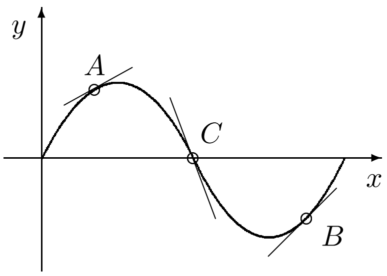
$$f(x) \simeq y_{кас} + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \qquad (*)$$

По определению, если $f(x) < y_{кас}$, то функция выпукла вверх, а если $f(x) > y_{кас}$, то функция выпукла вниз. Таким образом из формулы $(*)$ следует:

$f''(x_0) > 0$	$\overset{+}{\smile}$	— *выпуклость вниз*
$f''(x_0) < 0$	$\underset{-}{\frown}$	— *выпуклость вверх*

◄

★ *Точкой перегиба называется такая точка, которая разделяет у непрерывной функции области выпуклости вверх и вниз, и в которой график функции имеет касательную.*



Вопрос: *Идентифицируйте точки A, B, C, заданные на рисунке.*

Ответ: A — *точка выпуклости вверх,*
B — *точка выпуклости вниз,*
C — *точка перегиба.*

• *Проходящая через точку перегиба касательная, частично лежит выше кривой, а частично ниже.*

Необходимые условия точки перегиба: критические точки

Точка x_0 является критической точкой относительно перегиба, если выполняется одно из двух условий:

1. $f''(x_0) = 0$,
2. $f''(x_0)$ — *не существует или обращается в* ∞.

Достаточное условие точки перегиба

Задача 2

Показать, что если в окрестности критической точки вторая производная меняет знак, то эта точка — точка перегиба.

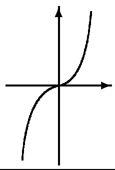
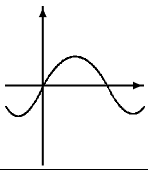
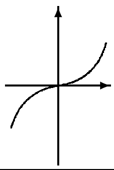
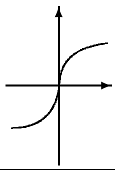
► *Для двух вариантов смены знаков из* Задачи 1 *следует:*

$$\begin{array}{l} f''(x_0 - 0) > 0 \text{ и } f''(x_0 + 0) < 0 \\ f''(x_0 - 0) < 0 \text{ и } f''(x_0 + 0) > 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} \overset{+}{\cup} & \underset{-}{\cap} \\ \underset{-}{\cap} & \overset{+}{\cup} \end{array}} \text{ — } \begin{array}{c} \text{точки} \\ \text{перегиба} \end{array} \blacktriangleleft$$

• *Кроме смены знака второй производной в точке перегиба должна существовать касательная, которая может быть параллельна оси ординат.*

Пример 1. *Исследовать на перегиб следующие функции:* x^3, $\sin x$, $x^{\frac{5}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}$.

Решение представить в виде таблицы.

$f(x)$	x^3	$\sin x$	$x^{\frac{5}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}$
$f''(x)$	$6x$	$-\sin x$	$\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$
x_0 крит. т.	0	$n\pi$	0	0
$f''(x_0)$	0	0	*не сущ.*	*не сущ.*
знак $f''(x_0)$ *лев., прав.*	$\overset{-}{\cap}\ \overset{+}{\cup}$	$\overset{+}{\cup}\ \overset{-}{\cap}\ \overset{+}{\cup}$	$\overset{-}{\cap}\ \overset{+}{\cup}$	$\overset{+}{\cup}\ \overset{-}{\cap}$
перегиб $f(x)$	да	да	да	да
графики				

Асимптоты

Графическое определение:

★ *Асимптотой называется прямая, к которой стремится кривая в бесконечно удалённой точке.*

Аналитическое определение:

★ *Асимптотой называется линейная функция, эквивалентная заданной функции или обратной функции в бесконечно удалённой точке.*

• *Если бесконечно удалённой точкой является* $x = \infty$, *то асимптоту называют наклонной, а если бесконечно удалённой точкой является* $y = \infty$ *при* x *конечном, то асимптоту называют вертикальной.*

Пример 2. *Найти асимптоты функции* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$, *используя только определение асимптот через эквивалентные.*

$\triangleright$ 1. *Наклонная асимптота:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} = x - 3 + \frac{8}{x + 1} = \underbrace{x - 3}_{y_{\text{ас}}} + o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$

2. *Вертикальная асимптота:*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \;\Rightarrow\; x + 1 = \frac{x^2 - 2x + 5}{y} = 0 + o(1) \quad \text{при } y \to \infty.$$

Ответ: $y_{ac} = x - 3$, $x_{ac} = -1$ $\triangleleft$

• $\boxed{\text{Если } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \text{ то } x_{ac} = x_0}$ — вертикальная асимптота

Задача 3

Пусть функция $f(x)$ *имеет наклонную асимптоту, т.е.* $f(x) = kx + l + o(1)$ *при* $x \to \infty$. *Найти* $\boxed{y_{ac} = kx + l}$.

$\blacktriangleright$ 1. *Делим* $f(x)$ *на* x *и вычисляем предел:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{l}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{o(1)}{x} \;\Rightarrow\; \boxed{k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

2. *Переносим в левую часть* kx *и вычисляем предел:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (l + o(1)) \Rightarrow \boxed{l = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)} \;\blacktriangleleft$$

• *При построении графика функции находят её область определения, асимптоты, исследуют на экстремум и перегиб.*

Пример 3. *Построить график функции* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

$\triangleright$ 1. *Находим область определения функции:*

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad x = 0 \text{ — точка разрыва 2-го рода.}$$

2. *Выявляем характерные особенности функции (чётность, периодичность, знакопостоянство и т.д.):*

$$f(x) \geqslant 0, \quad f(1) = 0 \text{ — функция не отрицательна.}$$

3. *Находим асимптоты функции:*

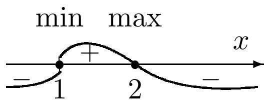
$$f(x) \to +0 \text{ при } x \to \pm\infty \Rightarrow y = 0 \text{ — горизонтальная асимптота}$$

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ — вертикальная асимптота}$$

4. *Исследуем функцию на экстремум*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{-x+1}{x^2} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

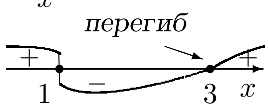
Критические точки: $x = 1, 2$. $f'(x)$:

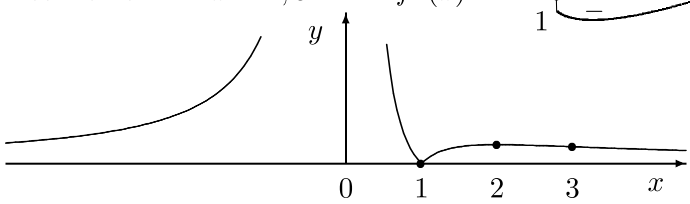


5. *Исследуем функцию на перегиб*

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\begin{cases} \dfrac{-x+2}{x^3} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2(x-3)}{x^4} & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{2(3-x)}{x^4} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Критические точки: $x = 1, 3$. $f''(x)$:





- *В точке* $x = 1$ *нет перегиба, поскольку нет касательной.* $\triangleleft$