"Единственная практическая проблема —
Что делать дальше?"

Энон

Раздел 8

Теория рядов

Лекция 53. Сходимость и сумма числового ряда

Из этой лекции станет ясно, что не всякая сумма бесконечного числа слагаемых равна бесконечности.

★ *Формальная сумма элементов $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ числовой последовательности называется числовым рядом,*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots} \quad \text{— числовой ряд,}$$

при этом слагаемые называют членами ряда, а u_n — общим членом ряда.

★ *Сумма первых n слагаемых ряда называется n-ой частичной суммой*

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \quad \text{— } n\text{-ая частичная сумма}$$

★ *Если все члены ряда положительны, то ряд будем называть знакоположительным.*

★ *Если предел частичных сумм существует и конечен, то ряд называется сходящимся, в противном случае говорят, что ряд расходится.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S} \quad \text{— сумма ряда}$$

Ряд геометрической прогрессии

★ *Рядом геометрической прогрессии называется следующий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \ ,$$

где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Задача 1

Показать, что n-ая частичная сумма ряда геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}.}$$

► *Доказательство этой формулы проводится методом математической индукции, но ещё проще её можно получить прямым делением*

$$\begin{array}{l|l}
a - aq^n & 1-q \\ \cline{2-2}
\underline{a - aq} & a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\
\quad aq - aq^n & \\
\quad \underline{aq - aq^2} & \\
\qquad \cdots & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad aq^{n-1} - aq^n & \\
\qquad\quad \underline{aq^{n-1} - aq^n} & \\
\qquad\qquad\quad 0. &
\end{array}$$

◄

Задача 2

Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда геометрической прогрессии $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$.

► 1. $|q| < 1 \implies$ *сходится.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}}_{=0} = \frac{1}{1-q}.$$

$\boxed{S = \dfrac{1}{1-q}}$ — сумма ряда геометрической прогрессии

2. $|q| > 1 \implies$ *расходится.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}}_{=\infty} = \infty.$$

3. $q = 1 \implies$ *расходится.*

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

4. $q = -1 \implies$ *расходится.*

$S_n = \underbrace{1 - 1 + \cdots \pm 1}_{n} = 0$ *или* 1; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *не существует* ◄

Необходимое условие сходимости числового ряда

Задача 3

Показать, что если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

► *По условию задачи* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *но тогда*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n-1\to\infty}} S_{n-1} = S.$$

Вопрос: Какое соотношение связывает S_n *и* S_{n-1}*?*

Ответ: $S_n = S_{n-1} + u_n$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n \implies S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \implies$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0} \text{ — необходимое условие сходимости } \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1000n}$.

$\triangleright \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000n} = \frac{1}{1000} \neq 0$ — *расходится* $\triangleleft$

Гармонический ряд

★ *Гармоническим рядом называется числовой ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots}\,.$$

Вопрос: Что вы можете сказать о сходимости гармонического ряда?

Ответ: Только невыполнение необходимого условия сходимости позволяет делать определённый вывод, а его выполнение, как в данном случае, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, *не позволяет судить о сходимости.*

- *В дальнейшем мы сможем показать, что этот ряд расходится.*

Достаточные признаки сходимости

Вопрос: Как вы думаете, для чего нужны достаточные признаки сходимости числовых рядов?

Ответ: Прежде чем вычислять сумму ряда, необходимо убедиться, что он сходится. Иначе большие усилия можно затратить на вычисление того, чего не существует.

Признак сравнения

Задача 4

Пусть заданы два числовых ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ (2) *и пусть* $u_k \geqslant v_k \geqslant 0$. *Показать, что тогда из сходимости ряда* (1) *следует сходимость ряда* (2), *а из расходимости ряда* (2) *следует расходимость ряда* (1).

► $u_k \geqslant v_k \implies \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \implies \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k.$

1. *Если ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k\,,$$

что означает сходимость ряда (2).

2. *Если ряд* (2) *расходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \infty\,,$$

что означает расходимость ряда (1). ◄

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

▷ *Распишем этот ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n} + \cdots.$

Вопрос: С каким рядом данный ряд вы думаете сравнивать?

Ответ: С рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. *Поскольку начиная с* $k = 2$ *выполняется неравенство* $1/2^n \geqslant 1/n^n$, *то заданный ряд сходится.* ◁

Лекция 54. Достаточные признаки сходимости рядов

Как мы увидим, вопрос о сходимости числовых рядов как правило сводится к вычислению предела.

Предельный признак сравнения

Задача 1

Пусть заданы два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ (1) *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_k$ (2) *и пусть* $u_k, v_k \geqslant 0$. *Показать, что если предел отношения общих членов этих рядов существует и конечен* $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A}$, *то ряды* (1) *и* (2) *сходятся или расходятся одновременно.*

► *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A \iff \quad A - \varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < A + \varepsilon \quad \text{при } k > N$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(A-\varepsilon)v_k <}_{1} u_k \underbrace{< (A+\varepsilon)v_k}_{2}$$

1. *Пусть ряд* (2) *сходится, тогда ряд* $(A+\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, *отличающийся от* (2) *на множитель, также сходится. Теперь из признака сравнения, согласно неравенству* 2, *ряд* (1) *сходится.*

2. *Пусть ряд* (1) *сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 1, *ряд* (2) *сходится.*

3. *Пусть ряд* (1) *расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 2, *ряд* (2) *расходится.*

4. *Пусть ряд* (2) *расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству* 1, *ряд* (1) *расходится.* ◄

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$.

▷ *Вопрос: Какой ряд имеет смысл сопоставить данному?*

Ответ: Расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}\ \text{— ряд расходится}\quad\triangleleft$$

Признак Даламбера

Задача 2

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_k$ (1) $(u_k>0)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{u_{k+1}}{u_k}=l$. *Показать, что если* $l<1$, *то ряд сходится, а если* $l>1$, *то ряд расходится.*

▶ *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=l \iff \quad l-\varepsilon<\frac{u_{k+1}}{u_k}<l+\varepsilon \quad \text{при}\ \ k>N$$

$$\Downarrow$$

$$(l-\varepsilon)u_k<u_{k+1}<(l+\varepsilon)u_k$$

Поскольку по определению предела ε *— произвольная постоянная, то мы выбираем её такой, чтобы при* $l<1$ *и* $l+\varepsilon<1$, *а при* $l>1$ *и* $l-\varepsilon>1$. *Далее сопоставим заданному ряду* (1) *ряды геометрической прогрессии* (2) *и* $(2')$:

$$\sum_{k=N}^{\infty}u_k=u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots. \tag{1}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty}v_k=u_N+u_N(l+\varepsilon)+u_N(l+\varepsilon)^2+\cdots. \tag{2}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty}v'_k=u_N+u_N(l-\varepsilon)+u_N(l-\varepsilon)^2+\cdots. \tag{2'}$$

удовлетворяющие неравенствам $v'_k\leqslant u_k\leqslant v_k$.

1. *Пусть $l < 1$ и $l + \varepsilon < 1$, тогда ряд (2) сходящийся, а значит, согласно второму неравенству и признаку сравнения ряд (1) сходится.*

2. *Пусть $l > 1$ и $l - \varepsilon > 1$, тогда ряд $(2')$ расходящийся, а значит, согласно первому неравенству и признаку сравнения ряд (1) расходится. Итак,*

$$\boxed{\text{если} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = l, \ \text{то} \begin{cases} \text{при} \ \ l < 1 - \ \text{ряд сходится;} \\ \text{при} \ \ l > 1 - \ \text{ряд расходится.} \end{cases}} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

$$\triangleright \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 = l < 1 \text{ — ряд сходится} \quad \triangleleft$$

Признак Коши

Задача 3

Пусть дан ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_k$ (1) $(u_k \geqslant 0)$ *и пусть* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$. *Показать, что если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$, то ряд расходится.*

▶ *Согласно определению предела последовательности*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l \iff l - \varepsilon < \sqrt[k]{u_k} < l + \varepsilon \ \text{ при } \ k > N$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(l-\varepsilon)^k <}_{1} u_k \underbrace{< (l+\varepsilon)^k}_{2}$$

Вопрос: Что вы предлагаете делать дальше?

Ответ: *В данной задаче достаточно просуммировать неравенства* (1) *и* (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^k < \sum_{n=1}^{\infty}u_k < \sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^k,$$

откуда следует

$$\boxed{\text{если } \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=l, \text{ то } \begin{cases} \text{при } l<1 \text{ — ряд сходится;} \\ \text{при } l>1 \text{ — ряд расходится.} \end{cases}}$$ ◄

Пример 3. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^n}$.

$\triangleright$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}} = 0 < 1$ — *ряд сходится* $\triangleleft$

Пример 4. *Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots .$$

$\triangleright$ 1. *Воспользуемся признаком Даламбера*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1 = l\,.$$

• *Если* $l=1$, *то признак Коши или Даламбера не позволяет судить о сходимости ряда.*

2. *Найдём* n*-ую частичную сумму и вычислим её предел.*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \text{ — ряд сходится} \quad \triangleleft$$

Лекция 55. Ряд Дирихле. Знакопеременные ряды

Мы убедимся, что известное утверждение: от перестановки слагаемых сумма не меняется — имеет свою границу.

Интегральный признак сходимости

Задача 1

Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, *где* $f(k)$ *знакоположительная, невозрастающая функция. Показать, что если ему сопоставить несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, *то этот ряд и этот несобственный интеграл сходятся или расходятся одновременно.*

► *По условию задачи*

$$f(k+1) \leqslant f(\xi) \leqslant f(k), \ \text{при}\ \xi \in [k,\ k+1].$$

Вопрос: Воспользовавшись теоремой о среднем (Лекция 28), *представить* $f(\xi)$ *в виде определённого интеграла.*

Ответ:

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = f(\xi)(k+1-k) = f(\xi), \ \text{при}\ \xi \in [k,\ k+1].$$

Вопрос: Как будет выглядеть исходное неравенство после его суммирования с учётом найденного обстоятельства?

Ответ:

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leqslant \int\limits_{1}^{\infty}}_{1} f(x)\ \underbrace{dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k)}_{2}$$

1. *Пусть правый ряд сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, несобственный интеграл сходится.*

2. *Пусть несобственный интеграл сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, ряд сходится.*

3. *Пусть левый ряд расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, несобственный интеграл расходится.*

4. *Пусть несобственный интеграл расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, ряд расходится.* ◄

Ряд Дирихле

★ *Рядом Дирихле называется знакоположительный ряд*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{k^{\alpha}} + \cdots} \text{ — ряд Дирихле}$$

• *При* $\alpha = 1$ *ряд Дирихле становится гармоническим.*

Задача 2

Исследовать на сходимость ряд Дирихле.

► *Вопрос: Какой признак сходимости вы будете использовать?*

Ответ: Интегральный признак сходимости, согласно которому

$$\text{ряд} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{и интеграл} \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Вопрос: *Что вы можете сказать о сходимости этого несобственного интеграла?*

Ответ: *Согласно частному предельному признаку сходимости для интеграла с неограниченным пределом интегрирования* (Лекция 32) *такой интеграл сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$. ◀

• *В данной задаче доказано, что гармонический ряд расходится, причём логарифмически.*

Пример 1. *Подсчитать N-ую частичную сумму расходящегося гармонического ряда, если число слагаемых в нём равно числу атомов во вселенной.*

▷ *Вопрос:* *Чему равно число атомов во вселенной, если известно, что радиус вселенной равен десять миллиардов световых лет, а средняя плотность вещества во вселенной равна одному атому в кубическом сантиметре?*

Ответ: $N \sim 10^{84}$.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \simeq \int\limits_1^N \frac{dk}{k} = \ln N = \ln 10^{84} \simeq 194 \quad \triangleleft$$

Знакопеременные ряды

★ *Числовой ряд называется знакопеременным, если он содержит как положительные так и отрицательные слагаемые.*

★ $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k, \ \text{где } u_k > 0}$ — знакочередующийся ряд

Признак Лейбница

Задача 3

Пусть знакопеременный ряд удовлетворяет следующим условиям:

— *ряд знакочередующийся;*
— *ряд не возрастающий* $u_{k+1} \leqslant u_k$*;*
— *выполняется необходимое условие* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Показать, что в этом случае ряд сходится, причём его сумма не превышает первое слагаемое $u_1 > 0$.

► *Если число слагаемых чётно, то*

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - \dots - u_{2n-2} + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{>0} - \dots - \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{>0} - u_{2n} < u_1 \implies$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} S_{2n} < u_1.$$

Вопрос: А если число слагаемых нечётно?

Ответ: Тогда воспользуемся необходимым условием

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}}_{=0} = S < u_1. \quad ◄$$

• *Условия решённой задачи составляют признак Лейбница.*

Абсолютная и условная сходимость

★ *Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его слагаемых.*

★ *Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если он сходится (например, по признаку Лейбница), но ряд из модулей его слагаемых расходится.*

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$.

$\triangleright$ 1. *Вопрос: Удовлетворяет ли этот ряд признаку Лейбница?*
Ответ: Да, он удовлетворяет всем трём его условиям.

2. *Проверим, сходится ли ряд из модулей его слагаемых*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \implies \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Ответ: Данный ряд сходится условно. $\triangleleft$

Задача 4

Показать на примере знакочередующегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$, *что сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка суммирования слагаемых этого ряда.*

$\blacktriangleright$ *Переставим члены ряда и сгруппируем их по трое*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})} +$$

$$+ \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})} + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}S. \blacktriangleleft$$

• *От перестановки слагаемых сумма условно сходящегося ряда меняется, а сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется.*

Лекция 56. Функциональные ряды

Подобно тому, как для функции мы интересуемся областью её определения, так для функционального ряда нас должна интересовать его область сходимости.

★ *Функциональным рядом называется такой ряд*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,}$$

каждое слагаемое которого является функцией x.

★ *Функциональный ряд называется сходящимся в области D, если существует конечный предел частичной суммы его, т.е.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \text{при } \forall x \in D.}$$

★ *Множество всех значений x, при которых ряд сходится, называют областью сходимости.*

★ *Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области D, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое N, что выполняется неравенство*

$$\boxed{|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \text{при } n > N,}$$

где N не зависит от x.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно при $x \in D$, если ему можно сопоставить сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, такой, что выполняется $|u_k(x)| \leqslant v_k$.

Задача 1

Применить признак сходимости Даламбера для функционального ряда.

▶ *Сопоставим функциональному ряду ряд из модулей его членов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|.$$

Такой ряд для каждого конкретного x является знакоположительным числовым рядом к которому применим признак Даламбера

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} < 1.$$

При всех значениях x, когда предел меньше единицы, функциональный ряд сходится, причём абсолютно, а само множество этих значений x является его областью сходимости. ◀

Область сходимости степенного ряда

★ *Если $u_k(x) = a_k x^k$, то ряд называется степенным.*

Задача 2

Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти область сходимости степенного ряда.

▶ *По условию задачи $u_k(x) = a_k x^k$, и тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} < 1 \Rightarrow |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1,$$

откуда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R} \quad \text{— радиус сходимости по Даламберу} \quad ◀$$

• *В интервале $(-R,\ R)$ степенной ряд сходится абсолютно.*

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$.

▷ 1. *Находим радиус сходимости степенного ряда*

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1} = 1\,.$$

2. *На границах области сходимости проводим дополнительное исследование*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^k = 1 \pm 1 + 1 \pm \cdots \quad \text{— расходится.}$$

Вопрос: Не напоминает ли вам что-нибудь этот степенной ряд?

Ответ: По сути это ряд геометрической прогрессии, который, как ещё раз мы установили, абсолютно сходится при $x \in (-1,\ 1)$, *и расходится при* $|x| \geqslant 1$. ◁

Задача 3

Получить радиус сходимости степенного ряда, используя признак сходимости Коши.

▶ *Вопрос: Как будет выглядеть признак Коши для функционального ряда?*

Ответ: $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|} < 1$.

Для степенного ряда то же неравенство принимает вид:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1 \Rightarrow |x|\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

откуда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R} \quad \text{— радиус сходимости по Коши} \quad ◀$$

Разложение функций в степенные ряды

Вопрос: Чему равна эквивалентная функции в окрестности точки x_0, если функция в этой точке n раз дифференцируема?

Ответ: Многочлену Тейлора (Лекция 21).

★ *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 и $|f^{(k)}(x_0)| \leqslant M$, тогда в окрестности этой точки функция раскладывается в степенной ряд*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k} \quad \text{— ряд Тейлора}$$

Вопрос: Как выглядит ряд Тейлора при $x_0 = 0$?

Ответ:
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} \quad \text{— ряд Маклорена}$$

Пример 2. *Разложить e^x в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость.*

▷ 1. $f^{(k)}(0) = (e^x)^{(k)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1 \Longrightarrow e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}.$

2. $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)!}{k!} = \lim\limits_{k\to\infty}(k+1) = \infty$

Ответ: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$, *при* $D:\ (-\infty,\ \infty)$. ◁

Пример 3. *Разложить $\sin x$ в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость (самостоятельно).*

▷ *Ответ:* $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *при* $D:\ (-\infty,\ \infty)$. ◁

Лекция 57. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов позволяет заданные ряды сводить к уже известным рядам, например, вычислить сумму такого ряда: $1+2{\cdot}0.3+3{\cdot}(0.3)^2+4{\cdot}(0.3)^3+\cdots$.

Задача 1 (об интегрировании рядов)

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{1}$$

равномерно сходится. Показать, что в этом случае ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = V(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{2}$$

будет сходиться, если

$$v_k(x) = \int\limits_a^x u_k(t)\,dt, \quad \text{причём} \quad V(x) = \int\limits_a^x S(t)\,dt.$$

▶ *Поскольку ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \implies |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

при этом, согласно определению равномерной сходимости, ε *не зависит от* x *при* $n > N$. *Покажем, что*

$$|V_n(x) - V(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,\ x \in [a,\ b].$$

Вопрос: Чему равна n-ая частичная сумма ряда (2)?

Ответ:

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x u_k(t)\,dt = \int\limits_a^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,dt = \int\limits_a^x S_n(t)\,dt.$$

Вопрос: *Какую цепочку соотношений теперь нужно записать?*

Ответ:

$$\left|\int_a^x S_n(t)\,dt - \int_a^x S(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x \Big(S_n(t) - S(t)\Big)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x |S_n(t) - S(t)|\,dt < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leqslant \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 1. *Вычислить:* $0.3 + \dfrac{(0.3)^2}{2} + \dfrac{(0.3)^3}{3} + \cdots$.

$\triangleright$ 1. *Сопоставим заданному числовому ряду степенной ряд*

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

2. *Исследуем этот ряд на сходимость*

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1\,.$$

3. *Вопрос:* *Какому степенному ряду он всего ближе?*

Ответ: *Ряду геометрической прогрессии*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

который равномерно сходится при $|x| \leqslant r < 1$.

Вопрос: *Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?*

Ответ: *Да, это можно сделать посредством интегрирования.*

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^x 1\,dt + \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt + \cdots & = & \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} \\ & \Downarrow & \\ \displaystyle x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots & = & -\ln|1-x| \end{array}$$

Ответ: $V(0.3) = -\ln|1-0.3| = -\ln 0.7 \approx 0.35 \quad \triangleleft$

Пример 2. *Разложить в степенной ряд* $\operatorname{arctg} x$ *для* $|x| < 1$.

$\triangleright$ *Вопрос: Можно ли* $\operatorname{arctg} x$ *записать в виде определённого интеграла?*

Ответ: Да, причём $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x$.

Вопрос: Можно ли подынтегральное выражение представить в виде ряда?

Ответ: Подынтегральное выражение — это сумма ряда геометрической прогрессии с $q = -x^2$*:*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots .$$

Вопрос: Можно ли проинтегрировать этот ряд?

Ответ: Да, поскольку ряд геометрической прогрессии равномерно сходится при $|x| \leqslant r < 1$.

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots . \quad \triangleleft$$

Задача 2 (о дифференцировании рядов)

Пусть задан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{1}$$

и пусть ряд из его производных $w_k(x) = u_k'(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) = W(x) \quad \text{при} \quad x \in [a,\ b] \tag{2}$$

равномерно сходится. Показать, что $S'(x) = W(x)$.

$\blacktriangleright$ *Поскольку ряд* (2) *равномерно сходится, то его можно, согласно* Задачи 1 *проинтегрировать, причём*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x w_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x)-u_k(a)) =$$

$$= S(x)-S(a) = \int_a^x W(t)\,dt \implies S'(x) = W(x). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. *Вычислить:* $1+2\cdot 0.3+3\cdot(0.3)^2+4\cdot(0.3)^3+\cdots$.

$\triangleright$ 1. *Сопоставим заданному числовому ряду степенной ряд.*

$$1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k \quad (x=0.3).$$

2. *Очевидно, что ряд сходится при* $|x|<1$.

3. *Вопрос: Можно ли преобразовать ряд геометрической прогрессии к заданному ряду?*

Ответ: Да, посредством дифференцирования.

$$\begin{array}{rcl} (1+x+x^2+x^3+\cdots)' & = & \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\right)' = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)', \\ & \Downarrow & \\ 1+2\cdot x+3\cdot x^2+\cdots & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}. \end{array}$$

Ответ: $W(0.3) = \dfrac{1}{(1-0.3)^2} = \dfrac{1}{0.49} \approx 2.04 \quad \triangleleft$

Пример 4. *Выразить интеграл вероятности* $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ *в виде степенного ряда.*

$$\triangleright \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \left\{ e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \quad \triangleleft$$

Лекция 58. Вычисление иррациональных чисел и определённых интегралов

Такие известные со школы числа как e, π, $\sqrt{2}$ вычисляются с помощью рядов.

Задача 1 (о вычислении e)

Вычислить e с точностью 0.1.

▶ *Вопрос: Какой степенной ряд имеет отношение к числу e?*

Ответ: Ряд Маклорена $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, *с радиусом* $R = \infty$.

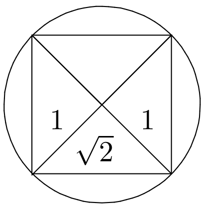
Вопрос: Какой числовой ряд равен числу e?

Ответ: $e = e^x\Big|_{x=1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \approx$

$$\approx 2 + 0.5 + 0.166 + 0.041 \approx 2.7 \quad ◀$$

Задача 2 (о вычислении $\sqrt{2}$)

Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью 0.01.



▶ *Вопрос: Какой степенной ряд имеет отношение к числу $\sqrt{2}$?*

Ответ: Таким рядом будет разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^p$. Так как

$$((1+x)^p)^{(k)}\Big|_{x=0} = p(p-1)\cdots(p-k+1),$$

то биноминальный ряд имеет вид:

$$\boxed{(1+x)^p = 1 + \tfrac{p}{1!}x + \tfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}x^k + \cdots}$$

Вопрос: Каков радиус сходимости биноминального ряда?

Ответ: $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{k+1}{p-k}\right| = 1,$

т.е. необходимо представить искомое число в виде биномиального ряда при $|x| < 1$. Легко убедиться, но тяжело догадаться, что ключом решения является равенство:

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1+x}, \text{ где } x = -0.02.$$

Таким образом, по формуле биномиального ряда

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{2}0,02 - \frac{1}{8}0.0004 - \cdots\right) = \frac{10}{7}(1-0.01) \approx 1.41 \quad ◀$$

Задача 3 (о вычислении π)

Вычислить π с точностью 0.01.

▶ *Вопрос: Какой ряд можно использовать для вычисления числа π?*

Ответ: Любую обратную тригонометрическую функцию.

Вопрос: Какое из равенств вы предпочли бы использовать для вычисления π : $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ *или* $\arcsin 0.5 = \pi/6$*?*

Ответ: Конечно второе, поскольку при меньшем аргументе степенной ряд сходится быстрее.

Вопрос: Каким образом можно найти первые члены ряда $\arcsin x$*?*

Ответ: С помощью интегрирования биномиального ряда

$$\pi = 6\arcsin 0.5 = 6\int_0^{0.5}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 6\int_0^{0.5}[1+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}t^4+\frac{5}{16}t^6+\cdots]\,dt =$$

$$= 6[t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + \frac{5}{102}t^7 + \cdots]\Big|_0^{0.5} = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \cdots \approx 3.14 \quad ◀$$

Вычисление определённых интегралов

Задача 4 (о вычислении интегрального синуса)

Вычислить $\int\limits_0^{0.2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ *с точностью до* 0.001.

$$► \int\limits_0^{0.2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\{ \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad R = \infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{0.2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\Big|_0^{0.2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0.2^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(0.2)^5}{5\cdot 5!} - \cdots =$$

$$= 0.2 - \frac{4}{9}10^{-3} + \frac{16}{3}10^{-7} - \cdots \approx 0.199 \quad ◄$$

Задача 5

Вычислить $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx$ *с точностью до* 0.01.

$$► \int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx = \left\{ e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k k!}, \quad R = \infty \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{3^k k!(2k+1)}\Big|_0^{1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k k!(2k+1)} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\cdot 2\cdot 5} - \frac{1}{27\cdot 6\cdot 7} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{90} - \frac{1}{1134} + \cdots \approx 1 - 0.11 + 0.01 = 0.90 \quad ◄$$

Лекция 59. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

В тех случаях, когда не удаётся проинтегрировать дифференциальное уравнение, его можно решить с помощью рядов.

Точное решение дифференциального уравнения или метод неопределённых коэффициентов

Задача 1 (общее решение дифференциального уравнения)

Решить уравнение: $y'' - x^2 y = 0$.

► *Вопрос: Идентифицируйте данное уравнение.*

Ответ: Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Оно не соответствует ни одному из трёх типов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Вопрос: С помощью неопределённых коэффициентов представьте в виде степенных рядов искомую функцию и её производные.

Ответ:
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$
$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1},$$
$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}.$$

Вопрос: Найдите реккурентные соотношения между неопределёнными коэффициентами.

Ответ: Подстановка рядов в уравнение даёт тождество, где проведено переобозначение идексов суммирования
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \equiv 0,$$

которое верно, если

$$\begin{array}{ll} x^0: & a_2 2\cdot 1 = 0 \\ x^1: & a_3 3\cdot 2 = 0 \\ x^2: & a_4 4\cdot 3 - a_0 = 0 \\ x^3: & a_5 5\cdot 4 - a_1 = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \boxed{a_2 = 0} \\ \boxed{a_3 = 0} \end{array}$$

С учётом полученных соотношений, то же тождество можно переписать иначе

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+4}(k+4)(k+3)x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} \equiv 0,$$

откуда следует реккурентное соотношение

$$\boxed{a_{k+4} = \frac{a_k}{(k+4)(k+3)}}.$$

Вопрос: *Выразите все коэффициенты через* a_0 *и* a_1.

Ответ: *Очевидно, что через* a_0 *выразятся коэффициенты с индексами 4, 8, 12, 16 и т.д., а через* a_1 *выразятся коэффициенты с индексами 5, 9, 13, 17 и т.д., при этом они равны*

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{4k} = \dfrac{a_0}{4k(4k-1)\cdots 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}, \\ a_{4k+1} = \dfrac{a_1}{(4k+1)4k\cdots 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}. \end{array}}$$

В результате общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k}x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k+1}x^{4k+1} =$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_0 x^{4k}}{4k(4k-1)\cdots 4\cdot 3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 x^{4k+1}}{(4k+1)4k\cdots 5\cdot 4} \quad ◄$$

Задача 2 (задача Коши)

Решить уравнение: $y'' - xy' + y = 1$ *при* $y(0) = y'(0) = 0$.

► 1. *Это уравнение того же типа, что и в* Задаче 1, *с тем несущественным для нас отличием, что коэффициенты его линейные функции x. Поэтому, поступаем аналогично*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \ y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \ y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2}.$$

2. *Начальные условия позволяют найти обе константы интегрирования*

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0, \\ y'(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k 0^{k-1} = 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline a_0 = 0 \\ \hline a_1 = 0 \\ \hline \end{array}$$

3. *Подстановка рядов в уравнение даёт тождество*

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - a_{k+1}(k+1)x^{k+1} + a_k x^k] \equiv 1,$$

которое верно, если

$$\begin{array}{lll} x^0: & a_2 2 \cdot 1 + a_0 = 1 & \Longrightarrow \quad a_2 = \dfrac{1}{2 \cdot 1} \\ x^1: & a_3 3 \cdot 2 - a_1 + a_1 = 0 & \Longrightarrow \quad a_3 = 0 \\ x^2: & a_4 4 \cdot 3 - a_2 2 + a_2 = 0 & \Longrightarrow \quad a_4 = \dfrac{a_2}{4 \cdot 3} \\ x^3: & a_5 5 \cdot 4 - a_3 3 + a_3 = 0 & \Longrightarrow \quad a_5 = 0 \\ x^4: & a_6 6 \cdot 5 - a_4 4 + a_4 = 0 & \Longrightarrow \quad a_6 = \dfrac{3a_4}{6 \cdot 5} \end{array}$$

Итак, $a_{2k} = \dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!}$, где $\boxed{(2k-3)!! = (2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$

В результате частное решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!} x^{2k} \quad ◄$$

Приближённое решение задачи Коши

Задача 3 (приближённое частное решение)

Найти приближённое решение уравнения:

$$y'' = x + y^2, \text{ если } y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

в виде степенного многочлена.

► *Вопрос: Найдите первые пять отличных от нуля коэффициентов многочлена, являющегося приближённым решением.*

Ответ: Для этого воспользуемся многочленом Маклорена

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

в котором предстоит найти первые пять отличных от нуля производных.

Вопрос: Как найти эти производные?

Ответ: Это легко сделать, последовательно подставляя в исходное уравнение начальные условия, и его дифференцируя

$$\begin{aligned} y''(0) &= x + y^2\Big|_0 = 0, & y^{(4)}(0) &= 2y'^2 + 2yy''\Big|_0 = 2,\\ y'''(0) &= 1 + 2yy'\Big|_0 = 1, & y^{(5)}(0) &= 6y'y'' + 2yy'''\Big|_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(6)}(0) &= 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)}\Big|_0 = 8,\\ y^{(7)}(0) &= 20y''y''' + 10y'y^{(4)} + 2yy^{(5)}\Big|_0 = 20. \end{aligned}$$

Таким образом получаем приближённое решение:

$$y(x) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + 0 + \frac{8}{6!}x^6 + \frac{20}{7!}x^7.$$

Проверка:

$$y'' \approx x + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \approx x + y^2 \approx x + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^5 \quad ◄$$

Лекция 60. Тригонометрические ряды

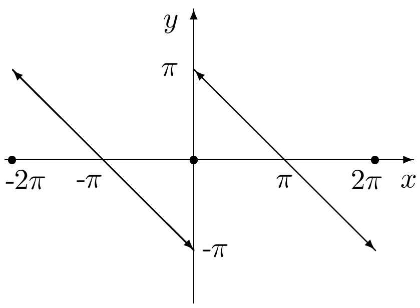
Периодическую кусочно-гладкую функцию лучше описывать не степенным, а тригонометрическим рядом.

★ *Функция называется периодической кусочно-гладкой функцией, если она определена, непрерывна и дифференцируема на всей действительной оси за исключением заданных точек, в которых терпит разрыв первого рода, и удовлетворяет равенству:*

$$\boxed{f(x) = f(x+T)}\,, \quad \text{где } T \text{ —период.}$$

Пример 1. *Построить график периодической кусочно-гладкой функции с периодом равным 2π.*

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in (0, 2\pi)\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$



▷ *Вопрос: Чему равна эта функция при $x = \pm 2\pi$?*

Ответ: По определению

$$f(0) = 0 \;\; \text{и} \;\; T = 2\pi,$$

следовательно

$$f(\pm 2\pi) = 0. \quad \triangleleft$$

Задача 1

Графически отобразить сумму тригонометрического ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

► *Вопрос: Каким образом можно решить эту задачу?*

Ответ: *Построим графики первых трёх слагаемых этого ряда*

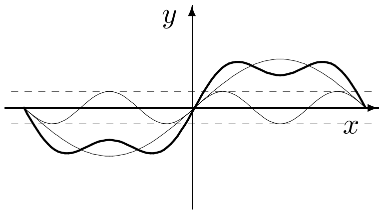
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots.$$

и сложим их.

Вопрос: *Каков период* $\sin 3x$*?*

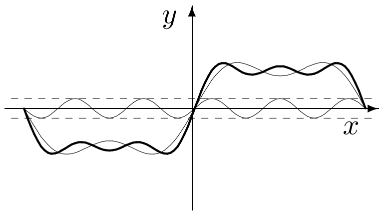
Ответ: *Поскольку* $\sin x=\sin{(x+2\pi)}$, *то*

$$\sin 3x=\sin{(3x+2\pi)}=\sin 3(x+\frac{2\pi}{3})\implies T=\frac{2\pi}{3}$$



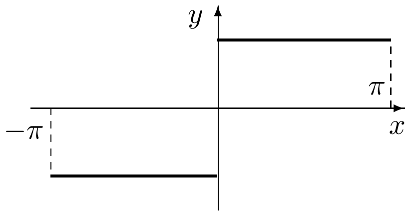
На первом рисунке представленна сумма первых двух гармоник.

Вопрос: *Каков будет ваш следующий шаг?*



Ответ: *К полученному графику следует прибавить график следующей гармоники.*

Вопрос: *Если продолжить суммирование гармоник, каков будет окончательный результат?*



Ответ: *Очевидно, что результатом суммирования будет ступенчатая функция:*

$$f(x)=\frac{\pi}{4}\begin{cases}1 & x\in(0,\pi),\\ -1 & xin(-\pi,0),\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

Величина $\pi/4$ *следует не из построения, а из* Задачи 4. ◀

Ряд Фурье

ЗАДАЧА 2

Показать, что если подынтегральная функция и её первообразная являются периодическими функциями, то определённый интеграл равен нулю, если отрезок интегрирования равен периоду T.

$$\blacktriangleright \quad \int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = F(a+T) - F(a) = 0 \quad \blacktriangleleft$$

ЗАДАЧА 3

Определить коэффициенты тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

если заданная функция $f(x)$ является периодической кусочно–гладкой функцией с периодом равным 2π.

$\blacktriangleright$ *Вопрос: Каким образом будем находить коэффициенты $a_0,\ a_k,\ b_k$?*

Ответ: Интегрируя исходное равенство с различными весовыми функциями: $1,\ \cos mx,\ \sin mx$.

1. $a_0 =?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \right).$$

Согласно Задаче 2 *интегралы по периоду от косинусов и синусов равны нулю. В результате*

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,.}$$

2. $a_k = ?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,dx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\,dx\right)$$

Первый интеграл равен нулю, а для интегрирования двух последних вспомним тригонометрические формулы:

$$\cos mx\cos kx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right)$$
$$\cos mx\sin kx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-k)x + \sin(m+k)x\right)$$

Очевидно, что интегралы от всех функций равны нулю, исключая только единственный

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(m-k)x\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{при } m = k,\\ 0, & \text{при } m \neq k.\end{cases}$$

В результате

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,.}$$

2. $b_k = ?$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin mx\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mx\,dx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mx\,dx\right)$$

Для вычисления последнего интеграла потребуется ещё одна тригонометрическая формула

$$\sin mx \sin kx = \frac{1}{2}\left(\cos\,(m-k)x - \cos\,(m+k)x\right)$$

согласно которой он отличен от нуля только при $m = k$. *Таким образом*

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.} \quad ◀$$

★ *Тригонометрический ряд с определёнными выше коэффициентами называется рядом Фурье.*

Задача 4

Разложить в ряд Фурье периодическую кусочно-гладкую функцию, т.е. решить задачу почти обратную к Задаче 2.

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\begin{cases} 1 & x \in (0,\pi), \\ -1 & x \in (-\pi,0), \\ 0 & x = 0. \end{cases} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,x \quad \textit{при} \quad x \in (-\pi,\pi).$$

▶ 1. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,x}_{\textit{нечет}}\,dx = 0$

2. $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,x\cos kx}_{\textit{нечет}}\,dx = 0$

3. $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}\,x\sin kx}_{\textit{чет}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx, dx =$

$$= -\frac{1}{2k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos k\pi - 1}{2k} = \frac{1}{k} \quad \textit{если} \quad k\textit{–нечётное.}$$

$$\textit{Ответ:} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \quad ◀$$

Лекция 61. Комплексный ряд Фурье

А в комплексных числах ряд Фурье значительно короче.

★ *Комплексным рядом называют такой числовой или функциональный ряд, членами которого в общем случае являются комплексные числа.*

★ *Комплексный ряд сходится, если сходятся как его действительная, так и мнимая части.*

Задача 1

Преобразовать ряд Фурье к комплексному ряду Фурье для периодической кусочно-гладкой функции с периодом, равным 2π.

▶ *Вопрос: Как выглядит ряд Фурье в действительной форме?*

Ответ:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\\ a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx. \end{gathered}}$$

Вопрос: Как выглядят в комплексной форме синус и косинус?

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\dfrac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}.$

После их подстановки в ряд Фурье он приобретёт вид

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{\mathrm{i}kx}+e^{-\mathrm{i}kx}}{2}+b_k\frac{e^{\mathrm{i}kx}-e^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}\right)=\\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}e^{\mathrm{i}kx}+\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}e^{-\mathrm{i}kx}\right). \end{aligned}$$

Вопрос: Как можно упростить коэффициенты ряда Фурье?

Ответ: Если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{\pm \mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi, \quad \textit{то}$$

$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos kx - \mathrm{i}\sin kx)\,dx = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx.$$

Очевидно, что

$$\frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2} = {c_k}^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{\mathrm{i}kx}\,dx = c_{-k}$$

Вопрос: Как можно представить ряд Фурье в виде суммы от одной функции?

Ответ:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}e^{-\mathrm{i}kx} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{\mathrm{i}kx} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \\ c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx. \end{gathered}}$$

— ряд Фурье в комплексных числах ◄

Задача 2

Показать, что система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx}\right\}$ *на отрезке* $[-\pi,\ \pi]$, *где* $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, *является ортогональной и нормированной на единицу.*

★ *Система функций* $\{\varphi_k(x)\}$ *называется ортогональной и нормированной на единицу на отрезке* $[-\pi,\ \pi]$, *если эти функции удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^*(x)\varphi_m(x)\,dx = (\varphi_k(x),\ \varphi_m(x)) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

▶ 1. *Если* $k = m$, *то равенство интеграла единице очевидно.*

2. *Если* $k \neq m$, *то согласно* Задаче 3 Лекции 60

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}(k-m)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos{(k-m)x} - \mathrm{i}\sin{(k-m)x}]\,dx = 0$$

Следовательно, $$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}(k-m)x}\,dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}}$$ ◀

Задача 3

Определить аргумент тригонометрической функции, период которой равен $T = \dfrac{2l}{k}$.

▶ *Вопрос: Чему равен период* $\cos kx$*?*

Ответ: Поскольку $\cos x = \cos{(x + 2\pi)}$, *то*

$$\cos kx = \cos{(kx + 2\pi)} = \cos k(x + \frac{2\pi}{k}) \implies T = \frac{2\pi}{k}$$

Вопрос: Чему равен период $\cos k\alpha x$*?*

Ответ: Очевидно $T = \dfrac{2\pi}{k\alpha}$.

Вопрос: При каком α *период* $\cos k\alpha x$ *равен* $T = \dfrac{2l}{k}$*?*

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{k\alpha} = \dfrac{2l}{k} \implies \alpha = \dfrac{\pi}{l}$

Ответ: $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ *имеет период* $T = \dfrac{2l}{k}$. ◀

Задача 4

Пусть функция $f(x)$ является периодической кусочно-гладкой функцией с периодом, равным $2l$. Разложить её в ряд Фурье.

► *Подобная задача решалась в* Задаче 2 Лекции 61, *с тем отличием, что $T = 2\pi \to T = 2l$. Как показано в предыдущей задаче, тригонометрические функции с периодом $\dfrac{2l}{k}$ должны иметь аргумент $\dfrac{k\pi x}{l}$. Тем самым нам остаётся записать искомый ряд Фурье:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \quad ◄$$

Задача 5

Пусть функция $f(x)$ является периодической кусочно-гладкой функцией с периодом равным $2l$. Записать ряд Фурье для этой функции в комплексной форме.

► *Вопрос: Чем будет отличаться искомый ряд от ряда полученного в* Задаче 1*?*

Ответ: Очевидно, только заменой:

$$kx \to \frac{k\pi x}{l}, \quad \pi \to l.$$

Следовательно, искомый ряд Фурье равен:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\,dx.} \quad ◄$$

Лекция 62. Интеграл Фурье

Если для периодических функций используют ряд Фурье, то для непериодических функций используют интеграл Фурье.

Задача 1

Пусть функция $f(x)$ — непериодическая, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая функция, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Представить такую функцию в виде интеграла Фурье, преобразовав соответствующий ряд Фурье.

▶ *Вопрос: При каком периоде функция перестанет быть периодической?*

Ответ: Если период станет равен ∞, т.е. при $l \to \infty$. Таким образом, если мы запишем ряд Фурье, а затем перейдём к пределу при $l \to \infty$, то мы решим поставленную задачу.

1. *Запишем ряд Фурье*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

2. *Подставим все коэффициенты в ряд Фурье*

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right) f(t)dt =$$

$$= f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi(x-t)}{l}f(t)\,dt$$

3. *Введём частоту гармоники* $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$. *Тогда сдвиг частот между соседними гармониками равен* $\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega_k = \dfrac{\pi}{l}$, *а сама функция примет вид*

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\omega_k(x-t)f(t)\,dt\Delta\omega_k$$

4. *Перейдём к пределу при* $l\to\infty$. *При этом*

$$\omega_k \to \omega, \quad \Delta\omega_k \to d\omega, \quad \lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \to \int\limits_{0}^{\infty}$$

Таким образом получим

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}\cos\omega_k(x-t)f(t)\,dt\Delta\omega_k =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)f(t)\,d\omega dt.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)f(t)\,dt} \quad \text{— интеграл Фурье} \quad ◀$$

Задача 2

Найти интегралы Фурье для чётных и нечётных функций.

▶ 1. *Пусть функция* $f(x)$ *чётная.*

Тогда в соответствующем ряде Фурье $b_k = 0$, *и получим прямое* *и обратное косинус-преобразования Фурье:*

$$\boxed{F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \cos \omega t \, d\omega, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega \,.}$$

2. *Пусть функция $f(x)$ нечётная.*

Тогда в соответствующем ряде Фурье $a_k = 0$, и получим прямое и обратное синус-преобразования Фурье:

$$\boxed{F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \sin \omega t \, d\omega, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega \,.} \blacktriangleleft$$

Задача 3

Преобразовать комплексный ряд Фурье в интеграл Фурье.

► *Вопрос: Как вы будете решать эту задачу?*

Ответ: Так же, как Задачу 1, *с тем отличием, что исходить будем из ряда Фурье в комплексной форме.*

1. $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \dfrac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}} \, dx.$

2. $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{\mathrm{i}\frac{k\pi(x-t)}{l}} \, dt = \dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{\mathrm{i}\omega_k(x-t)} \, dt \Delta\omega_k$

3. $\lim\limits_{l\to\infty} \dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{\mathrm{i}\omega_k(x-t)} \, dt \Delta\omega_k = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mathrm{i}\omega(x-t)} \, dt d\omega$

• *Интеграл Фурье можно записать в виде двух интегралов,*

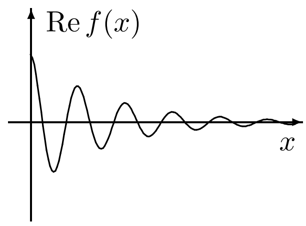
$$\boxed{C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{\mathrm{i}\omega x}\,d\omega.}$$

при этом первый интеграл называется прямым преобразованием Фурье или спектральной функцией, а второй — обратным преобразованием Фурье. ◀

Задача 4

Получить спектральную функцию $C(\omega)$, *если*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\nu x + \mathrm{i}\omega_0 x} & x \geqslant 0\,, \quad (\nu > 0) \\ 0 & x < 0\,. \end{cases}$$



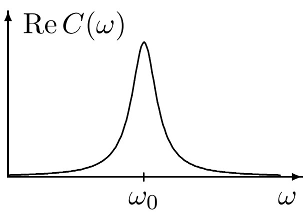
► *Вопрос: Какой процесс описывает заданная функция?*

Ответ: Заданная функция описывает затухающий периодический процесс, что демонстрирует график $\mathrm{Re}\, f(x)$.

Согласно формуле, полученной в Задаче 3

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\nu t + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-\nu t + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)t}}{-\nu + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)} \right|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\nu - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega)}{\nu^2 + (\omega_0 - \omega)^2}.$$



Реальная часть спектральной функции

$$\mathrm{Re}\, C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

определяет вклад гармоник в исходную функцию. ◀