*“Я принуждён сознаться, что положительно не способен сделать без ошибки сложения.”*

*Анри Пуанкаре*

Раздел 4

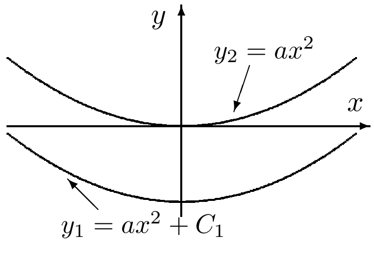
# Интегральное исчисление

## Лекция 26. Неопределённый интеграл или свойства первообразных

*В математике, как и в жизни, нередко действию можно сопоставить обратное действие. По отношению к дифференцированию таким обратным действием является интегрирование.*

★ *Пусть в некоторой области определены фунции: $f(x)$ и $F(x)$, и пусть $F'(x) = f(x)$, тогда $f(x)$ называется производной $F(x)$, а $F(x)$ — первообразной $f(x)$.*

**Пример 1.** *Построить график первообразной $f(x) = 2ax$.*




▷ *Простым подбором находится $F(x) = ax^2 + C$, т. к. $(ax^2 + C)' = 2ax$.* ◁

• *Непрерывная $f(x)$ имеет бесконечно много первообразных.*

★ *Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется её произвольная первообразная*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad C = \text{const}\,,}$$

*где $x$ — переменная интегрирования, а $f(x)$ — подынтегральная функция.*

Задача 1

*Показать, что если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то и $F(x) + C$ также первообразная функции $f(x)$.*

▶ *По условию $F'(x) = f(x)$, но тогда*

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) \quad ◀$$

**Свойства неопределенного интеграла.**

Задача 2

*Чему равен дифференциал неопределённого интеграла?*

▶ $$d\int f(x)\,dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = \\ = F'(x)\,dx = f(x)\,dx \quad ◀$$

1. *Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Задача 3

*Чему равен неопределённый интеграл дифференциала?*

▶ $$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ◀$$

2. *Неопределённый интеграл дифференциала функции равен самой функции с точностью до произвольной постоянной*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

## Задача 4

*Выразить интеграл* $\int Af(x)\,dx$ *через исходный* ($A = \text{const} \neq 0$).

▶ $$\int Af(x)\,dx = \int dAF(x) =$$

$$\overset{\text{по 2 св-ву}}{=} AF(x) + C = A\int f(x)\,dx$$ ◀

• *Поскольку* $C$ *произвольная постоянная, то после каждого равенства она может переопределяться, что здесь и в дальнейшем неоднократно используется.*

3. *Постоянный множитель выносится из под знака интеграла*

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

## Задача 5

*Сделать замену переменной интегрирования в* $\int f[u(x)]u'(x)\,dx$.

▶ $$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \{u'(x)\,dx = du\} = \int f(u)\,du$$ ◀

4. *Под знаком интеграла можно проводить замену переменной*

$$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

5. *Интеграл суммы равен сумме интегралов с точностью до произвольной постоянной (показать самостоятельно)*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

## Задача 6

*Получить таблицу первообразных, исходя из таблицы производных.*

| **Таблица первообразных** | | |
|---|---|---|
| $N$ | $F'(x) = f(x)$ | $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ |
| 1 | $C' = 0$ | $\int 0\,dx = C$ |
| 2 | $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ | $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 3 | $(e^x)' = e^x$ | $\int e^x\,dx = e^x + C$ |
| 4 | $(\sin x)' = \cos x$<br>$(-\cos x)' = \sin x$ | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$<br>$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ |
| 5 | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$<br>$(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$<br>$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 6 | $(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$ |
| 7 | $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$<br>$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ | $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$<br>$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$ |
| 8 | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$<br>$(-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$ |
| 9 | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$<br>$(-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$ |

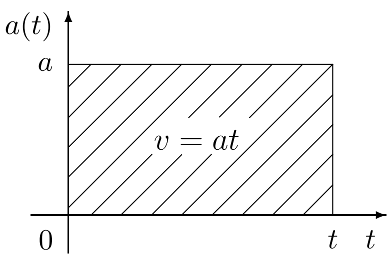
# Лекция 27. Определённый интеграл и его свойства

*Определённый интеграл отличается от неопределённого тем, что это либо число, либо первообразная с определённой постоянной при переменном верхнем пределе интегрирования.*

## Механический смысл определённого интеграла

Задача 1

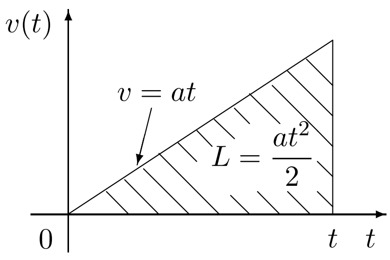
*На графике ускорения отобразить скорость, а на графике скорости отобразить путь, пройденный телом при равноускоренном движении от $t = 0$ до момента $t$, если в начальный момент времени скорость и путь равны нулю.*




▶ а) *По условию:*

$$v' = a,\ v(0) = 0,$$

следовательно $v = at$, что равно площади прямоугольника, при этом $y = a = \mathrm{const}$, $x = t$. Тот же результат можно записать так $v = \int_0^t y\,dx = \int_0^t a\,dx$.

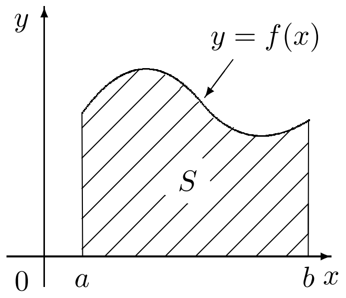



б) *По условию:*

$$L' = v = at,\ L(0) = 0,$$

а значит $L = at^2/2$, что равно площади треугольника, при этом $y = v = ax$, $x = t$. Тот же результат можно записать так $L = \int_0^t y\,dx = \int_0^t ax\,dx$.

## Геометрический смысл определённого интеграла




*Вопрос: Какова площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой* $y = f(x)$ *и прямыми* $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

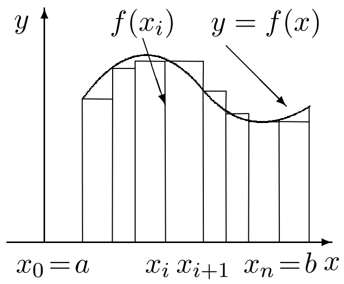
*Ответ:*

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

• *Определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции.*

Задача 2

*Представить определённый интеграл как предел некоторой суммы.*




► *Весь отрезок* $[a, b]$ *разобьём на* $n$ *отрезков* $[x_i, x_{i+1}]$ *длиной* $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, *где* $i = \overline{0, n-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. *В качестве элемента суммы возьмём площадь прямоугольника* $\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, *где* $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, *причём* $\xi_i = x_i$ *или* $x_{i+1}$ *или* $(x_i + x_{i+1})/2$ *и т. д.*

*Тогда суммы площадей прямоугольников* $\forall \xi_i$ *имеют вид*

$$\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i} \quad \text{— интегральные суммы.}$$

*Интуитивно ясно, что при* $n \to \infty$ *и* $\max\ \Delta x_i \to 0$ *все интегральные суммы стремятся к площади криволинейной трапеции*

$$\boxed{S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.} \quad ◄$$

★ *Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при стремлении максимального частичного отрезка разбиения к нулю.*

★ *Числа $a$ и $b$ носят название, соответственно, нижнего и верхнего пределов интегрирования.*

*Вопрос:* *Какая связь существует между формой записи определённого интеграла и предела интегральной суммы?*

*Ответ:*
$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\to\int_a^b,\\ f(\xi_i)\to f(x)\,,\\ \Delta x_i\to dx\,.\end{gathered}}$$

## Формула Ньютона–Лейбница

Задача 3

*Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и имеет первообразную $F(x)$ на отрезке $[a,b]$. Показать, что тогда определённый интеграл находится по формуле:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).}$$

► $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\max\ \Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) =$$
$= \{$*согласно теореме о дифференцируемой функции*$\} =$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)-o(\Delta x_i)] = F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-$$
$$-F(x_1)+\dots+F(x_{n-2})-F(x_{n-3})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+F(x_n)-$$
$$-F(x_{n-1})+\lim_{\max\ \Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} o(\Delta x_i) = F(x_n=b)-F(x_0=a)$$ ◄

## Свойства определённого интеграла

Задача 4

*Дать краткое обоснование каждому из приведённых ниже свойств.*

1. $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a).$

• *Это простейший пример формулы Ньютона–Лейбница.*

2. $\displaystyle\int_a^b [A_1f_1(x) + A_2f_2(x)]\;dx = A_1\int_a^b f_1(x)\,dx + A_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$

• *Используется, что предел суммы равен сумме пределов, если эти пределы существуют.*

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\;\; c \in [a;b].$

• *Используется свойство аддитивности.*

4. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

• *Можно сослаться на формулу Ньютона–Лейбница.*

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$, если $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a,b]$.

• *Следует из аналогичного неравенства для интегральных сумм.*

6. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$ *при* $a < b$.

• *Используется, что модуль суммы не больше суммы модулей.*

# Лекция 28. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

*Сегодня вам предоставляется возможность познакомиться с двумя самыми популярными методами интегрирования.*

## Задача 1

*Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$.*
*Показать, что $\int_a^x f(u)\,du$ также первообразная функции $f(x)$.*

► *Вычислим производную от интеграла с переменным верхним пределом:*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(u)\,du\right) = \left\{\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой}\\ \text{Ньютона-Лейбница}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(F(x) - F(a)\right) = F'(x) = f(x) \quad ◄$$

• $\boxed{\int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a) = \Phi(x)}$ — первообразная $f(x)$

*Вопрос:* *Верно ли тождество*

$$\int_a^x f(u)\,du \equiv \int_a^x f(t)dt\ ?$$

*Ответ:* *Да!* *Переобозначение переменной интегрирования — это не замена переменной интегрирования.*

• *Не всякий определённый интеграл с переменным верхним пределом может быть выражен в виде комбинации элементарных функций. В качестве примера таких интегралов, которые получили название специальных функций, приведём*

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du \quad \text{— интегральный синус.}$$

## Задача 2 (теорема о среднем)

*Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

*Показать, что в этом случае найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что выполняется*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,, \text{ где } \xi \in (a, b)\,.$$

► *Будем исходить из формулы Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a) = \left\{ \begin{array}{c} \textit{по теореме} \\ \textit{Лагранжа} \end{array} \right\} =$$

$$= \Phi'(\xi)(b-a) = \left\{ \begin{array}{c} \textit{поскольку} \\ \Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)\,du \end{array} \right\} = f(\xi)(b-a)\,. \quad ◄$$

*Вопрос: Каков геометрический смысл теоремы о среднем?*

*Ответ: Всегда можно подобрать такую высоту прямоугольника, чтобы его площадь равнялась площади криволинейной трапеции с тем же основанием.*

★ *Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно:*

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

## Задача 3

*Обосновать неравенство*

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)\,, \text{ где } \left\{ \begin{array}{c} m = \inf f(x), \\ M = \sup f(x). \end{array} \right.$$

► *Неравенство является очевидным следствием* Задачи 2. ◄

Задача 4 (о замене переменной)

*Пусть* $f[u(x)])$ *непрерывна, а* $u(x)$ *дифференцируема на* $[a, b]$, *причём* $u(a) = c$, $u(b) = d$.
*Показать, что:*

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]\, u'(x)\, dx = \int_c^d f(u)\, du}$$

► $$\int_a^b f[u(x)]\, \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = \int_a^b f[u(x)]\; du(x) = F(u(x))\Big|_a^b =$$

$$= F(u(b)) - F(u(a)) = F(d) - F(c) =$$

$$= \int_c^d F'(u)\, du = \int_c^d f(u)\, du \quad ◄$$

- *Пределы интегрирования изменяются!*

**Пример 1.** *Вычислить* $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2\, dx.$

▷ $$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2xdx \\ x_1 = 0, & u_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & u_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2} \quad ◁$$

Задача 5 (об интегрировании по частям)

*Выполнить под знаком интеграла* $\int_a^b u(x)v'(x)\, dx$ *перенос производной со второй функции* $v(x)$ *на первую* $u(x)$, *если обе функции дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$.

► *Вопрос: Какое выражение связывает $uv'$ и $u'v$?*

*Ответ:* $$\underbrace{d(u \cdot v) = udv + vdu = uv'dx + u'vdx}_{\text{дифференциал произведения}}.$$

*Теперь проинтегрируем это равенство*

$$\underbrace{\int_a^b d(uv)}_{2} = \underbrace{\int_a^b uv'\,dx}_{1} + \underbrace{\int_a^b u'v\,dx}_{3}$$

*и окончательно получим:*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx} \quad ◄$$

**Пример 2.** *Вычислить интеграл* $\int_1^e \ln x\,dx$.

$$▷ \quad \int_1^e \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{x}, & v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}x\,dx = e - x\Big|_1^e = 1 \quad ◁$$

## Задача 6

*Упростить интеграл* $\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du$, *если* $f_{\text{чёт}}(u)$ *или* $f_{\text{нечёт}}(u)$.

$$► \quad \int\limits_{-a}^{0} f(u)\,du = \left\{ \begin{array}{ll} u = -x, & du = -dx \\ u_1 = -a, & x_1 = a \\ u_2 = 0, & x_2 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_a^0 f(-x)\,dx = \mp \int_a^0 f(x)\,dx \quad \text{для } f_{\text{чёт}}(x) \text{ или } f_{\text{нечёт}}(x).$$

*В результате* $$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du = \left\{ \begin{array}{ll} 2\displaystyle\int_0^a f(u)\,du & \text{при } f_{\text{чёт}}(u) \\ 0 & \text{при } f_{\text{нечёт}}(u) \end{array} \right.} \quad ◄$$

# Лекция 29. Методы интегрирования

*Всякое обратное действие сложнее прямого. Это в полной мере относится к такому действию, как интегрирование. Прежде чем воспользоваться таблицей интегралов необходимо заданный интеграл преобразовать к табличному.*

## Метод замены переменной интегрирования

$$\boxed{\int_a^b f\left[u(x)\right] u'(x)\, dx = \int_c^d f(u)\, du}, \quad \text{где } c = u(a),\ d = u(b).$$

*Это наиболее часто используемый метод. Он применяется, когда подынтегральная функция является сложной функцией.*

**Пример 1.** *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x^2} 2x\, dx.$

$$\triangleright \quad \int \frac{1}{\cos^2 x^2} 2x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\cos^2 u}\, du =$$

$$= \operatorname{tg} u + C = \operatorname{tg} x^2 + C \quad \triangleleft$$

## Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx}$$

*Этот метод применяется тогда, когда подынтегральная функция содержит:*

1. *Какую-либо обратную функцию:* $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x$ *и т. д.*
2. *Произведение степенной функции на экспоненту или тригонометрическую функцию:* $x \sin x,\ x^2 \exp x$ *и т. д.*
3. *Произведение экспоненты на тригонометрическую функцию.*

**Пример 2.** *Вычислить интеграл* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

$$\triangleright \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \triangleleft$$

## Метод неопределённых коэффициентов

Задача 1

*Привести интеграл от рациональной дроби* $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, *в котором* $Q_m(x)$ *и* $P_n(x)$ *— многочлены степеней* $m$ *и* $n$, *к сумме интегралов от простейших дробей.*

► *Для вычисления интеграла от рациональной дроби необходимо:*

а) *привести эту дробь к правильной дроби, т. е.*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{F_{m_1}(x)}{P_n(x)}, \text{ где } m_1 < n.$$

б) *преобразовать знаменатель к произведению простейших многочленов, т. е.*

$$P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)^l\cdots(ax^2+bx+c),$$

где $x_k$ – *корень кратности* $l$.

в) *записать правильную дробь в виде суммы простейших дробей, т. е.*

$$\frac{F_{m_1}(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{C}{(x-x_k)} + \frac{D}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-x_k)^l}}_{l} + \frac{Wx+Z}{ax^2+bx+c} \ ,$$

*где $A, B, \ldots, C, D, K, \ldots, W, Z$ – неопределённые коэфициенты.*

г) *приводя сумму простейших дробей к общему знаменателю, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая её, находим неопределённые коэффициенты.*

д) *окончательный ответ получится после вычисления интегралов от многочлена и простейших дробей*

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,dx = \int R_{m-n}(x)\,dx + \int \frac{A}{x-x_0}\,dx + \int \frac{B}{x-x_1}\,dx + \cdots$$

$$+ \int \frac{C}{(x-x_k)}\,dx + \cdots + \int \frac{K}{(x-x_k)^l}\,dx + \int \frac{Wx+Z}{ax^2+bx+c}\,dx \quad ◀$$

**Пример 3.** *Вычислить интеграл:*

$$\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$$

▷ а) *Приводим заданную дробь к правильной*

$$\frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x} = x+1+\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}$$

*посредством деления многочленов обычным "столбиком".*

б) $x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$ ,

*где использована теорема Виета.*

в) $$\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{{}^{x^2-5x+6}\big/A}{x} + \frac{{}^{x(x-3)}\big/B}{x-2} + \frac{{}^{x(x-2)}\big/C}{x-3}$$

г) $2x^2-1 = A(x^2-5x+6) + B(x^2-3x) + C(x^2-2x)$

★ *Многочлены равны, если все коэффициенты в них при соответствующих степенях $x$ между собой равны.*

*Вопрос: Сколько в данном случае будет равенств?*

*Ответ: Три, а именно:*

$$\begin{aligned} x^2 &: \ A+B+C=2\,, \\ x^1 &: \ 5A+3B+2C=0\,, \\ x^0 &: \ 6A=-1\,. \end{aligned}$$

*Полученную систему решаем по формулам Крамера*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6\,,$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21\,,$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -34\,.$$

$$A=-\frac{1}{6},\quad B=-\frac{21}{6}=-\frac{7}{2},\quad C=\frac{34}{6}=\frac{17}{3}.$$

д) $$\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+6x-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int (x+1)\,dx -$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C \quad \triangleleft$$

# Лекция 30. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений

*В этой лекции будет продолжено изучение методов интегрального исчисления.*

## Дополнение к таблице интегралов

**Пример 1.** *Показать, что*

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.}$$

$\triangleright$ *Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов.*

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)\,(x+a)} = \frac{{}^{x+a/}A}{x-a} + \frac{{}^{x-a/}B}{x+a}\,,$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a) \implies \begin{array}{l} x^1:\ \ A+B=0\,, \\ x^0:\ \ Aa - Ba = 1\,. \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{vmatrix} = -2a, \qquad \begin{array}{ll} \Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -1, & A = \dfrac{\Delta_A}{\Delta} = \dfrac{1}{2a}\,, \\ \Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1, & B = \dfrac{\Delta_B}{\Delta} = \dfrac{-1}{2a}\,. \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** *Показать, что*

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.}$$

$\triangleright$ *Чтобы убедиться в правильности первообразной, достаточно вычислить её производную ($F'(x) = f(x)$). Но прежде ответьте на вопрос.*

*Вопрос: Как связана производная модуля функции с производной этой функции?*
*Ответ:*

$$\frac{d|u|}{dx} = \frac{d|u|}{du}\frac{du}{dx} = \operatorname{sign} u\,\frac{du}{dx},$$

*поскольку*

$$\frac{d|u|}{du} = \left\{\begin{array}{ll} +1 & \text{при } u > 0 \\ -1 & \text{при } u < 0 \end{array}\right\} = \operatorname{sign} u\,.$$

$$F'(x) = \left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right)' = \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|} \times$$

$$\times \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = f(x) \quad \triangleleft$$

## Интегрирование иррациональных выражений

1. *Сведение к табличным интегралам.*

**Пример 3.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}$.

$\triangleright$ *Сведём данный интеграл к предыдущему*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (3/2)x - 1/2}} =$$

$$= \left\{x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} = x^2 + 2\cdot\tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{16} - \tfrac{9}{16} - \tfrac{1}{2} = (x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{17}{16}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x + \frac{3}{4})}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x + \tfrac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}}\right| + C \quad \triangleleft$$

2. *Замена переменных, приводящая к избавлению от иррациональности под знаком интеграла.*

*Вопрос: Как избавиться от иррациональности в интеграле*

$$\int R\left(\sqrt[m_1]{ax+b}\,,\ \sqrt[m_2]{ax+b}\,,\ \ldots\ ,\ \sqrt[m_n]{ax+b}\right)dx\,?$$

*Ответ: Необходимо сделать замену переменной*

$$u=\sqrt[m]{ax+b}\,,$$

*где $m$ – наименьшее общее кратное $m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,m_n$.*

**Пример 4.** *Вычислить:* $\displaystyle\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$$\triangleright\quad \int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left\{\begin{array}{ll} u=\sqrt[6]{x}, & \sqrt{x}=u^3\\ du=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\,dx, & \sqrt[3]{x}=u^2\\ \multicolumn{2}{c}{dx=6x^{\frac{5}{6}}du=6u^5du}\\ x_1=1, & u_1=1\\ x_2=64, & u_2=2\end{array}\right\}=$$

$$=\int_1^2\frac{6u^5\,du}{u^3+u^2}=\int_1^2\frac{6u^3\,du}{u+1}=6\int_1^2\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} u^3 & u+1\\ \cline{2-2} \underline{u^3+u^2} & u^2-u+1\\ \quad -u^2 & \\ \quad \underline{-u^2-u} & \\ \qquad\quad u & \\ \qquad\quad \underline{u+1} & \\ \qquad\quad\ -1 & \end{array}}$$

$$=6\left[\tfrac{u^3}{3}-\tfrac{u^2}{2}+u-\right.$$

$$\left.-\ln(u+1)\right]\Big|_1^2=6\left[\tfrac{8}{3}-\tfrac{1}{3}-\right.$$

$$\left.-2+\tfrac{1}{2}+1-\ln\tfrac{3}{2}\right]=$$

$$=11-6\ln 1,5\quad\triangleleft$$

## Интегрирование тригонометрических выражений

1. $I=\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx.$

*Вычисление интеграла такого типа проводится при помощи универсальной тригонометрической подстановки:* $u=\operatorname{tg}(x/2)$.

## Задача 1

*Выразить* $\sin x$, $\cos x$ *и* $dx$ *через универсальную тригонометрическую подстановку.*

► а) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$;

*где использована формула* : $1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 1/\cos^2\frac{x}{2}$.

б) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

в) $du = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2} = (1+u^2)\frac{dx}{2} \implies dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

*Таким образом универсальная тригонометрическая подстановка означает следующую замену переменной в интеграле* $I$*:*

$$\boxed{I = \left\{\begin{array}{ll} u = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, & dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, & \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array}\right\} = \int R_1(u)\,du} \quad ◄$$

**Пример 5.** *Вычислить:* $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

$$▷ \quad \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C \quad ◁$$

2. $\displaystyle\int\sin^p x\cos^q x\,dx$.

*Вычисление интегралов такого типа осуществляется более простыми подстановками по сравнению с универсальной тригонометрической подстановкой:*

$\boxed{\cos x = u \quad \textit{или} \quad \sin x = u}$ — если $p$ или $q$ нечётное;

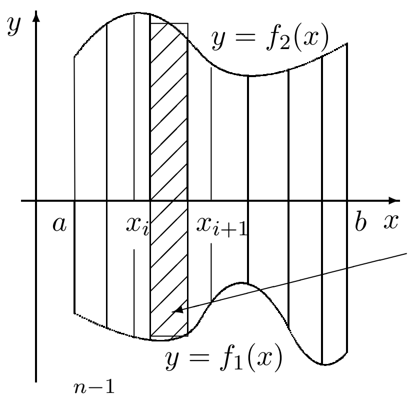
$\boxed{\mathrm{tg}\,x = u,\ \ dx/\cos^2 x = du}$ — если $p$ и $q$ чётное.

# Лекция 31. Геометрические приложения определенных интегралов

*Определение определённого интеграла как предела интегральных сумм позволяет получить различные формулы для нахождения длин, площадей и объёмов геометрических объектов.*

## Задача 1

*Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:* $y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$.




▶ *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?

*Ответ:* Площадь прямоугольника:

$\Delta S_i = [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i$,

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$,
$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\,, \quad x_0 = a, \; x_n = b$.

$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$ — интегральная сумма

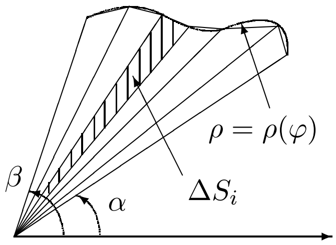
$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i$$

*Используя связь между формой записи определённого интеграла и предела интегральной суммы (*Лекция 27*), получим*

$$\boxed{S_{\text{крив. трап}} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\ dx} \quad ◀$$

## Задача 2

*Найти площадь криволинейного сектора, ограниченного линиями:* $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.




► *Вопрос: Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*

*Ответ: Площадь треугольника:*

$\Delta S_i = \dfrac{1}{2}\rho(\varphi_i) \cdot \rho(\varphi_{i+1}) \cdot \sin \Delta\varphi_i$,
где $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$,
$\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_n = \beta$.

*Вопрос: Чему равна эквивалентная площади треугольника?*

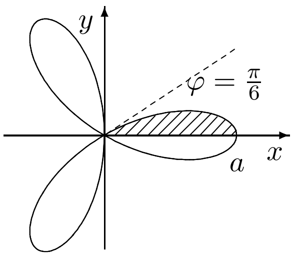
*Ответ:* $\left.\begin{array}{l} \rho(\varphi_{i+1}) = \rho(\varphi_i) + o(\rho(\varphi_i)) \\ \sin\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i + o(\Delta\varphi_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta S_i \simeq \dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\varphi_i \to 0}} S_n = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$$

*Действуя так же как в* Задаче 1, *получим*

$$\boxed{S_{\textit{крив. сект}} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi} \quad ◄$$

**Пример 1.** *Найти площадь трилистника, если длина лепестка равна $a$.*




▷ *Вопрос: Назовите простейшую непрерывную периодическую функцию с амплитудой $a$ и периодом $T = 2\pi/3$?*

*Ответ:* $\rho = a\cos 3\varphi$.

*Очевидно* $\rho = a$
*при* $\varphi = 0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$.

*Вопрос:* Укажите пределы интегрирования для половинки заштрихованного лепестка.

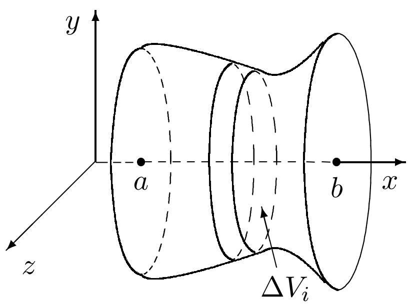
*Ответ:* $\varphi \in [0, \pi/6]$.

$$S = 6\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\varphi\,d\varphi = 3a^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4} \quad \triangleleft$$

## Задача 3

*Найти объём тела вращения, если он ограничен плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси $x$.*




► *Вопрос:* Что принять в качестве элемента интегральной суммы?

*Ответ:* Объём диска:

$\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$

$$V = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

*В результате*

$$\boxed{V_{тел.\ вращ} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx} \quad ◄$$

**Пример 2.** *Найти объём шара радиуса $R$.*

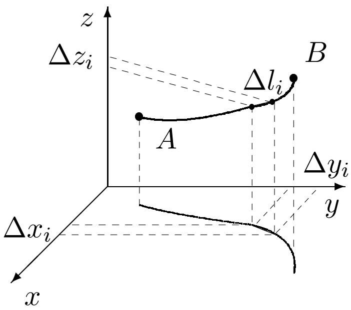
▷ *Вопрос:* Вращением какой кривой описывается шар?

*Ответ:* Вращением полуокружности. Итак, $f^2(x) = R^2 - x^2$ и

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \triangleleft$$

## Задача 4

*Найти длину кривой в трёхмерном пространстве, если она задана параметрическим образом:* $\begin{array}{ll} x = x(t), & z = z(t), \\ y = y(t), & t \in [\alpha, \beta]. \end{array}$




▶ *Вопрос: Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*

*Ответ: Длину отрезка:*

$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2 + \Delta z_i{}^2}$,

*при этом длина ломанной:*

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2 + \Delta z_i{}^2}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2 + \Delta z_i{}^2} = \int_B^A \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

$$\boxed{L_{\text{длина крив}} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx} \quad ◀$$

**Пример 3.** *Найти длину окружности радиуса $R$.*

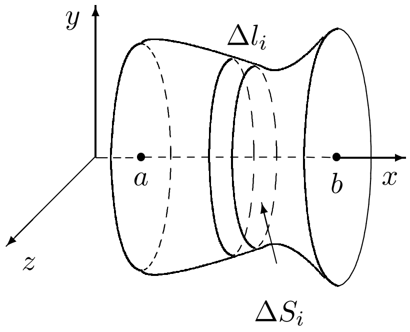
$$\triangleright \quad L = 2\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = 4R\int\limits_{0}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 4R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R \quad \triangleleft$$

• $y' = x/y$ *находится из уравнения* $x^2 + y^2 = R^2$ *как производная неявной функции.*

## Задача 5

*Найти площадь поверхности вращения, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси $x$, если $x \in [a, b]$.*




► *Вопрос: Что принять в качестве элемента интегральной суммы?*

*Ответ: Площадь "пояска":*

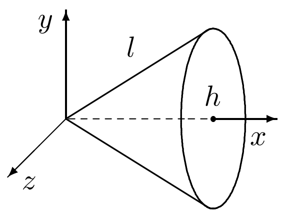
$\Delta S_i = 2\pi f(\xi_i)\Delta l_i$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(x_i)}\Delta x_i$$

$$\boxed{S_{\textit{поверх. вращ}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx} \quad ◄$$

**Пример 4.** *Найти площадь боковой поверхности конуса вращения радиуса $R$, если длина образующей равна $l$.*




▷ *Вопрос: Каково уравнение образующей конуса?*

*Ответ:* $y = x\dfrac{R}{h}$,

где $h = \sqrt{l^2 - R^2}$ — высота конуса.

$$S = 2\pi \int_0^h x\frac{R}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}\, dx = 2\pi\frac{Rl}{h^2}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^h = \pi Rl$$

*Вопрос: К чему стремится площадь боковой поверхности конуса вращения, если его высота стремится к нулю?*

*Ответ: К площади круга.* ◁

# Лекция 32. Несобственные интегралы

*До сих пор мы занимались вычислением интегралов. В данной лекции речь пойдёт о таких интегралах, которые прежде, чем вычислять, необходимо исследовать на сходимость.*

★ *Интеграл называется несобственным, если его подынтегральная функция не ограничена на отрезке интегрирования, либо неограничена сама область интегрирования.*

★ *Несобственный интеграл существует (сходится), если существует предел этого интеграла в точке разрыва подынтегральной функции или в бесконечно удалённой точке. В противном случае говорят, что несобственный интеграл не существует (расходится).*

## Несобственный интеграл с неограниченным пределом интегрирования

*Это интеграл следующего вида:*

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

**Пример 1.** *Вычислить* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

$$\triangleright \quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - 0) = \frac{\pi}{2} \quad \triangleleft$$

## Несобственный интеграл от неограниченной функции

*Это интеграл следующего вида:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,\ \text{где}\ \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty}$$

*или*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,\ \text{где}\ \lim_{x\to b-0} f(x) = \infty}$$

**Пример 2.** *Вычислить* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\triangleright\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - 0\right) = \frac{\pi}{2}\quad\triangleleft$$

## Признаки сходимости несобственных интегралов

Задача 1 (признак сравнения)

*Пусть выполняется неравенство* $0 < g(x) \leqslant f(x)$, *где* $x \in [a, \infty)$. *Показать, что если несобственный интеграл от большей функции* $f(x)$ *сходится , то он сходится и от меньшей функции* $g(x)$, *а если он от меньшей функции расходится, то он расходится и от большей функции.*

$$\blacktriangleright\quad g(x) \leqslant f(x) \implies \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \implies$$

$$\implies \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{\max\ \Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \implies$$

$$\implies \int_a^\infty g(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty f(x)\,dx\quad\blacktriangleleft$$

Задача 2 (предельный признак сравнения)

*Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ с точностью до постоянного множителя эквивалентны в точке их разрыва или в бесконечно удалённой точке.*
*Показать, что в этом случае несобственные интегралы от этих функций сходятся или расходятся одновременно.*

► *По условию* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, *и положим* $g(x) > 0,\ A > 0$.

*Тогда из определения предела:*

$$\begin{array}{c}\underbrace{A-\varepsilon \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant A+\varepsilon}\\ \Downarrow \\ \underbrace{(A-\varepsilon)g(x) \leqslant f(}_{1-\text{нерав.}}\underbrace{x) \leqslant (A+\varepsilon)g(x)}_{2-\text{нерав.}}\end{array}\quad,\ \text{где } x\to\infty$$

*Применим теперь признак сравнения к каждому из неравенств:*

*из 1 неравенства* $\Rightarrow$ *если сходится интеграл от $f(x)$, то сходится интеграл от $g(x)$;*
*из 2 неравенства* $\Rightarrow$ *если сходится интеграл от $g(x)$, то сходится интеграл от $f(x)$.* ◄

**Пример 3.** *Исследовать* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x^2}$.

$$\triangleright\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sin x^2} \Rightarrow \left\{\frac{1}{\sin x^2} \underset{x\to 0}{\simeq} \frac{1}{x^2}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{0} = \infty.$$

*Ответ: Интеграл расходится* ◁

Задача 3 (частный предельный признак сходимости для интеграла с неограниченным пределом)

*Пусть* $f(x) \underset{x\to\infty}{\simeq} \dfrac{A}{x^\alpha}$, *тогда несобственный интеграл сходится, если* $\alpha > 1$ *и расходится, если* $\alpha \leqslant 1$.

$$\blacktriangleright \quad \int_a^\infty \frac{A}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{A}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} \alpha \neq 1, & \displaystyle\lim_{b\to\infty} \left.\frac{A/(1-\alpha)}{x^{\alpha-1}}\right|_a^b & \text{— } \begin{array}{l} \alpha > 1 - \textit{сходится} \\ \alpha < 1 - \textit{расходится} \end{array} \\ \alpha = 1, & \displaystyle\lim_{b\to\infty} A\ln x\Big|_a^b & \text{— } \textit{расходится} \end{array} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 4 (частный предельный признак сходимости для интеграла от неограниченной функции)

*Пусть* $f(x) \underset{x\to b}{\simeq} \dfrac{A}{(x-b)^\alpha}$, *тогда несобственный интеграл сходится, если* $\alpha < 1$, *и расходится, если* $\alpha \geqslant 1$.

$$\blacktriangleright \quad \int_a^b \frac{A}{(x-b)^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} \frac{A}{(x-b)^\alpha}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} \alpha \neq 1, & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{A/(1-\alpha)}{(x-b)^{\alpha-1}}\right|_a^{b-\varepsilon} & \text{— } \begin{array}{l} \alpha < 1 - \textit{сходится} \\ \alpha > 1 - \textit{расходится} \end{array} \\ \alpha = 1, & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} A\ln(x-b)\Big|_a^{b-\varepsilon} & \text{— } \textit{расходится} \end{array} \right\} \quad \blacktriangleleft$$

**Пример 4.** *Исследовать* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x-3)^2}$.

$\rhd$ *Поскольку* $\alpha = 2$, *то согласно* Задаче 3 *интеграл с неограниченным пределом интегрирования сходится. Но в точке* $x = 3$, *принадлежащей отрезку интегрирования, неограниченна подынтегральная функция, а значит, согласно* Задаче 4, *интеграл расходится. Ответ: Интеграл расходится* $\lhd$

# Лекция 33. О других методах интегрального исчисления

*Изученные нами методы интегрирования позволяют вычислять достаточно простые интегралы. Существуют и другие, более изощрённые методы интегрирования. Некоторым из них, например, методу перевала, посвящены монографии. В данной лекции мы лишь коснёмся двух таких методов интегрального исчисления, а именно, метода вычисления интегралов с помощью введения параметра и метода приближённого интегрирования.*

## Вычисление интегралов, зависящих от параметра

★ *Пусть подынтегральная функция является функцией двух переменных $f(x, \lambda)$, заданой на множестве точек $(x, \lambda)$, где $x \in [a, b]$, $\lambda \in [c, d]$, тогда интеграл*

$$\int_a^b f(x, \lambda)\, dx = I(\lambda)$$

*называется интегралом зависящим от параметра $\lambda$.*

Свойство:

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} f(x, \lambda)\, dx} \qquad (*)$$

- $f'_\lambda(x, \lambda)$ *является непрерывной функцией двух переменных.*

**Пример 1.** *Вычислить* $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 x e^{-\lambda x}\, dx$, где $\lambda > 0$.

$\triangleright$ *Введём вспомогательный интеграл*

$$J(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda x}\,dx = \left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_0^1 = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

*Очевидно, что*

$$I(\lambda) = \int_0^1 xe^{-\lambda x}\,dx = -\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}.$$

*Отсюда следует*

$$I(\lambda) = -\left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)_\lambda' = \frac{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}{\lambda^2} \quad \lhd$$

## Задача 1

*Вычислить:* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$

▶ *Примем без доказательства, что заданный несобственный интеграл сходится. График его подынтегральной функции при* $x \gg 2\pi$ *вырезает почти равные площади в верхней и нижней полуплоскостях, в отличие от* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}$, *который расходится.*

*Введём два вспомогательных интеграла*

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad J(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x\,dx, \quad \text{где } \lambda > 0.$$

*В предположении, что свойство* $(*)$ *выполняется и для* $I(\lambda)$, *получим*

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = -J(\lambda).$$

*Действительно*

$$\frac{d}{d\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda x}\,dx = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}x\,dx.$$

*Согласно формуле Эйлера* (Лекция 14)

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}x},$$

*и соответственно*

$$\operatorname{Im} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} e^{\mathrm{i}x}\, dx = J(\lambda).$$

*Поскольку*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x + \mathrm{i}x}\, dx = \left.\frac{e^{-\lambda x + \mathrm{i}x}}{-\lambda + \mathrm{i}}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda - \mathrm{i}},$$

*то один из вспомогательных интегралов равен*

$$J(\lambda) = \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - \mathrm{i}} = \operatorname{Im} \frac{\lambda + \mathrm{i}}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

*Теперь подсчитаем второй интеграл*

$$I(\lambda) = -\int J(\lambda)\, d\lambda = -\int \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} + C = \operatorname{arcctg} \lambda + C.$$

*Очевидно*

$$I(\infty) = 0 = \operatorname{arcctg} \infty + C = 0 + C \implies C = 0$$

*В результате искомый интеграл равен*

$$I(0) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arcctg} 0 + C = \frac{\pi}{2} \quad ◀$$

## Задача 2

*Вычислить:* $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$, *воспользовавшись интегралом Пуассона* $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*он будет вычислен в* Лекции 50).

▶ *Вопрос: Сходится ли заданный интеграл?*

*Ответ: Да, заданный несобственный интеграл безусловно сходится, поскольку подынтегральная функция убывает быстрее, чем $x^{-\alpha}$, где $\alpha$ сколь угодно большое число.*

*Введём два вспомогательных интеграла*

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,dx, \ \text{ и } \ J(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^2 e^{-\lambda x^2}\,dx, \ \text{ где } \lambda > 0.$$

*Первый из них простой заменой переменной сводится к интегралу Пуассона*

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \lambda x^2 = t^2 \\ \sqrt{\lambda}x = t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{\lambda}} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

*В предположении, что свойство* $(*)$ *выполняется, получим*

$$J(\lambda) = -\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}.$$

*В результате*

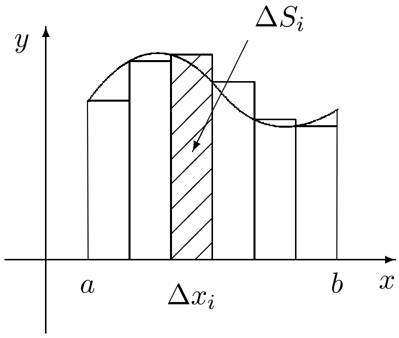
$$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = J(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad ◀$$

## Приближённое вычисление интегралов

*Ниже мы получим два простейших численных алгоритма вычисления интегралов.*

Задача 3 (формула прямоугольников)

*Выразить интегральную сумму в виде суммы площадей прямоугольников с равными основаниями.*




► $x_0 = a, \quad x_n = b,$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \quad \text{т. е.}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

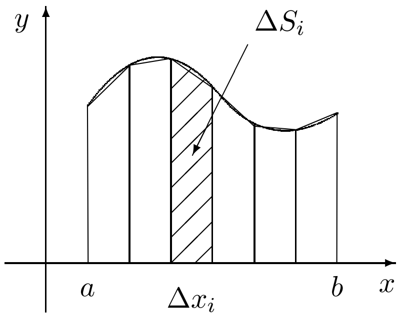
$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i \in [0, n]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$$ — формула прямоугольников ◄

Задача 4 (формула трапеций)

*Выразить интегральную сумму в виде суммы площадей трапеций с равными основаниями.*




► *Как следует из школьного курса геометрии, площадь любой из трапеций равна*

$$\Delta S_i = \frac{b-a}{2n}[f(x_{i+1}) + f(x_i)].$$

*Действуя так же, как в* Задаче 3, *нетрудно получить*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]}$$ — формула трапеций ◄