*“Теперь я знаю, почему
столько людей на земле охотно колет дрова.
По крайней мере сразу видишь результаты своего труда.”*

Альберт Эйнштейн

Раздел 5

Дифференциальные уравнения

Лекция 34. Метод изоклин

В данной лекции мы познакомимся с дифференциальным уравнением первого порядка, а также с его графическим решением.

★ *Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение следующего вида*

$$\boxed{F(x,y,y')=0 \ \text{ или } \ y'=f(x,y)}\,, \tag{1}$$

где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, а f и F — заданные функции соответственно двух и трёх переменных.

★ *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y=y(x,C)$, где C — произвольная постоянная, которая обращает уравнение (1) в тождество, т.е.*

$$F(x,y(x,C),y'(x,C))\equiv 0 \ \text{ или } \ y'(x,C)\equiv f(x,y(x,C)).$$

Задача 1

Решить простейшее дифференциальное уравнение: $y' = f(x)$.

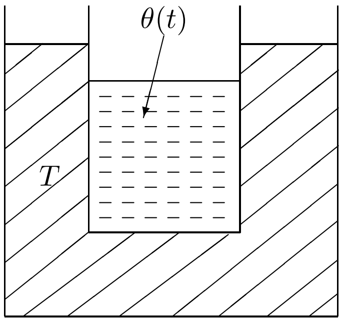
► $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \implies dy = f(x)dx,$

$$\int dy = \int f(x)\,dx \implies y = \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ◄$$

• *Решение простейшего дифференциального уравнения сводится к вычислению первообразной.*

Задача 2

Составить и решить дифференциальное уравнение, описывающее процесс охлаждения стакана молока в термостате, если известно, что скорость охлаждения пропорциональна разности температур этих тел.



► *По условию задачи:*

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T),$$

где k — коэффициент пропорциональности.
Уравнение составлено и осталось только решить его.

Для интегрирования необходимо разделить переменные

$$d\theta = -k(\theta - T)dt \implies \frac{d\theta}{\theta - T} = -kdt,$$

$$\int \frac{d\theta}{\theta - T} = -\int k\,dt \implies \ln|\theta - T| = -kt + C.$$

Итак, общее решение:

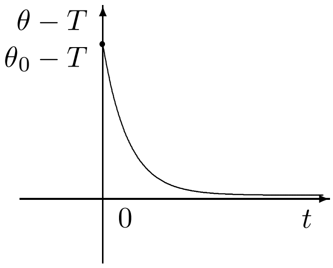
$$\theta - T = e^{-kt+C}.$$

Чтобы найти C требуется задать начальные условия:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad t_0 = 0.$$

Тогда

$$e^C = \theta_0 - T \quad \text{и} \quad \theta - T = (\theta_0 - T)e^{-kt}.$$



Вопрос: К чему стремится разность температур со временем?

Ответ: К нулю, что можно проиллюстрировать. ◄

Задача Коши

★ *Частным решением дифференциального уравнения* (1) *называется такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию*

$$\boxed{y(x_0) = y_0}. \tag{2}$$

★ *Задача Коши состоит в нахождении решения уравнения* (1), *удовлетворяющему начальному условию* (2).

Метод изоклин

Графическое решение дифференциальных уравнений основывается на уравнении

$$y' = f(x, y) = k,$$

где k — угловой коэффициент касательной.

Вопрос: Что описывает последнее уравнение?

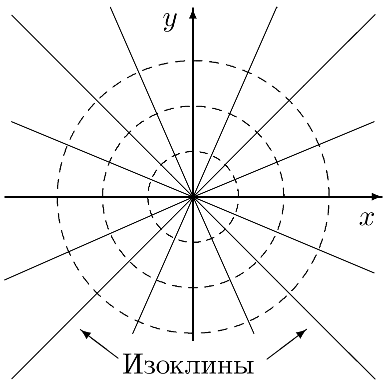
Ответ: При фиксированном k оно описывает кривую с равным углом наклона касательных.

★ *Изоклиной называется кривая с равным углом наклона касательных.*

$$\boxed{f(x,y)=k} \quad \text{— уравнение изоклины}$$

• *Метод изоклин заключается в построении семейства изоклин с нанесёнными на них отрезками касательных. Множество отрезков касательных образует поле направлений касательных интегральных кривых. Плавное соединение касательных даёт семейство интегральных кривых — общее решение уравнения.*

Пример 1. *Решить методом изоклин уравнение:* $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.



▷ *Уравнение изоклины*

$$-\frac{x}{y}=k$$

в данном случае совпадает с уравнением нормали

$$y=-\frac{1}{k}x.$$

Вопрос: Запишите несколько уравнений изоклин для фиксированных угловых коэффициентов касательных.

Ответ: $\begin{cases} k=\pm\infty & y=0 \\ k=\pm 1 & y=\mp x \\ k=0 & x=0 \end{cases}$ *Представленное на рисунке поле направлений касательных даёт семейство интегральных кривых.*

Вопрос: Что из себя представляют интегральные кривые?

Ответ: Окружности.

Вопрос: Попробуйте это решение получить аналитически.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy + xdx = 0 \implies,$$

$$\int y\,dy + \int x\,dx = C \implies x^2 + y^2 = 2C \quad \triangleleft$$

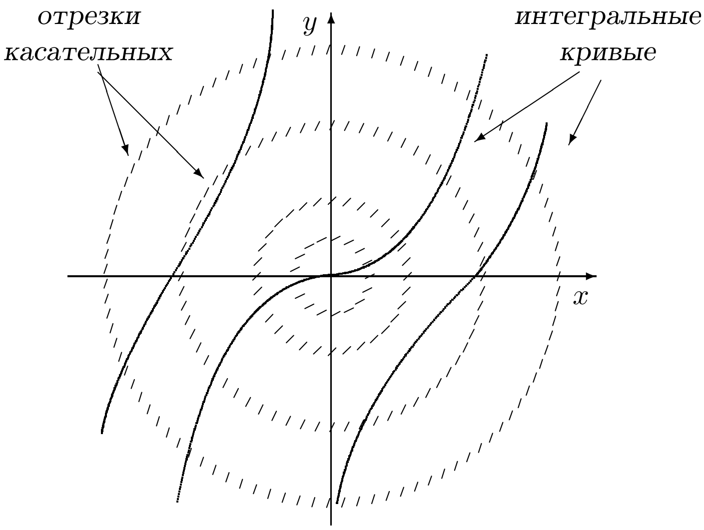
Пример 2. *Решить методом изоклин уравнение:*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\triangleright$ *Уравнение изоклины*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k$$

в данном случае является уравнением окружности, причем чем меньше радиус окружности, тем меньше тангенс угла наклона касательных.



• *Полученное графически семейство интегральных кривых элементарными функциями не описывается, а само уравнение простыми аналитическими методами не решается.* $\triangleleft$

Лекция 35. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Чтобы решить дифференциальное уравнение, его необходимо проинтегрировать, но прежде его необходимо идентифицировать и преобразовать.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, определённые в предыдущей лекции, удобно записывать в следующей форме

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}\,. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными

★ *Пусть* $M(x,y) = u(x)$, *а* $N(x,y) = g(y)$, *тогда уравнение* (1) *называется дифференциальным уравнением с разделёнными переменными.*

Задача 1

Решить дифференциальное уравнение: $u(x)dx + g(y)dy = 0$.

► $\int u(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$ ◄

• *Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными решается простым интегрированием.*

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

★ *Пусть* $M(x,y) = u_1(x)g_1(y)$, *а* $N(x,y) = u_2(x)g_2(y)$, *тогда уравнение* (1) *называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 2

Решить дифференциальное уравнение:

$$u_1(x)g_1(y)dx + u_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

► *Поделим исходное уравнение на*

$$g_1(y)u_2(x) \not\equiv 0,$$

и тем самым сведем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{u_1(x)}{u_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C \quad ◄$$

Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

★ *Функция* $M(x, y)$ *называется однородной относительно* x *и* y, *если она удовлетворяет равенству*

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y),$$

где n — *степень однородности.*

Пример 1. *Найти степень однородности следующих функций:*

$$M_1(x, y) = 4x^2 + y^2, \;\; M_2(x, y) = x^3/y - 2xy,$$
$$M_3(x, y) = \sin\frac{y}{x}, \;\; M_4(x, y) = e^{xy}.$$

▷ *Ответ:* $M_{1,2}(x, y)$ — *однородные с* $n = 2$, $M_3(x, y)$ — *однородная с* $n = 0$, $M_4(x, y)$ — *неоднородная.* ◁

★ *Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется такое уравнение, в которое входят однородные функции* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$, *причём степень их однородности одинаковая.*

Задача 3

Решить дифференциальное уравнение:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

где $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ — *однородные функции степени* n.

► *По определению* $\begin{cases} M(x,y) = x^n M(1, \frac{y}{x}), \\ N(x,y) = x^n N(1, \frac{y}{x}). \end{cases}$

Вопрос: Какая замена приводит эти функции к функциям одной переменной?

Ответ:

$$\boxed{z = \frac{y}{x}, \quad y = zx, \quad dy = xdz + zdx}$$

после которой уравнение (1) *становится уравнением с разделяющимися переменными*

$$M(1,z)dx + N(1,z)(xdz + zdx) = 0$$

Вопрос: Что теперь делать?

Ответ: Преобразовать его к уравнению с разделёнными переменными и проинтегрировать

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}dz = 0\,,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}\,dz = C \quad ◄$$

Пример 2. *Решить:* $(x^2 + y^2)dx + yxdy = 0, \quad y(1) = 0.$

▷ *Это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка* $(n = 2)$, *а потому делаем замену переменных:*

$$z = \frac{y}{x}, \quad y = zx, \quad dy = xdz + zdx \quad + \ (1) \implies$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{1+2z^2} = 0 \implies \int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{1+2z^2} = \ln C \implies$$

$$\ln x + \frac{1}{4}\ln(1+2z^2) = \ln C \implies x^4(1+2z^2) = C\,.$$

Обратная замена переменных даёт общее решение

$$x^2(x^2+2y^2) = C,$$

а после учёта начального условия

$$1(1+2\cdot 0) = C \implies C = 1,$$

найдём частное решение

$$x^2(x^2+2y^2) = 1 \quad \textit{или} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)} \quad \lhd$$

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

★ *Дифференциальное уравнение является линейным, если оно линейно относительно неизвестной y и её производных.*

★ *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение*

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)},$$

где y — неизвестная, а $p(x)$ и $f(x)$ — известные функции независимой переменной x.

★ *Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если $f(x) = 0$, в противном случае оно неоднородное.*

Задача 4

Решить линейное однородное уравнение:

$$\boxed{y' + p(x)y = 0}\,.$$

▶ *Вопрос: К какому известному типу уравнений данное уравнение относится?*

Ответ: Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C \implies \ln y + \int p(x)\,dx = \ln C,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y}, \text{ где } \boxed{\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}} \quad ◀$$

Задача 5

Решить линейное неоднородное уравнение:

$$y' + p(x)y = f(x). \qquad (*)$$

▶ *Решение будет искаться в виде подобном решению однородного уравнения (методом вариации постоянных)*

$$y = C(x)\overline{y}\,,$$

где $C(x)$ — *неизвестная функция. Тогда*

$$(*) \implies C'(x)\overline{y} + \underbrace{C(x)\overline{y}' + C(x)p(x)\overline{y}}_{\substack{\Downarrow \\ C(x)[\overline{y}' + p(x)\overline{y}] = 0}} = f(x)\,,$$

$$C'(x)\overline{y} = f(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \frac{f(x)}{\overline{y}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{\overline{y}}\,dx + C\,,$$

$$\boxed{y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{f(x)}{\overline{y}}\,dx} \text{ — формула Бернулли} \quad ◀$$

Уравнения Бернулли и Риккати

★ *Уравнением Бернулли называется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:*

$$\boxed{y' + p(x)y = y^n f(x), \quad \text{где} \quad n \neq 0 \text{ или } 1}. \qquad (1)$$

Задача 6

Свести уравнение Бернулли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению 1-го порядка.

► *Вопрос: Почему в уравнении Бернулли $n \neq 0$ или 1?*

Ответ: При $n = 1$ и $n = 0$ уравнение является линейным (однородным и неоднородным).

Поскольку в линейном уравнении в правой части y отсутствует поделим уравнение на y^n:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = f(x).$$

Вопрос: При какой замене искомой функции уравнение станет линейным?

Ответ: При замене $\boxed{z = y^{1-n}}$, *так как* $z' = (1-n)y^{-n}y'$, *то*

$$\text{уравнение (1)} \;\Rightarrow\; \frac{z'}{1-n} + p(x)z = f(x). \quad ◄$$

★ *Уравнением Риккати называется нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:*

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)}. \qquad (2)$$

Вопрос: При какой замене искомой функции уравнение Риккати сведётся к уравнению Бернулли, если известно частное решение y_1 уравнения Риккати.

Ответ: При замене $\boxed{y = y_1 + z}$

$$\text{уравнение (2)} \;\Rightarrow\; z' + [a(x) + 2b(x)y_1(x)]z + b(x)z^2 = 0.$$

Лекция 36. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальные уравнения 2-го порядка в некоторых случаях сводятся к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

★ *Если в уравнении наивысший порядок производной искомой функции второй, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением 2-го порядка*

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0 \quad \textit{или} \quad y'' = f(x, y, y')}\,, \tag{1}$$

где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, а f и F — заданные функции соответственно трёх и четырёх переменных.

Вопрос: *Каково теперь начальное условие?*

Ответ: *Поскольку начальное условие должно определить две константы интегрирования, то оно содержит два уравнения*

$$\boxed{y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y'_0}\,, \tag{2}$$

где y_0 и y'_0 известные числа.

★ *Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющему начальному условию (2), называется задачей Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка.*

Типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

Задача 1

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 1-го типа

$$F(x, y', y'') = 0$$

к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

► *Поскольку заданная функция зависит только от трёх переменных, то очевидна замена переменных*

$$z = y', \quad z' = y''.$$

Тогда

$$F(x, y', y'') = 0 \implies \begin{cases} F(x, z, z') = 0 \\ z = y' \end{cases} \quad ◄$$

Пример 1. *Решить:* $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$, *если* $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

▷ $y'' = \sqrt{1 + y'^2} \implies \begin{cases} z' = \sqrt{1 + z^2}\,, \\ z = y'\,. \end{cases}$

1. $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2} \implies \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int dx + C_1 \implies \ln |z + \sqrt{1 + z^2}| = x + C_1\,,$$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{x + C_1} \implies 1 + z^2 = e^{2(x + C_1)} - 2z e^{x + C_1} + z^2\,,$$

$$z = \frac{e^{x + C_1} - e^{-(x + C_1)}}{2} = \operatorname{sh}(x + C_1)\,.$$

2. $z = y' \implies y' = \operatorname{sh}(x + C_1)$

$$y = \int \operatorname{sh}(x + C_1)\, dx = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2 \quad \text{— } \textit{общее решение}$$

3. $$\begin{cases} y'(0) = \operatorname{sh}(0 + C_1) = 0 \\ y(0) = \operatorname{ch}(0 + C_1) + C_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \operatorname{ch} x \quad \text{— } \textit{частное решение}$$

Проверка: $y'' = \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh} x^2} \iff \operatorname{ch} x^2 - \operatorname{sh} x^2 = 1.$

Ответ: $y = \operatorname{ch} x.$ ◁

Задача 2

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 2-го типа

$$F(y, y', y'') = 0$$

к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.

▶ *В дифференциальном уравнении 1-го порядка y должна играть роль x, поэтому напрашивается замена*

$$y'_x = z(y), \quad y''_{xx} = (z(y))' = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)dy}{dydx} = z'_y z\,.$$

Тогда

$$F(y, y', y'') = 0 \implies \begin{cases} F(y, z, zz'_y) = 0 \\ z(y) = y'_x \end{cases} \quad ◀$$

Пример 2. *Решить:* $y'^2 + 2yy'' = 0$.

▷ $$y'^2 + 2yy'' = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ y'' = zz'_y \end{array} \right\} \implies \begin{cases} z^2 + 2yzz' = 0 \\ y'_x = z \end{cases}$$

1. $z(z + 2yz') = 0$

a) $z = 0 \;\Rightarrow\; y'_x = 0 \;\Rightarrow\; y = C$ — *тривиальное решение*

b) $z + 2yz' = 0 \;\Rightarrow\; z' + \frac{1}{2y}z = 0$ — *это линейное однородное уравнение 1-го порядка, где* $p(x) = \frac{1}{2y}$. *Его решение равно*

$$z = C_1 e^{-\int \frac{dy}{2y}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln y} = C_1 e^{\ln \frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

2. $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$,

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int C_1\, dx + C_2 \implies \tfrac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1 x + C_2.$$

Проверка: Дважды дифференцируя полученное решение, приходим к исходному уравнению

$\frac{2}{3}\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'_x = C_1 \implies \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'^2 + y^{\frac{1}{2}}y'' = 0 \implies \frac{y'^2+2yy''}{2\sqrt{y}} = 0.$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1x + C_2$. $\lhd$

Задача 3

Свести дифференциальное уравнение 2-го порядка 3-го типа

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

однородное относительно y, y', y'', *к дифференциальным уравнениям 1-го порядка.*

$\blacktriangleright$ *По условию* $F(x, y, y', y'') = y^n F(x, 1, y'/y, y''/y)$ *и поэтому напрашивается замена*

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = zy \Rightarrow y'' = z'y + zy' = y(z' + z^2)\,.$$

Тогда

$$F(x, y, y', y'') = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} F(x, z, z' + z^2) = 0 \\ y' = zy \end{array} \right. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3. *Решить:* $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

$\rhd$ $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = zy \\ y'' = y(z' + z^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xz' - z = 0 \\ y' = zy \end{array} \right.$

1. $xz' - z = 0 \implies z = C_1 e^{\int \frac{dx}{x}} = C_1 x$
2. $y' = C_1xy \implies \frac{dy}{y} = C_1xdx \implies y = C_2 e^{\frac{C_1x^2}{2}}$

Проверка: После подстановки $y' = x$ *и* $y'' = C_1y(C_1x^2 + 1)$ *в исходное уравнение приходим к тождеству:*

$$xyC_1y(C_1x^2 + 1) - xC_1^2x^2y^2 - C_1y^2x = 0 \equiv 0.$$

Ответ: $y = C_2 e^{\frac{C_1x^2}{2}}$. $\lhd$

Лекция 37. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

На этой лекции мы познакомимся с такими важными понятиями, как определитель Вронского и фундаментальная система решений.

★ *Линейным дифференциальным уравнением* n*-го порядка называется уравнение*

$$\boxed{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = f(x)}, \quad (1)$$

где $p_i(x)$ $(i = \overline{0, n-1})$ *и* $f(x)$ — *известные функции.*

Вопрос: Почему это уравнение называется линейным?

Ответ: Потому что оно линейно относительно y *и её производных.*

Линейный дифференциальный оператор n-го порядка

★ *Линейным дифференциальным оператором* n*-го порядка называется выражение*

$$\boxed{L_n = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)}.$$

Вопрос: Какой вид примет линейное дифференциальное уравнение при использовании линейного дифференциального оператора?

Ответ:

$$\boxed{L_n[y] = f(x)}. \quad (1)$$

Задача Коши

★ *Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию*

$$\boxed{y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}}. \tag{2}$$

★ *Задачей Коши называется задача нахождения решения дифференциального уравнения* (1) *при заданном начальном условии* (2).

Свойства линейного дифференциального оператора

1. *Однородность*

$$L_n[cy] = cL_n[y]\,.$$

2. *Аддитивность*

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]\,.$$

Решение линейного однородного уравнения

★ *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение следующего вида*

$$\boxed{L_n[y] = 0}. \tag{1'}$$

Задача 1

Пусть $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *являются решениями уравнения* (1′). *Показать, что сумма* $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k$ *также является решением* (1′).

$$\blacktriangleright\quad L_n\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y_k\right] = \{\text{по 2-ому свойству}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} L_n\left[C_k y_k\right] = \{\text{по 1-ому свойству}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k L_n\left[y_k\right] = \{\text{по условию}\} = \sum_{k=1}^{n} C_k 0 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

★ *Фундаментальной системой решений называется система n линейно независимых решений уравнения $(1')$.*

★ *Система n функций называется линейно зависимой, если найдутся такие постоянные коэффициенты C_k, при этом хотя бы одно $C_k \neq 0$, что выполняется*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0, \quad \forall x \in (a,b),$$

в противном случае такая система функций называется линейно независимой на (a,b).

★ *Пусть $\{y_k(x)\}$ образует фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, тогда*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)\,, \quad \text{где} \;\; C_k = \text{const},$$

является его общим решением.

Пример 1. *Являются ли линейно независимыми функции: e^x и e^{x+b} ?*

▷ *Попробуем подобрать такие C_1 и C_2, чтобы*

$$C_1 e^x + C_2 e^{x+b} \equiv 0\,.$$

Очевидно, что тождество выполняется при $C_1 = e^b$, $C_2 = -1$.

Ответ: Функции линейно зависимы. ◁

Задача 2

Показать, что если функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю.*

★ *Определителем Вронского называется определитель, образованный из функций и их производных следующим образом*

$$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

▶ *Вопрос: Что будет, если продифференцировать* $n-1$ *раз условие линейной зависимости функций?*

Ответ: Получится квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно C_k

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0 \\ C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Вопрос: Когда эта система имеет нетривиальное решение, т.е. $C_k \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$?

Ответ: Чтобы $C_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta} \neq 0,$ *необходимо*

$$\Delta = W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] = 0 \quad ◀$$

• *Если найдётся хотя бы одна точка* x*, в которой*

$$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] \neq 0\,,$$

то тогда функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *— линейно независимы.*

Пример 2. *Является ли линейно независимой система следующих функций:* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$*?*

$$\triangleright\quad W[x,\ \cos x,\ \sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(\cos^2 x + \sin^2 x) = x \neq 0\,.$$

Ответ: Функции линейно независимы. $\triangleleft$

Пример 3. *Найти линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальной системой решений которого являются функции:* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$.

$\triangleright$ *Вопрос: Каков порядок искомого дифференциального уравнения?*

Ответ: Третий.

Сейчас мы выпишем общее решение, трижды его продифференцируем, и далее подберём такие множители, чтобы при сложении правых его частей получился нуль.

$$\begin{array}{r|rl} -1 & y = & C_1 x + C_2\cos x + C_3 \sin x \\ x & y' = & C_1 - C_2 \sin x + C_3\cos x \\ -1 & y'' = & - C_2\cos x - C_3 \sin x \\ x & y''' = & + C_2 \sin x - C_3\cos x \\ \hline \end{array}$$

$$-y + xy' - y'' + xy''' = 0.$$

Ответ: $y''' - \dfrac{1}{x}y'' + y' - \dfrac{1}{x}y = 0.$ $\triangleleft$

Лекция 38. Метод вариации произвольных постоянных

Вариация — термин, введённый Лагранжем для обозначения малого смещения независимого переменного или функции. Метод вариации произвольных постоянных, ранее использованный для решения линейного неоднородного уравнения 1-го порядка, будет здесь использован для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Задача 1

Пусть y_0 — *частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка, а* $\{y_k(x)\}$ *образует фундаментальную систему решений того же уравнения, т.е.* $\overline{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$ — *общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка. Показать, что* $y(x) = y_0 + \overline{y}$ — *общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка.*

► $L_n[y(x)] = L_n[y_0 + \overline{y}] = L_n[y_0] + L_n[\overline{y}] =$

$$= \left\{ \begin{array}{c} L_n[y_0] \equiv f(x) \\ L_n[\overline{y}] \equiv 0 \end{array} \right\} \equiv f(x) + 0 \equiv f(x) \quad ◄$$

Задача 2

Пусть известна $\{y_k\}$ — *фундаментальная система решений уравнения*

$$L_n[y] = f(x). \qquad (1)$$

Найти общее решение линейного неоднородного уравнения n*-го порядка.*

► *Решение* (1) *будем искать в виде общего решения линейного* *однородного уравнения (см.* Лекцию 35. Задачу 5*)*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k, \tag{2}$$

но с переменными коэффициентами. Чтобы найти $C_k(x)$, *которых* n, *а уравнение одно, требуется наложить* $n-1$ *условие при вычислении производных* y. *Итак*

$$y' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k',$$

$$y'' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k'',$$

$$\cdots\cdots\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k^{(n)}.$$

Подстановка всех производных в исходное уравнение даёт последнее уравнение для нахождения $C_k'(x)$

$$L_n[y] = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) \underbrace{L_n[y_k]}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)} = f(x).$$

В результате получим следующую квадратную систему линейных алгебраических уравнений для $C_k'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 & + & C_2' y_2 & + \ldots + & C_n' y_n & = & 0, \\ C_1' y_1' & + & C_2' y_2' & + \ldots + & C_n' y_n' & = & 0, \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} & + & C_2' y_2^{(n-1)} & + \ldots + & C_n' y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{cases}$$

Решение этой системы определяется формулой Крамера

$$C'_k(x) = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{\Delta_k}{W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]}, \tag{3}$$

причём её определителем является определитель Вронского. ◄

★ *Метод вариации произвольных постоянных — метод нахождения частного и общего решений линейного неоднородного уравнения при известной фундаментальной системе его решений, при этом решение уравнения* (1) *ищется в виде* (2), *в котором* $C_k(x)$ *удовлетворяет* (3).

Пример 1. *Известно, что* $\{x,\ \cos x,\ \sin x\}$ *— фундаментальная система решений уравнения*

$$y''' - \frac{1}{x}y'' + y' - \frac{1}{x}y = x.$$

Найти частное и общее решения этого уравнения.

▷ $$y = \sum_{k=1}^{3} C_k(x) y_k = C_1(x)x + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x\,.$$

1. *Вычислим определители.*

$$W[x,\ \cos x,\ \sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & \sin x \\ 1 & 0 & \cos x \\ 0 & x & -\sin x \end{vmatrix} = -x(x\cos x - \sin x),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x & \cos x & 0 \\ 1 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & x \end{vmatrix} = x(-x\sin x - \cos x).$$

2. *Вычислим* $C_k(x)$.

$$\begin{aligned} &C_1' = 1 && \Rightarrow\ C_1(x) = x + C_1\,, \\ &C_2' = -x\cos x + \sin x && \Rightarrow\ C_2(x) = -\int x\cos x\,dx - \cos x + C_2\,, \\ &C_3' = -x\sin x - \cos x && \Rightarrow\ C_3(x) = -\int x\sin x\,dx - \sin x + C_3\,, \end{aligned}$$

$$\int x\cos x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{matrix} \right\} = x\sin x + \cos x,$$

$$\int x\sin x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x\cos x + \sin x.$$

Таким образом

$$C_2(x) = -x\sin x - 2\cos x + C_2;\ C_3(x) = x\cos x - 2\sin x + C_3.$$

3. *Окончательно получим*

$$y = \sum_{k=1}^{3} C_k(x)y_k = (x + C_1)x + (-x\sin x - 2\cos x + C_2)\cos x +$$

$$+(x\cos x - 2\sin x + C_3)\sin x = \underbrace{x^2 - 2}_{y_0} + \underbrace{C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x}_{\overline{y}}$$

4. *Проверим частное решение* $y_0 = x^2 - 2$

$$y' = 2x,\quad y'' = 2,\quad y''' = 0 \Longrightarrow 0 + \frac{1}{x}2 - 2x - \frac{1}{x}(x^2 - 2) = x \equiv x\,.$$

Ответ: $y = x^2 - 2 + C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x.\quad \triangleleft$

Лекция 39. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Нам предстоит получить общее решение линейного однородного уравнения $L_n[y] = 0$ (1) как для случая простых корней (действительных и комплексных), так и для случая кратных корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение

Задача 1

Преобразовать линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y^{(1)} + p_0 y = 0, \quad p_j = \text{const}$$

к алгебраическому уравнению.

▶ *Возьмём в качестве решения функцию*

$$\boxed{y = e^{kx}} \quad \text{— пробная функция}$$

Тогда

$$L_n[e^{kx}] = \sum_{j=0}^{n} p_j \frac{d^j}{dx^j} e^{kx} = e^{kx} \sum_{j=0}^{n} p_j k^j = e^{kx} R_n(k) = 0 \quad ◀$$

★ *Алгебраическое уравнение, получаемое из линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка заменой производных на степени, т.е. $y^{(j)} \implies k^j$, называется характеристическим уравнением*

$$\boxed{R_n(k) = \sum_{j=0}^{n} p_j k^j = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0}.$$

Задача 2

Пусть все k_j — простые корни характеристического уравнения. Показать, что $\left\{e^{k_j x}\right\}$, где $j = \overline{1, n}$, является фундаментальной системой решений уравнения (1).

► *Из* Задачи 1 *следует, что $e^{k_j x}$ без сомнения являются решениями уравнения* (1). *Нужно показать, что они линейно независимы. Сделаем это для случая $n = 3$.*

$$W\left[e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ e^{k_3 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ {k_1}^2 e^{k_1 x} & {k_2}^2 e^{k_2 x} & {k_3}^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ {k_1}^2 & {k_2}^2 & {k_3}^2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{преобразуем} \\ \text{определитель} \\ \text{Вандермонда} \end{array} \right\} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ {k_1}^2 & {k_2}^2 - {k_1}^2 & {k_3}^2 - {k_1}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} \begin{vmatrix} k_2 - k_1 & k_3 - k_1 \\ {k_2}^2 - {k_1}^2 & {k_3}^2 - {k_1}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x + k_2 x + k_3 x} (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 + k_1 - k_2 - k_1) \neq 0,$$

поскольку в случае простых корней $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ ◄

Задача 3

Показать, что следующие фундаментальные системы решений эквивалентны $\underbrace{\left\{e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)\mathrm{x}},\ e^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)\mathrm{x}}\right\}}_{1} \Longleftrightarrow \underbrace{\{e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x\}}_{2}$.

► *Общее решение, соответствующее первой фундаментальной системе, равно*

$$y = \underbrace{C_1 e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{x}} + C_2 e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)\mathrm{x}}}_{1} = \left\{ e^{\pm\mathrm{i}\beta\mathrm{x}} = \cos\beta x \pm \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x} \right\} =$$

$$= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x}) + \mathrm{C_2 e^{\alpha x}}(\cos\beta\mathrm{x} - \mathrm{i}\sin\beta\mathrm{x}) =$$

$$= (C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i(C_1 - C_2)e^{\alpha x}}\sin\beta\mathrm{x} =$$

$$= \underbrace{A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}_{2} \quad ◄$$

Случай кратных корней

Задача 4

Пусть первые m корней совпадают, т.е. k_1 является m-кратным корнем характеристического уравнения. Показать, что $e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1 x}$ — *решения уравнения* (1).

► *По условию задачи* $R_n(k) = (k - k_1)^m Q_{n-m}(k)$. *Убедимся, что* $L_n[x^l e^{k_1 x}] = 0$, *если* $l = \overline{0, m-1}$.

$$L_n[x^l e^{kx}]\Big|_{k=k_1} = L_n[\frac{d^l}{dk^l}e^{kx}]\Big|_{k=k_1} = \frac{d^l}{dk^l}L_n[e^{kx}]\Big|_{k=k_1} =$$

$$= \frac{d^l}{dk^l}[e^{kx}(k-k_1)^m Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_1} =$$

$$= e^{kx}[x^l R_n(k) + x^{l-1}m(k-k_1)^{m-1}Q_{n-m}(k) +$$

$$+ \ldots + m(m-1)\cdots(m-l+1)(k-k_1)^{m-l}Q_{n-m}(k) + \ldots$$

$$+(k-k_1)^m \frac{d^l}{dk^l}Q_{n-m}(k))]\Big|_{k=k_1} = 0 \quad ◄$$

Задача 5

Пусть первые m корней совпадают, т.е. k_1 является m-кратным корнем характеристического уравнения. Показать, что в этом случае e^{k_1x}, xe^{k_1x}, $\ldots$, $x^{m-1}e^{k_1x}$ входят в фундаментальную систему решений уравнения (1).

► *Согласно* Задаче 4 *эти функции являются решениями уравнения* (1). *Нам осталось показать, что эти функции линейно независимы. Как следует из определения линейно независимых функций* (Лекция 37), *умножение всех функций на некоторую функцию не может изменить их линейную зависимость или независимость. Поэтому достаточно вычислить определитель Вронского*

$$W[1,\ x,\ \ldots,\ x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & (m-1)x^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (m-1)! \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Итак, заданные функции линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений уравнения (1). ◄

Пример 1. *Решить:* $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0.$

▷ 1. $R_5(k) = k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$R_5(k) = k^2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = k^2(k+1)^3 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\underbrace{k_{1,2} = 0}_{m_1=2}, \quad \underbrace{k_{3,4,5} = -1}_{m_2=3}.$

2. *Фундаментальная система решений:*

$$\{f_i(x)\} = e^{0x},\ xe^{0x},\ e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5x^2e^{-x}$ ◁

Лекция 40. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Из этой лекции станет ясно, что решение указанных уравнений не имеет принципиальных трудностей и может быть проведено даже двумя способами.

Решение методом вариаций произвольных постоянных

Решение этим методом состоит из следующих шагов:

1. *Решить характеристическое уравнение, и тем самым найти фундаментальную систему решений* $\{y_k(x)\}$ *и общее решение линейного однородного уравнения*

$$\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)\,, \quad \text{где } C_k = \text{const}\,.$$

2. *Вычислить определитель Вронского и дополнительные определители, с помощью которых находятся*

$$C_k'(x) = \frac{\Delta_k}{\Delta}\,.$$

3. *Решить простейшие дифференциальные уравнения из пункта 2, и тем самым найти* $C_k(x)$.

4. *Общее решение неоднородного уравнения равно*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = \overline{y} + y_0$$

и представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Пример 1. *Решить:* $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

$\triangleright$ 1. $k^3 + k = 0 \;\Rightarrow\; k(k^2+1) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0,\; k_{2,3} = \pm\mathrm{i}$.

$\overline{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\mathrm{i}x} + C_3 e^{-\mathrm{i}x} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

• *Здесь произвольные постоянные переобозначены.*

$$2.\;\; W[1,\; \cos x,\; \sin x] = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow\; C_1'(x) = \operatorname{tg} x\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \operatorname{tg} x & 0 \end{vmatrix} = -\sin x \qquad \Rightarrow\; C_2'(x) = -\sin x\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \sin x \;\Rightarrow\; C_3'(x) = -\operatorname{tg} x \sin x\,.$$

$$3.\;\; C_1(x) = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C_1\,,$$

$$C_2(x) = -\int \sin x\, dx = \cos x + C_2\,,$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx =$$
$$= \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_3\,.$$

4. $y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x -$
$-\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})| \sin x \quad \triangleleft$

Решение при специальном виде правой части

Первый случай:

$$\boxed{L_n[y] = Ae^{k_0 x}}, \tag{1}$$

где k_0 *не совпадает с корнями характеристического уравнения.*

Задача 1

Найти частное решение (1), если k_0 *не совпадает с корнями характеристического уравнения.*

► *Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде подобном его правой части*

$$\boxed{y_0 = ae^{k_0 x}},$$

где требуется определить a.

$$L_n[ae^{k_0 x}] = ae^{k_0 x} R_n(k_0) = Ae^{k_0 x} \;\Rightarrow\; \boxed{a = \frac{A}{R_n(k_0)}} \quad ◄$$

Пример 2. *Решить:* $y'' - 5y' + 6y = 10e^{-2x}$.

▷ $k^2 - 5k + 6 = 0 \implies k_{1,2} = 2, 3 \;\Rightarrow\; \overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$A = 10, \quad k_0 = -2, \quad R_2(-2) = 20, \quad a = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y_0 = \frac{1}{2} e^{-2x}$.

$$y = \overline{y} + y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$$

Проверка: Для каждой из функций, входящих в решение, должен выполняться баланс коэффициентов.

$$\begin{aligned} C_1 e^{2x} &: \; 4 - 10 + 6 = 0 \;\equiv\; 0\,, \\ C_2 e^{3x} &: \; 9 - 15 + 6 = 0 \;\equiv\; 0\,, \\ e^{-2x} &: \; 2 + 5 + 3 = 10 \;\equiv\; 10\,. \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$ ◁

Второй случай:

$$L_n[y] = Ae^{k_0 x}, \tag{1}$$

где экспоненциальный множитель k_0 *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m.

Задача 2

Найти частное решение (1), *если* k_0 *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m.

▶ *Вопрос: Может ли* $x^l e^{k_0 x}$ *при* $l = \overline{0, m-1}$ *являться частным решением уравнения* (1)*?*

Ответ: Нет, поскольку $x^l e^{k_0 x}$ *является решением однородного уравнения (*Лекция 39, Задача 4*).*

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\boxed{y_0 = ax^m e^{k_0 x}},$$

где требуется определить a.

По условию задачи $R_n(k) = (k-k_0)^m Q_{n-m}(k)$.

$$L_n[ax^m e^{k_0 x}] = aL_n[\frac{d^m}{dk^m}e^{kx}]\Big|_{k=k_0} = a\frac{d^m}{dk^m}L_n[e^{kx}]\Big|_{k=k_0} =$$

$$= a\frac{d^m}{dk^m}[e^{kx}(k-k_0)^m Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_0} = ae^{kx}m!Q_{n-m}(k)]\Big|_{k=k_0} =$$

$$= ae^{k_0 x}m!Q_{n-m}(k_0) = Ae^{k_0 x} \ \Rightarrow \ \boxed{a = \frac{A}{m!Q_{n-m}(k_0)}} \quad ◀$$

• *Обратим внимание, что* $m = 0$ *соответствует первому случаю.*

• *Алгоритм верен как для действительных* k_0, *так и для комплексных.*

Третий случай:

$$\boxed{L_n[y] = P_l(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + K_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x},$$

где $P_l(x)$ *и* $K_l(x)$ *многочлены* l*-ой степени, а комплексная величина* $k_0 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* m*.*

В этом случае, как и в первых двух, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n*-го порядка с постоянными коэффициентами ищется в виде наиболее близком к его правой части*

$$\boxed{y_0 = x^m[F_l(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + G_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]}.$$

Пример 3. *Решить задачу Коши:*

$y'' + y = x\cos x,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2.$

$\triangleright\quad k^2 + 1 = 0 \implies k_{1,2} = \pm\mathrm{i} \;\Rightarrow\; \mathrm{m} = 1,\;$ т.к. $\mathrm{k}_0 = \pm\mathrm{i}.$

$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x,\quad y_0 = x[(Ax + C)\cos x + (Bx + D)\sin x].$

Подстановка частного решения в исходное уравнение позволяет найти неопределённые коэффициенты частного решения.

$$\begin{array}{rcr rrcr}
\cos x & : & 2A + D = 0\,; & \sin x & : & 2B - C = 0\,,\\
x\cos x & : & 2B - C + C = 1\,; & x\sin x & : & -2A - D + D = 0\,,\\
x^2\cos x & : & A - A = 0\,; & x^2\sin x & : & -B + B = 0\,.
\end{array}$$

Отсюда $A = 0,\quad B = \frac{1}{2},\quad C = 1,\quad D = 0,$ *следовательно*

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\cos x + \tfrac{1}{2}x^2\sin x.$$

Применим к найденному y *начальные условия:*

$y(0)\;:\;C_1 = 0\,;\;\; y'(0)\;:\;C_2 + 1 = 2 \;\;\Rightarrow\;\; C_2 = 1.$

Ответ: $y = \sin x + x\cos x + \frac{1}{2}x^2\sin x \quad \triangleleft$

Лекция 41. Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами

Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

★ *Система линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид в операторной форме:*

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{y}}{dx} = A\overrightarrow{y}}, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{y} = (n \times 1)$ — *искомый вектор, а* A — *линейный оператор, представляющий собой числовую матрицу* $(n \times n)$.

Вопрос: *Как выглядит та же система в тензорной форме?*

Ответ: $\boxed{\dfrac{dy_i}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}$, где $a_{ij} = \mathrm{const}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Вопрос: *Как выглядит система* (1) *в матричной форме?*

Ответ:
$$\boxed{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}.$$

Вопрос: *Как выглядит система* (1) *в алгебраической форме?*

Ответ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n\,, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots\ldots \ \ldots \ \ldots\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n\,. \end{array}}$$

Задача 1

Получить характеристическое уравнение системы (1).

► *Чтобы свести систему* $\dfrac{d\overrightarrow{y}}{dx} = A\overrightarrow{y}$ *к алгебраической, введём пробную функцию*

$$\boxed{\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\alpha}\, e^{kx}}\,.$$

Тогда (1) $\implies$ $k\overrightarrow{\alpha}\, e^{kx} = A\overrightarrow{\alpha}\, e^{kx}$ $\implies$ $A\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{\alpha}$.

Полученное уравнение — это уравнение на собственные векторы квадратной матрицы (смотри Лекцию 10*). Использование единичной матрицы* $E\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$, *даёт уравнение на собственные числа квадратной матрицы:*

$\boxed{\det(A - kE) = 0}$ — характеристическое уравнение ◄

Вопрос: Как запишется общее решение системы (1), *если все корни характеристического уравнения* k_j *различны?*

Ответ: $\boxed{y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e^{k_j x}}$, где $b_{ij} = \text{const},\ i = \overline{1,n}$.

Вопрос: Как запишется общее решение системы (1), *если вычисленны собственные векторы* $\overrightarrow{\alpha}^{(j)}$ *матрицы* A*?*

Ответ: *Тогда общее решение имеет вид:*

$$\boxed{\overrightarrow{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j \overrightarrow{\alpha}^{(j)} e^{k_j x}}, \quad \text{где} \ \ j = \overline{1, n}.$$

Вопрос: *Как запишется общее решение системы* (1), *если корень характеристического уравнения* k_1 *кратности* m?

Ответ: *В этом случае фундаментальная система решений:*

$$\left\{e^{k_1 x}, \ xe^{k_1 x}, \ \ldots, \ x^{m-1}e^{k_1 x}, \ e^{k_{m+1} x}, \ \ldots, \ e^{k_n x}\right\},$$

а потому общее решение:

$$\boxed{y_i = (b_{i1} + b_{i2}x + \cdots + b_{im}x^{m-1})e^{k_1 x} + \sum_{j=m+1}^{n} b_{ij}e^{k_j x}}.$$

Вопрос: *Сколько произвольных констант содержит общее решение системы* (1)?

Ответ: *Всего* n, *поскольку* n *уравнений* 1-*го порядка. Следовательно* $n^2 - n$ *коэффициентов* b_{ij} *подлежат определению.*

Пример 1. *Решить:* $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \ y_1 \ + 2y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + \ y_2\,. \end{cases}$

▷ 1. *Решаем характеристическое уравнение:*

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1-k)^2 - 4 = 0 \implies k_{1,2} = -1, 3.$$

2. *Фундаментальная система решений:* $\left\{e^{-x}, \ e^{3x}\right\}$.

3. *Найдём общее решение:*

$$y_1 = b_{11}e^{-x} + b_{12}e^{3x}, \quad y_2 = b_{21}e^{-x} + b_{22}e^{3x}.$$

Вопрос: Как выразить коэффициенты b_{21} *и* b_{22} *через коэффициенты* $b_{11} = C_1$ *и* $b_{12} = C_2$*?*

Ответ: Для этого достаточно подставить в любое уравнение системы y_1 *и* y_2*, и потребовать, чтобы оно обратилось в тождество.*

$$\frac{d}{dx}\left(C_1e^{-x} + C_2e^{3x}\right) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + 2b_{21}e^{-x} + 2b_{22}e^{3x}.$$

$$\begin{array}{rcrcl} e^{-x} & : & -C_1 & = & C_1 + 2b_{21} \implies b_{21} = -C_1\,, \\ e^{3x} & : & 3C_2 & = & C_2 + 2b_{22} \implies b_{22} = C_2\,. \end{array}$$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \\ -C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3x}$ ◁

Пример 2. *Решить:* $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2\,. \end{cases}$

▷ 1. $\det(A - kE) = \begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$

$(1-k)(3-k) + 1 = 0 \implies (k-2)^2 = 0 \implies k_{1,2} = 2, \quad m = 2.$

2. $\{e^{2x},\ xe^{2x}\}.$

3. $y_1 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}, \quad y_2 = b_{21}e^{2x} + b_{22}xe^{2x}.$

$$\frac{d}{dx}\left(C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}\right) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - b_{21}e^{2x} - b_{22}xe^{2x}.$$

$$\begin{array}{rcrcl} e^{2x} & : & 2C_1 + C_2 & = & C_1 - b_{21} \implies b_{21} = -C_1 - C_2\,, \\ e^{3x} & : & 3C_2 & = & C_2 + 2b_{22} \implies b_{22} = -C_2\,. \end{array}$$

Ответ: $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} \\ -(C_1 + C_2)e^{2x} - C_2xe^{2x} \end{pmatrix}$ ◁

Лекция 42. Фазовые траектории и особые точки дифференциальных уравнений

На этой лекции мы познакомимся с понятием устойчивости дифференциальных уравнений.

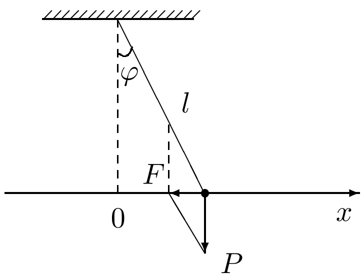
Линейный осциллятор без трения

★ *Линейным осциллятором называется такая система, которая многократно возвращается к одному и тому же состоянию, и описывается линейным дифференциальным уравнением.*

Простейшими примерами линейного осциллятора являются колебательный контур и маятник.

Задача 1

Составить уравнение для линейного осциллятора и решить его.



► *Согласно рисунку проекция сил на ось абцисс равна*

$F = -P\,\mathrm{tg}\,\alpha \simeq -xP/l$ *при* $x \ll l$. *Тогда второй закон Ньютона*

$m\ddot{x} = -xP/l$

определяет уравнение движения маятника при его малом отклонении.

Вопрос: *Идентифицируйте полученное уравнение.*

Ответ: *Полученное уравнение линейного осциллятора, которое удобно записать в следующем виде*

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0, \quad \text{где} \ \ {\omega_0}^2 = P/(ml),$$

представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. *Характеристическое уравнение:*
$$k^2 + {\omega_0}^2 = 0 \implies k_{1,2} = \pm i\omega_0 \,.$$
2. *Фундаментальная система решений:*
$$\left\{e^{i\omega_0 t},\ e^{-i\omega_0 t}\right\} \iff \{\sin\omega_0 t,\ \cos\omega_0 t\}\,.$$
3. *Общее решение:*
$$x = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t\,.$$
4. *Частное решение:*
$$x = a\cos\omega_0 t$$

для начальных условий: $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = 0.$ ◄

Задача 2

Установить функциональную связь между x *и* $\dot{x}$ *для частного решения* Задачи 1.

► *Согласно* Задаче 1

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_0 t\,, \\ \dot{x} = -a\omega_0 \sin\omega_0 t\,. \end{cases}$$

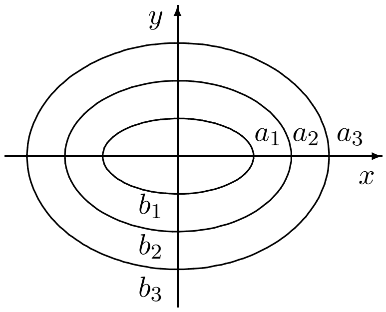
Вопрос: Каким образом исключить переменную t*?*

Ответ: Необходимо воспользоваться теоремой Пифагора.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\omega_0 t \\ -\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0} = \sin\omega_0 t \end{cases} \implies \begin{array}{c} +\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \cos^2\omega_0 t \\ \left(\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0}\right)^2 = \sin^2\omega_0 t \end{cases} \\ \hline \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\dot{x}}{a\omega_0}\right)^2 = 1 \end{array}$$
◄

★ *Фазовой траекторией называется кривая, которая описывает зависимость* $\dot{x}$ *и* x.

Вопрос: *Что представляет собой фазовая траектория линейного осциллятора?*



Ответ: *Эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

где $y=\dot{x},\quad x=x,\quad b=a\omega_0$, *а также сумму потенциальной и кинетической энергий.*

★ *Пространство переменных* x *и* $\dot{x}$ *называют фазовым пространством.*

Задача 3

Найти фазовую траекторию для линейного осциллятора без трения, не находя фундаментальной системы решений.

► *Сведем дифференциальное уравнение 2-го порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\ddot{x}+{\omega_0}^2x=0 \iff \begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}+{\omega_0}^2x=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-{\omega_0}^2x\end{cases}$$

После исключения переменной t, *задача сводится к решению дифференциального уравнения 1-го порядка.*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{{\omega_0}^2x}{y} \Longrightarrow ydy=-{\omega_0}^2xdx \Longrightarrow$$

$$\frac{y^2}{2}+{\omega_0}^2\frac{x^2}{2}=C \Longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a\omega_0}\right)^2=1 \quad ◄$$

Вопрос: *Имеется ли точка, где не определена фазовая траектория?*

Ответ: *Да. Фазовая траектория линейного осциллятора не определена в точке* $(0,0)$, *где* $dy/dx = 0/0$.

★ *Точка, в которой не определен тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории, называется особой.*

Задача 4

Записать в линейном приближении систему нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y)\,, \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

в окрестности особой точки, где $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$.

► *Разложим в ряды Тейлора правые части уравнений* $(*)$

$$P(x,y) = (x-x_0)P'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)P'_y(x_0,y_0) + \varphi(x-x_0, y-y_0)$$

$$Q(x,y) = (x-x_0)Q'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)Q'_y(x_0,y_0) + \psi(x-x_0, y-y_0)$$

Тогда, после введения следующих обозначений

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0,y_0), \quad b = P'_y(x_0,y_0), \quad \xi = x - x_0 \\ c &= Q'_x(x_0,y_0), \quad d = Q'_y(x_0,y_0), \quad \eta = y - y_0 \end{aligned}$$

получим искомый результат

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a\xi + b\eta + \varphi(\xi,\eta)\,, \\ \dot{\eta} = c\xi + d\eta + \psi(\xi,\eta)\,, \end{cases}$$

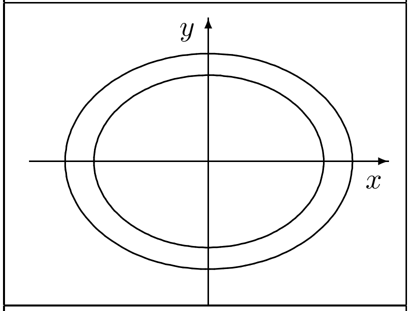
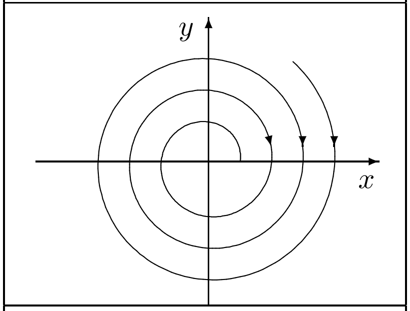
где $\varphi(\xi,\eta)$ *и* $\psi(\xi,\eta)$ — *ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по* ξ *и* η. ◄

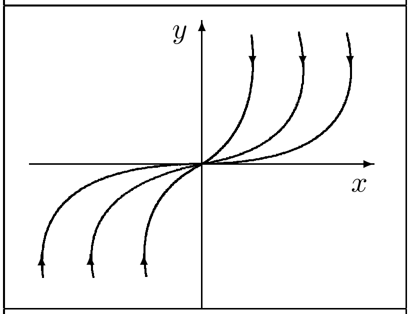
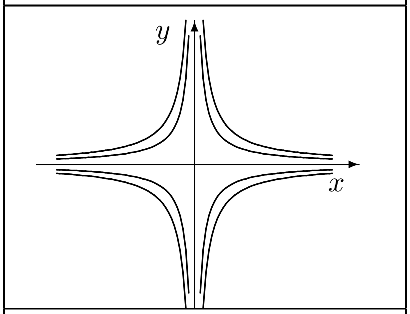
★ *Характеристическим уравнением системы дифференциальных уравнений называется уравнение:*

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{или} \quad \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad \textit{где} \quad \begin{matrix} \sigma = a + d, \\ \Delta = \lambda_1\lambda_2. \end{matrix}$$

Классификация особых точек

Устойчивость системы дифференциальных уравнений определяется корнями характеристического уравнения.

центр	**фокус**
	
$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta < 0,\ \sigma = 0$	$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta < 0,\ \sigma \neq 0$

узел	**седло**
	
$\Delta > 0,\ \sigma^2 - 4\Delta > 0$	$\Delta < 0$

• *Согласно Ляпунову, если фазовая траектория замкнута, как в случае линейного осциллятора без трения (эллипс), или направлена к особой точке и проходит через неё, то решение системы нелинейных дифференциальных уравнений устойчиво. Во всех остальных случаях оно неустойчиво. Фазовая траектория направлена к особой точке, если* $\lambda_{1,2} < 0$ *(узел) или* $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$ *(фокус).*