Resumen Electricidad y Magnetismo

Nataly Román y Juan Vargas

14 de diciembre de 2021

1. Ley de Coulomb y campo eléctrico

1.1. Ley de Coulomb

La fuerza entre dos cargas con distancia r entre ellas, esta dada por:

$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \tag{1}$$

Si r es la posicion desde donde mido el campo vectorial y r' la posicion donde se encuentra el campo vectorial, entonces la fuerza estará dada por:

$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{2}$$

Si es que existen multiples cargas y se quiere medir la fuerza sobre Q entonces:

$$\sum \vec{F} = \sum_{q_i} \frac{kQq_i(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{3}$$

1.2. Campo eléctrico

El campo eléctrico que produce una carga q, con r como la distancia desde donde se mido está dado por:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2} \tag{4}$$

Si r es la posicion desde donde se mide el campo vectorial y r' la posicion del campo, entonces:

$$\vec{E} = \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{5}$$

Es importante destacar que, al fuerza ejercida sobre Q es igual a

$$\vec{F} = Q\vec{E}(\vec{r}) \tag{6}$$

El campo eléctrico provocado por un objeto continuo está dado por:

$$E(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{7}$$

Algunos campos notable son:

$$\vec{E}_{alambre-infinito} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r} \tag{8}$$

$$\vec{E}_{placa-infinita} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \tag{9}$$

$$\vec{E}_{placa-opuestas} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \tag{10}$$

Punto a distancia z del centro de disco de radio R

$$\vec{E}_{disco} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \tag{11}$$

2. Ley de Gauss

El flujo electrico se defino como la cantidad de campo que atraviesa perpendicularmente una superficie:

$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = \int_S \vec{E}\cdot dS \tag{12}$$

La ley de Gauss dice que el flujo electrico sobre una superficie solo depende de su carga encerrada. El flujo en una superficie que encierra una carga q está dado por:

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{13}$$

Entonce se tiene que la ley de Gauss dice:

$$\int_S \vec{E}\cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{14}$$

Es importante notar que **dentro de un conductor no existe campo electrico.** ya que las cargas inducidas en en la cara interior y exterior se cancelan

3. Trabajo y energía

El trabajo se define como:

$$W = Q\Delta V \tag{15}$$

Notar que cuando una particula con carga **q** se mueve a **d** en un campo es uniforme se cumple que:

$$W_{a\to b} = q\vec{E}\vec{d} \tag{16}$$

La energia potencial de cargas puntales a distancia r_{ij} es igual a

$$U = k\sum_i^n\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \tag{17}$$

4. Potencial Eléctrico

4.1. Potencial eléctrico

4.1.1. Definición:

Es el trabajo realizado por unidad de carga para mover dicha carga por un campo electrostático (conservativo).

$$V(r) = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \tag{18}$$

El potencial esta dado por

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} k\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \text{ para cargas puntuales} \\ k\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dq \text{ para distribuciones continuas} \end{cases} \tag{19}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos $\vec{r}_a$ y $\vec{r}_b$ es

$$\Delta V_{a\to b} = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l} \tag{20}$$

Importante notar:

$$E = -\nabla V \tag{21}$$

4.1.2. Dipolo eléctrico:

Consiste de dos cargas iguales pero opuestas, separadas por una distancia d

El potencial eléctrico en un punto P esta definido por

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) \tag{22}$$

Donde r_+ es la distancia desde P hacia la carga positiva y r_- desde P a la carga negativa.

Lo que es equivalente a

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{23}$$

Donde $\vec{p}$ es el **momento dipolar** definido por

$$\vec{p} = q\vec{r}'_+ - q\vec{r}'_- = q(\vec{r}'_+ - \vec{r}'_-) = qd \tag{24}$$

Para una distribución continua de carga ρ

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')d\tau' \tag{25}$$

Densidad de carga lineal: $dq' = \lambda(\vec{r}')dl'$
Densidad de carga superficial: $dq' = \sigma(\vec{r}')da'$
Densidad de carga volumétrica: $dq' = \rho(\vec{r}')d\tau'$

4.1.3. Potencial eléctrico de un cascarón esférico:

Si r está fuera del cascarón y este tiene una densidad de carga superficial constante σ,

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r} \tag{26}$$

Si está dentro:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} \tag{27}$$

Donde R es el radio total de la esfera.

4.1.4. Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{28}$$

En ausencia de cargas, se tiene la **ecuacion de Laplace**

$$\nabla^2 V = 0 \tag{29}$$

4.1.5. Trabajo y energía en electrostática:

En cualquier punto, la fuerza eléctrica sobre Q es

$$\vec{F} = Q\vec{E} \tag{30}$$

Por lo tanto se debe ejercer una fuerza $-Q\vec{E}$ para mover una carga. El trabajo ejercido está dado por

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}_{\text{ext}} d\vec{l} = -Q[V(\vec{b}) - V(\vec{a})] \tag{31}$$

El potencial eléctrico entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\Delta V = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \frac{W}{Q} \tag{32}$$

4.1.6. Movimiento de una carga eléctrica en un campo eléctrico uniforme

para una distancia d y una carga q_0

$$V_b - V_a = -Ed$$

El cambio de energia potencial desde A a B

$$\Delta U = q_0\Delta V = -q_o Ed$$

Si se mueve desde el reposo, su velocidad en B es

$$\Delta K + \Delta U = 0 \implies \frac{1}{2}mv^2 = q_0 Ed = 0$$

$$\implies v = \sqrt{\frac{2q_0 Ed}{m}}$$

4.1.7. Energía de un conjunto de cargas puntuales:

El trabajo necesario para reunir N cargas, o equivalentemente, la energia almacenada en el sistema es

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

4.1.8. Energía de una distribución continua de cargas:

Para una distribución espacial de carga ρ, la energía está dada por

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{R^3} |\vec{E}|^2 d\tau$$

4.1.9. Superficies equipotenciales:

Un conjunto de puntos que tienen el mismo potencial electrico V forman una superficie equipontencial. El campo electrico es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales, es decir, $\Delta V = 0 \implies W = q\Delta V = 0$. El trabajo realizado para mover una particula Q esta dada por $\Delta W = Q\Delta V$

4.1.10. Condiciones de borde

Si la superficie es perpendicular al campo:

$$E^{\perp}_{\text{arriba}} - E^{\perp}_{\text{abajo}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Si la superficie es paralela al campo:

$$E^{\parallel}_{\text{arriba}} = E^{\parallel}_{\text{abajo}}$$

4.1.11. Conductores en equilibrio electrostático:

Existe cuando no hay ningún movimiento neto de carga dentro del conductor. El flujo del campo electrico por el cilindro gaussiano es

$$\psi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

4.1.12. Cargas inducidas

Una carga q induce una carga -q en la superficie de un conductor sin carga.

5. Capacitancia y dieléctricos

5.1. Condensadores

5.1.1. Definición:

Dos conductores separados por un aislante(o vacío) forman un condensador que puede almacenar cargar eléctrica.

5.1.2. Capacitancia:

Es la constante de proporcionalidad entre la carga y la diferencia de potencial.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

5.1.3. Placas paralelas:

Siempre que la distancia entre las placas (d) sea considerablemente menor que el área de las placas (A) la **densidad superficial** de la carga sera $\sigma = Q/A$ y su **campo eléctrico**

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

La diferencia de potencial esta dada por

$$V = Ed = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \implies C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

5.1.4. Condensador esférico

Sabemos que $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$.
Si los radios b y a cumplen que $b < a$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)}$$

5.1.5. Condensador cilíndrico

Sabemos que $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}$ Si los radios b y a cumplen que $b < a$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{ln(b/a)}$$

5.1.6. Energia almacenada:

Cuando se **carga** un condensador se transfieren electrones de la placa positiva a la placa negativa realizando trabajo.

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

$$\int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

5.1.7. Capacitores en paralelo:

Para dos capacitores combinados en paralelo con capacitancias C_1 y C_2.

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_{eq}\Delta V$$

La capacitancia equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

5.1.8. Capacitores en serie:

Para dos capacitores combinados en serie.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$Q = Q_1 = Q_2$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Por lo tanto, la capacitancia:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Dieléctricos

5.1.9. Definición:

Corresponden a materiales aislantes, donde las cargas no son capaces de moverse por el material. La suma de sus desplazamientos microscópicos generan las propiedades de los dieléctricos.

5.1.10. Polarización:

Un átomo neutro en un campo eléctrico, mueve su núcleo cargado positivamente en una dirección, y su nube de electrones en una dirección opuesta. Ahora el átomo tiene un

5.1.11. Momento dipolar

en la misma dirección de $\vec{E}$

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}$$

donde α es la polarizabilidad atómica.

Para un átomo con un núcleo puntual y una distribución esférica de carga de **radio a**:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v$$

El campo electrico que generado por la nube de electrones equilibra el campo electrico externo

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{a^3} \implies p \equiv qd = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$$

Una molécula polar puede ser modelada como un dipolo eléctrico.

5.1.12. Dipolo eléctrico en un campo eléctrico:

En presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ un dipolo eléctrico formado por cargas -q y +q, con un momento dipolar $\vec{p}$ en esta dirección, separados a una distancia $2a$, las cargas experimentan una fuerza de magnitud $F = qE$. Un dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$ experimenta un torque

$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

En un dipolo se tiende a alinear el momento dipolar con el campo eléctrico, lo que provoca que el material se polarice. Este efecto es cuantificado por el momento dipolar por unidad de volumen $\vec{P}$, conocido tambien como polarizacion.

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$$

Si es campo eléctrico no es uniforme, existirá una fuerza neta $\vec{F}$ además del torque.

5.1.13. Potencial electroestatico

: El potencial de un dipolo en un punto es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_b(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_b(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}d\tau'$$

O sea el potencial de un objeto polarizado es igual a la suma de la distribución de carga volumétrica $-\nabla\cdot\vec{P}$, lo que es equivalente a la acumulacion de carga ligada, y la distribución de carga superficial $\sigma_b \equiv \vec{P}\cdot\hat{n}$

5.1.14. Desplazamiento eléctrico:

Dentro de un dielectrico, la densidad de carga total es $\rho = \rho_b + \rho_f$ donde ρ_f es la densidad de carga libre. La ley de Gauss queda como

$$\epsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = \rho_b + \rho_f = -\nabla\cdot\vec{P} = \rho_f$$

$$\nabla\cdot(\epsilon_0\vec{E} + P) \vec{=} \rho_f$$

El desplazamiento eléctrico se define como $\vec{D} \equiv \epsilon_0 E \vec{+} \vec{P}$. Por lo tanto, la ley de Gauss queda como

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f$$

donde Q_f es la carga libre total encerrada por el volumen y S corresponde un vector que sale de la superficie.

5.1.15. Condiciones de borde:

El desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ satisface:

$$D^{\perp}_{\text{arriba}} - D^{\perp}_{\text{abajo}} = \sigma_f$$

$$D^{\parallel}_{\text{arriba}} - D^{\parallel}_{\text{abajo}} = P^{\parallel}_{\text{arriba}} - P^{\parallel}_{\text{abajo}}$$

5.1.16. Medios dieléctricos lineales:

Para muchas sustancias, la polarización es proporcional a una intensidad del campo eléctrico.

$$\vec{P} = \epsilon_0\mathcal{X}_e\vec{E}$$

Donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico total. **La constante $\mathcal{X}_e$ es la susceptibilidad eléctrica del medio**. Los medios que obedecen esta ecuación son llamados **dieléctricos lineales.** El vector **desplazamiento** para un **dielectrico lineal** es:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\mathcal{X}_e\vec{E} = \epsilon_0(1+\mathcal{X}_e)\vec{E} \equiv \epsilon\vec{E}$$

donde $\epsilon = \epsilon_0(1+\mathcal{X}_e)$ es la permitividad del material. La permitividad relativa o **constante dieléctrica** es

$$\epsilon_r \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{C_f}{C_i} = 1 - \mathcal{X}_e$$

5.1.17. Campo eléctrico en un medio dieléctrico lineal homogéneo:

En general no se cumple que $\nabla\times\vec{D} = 0$. Si el medio llena completamente el espacio se tiene

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla\times\vec{D} = 0$$

Por lo tanto,

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}_{\text{vacio}}$$

$$\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E}$$

Donde $\vec{E}_{\text{vacio}}$ es el campo electrico con la misma distribucion de carga ρ_f en el vacío. Entonces, el campo electrico es:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{E}_{\text{vacío}} < \vec{E}_{\text{vacio}}$$

Asi, el potencial electrico V se reduce a un factor ϵ_r
En un **condensador de placas paralelas** con **medio dieléctrico** entre las placas, su capacidad esta dada por

$$C = \epsilon_r C_{\text{vacío}}$$

5.1.18. Capacitores con material dieléctrico

Al poner un dieléctrico entre dos placas, se disminuye la diferencia de potencial de ΔV_0 a ΔV donde

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

κ es la constante dieléctrica del material Y como la carga permanece constante, la capacitancia cambia:

$$C = \kappa C_o = \frac{Q_0}{\Delta V}$$

El campo electrico neto en el dielectrico es

$$E = E_0 - E_{\text{ind}} = \frac{E_0}{\kappa}$$

El campo electrico inducido esta dado por la densidad de carga inducida

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{inf}}}{\epsilon_0} \implies \sigma_{\text{ind}} = (\frac{\kappa-1}{\kappa})\sigma$$

$$C = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

6. Corriente, Resistencia y Fuerza Electromotriz

6.1. Corriente eléctrica

Se define como la carga que pasa por una sección transversal de un alambre por unidad de tiempo. Por convención, la corriente tiene el sentido del movimiento de las cargas positivas.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Si la corriente es debida a cargas q, con densidad de numero por volumen n, con velocidad v_d, la cantidad de carga que pasa por P es

$$\Delta Q = qn(Av_d\Delta t)$$

6.1.1. Densidad de corriente:

Se define como

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d$$

Si se trata de un volumen, $\vec{J}(\vec{x})$ en el punto $\vec{x}$ es

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

donde dIes la carga neta en el tiempo pasando por un área $d\vec{A}$.
Si la corriente es debido a cargas q con velocidad media $\vec{v}$, entonces esta dada por

$$J = qn\vec{n}$$

6.1.2. Conservación de carga:

La carga neta de un sistema aislado es constante, es descrita por la **ecuación de continuidad**.

$$\nabla J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde $\rho(\vec{x}, t)$ es la densidad de carga volumétrica.
De esto se obtiene la forma integral

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho d^3x = -\frac{dQ}{dt}$$

6.2. Resistencia

6.2.1. Ley de Ohm

Si ambos extremos de un conductor son mantenidos con una diferencia de potencial, entonces va a existir una corriente constante I a través del conductor.

$$V = IR$$

Donde R es la resistencia del conductor medida en $1\omega = 1V/A$ y en el caso de una resistencia cilíndrica de largo L y sección transversal A esta dada por

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Donde ρ es la resistividad del material. Se define la **conductividad** del material como $\sigma = 1/\rho$.
Si se esta en presencia de **conductores isótropos**, la ley de Ohm puede ser escrita localmente como

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x})$$

Para un cilindro de largo L y sección transversal A con una diferencia de potencial ΔV, la magnitud de campo eléctrico es

$$E = \frac{\Delta V}{L}$$

La densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{L} \implies \Delta V = (\frac{L}{\sigma A})I$$

Por lo tanto, la resistencia es

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{\sigma A} = \rho \frac{L}{A}$$

O en forma diferencial para un solido de revolucion:

$$dR = \frac{\rho dZ}{A(dZ)} \tag{33}$$

En un sistema formado por dos conductores $\pm Q$ y diferencia de potencial V. La capacidad del sistema esta dada por

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$I = C\frac{dV}{dt} \tag{34}$$

Si ambos conductores están rodeados por un material de permitividad ϵ y conductividad σ, la corriente $I = V/R$ esta dada por

$$\begin{aligned} I &= \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \\ &= \sigma \int_V \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_V \rho_f d\tau \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon} Q = \frac{\sigma}{\epsilon} CV \implies RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \end{aligned}$$

6.2.2. Modelo clásico de conductividad:

En presencia de un campo eléctrico, los electrones se mueven por una combinación de movimientos aleatorios y un desplazamiento lento en la dirección opuesta al campo eléctrico. El tiempo medio entre colisiones es $\tau = \lambda/v_t$, donde v_t es la velocidad termal de los electrones. El electrón se mueve con una aceleración de $\vec{a} = q\vec{E}/m$.
La **densidad de corriente** esta dada por

$$\vec{J} = nq\frac{q\vec{E}}{m}\tau \implies \sigma = \frac{n\lambda q^2}{mv_t}$$

6.2.3. Tiempo de relajación:

Corresponde al tiempo en que un conductor aislado llega al equilibrio. La densidad de carga decae a medida que la carga fluye hacia la superficie del conductor. La ecuación de continuidad tiene la forma $\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x})e^{-t/\tau}$, donde $\tau = \epsilon_0/\sigma$ es el **tiempo de decaimiento.**

6.2.4. Ley de Joule:

El trabajo en el tiempo realizado por el campo electrico $\vec{E}$ cuando una carga pasa a traves de un potencial V es VI. Por conservacion de energia, es igual a la potencia disipada en calor P

$$P = IV = I^2R$$

Medida en Watts ($1W = 1J/s$)

6.2.5. Resistencia y temperatura:

La resistividad de un conductor varia con la temperatura y en muchos casos linealmente de acuerdo a

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

donde ρ_0 es la resistividad de referencia y α es el coeficiente de temperartura de resistividad.
Como la resistencia es proporcional a la resistividad

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

6.2.6. Superconductores:

Son materiales que cuando llegan a una **temperatura critica** T_c su resistencia disminuye hasta cero.

6.2.7. Corrientes eléctricas: Cilindros Concentricos de radios $a < b$

Su diferencia de potencial entre cilindros es

$$V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{b}{a})$$

La corriente electrica es

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{ln(b/a)}$$

Si el material es ohmico, la resistencia es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{ln(b/a)}{2\pi L\sigma} = \frac{\rho}{2\pi L} ln(b/a)$$

6.3. Fuerza electromotriz

Un dispositivo que suministra energia electrica a un circuito se llama fuente de fuerza electromotriz (fem), esta realiza un trabajo no conservativo sobre las cargas. El trabajo por unidad de carga es llamado **fem** ε de la fuente, se mide en volt.
En una **bateria real**, el voltaje entre los terminales es

$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

Cuando no circula corriente en la bateria, el voltaje es igual a la fem ε. Al conectar la bateria la corriente esta dada por

$$I = \frac{\Delta V}{R} \implies \varepsilon = IR = Ir \implies I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

En una **bateria ideal** esta mantiene un potencial constante en los dos terminales, es decir, no importa la corriente que pasa a traves de ella, entonces $I = \varepsilon/R$
La **potencia** entregada por la fuente es

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\varepsilon = I\varepsilon$$

La energia almacenada o trabajo es

$$E_{\text{almacenada}} = Q\varepsilon$$

6.3.1. Potencia electrica:

La perdida de energia potencial electrica por el paso de corriente por el resistor es

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

Como satisface la ley de Ohm

$$\mathcal{P} = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

7. Circuitos de Corriente Directa

7.0.1. Resistores en serie:

La corriente que circula por cada resistor es la misma. La resistencia equivalente es $R_{\mathbf{eq}} = R_1 + R_2$. Por lo tanto, la caida de potencial esta dado por

$$V = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2) \equiv IR_{\text{eq}}$$

7.0.2. Resistores en paralelo:

Tienen la misma diferencia de potencial a través de ellos. La resistencia equivalente de un circuito en paralelo es siempre menor que la resistencia de cualquiera de los resistores.
La resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R_{\mathbf{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

La diferencia de potencial es

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

entonces, la corriente electrica

$$I \equiv \frac{V}{R_{\mathbf{eq}}} = \frac{V}{R_1}\frac{V}{R_1} = V(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1})$$

7.0.3. Leyes de Kirchoff

1. **Ley de la unión:** En una juntura de un circuito donde la corriente se divide, la suma de las corrientes que llegan debe ser igual a la suma de las corrientes que salen.

$$\sum_{\text{entrada}} I_k = \sum_{\text{salida}} I_k$$

2. **Ley de la espira:** En un circuito cerrado, la suma de los cambios en el potencial deben ser cero.

$$\sum_{\text{espira cerrada}} V_k = 0$$

7.1. Divisor de Voltaje:

Si se tiene un circuito con N resistencias en serie, el voltaje entre los dos terminales de una de ellas estará dado por:

$$V_{R_i} = \frac{R_i}{\sum_i^N R_i} V_{entrada} \quad (35)$$

7.2. Divisor de Corriente:

Si se tiene un circuito con N resistencias en paralelo, la corriente que atraviesa de una de ellas estará dada por:

$$I_{R_i} = \frac{\frac{1}{R_i}}{\sum_i^N \frac{1}{R_i}} I_{entrada} \quad (36)$$

7.2.1. Instrumentos de medición eléctrica

Galvanómetro: Componente analógico para medir corriente y voltaje
Amperímetro: Mide la corriente, las cargas deben pasar directamente a través de el instrumento y estar conectado en serie. Tiene un resistencia muy baja
Voltímetro: Mide la diferencia de potencial. Debe unir ambos puntos al voltímetro sin abrir el circuito. Idealmente tiene resistencia infinita así que I = 0

7.2.2. Circuitos RC:

Contienen capacitores y resistores conectados en serie, en los cuales la corriente siempre circula en la misma direccion. Cuando el interruptor esta cerrado por ley de la espira se tiene

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

En $t = 0$ la carga del capacitor es cero, por lo tanto la correinte inicial:

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R}$$

Cuando el capacitor esta cargado al maximo la carga es

$$Q = C\varepsilon$$

La corriente mientras $\varepsilon > 0$ esta dada por

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

donde $RC = \tau$ es la contante de tiempo del circuito
Una vez $\varepsilon = 0$. Finalmente, la corriente esta dada por

$$I(t) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$

8. Campo Magnético y Fuerzas Magnéticas

8.1. Campos magnéticos

Los campos magnéticos se suelen representar con el símbolo $\vec{B}$ y su dirección apunta hacia el norte magnético. Es posible representarlo utilizando **lineas de campo magnético**, cuya dirección es perpendicular a la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Se cierran sobre si mismas.

8.1.1. Fuerza de Lorentz:

La fuerza de Lorentz define la intensidad de campo magnético medida en:

$$1T = 1\frac{N}{C \cdot m/s}$$

$$1G = 10^{-4}T$$

Una carga que se mueve con un ángulo ϕ respecto a $\vec{B}$ experimenta una fuerza magnética

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB \sin\phi$$

Si hay un campo electrico presente, la fuerza neta sobre q es:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Si la carga se mueve de perpendicular a $\vec{B}$ experimenta una fuerza máxima

$$F_{\max} = qvB$$

Si la carga se mueve paralela a $\vec{B}$ la fuerza magnética es cero. Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo, por lo que no pueden acelerar ni frenar partículas cargadas. Solo alteran su dirección.

8.1.2. Ciclotrón:

El movimiento de una partícula carga en un campo magnético constante es circular con la fuerza de Lorentz apuntando radialmente hacia el centro con magnitud

$$F_b = qvB = m\frac{v^2}{r} \implies r = \frac{mv}{qB}$$

La **velocidad angular** de la partícula esta dada por

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

El periodo de movimiento es

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Si una partícula con carga se mueve en un campo magnético, su trayectoria sera una espiral cuyo eje es paralelo al campo magnético.

8.1.3. Selector de velocidad:

Una carga q con velocidad $\vec{v}$ en un campo eléctrico y uno magnético, para moverse a velocidad constante debe suceder que la

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Si $\vec{F}$ es igual 0 y la velocidad perpendicular al campo magnético

$$qE = qvB \implies v = \frac{E}{B}$$

8.1.4. Espectrómetro de masa:

Separa iones según carga especifica. El radio de trayectoria en el campo magnético
$vecB_0$ es

$$r = \frac{mv}{qB_0)} \implies \frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v} = \frac{rB_0}{E/B} = \frac{rB_0B}{E}$$

8.1.5. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente:

Si consideramos un alambre de longitud L, sección transversal A, con corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ la fuerza magnética sobre q es

$$q\vec{v} \times \vec{B}$$

Para un volumen n

$$\vec{F_b} = nAL(q\vec{v} \times \vec{B}) = I\vec{I} \times \vec{B}$$

donde $I = nqvA$ y $\vec{L}$

Si $d\vec{l}$ es un segmento del alambre con forma arbitraria

$$\vec{F_B} = \int Id\vec{l} \times \vec{B}$$

8.1.6. Torque sobre un circuito en un campo magnético uniforme:

Consideramos un circuito cuadrado de lado a con I constante, en un campo magnetico constante $\vec{B} = B\hat{x}$.
La fuerza magnética esta dada por

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Las fuerzas en cada lado tienen magnitud $F = IBa$ y estas se anulan por sus sentidos opuestos, por lo tanto, la fuerza neta en el circuito cerrado es cero. En general, el **torque** para un circuito esta dado por

$$\tau = ABI$$

donde A es el área de l circuito. **Fuerza y torque sobre una espira:** La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético es igual a cero.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \mu B sin\theta$$

donde μ es el **momento dipolar magnetico** de la espira

$$\mu = IA$$

9. Fuentes de campo magnético

Cuando una corriente estacionaria corre por un alambre, la magnitud I es la misma en todo el circuito, por lo tanto, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, entonces la ecuacion de continuidad es $\nabla \cdot \vec{J} = 0$.

9.0.1. Ley de Biot-Savart:

Es analoga a la Ley de Coulomb para electrostática.
Para un elemento de corriente $Id\vec{l}$, el campo magnético en todo el alambre es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{Id\vec{l} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

9.0.2. Campo magnético de un alambre infinito:

Consideramos un alambre infinito en coordenadas polares. El campo magnético generado por el alambre es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\left(\frac{z}{R^2\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\phi}$$

9.0.3. Fuerza entre alambre paralelos:

Consideramos dos alambre de largo $L >> d$ que transportan corrientes I_1 e I_2. La fuerza que ejerce el alambre 1 sobre el alambre 2 es

$$\vec{F_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} r_{12}$$

donde r_{12} apunto desde el alambre 1 al alambre 2.
La fuerza que ejerce el alambre 2 sobre el alambre 1 es

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

Si las corrientes circulan en la misma dirección, las fuerzas son atractivas, de lo contrario se repelen.

9.0.4. Campo de un anillo de corriente:

El campo magnético de un anillo circular de radio R que lleva una corriente estacionaria I, a una distancia z del centro.

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{R}{r^3}\right) 2\pi R\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

9.0.5. Tercera ecuacion de Maxwell:

Para una densidad de corriente $\vec{J}$, la corriente esta dada por $I = JdA$ donde dA es la sección transversal. El campo magnético es

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{x}) \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$$

$$\vec{B}(\vec{x}) \equiv \nabla \times \vec{A}$$

donde $\vec{A}$ es el **vector potencial.**
De lo cual se obtiene que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

9.1. Ley de Ampére:

Si es que se tiene un alambre que encierra una corriente, sin importar la forma del alambre, se tiene que

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Si el flujo de carga esta dado por la densidad de corriente $\vec{J}$, la corriente encerrada es

$$I_{\text{enc}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

donde $\mathcal{S}$ es la superficie encerrada por el circuito. Otra forma de la ley de Ampere (cuarta ecuacion de Maxwell) es

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

9.1.1. Solenoides:

Un solenoide es un alambre largo enrollado en forma de hélice. Cuando lleva corriente genera un campo magnetico (casi) uniforme en el interior.

Si se toma un selonoide de longitud l con un numero N de vueltas y corriente I

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \tag{37}$$

con

$$n = \frac{N}{l} \tag{38}$$

9.1.2. Toroides:

Es un alambre conductor enrollado al rededor de un toro. Si $b < r < c$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{39}$$

10. Inducción magnética

Se induce una corriente eléctrica en una espira mediante un cambio

10.1. Flujo magnetico

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdAcos(\theta) \tag{40}$$

Y si la superficie es cerrada $\phi_b = 0$

10.1.1. Flujo magnetico en una espira rectangular

En un campo magnetico generado por un alambre infinito que conduce corriente I

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{41}$$

Entonces el flujo magnetico a traves de una espira rectangular de alto **a**, ancho **b** a distancia **c** del cable es

$$\phi_B = \int \vec{B}d\vec{A} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b\ ln(\frac{a+c}{c}) \tag{42}$$

10.1.2. Ley de Lenz

La dirección de la corriente inducida es tal que el campo magnético creado por ella se opone al cambio de flujo magnetico.

10.2. Ley de Faraday

La ley de Faraday establece que la FEM inducida en una espira cerrada corresponde a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

O sea, el negativo de la variación del flujo magnético a través de una espira con respecto al tiempo.
En el caso de trabajar con una bobina con N espiras idénticas, se tiene

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_B}{dt}$$

Un fem puede ser inducido si:

1. Varia la magnitud del campo magnetico
2. Varía el area encerrada por la espira
3. Varía el angulo entre B y A

Notar que

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \implies \frac{d\phi}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \tag{43}$$

por lo que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \implies \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{44}$$

10.2.1. Fem de movimiento

Si se tiene una barra de largo l de un conductor que se mueve a traves de un campo magnetico a una velocidad $\vec{v}$, los electrones del conductor experimentan una fuerza

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{45}$$

Esto hará que las cargas se muevan a los extremos de el conductor hasta que la fuerza electrica se equilibrie con la fuerza magnetica, creando una diferencia de potencial.

$$qvB = qE \implies E = vB\Delta V = El = Blv \tag{46}$$

Con la ley de Faraday:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{47}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{lv\ dx}{dt} = -Blv \tag{48}$$

Generalizando, para cualquier espira conductora cerrada, la fem total es:

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{49}$$

11. Inductancia

11.0.1. Inductancia mutua

Si se tiene una bobina con una corriente cambiante i_1, se establecera un campo magnetico $\vec{B}$. Si es que existe otra bobina dentro de este campo magnetico, la fem inducida sobre esta será equivalente a:

$$\varepsilon_2 = -N_2\frac{d\phi_{B2}}{dt} \tag{50}$$

donde ϕ_{B2} corresponde a el flujo magnetico de B sobre la segunda bobina.

La relación entre la corriente en la primera bobina (i_1) y el flujo magnetico (ϕ_B) esta dada por una constante llamada **inductancia mutua**.

$$N_2\phi_{B2} = Mi_i \tag{51}$$

$$\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt} \tag{52}$$

donde:

$$M = \frac{N_2\phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\phi_{B1}}{i_2} \tag{53}$$

11.0.2. FEM autoinducida

En un circuito en el que circula una corriente i, se generará un campo magnetico. Este campo magnetico a su vez, generara una FEM en el mismo circuito,

12. Consideraciones:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{54}$$

Si U es la energia potencial:

$$F = -\nabla U \tag{55}$$

El diferencial de carga esta dado por:

$$dq = \begin{cases} \lambda dl, \text{En el caso que sea 1D} \\ \sigma dA, \text{ con } dA = \begin{cases} dx\ dy \\ rdrd\theta \text{ en polares} \end{cases} & \text{En el caso que sea 2D} \\ \rho dV, \text{ con } dV = \begin{cases} dx\ dy\ dz \\ r^2 sin(\theta) drd\theta d\phi \text{ en esfericas} \end{cases} & \text{En el caso que sea 3D} \end{cases} \tag{56}$$

13. Integrales útiles

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} arctan(\frac{x}{a}) \tag{57}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{58}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \tag{59}$$