ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа 1.3.3

Измерение вязкости воздуха по течению в тонких трубках

Рогозин Владимир
Группа Б03-105

Цель работы: экспериментально исследовать свойства течения газов по тонким трубкам при различных числах Рейнольдса; выявить область применимости закона Пуазейля и с его помощью определить коэффициент вязкости воздуха.

Оборудование: система подачи воздуха (компрессор, поводящие трубки); газовый счетчик барабанного типа; спиртовой микроманометр с регулируемым наклоном; набор трубок различного диаметра с выходами для подсоединения микроманометра; секундомер.

Теоретические сведения:

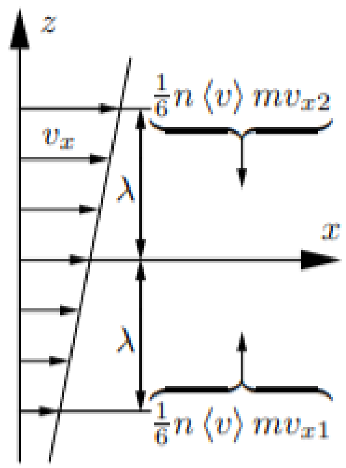


Рис. 1: К выводу формулы касательного напряжения

При хаотическом тепловом движении молекулы переносят с собой массу, импульс и энергию. Если среднее значение этих величин изменяется в каком-то направлении, то происходит перенос соответствующей величины и обусловленное им явление, при переносе импульса – внутреннее трение, вязкость. Приближенно будем считать, что на единичную площадь в единицу времени падает $\frac{1}{6}n\langle v\rangle$ молекул, где n – их число в единице объема, $\langle v\rangle$ – их средняя скорость. На рисунке рассмотрен переход молекул через выделенную площадку в случае, когда в среде имеется градиент скорости:

$$\tau_{zx} = \frac{\Delta(mv_x)}{S\Delta t} = -\frac{1}{3}n\langle v\rangle m\lambda\frac{dv_x}{dz}$$
$$\tau_{zx} = -\eta\frac{dv_x}{dz}, \qquad \eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho$$

где λ – длина свободного пробега молекул газа относительно столкновений друг с другом. Величину η называют *коэффициентом динамической вязкости* среды.

Работа посвящена изучению течения воздуха по прямой трубе круглого сечения. Движение жидкости или газа вызывается перепадом внешнего давления ΔP на концах трубы, чему в свою очередь препятствуют силы вязкого («внутреннего») трения, действующие между соседними слоями жидкости, а также со стороны стенок трубы.

Объёмным расходом Q называют объём жидкости, протекающий через сечение трубы в единицу времени. Величина Q зависит от перепада давления ΔP, а также от свойств газа (плотности ρ и вязкости η) и от геометрических размеров (радиуса трубы R её длины L). Основная задача данной работы — исследовать эту зависимость экспериментально.

Характер течения в трубе может быть *ламинарным* либо *турбулентным.* При ламинарном течении слои жидкости не перемешиваются между собой. Турбулентное течение характеризуется образованием *вихрей* и активным *перемешиванием* слоев, при этом даже в стационарном течении в каждой точке имеют место существенные *флуктуации* скорости течения и давления.

Характер течения определяется безразмерным параметром — *числом Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho u a}{\eta}$$

где ρ – плотность среды, u – характерная скорость потока, η – коэффициент вязкости среды, a – характерный размер системы (размер, на котором существенно меняется скорость течения). Это число имеет смысл отношения кинетической энергии движения элемента объёма жидкости к потерям энергии из-за трения в нём $\sim K \;/\; A_{\text{тр}}$. При достаточно малых Re в потоке доминируют вязкие силы трения и течение является ламинарным. С ростом числа Рейнольдса может быть достигнуто его критическое значение $Re_{\text{кр}}$, при котором характер течения сменяется с ламинарного на турбулентный.

Из опыта известно, что переход к турбулентному течению по трубкам круглого сечения наблюдается при $Re_{\text{кр}} \approx 10^3$ при $\overline{u} = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ (средняя скорость потока, R – радиус трубы).

В целях упрощения теоретической модели течение газа в условиях эксперимента можно считать несжимаемым: $\rho = \text{const}$. Для газов такое приближение допустимо, если относительный перепад давления в трубе мал $\Delta P \ll P$, а скорость течения значительно меньше скорости звука. В нашем опыте максимальная разность давлений составляет ~ 3 кПа, что составляет $\sim 3\%$ от атмосферного.

Из опыта известно, что при достаточно малых числах Рейнольдса течение в прямой трубе с гладкими стенками имеет ламинарный характер. В таком случае задача о течении жидкости имеет простое аналитическое решение.

Направим ось x вдоль трубы по направлению потока. В ламинарном потоке скорость течения среды u будет направлена всюду по x. Будем искать частное решение – *установившееся* течение.

Выделим соосный трубе цилиндр некоторого радиуса r длины dx. На жидкость внутри цилиндра действует направленная вдоль оси трубы сила:

$$F_{1x} = -dP \cdot \pi r^2$$

На боковые поверхности цилиндра действует касательная сила вязкого трения:

$$F_{2x} = -\tau \cdot 2\pi r dx$$
$$\tau = -\eta \frac{du}{dr}$$

Из условия $F_{1x} + F_{2x} = 0$ находим:

$$\frac{dP}{dx} = -\eta \frac{2}{r} \frac{du}{dr} \tag{1}$$

Заметим, что в (1) левая часть зависит только от x, а правая только от r, значит обе части (1) константы. Отсюда:

$$P(x) = P_0 - \frac{\Delta P}{l} x$$
$$u(r) = u_{max} - \frac{\Delta P}{4l} r^2$$

Для нахождения константы интегрирования u_{max} необходимо дополнительно задать *граничное* условие. Для течения вязкой жидкости обычно используют так называемое условием прилипания: касательная скорость потока вблизи стенок считается равной скорости движения самих стенок. Отсюда получаем профиль скоростей:

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4l}(R^2 - r^2)$$

Далее, интегрируя $u(r)$ по сечению трубы, получим объёмный расход жидкости:

$$Q = \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta l} \tag{2}$$

Соотношение (2) называют *формулой Пуазейля*, при этом средняя скорость потока при пуазейлевском течении, оказываетсявдвое меньше максимальной:

$$\overline{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{u_{max}}{2} \tag{3}$$

Ясно, что профиль течения (3) не может установиться сразу, а реализуется лишь на некотором расстоянии $l_{\text{уст}}$ от начала трубы. Оценим это расстояние. Для того чтобы такое установилось, необходимо чтобы скорость $u \ll v$, где v – скорость течения идеальной жидкости. Тогда:

$$\Delta P = \frac{\rho u^2}{2} \sim \frac{4\eta l u_{max}}{R^2}$$

Отсюда:

$$l_{\text{уст}} \sim \frac{\rho u R^2}{\eta} = R \cdot Re$$

Исходя из многочисленных опытов, можно с удовлетворительной точностью принять этот коэффициент равным 0,2:

$$l_{\text{уст}} \approx 0{,}2R \cdot Re \tag{4}$$

Ламинарное течение наблюдается при относительно малых значениях Re, когда вязкие силы способны погасить любые случайно возникшие возмущения потока. При превышении некоторого критического числа Рейнольдса $Re > Re_{\text{кр}}$ течение Пуазейля становится неустойчивым. В потоке начинают рождаться вихри, которые затем сносятся вниз по трубе (при докритических числах Рейнольдса такие вихри быстро затухают за счёт вязкости). Для турбулентных течений применительно к конкретным системам могут быть построены полуэмпирические модели, дающие на практике приемлемые результаты. Примем, что флуктуации скорости в развитом турбулентном течении по порядку величины совпадают со средней скоростью потока $\Delta u \sim \overline{u}$. При этом элементы жидкости практически перемешиваются по сечению трубы, так что в качестве длины пробега жидкой частицы можно взять поперечный размер системы R, тогда:

$$\eta_{\text{турб}} \sim \rho \overline{u} R$$

Далее запишем баланс сил в потоке:

$$\eta_{\text{турб}} \frac{\overline{u}}{R} \cdot 2\pi r l \sim \pi R^2 \Delta P$$

Отсюда получаем:

$$\overline{u} \sim \sqrt{\frac{R \Delta P}{\rho l}}$$

А также выражение для расхода:

$$Q = \pi R^2 \overline{u} \sim R^{5/2} \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho l}}$$

Экспериментальная установка: Схема экспериментальной установки изображена на Рис. 2. Поток воздуха под давлением, немного превышающим атмосферное, поступает через газовый счётчик в тонкие металлические трубки. Воздух нагнетается компрессором, интенсивность его подачи регулируется краном К. Трубки снабжены съёмными заглушками на концах и рядом миллиметровых отверстий, к которым можно подключать микроманометр. В рабочем состоянии открыта заглушка на одной (рабочей) трубке, микроманометр подключён к двум её выводам, а все остальные отверстия плотно закрыты пробками. Перед входом в газовый счётчик установлен водяной U-образный манометр. Он служит для измерения давления газа на входе, а также предохраняет счётчик от выхода из строя. При превышении максимального избыточного давления на входе счётчика ($\sim$ 30 см вод. ст.) вода выплёскивается из трубки в защитный баллон Б, создавая шум и привлекая к себе внимание экспериментатора.

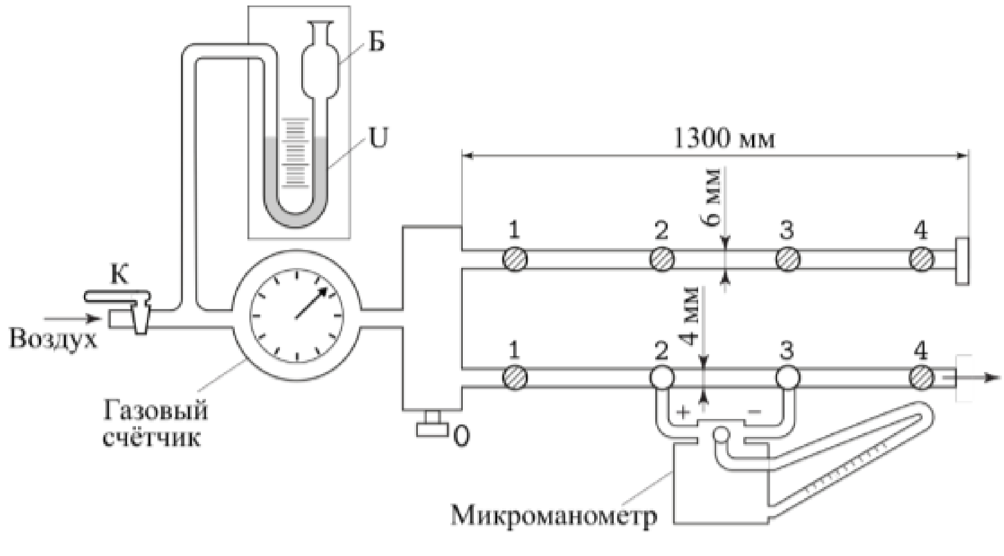


Рис. 2: Экспериментальная установка

В работе используется газовый счётчик барабанного типа, позволяющий измерять объём газа ΔV прошедшего через систему. Измеряя время Δt при помощи секундомера, можно вычислить средний объёмный расход газа. Работа счётчика основана на принципе

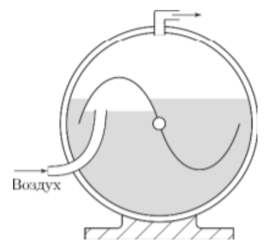


Рис. 3: Принцип работы барабанного газосчётчика

вытеснения: на цилиндрической ёмкости жёстко укреплены лёгкие чаши (Рис.3, где для упрощения изображены только две чаши), в которые поочередно поступает воздух из входной трубки расходомера. Когда чаша наполняется, она всплывает и её место занимает следующая и т.д. Вращение оси предаётся на счётно-суммирующее устройство. Для корректной работы счётчика он должен быть заполнен водой и установлен горизонтально по уровню.

В работе используется жидкостный манометр с наклонной трубкой. Разность давлений на входах манометра измеряется по высоте подъёма этилового спирта. Регулировка наклона позволяет измерять давление в различных диапазонах. На крышке прибора установлен трехходовой кран, имеющий два рабочих положения — (0) и (+). В положении (0) производится установка мениска жидкости на ноль, что необходимо сделать перед началом работы. В положении (+) производятся измерения. При работе с жидкостным манометром важно не допустить его «зашкаливания» — перелива рабочей жидкости в подводящие трубки. Все манипуляции по перестановке измерительных трубок следует проводить, когда манометр находится в положении (0). Подачу газа в систему, наоборот, следует осуществлять в положении (+), чтобы контролировать величину давления и иметь возможность вовремя перекрыть поток. Перед началом работы с микроманометром необходимо убедиться, что в нём залито достаточное количество спирта, а сам манометр установлен строго горизонтально по уровням. Подводящие трубки, заполненные спиртом, не должны содержать пузырьков воздуха, а в трубках, заполненных воздухом, не должно быть капель спирта.

Обработка данных:

Шкала перевода давления:

$$P[\text{Па}] = 9{,}8067 \cdot K \cdot N$$

где N – количество делений на манометре, $K = 0{,}2$ – угловой коэффициент.

Вычислим плотность воздуха при $T = (296{,}5 \pm 0{,}1)$ К и $P = (105000 \pm 500)$ Па:

$$\rho = \frac{PM}{RT}$$

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\varepsilon_T^2 + \varepsilon_P^2}$$

где $M = 0{,}029$ кг/моль – молярная масса воздуха.

$$\rho = (1{,}236 \pm 0{,}006)\ \text{кг/м}^3$$

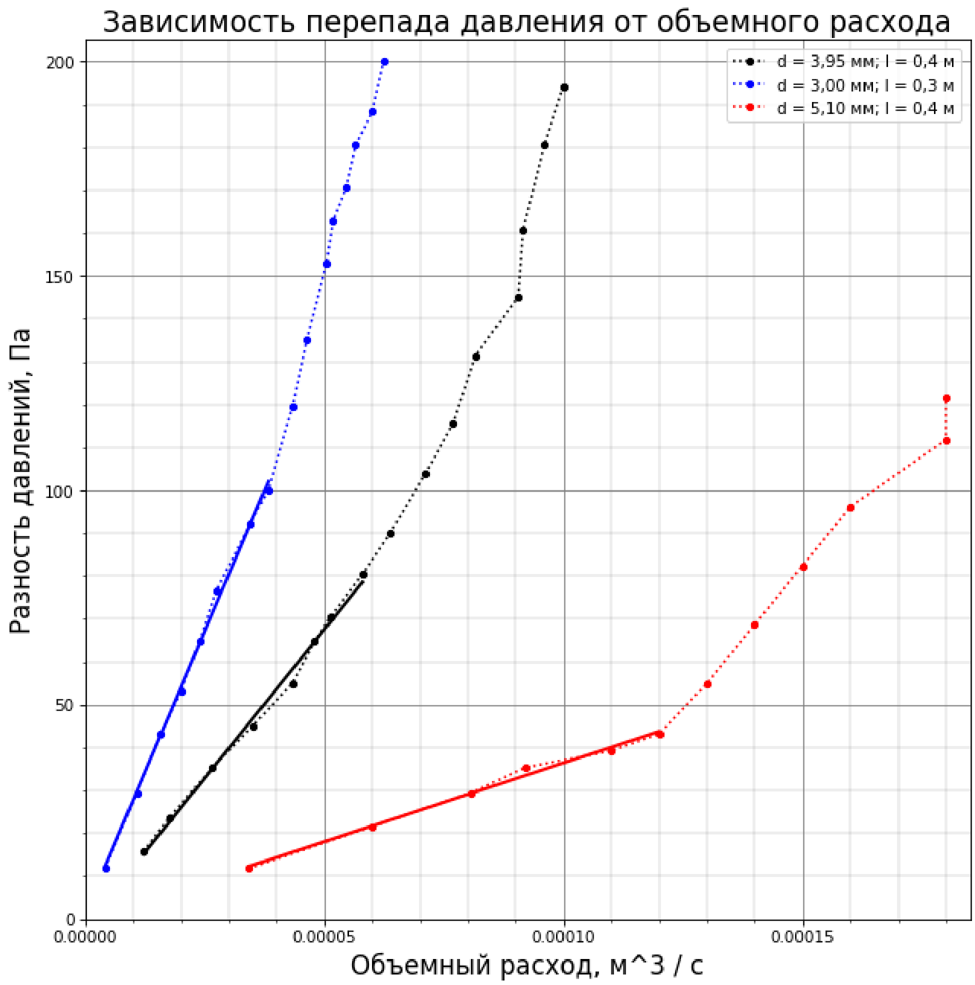
По формуле (4) расчитаем примерную длину установления Пуазейлевого течения: $l \approx 0{,}4$ м. Значения объемного расхода Q и перепада давления ΔP для различных трубок:

d = 3,95 мм, l = 0,4 м					
Ламинарное			Турбулентное		
Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па	Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па
12,2	8	15,69072	63,9	46	90,22164
17,5	12	23,53608	71,2	53	103,951
26,6	18	35,30412	77	59	115,7191
35,1	23	45,11082	81,6	67	131,4098
43,3	28	54,91752	90,6	74	145,1392
48	33	64,72422	91,6	82	160,8299
51,4	36	70,60824	96	92	180,4433
58	41	80,41494	100	99	194,1727

d = 3,00 мм, l = 0,3 м					
Ламинарное			Турбулентное		
Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па	Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па
4,13	6	11,76804	43,4	61	119,6417
10,8	15	29,4201	46,4	69	135,3325
15,8	22	43,14948	50,5	78	152,9845
20	27	52,95618	51,8	83	162,7912
23,9	33	64,72422	54,6	87	170,6366
27,4	39	76,49226	56,6	92	180,4433
34,5	47	92,18298	60	96	188,2886
38,3	51	100,0283	62,4	102	200,0567

d = 5,10 мм, l = 0,4 м					
Ламинарное			Турбулентное		
Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па	Q, см$^3/c$	ΔP, дел.	ΔP, Па
34,2	6	11,76804	130	28	54,91752
60	11	21,57474	140	35	68,6469
80,7	15	29,4201	150	42	82,37628
92	18	35,30412	160	49	96,10566
110	20	39,2268	180	57	111,7964
120	22	43,14948	180	62	121,6031

Построим график зависимости ΔP от Q для каждой из трубок, и вычислим коэффициент вязкости воздуха для каждого из случаев:



Используя формулу (2), вычислим, с учетом погрешности, значение вязкости воздуха для каждой из трубок:

$$\eta = \frac{\Delta P}{Q} \cdot \frac{\pi R^4}{8l}$$

$$\varepsilon_\eta = \sqrt{\varepsilon^2_{\frac{\Delta P}{Q}} + 16 \cdot \varepsilon^2_R}$$

Значение коэффициента $\frac{\Delta P}{Q}$ на ламинарном участке найдем с помощью метода наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_k \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}$$

Коэффициент вязкости воздуха для различных трубок

d, мм	$\frac{\Delta P}{Q}$, Па/м^3	$\varepsilon_{\frac{\Delta P}{Q}}$, %	ε_η, %	η, Па $\cdot\, c$
$3{,}95 \pm 0{,}05$	$1{,}41 \cdot 10^6$	2,61	5,7	$(20{,}7 \pm 1{,}18) \cdot 10^{-6}$
$3{,}00 \pm 0{,}1$	$2{,}63 \cdot 10^6$	3,4	13,76	$(17{,}4 \pm 2{,}4) \cdot 10^{-6}$
$5{,}10 \pm 0{,}05$	$3{,}5 \cdot 10^5$	1,72	4,28	$(15{,}2 \pm 0{,}65) \cdot 10^{-6}$

Табличное значение вязкости воздуха при $T = 296{,}5$К:

$$\eta_{\text{возд}} = 18{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot c$$

Полученное значение на трубке $d = 3{,}00$ мм совпадает с табличным(в пределах погрешности), значения для трубок $d = 3{,}95$ мм и $d = 5{,}10$ мм отличаются от табличного не более чем на 16% и 18% соответственно.

Рассчитаем числа Рейнольдса Re для каждой из трубок, для этого из графика определим критическое значение расхода Q и расчитаем погрешность ε_{Re}:

$$Re_{\text{кр}} = \frac{Q_{\text{кр}} \cdot \rho}{\pi R \eta}$$

$$\varepsilon_{Re}^2 = \varepsilon_\rho^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_\eta^2$$

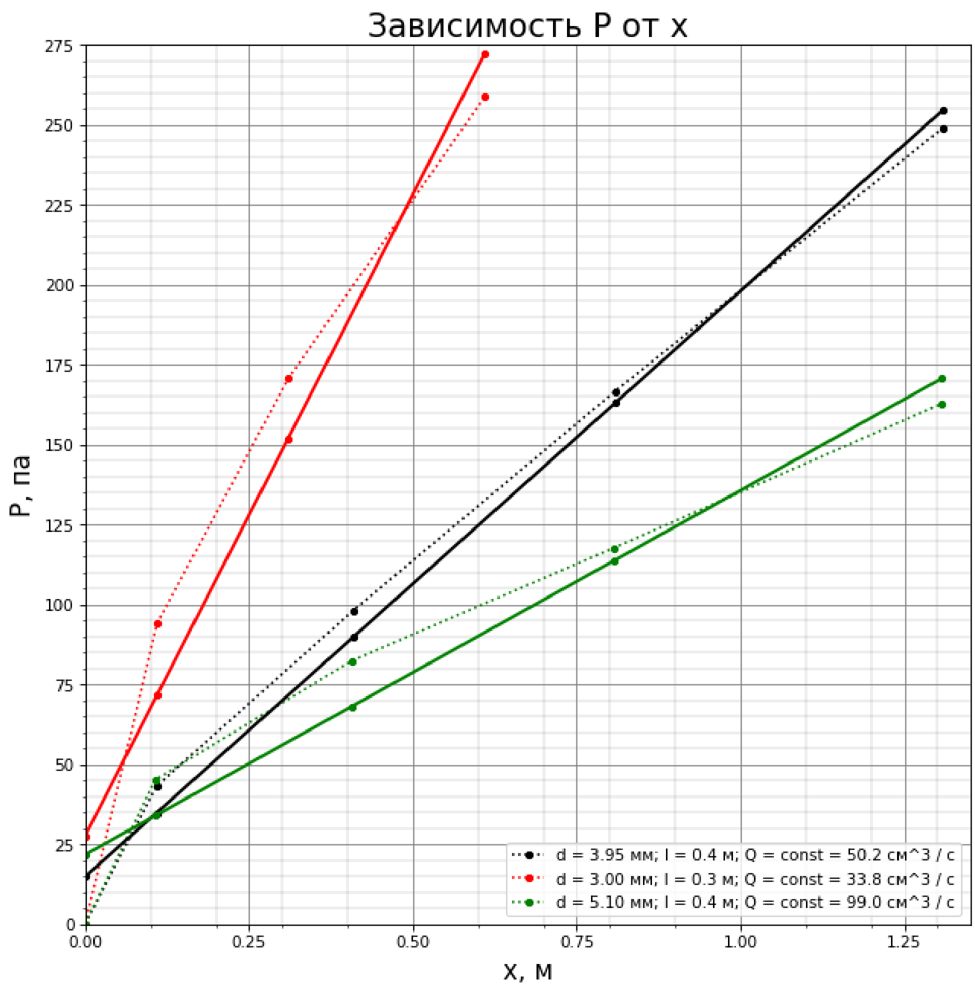
Значения $Re_{\text{кр}}$ для трубок различного диаметра

d, мм	$Q_{\text{кр}}$, см$^3/c$	ε_{Re}, %	$Re_{\text{кр}}$
$3{,}95 \pm 0{,}05$	60	5,85	$577{,}4 \pm 33{,}81$
$3{,}00 \pm 0{,}1$	40	14,17	$602{,}6 \pm 85{,}36$
$5{,}10 \pm 0{,}05$	120	4,42	$1216{,}2 \pm 53{,}76$

Для трубки диаметром $d = 5{,}10$ мм значение $Re_{\text{кр}}$ близко к оценочному значению $Re \approx 1000$, для двух других трубок значение $Re_{\text{кр}}$ близко к нему по порядку.

Далее исследуем зависимость $P(x)$ при заданном $Q = const$:

$d = 3{,}95$ мм			$d = 3{,}00$ мм			$d = 5{,}10$ мм		
$Q = 50{,}2$ см^3/с			$Q = 33{,}8$ см^3/с			$Q = 99{,}0$ см^3/с		
P, дел	P, Па	x, см	P, дел	P, Па	x, см	P, дел	P, Па	x, см
22	43,14948	10,9	48	94,14432	11	23	45,11082	10,7
28	54,91752	40,9	39	76,49226	31	19	37,26546	40,7
35	68,6469	80,9	45	88,2603	61	18	35,30412	80,7
42	82,37628	130,9				23	45,11082	130,7



Таким образом, легко убедиться в линейности графика зависимости $P(x)$ и оценить расстояние на котором устанавливается Пуазейлевское распределение для каждой из трубок, а также сравнить с расстоянием, найденным по формуле (4):

d, мм	По формуле, м	Из графика, м
3,95	0,395	0,500
3,00	0,300	0,250
5,10	0,510	0,400

Вывод: В данной работе было проведено исследование течения потока воздуха по трубкам различного диаметра, для каждой из трубок были найдены условия ламинарности потока, и условия установления Пуазейлевского распределения скоростей, а также был посчитан, с учетом погрешностей, коэффициент вязкости воздуха для каждой трубки, и было установлено, что этот коэффициент не зависит(в пределах погрешности) от диаметра трубки, по которой течёт газ и с приемлемой точностью совпадает с табличным значением.