ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Расчёт статически определимой фермы

Рогозин Владимир

Группа Б03-106

Цель работы: Ознакомление и расчёт сил в стержнях статически определённой фермы.

Теоретические сведения: *Стержень* – элемент конструкции, представляющий собой удлинённое тело. Мтержневая система состоит из *стержней, узлов и опор. Узел* – место соединения стержней. Если углы могут меняться свободно, такой узел называется *шарниром.* Если перемещения узлов возможны только за счёт деформации стержней, то такая стержневая система называется *геометрически неизменяемой.*

Существуют следующие геометрически неизменяемые стержневые системы: *рамы, фермы* и системы *смешанного типа*, имеющие в своём составе элементы первых двух видов. *Механизм* – система, которая может совершать движение около неподвижных точек без деформации элементов. Если при замене жестких соединений стержней в системе на шарниры она превращается в механизм, то это рама, иначе – ферма.

На стержневую систему могут действовать сосредоточенные и распределённые силы, а также сосредоточенные и распределённые моменты. Если узлы стержневой системы и действующие на неё нагрузки лежат в одной плоскости, то такая система назвается *плоской.* В противном случае система называется *пространственной.*

Далее будем рассматривать плоские фермы, на которые действуют сосредоточенные силы, приложенные только к углам. Если силы приложены таким образом, то в стержнях отсутствуют изгибающие моменты, то есть стержни работают только на сжатие и растяжение.

Числом *степеней свободы* называется количество независимых параметров, которыми можно описать взаимное расположение элементов в системе. Ограничение свободных перемещений элементов системы называется *связями.* Количество связей в соединении равно количеству устраняемых ими возможных перемещений.

Количество степеней свободы N фермы можно вычислить по формуле

$$N = 2N_{node} - N_{rod} - N_0$$

где N_{node} – количество узлов, N_{rod} – количество стержней, N_0 – количество связей, накладываемых опорами.

Будем рассматривать опоры ферм следующих видов:

1) шарнирно-подвижная опора

2) шарнирно-неподвижная опора

Шарнирно-подвижная опора позволяет опорному узлу двигаться в одном направлении, запрещая перемещаться в перпендикулярном, то есть накладывает 1 связь. Шарнирно-неподвижная опора в принципе запрещает опорному узлу перемещаться, то есть накладывает 2 связи.

Статически определимой системой называется система, для которой силы в стержнях можно определить только из уравнений статики.

Статически неопределимой системой называется система, для которой уравнений равновесия недостаточно и требуются дополнительные соотношения, такие как уравнение совместности деформаций.

Количество уравнений статики для системы узлов равно $2N_{node}$, а количество неизвестных сил в стержнях и опорах равно количеству стержней и количеству связей, накладываемых опорами. Таким образом, условие статической определимости фермы можно записать в виде

$$N = 0$$

Если

$$N < 0,$$

то система статически неопределима.

Расчёт статически определимой фермы

Способ вырезания узлов. В *способе вырезания узлов* рассматривается равновесие отдельно взятого узла. В шарнире момент сил равен нулю и линии действия всех сил, относящихся к узлу, пересекаются в одной точке, не создавая моментов. Таким образом, для каждого угла можно составить только два уравнения равновесия. Способ вырезания узлом удобен, если в каждом узле, для которого составляются условия равновесия, сходятся один стержень с известной силой и два с неизвестной. Начинается расчёт с узла, где сходятся два стержня.

Рассмотренный метод удобен для ручных вычислений, но для численных расчетов на ЭВМ не применяется из-за быстрого накопления ошибок.

Способ моментной точки. Иногда нужно вычислить усилия только в определенном стержне. Для этого применяется другой способ – *способ моментной точки.* В этом способе смотрятся моменты сил относительно определённой точки, выбранной таким образом, чтобы моменты неизвестных сил, приложенных к точке, занулились, а момент искомой силы был равен моментам других, уже известных.

Матричная форма вычисления сил. Для расчёта статически определимых ферм способом вырезания узлом на ЭВМ систему уравнений равновесия для всех узлов можно представить в матричном виде. Уравнения равновесия k-го узла имеют вид

$$\sum_i N_i \cos\alpha_{ik} + F_{kx} = 0$$

$$\sum_i N_i \sin\alpha_{ik} + F_{ky} = 0$$

где α_{ik} – угол между положительным направлениями силы N_i в i-ом стержне и оси x в k-ом узле.

В матричном виде система уравнений имеет вид

$$\mathbf{C}\mathbf{N} + \mathbf{F} = 0,$$

где

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ \dots \\ F_{mx} \\ F_{my} \end{vmatrix}$$

В число нагрузок N включены также силы реакции опоры. Ферма статически определима, следовательно

$$n = 2m$$

Матрица C имеет размерность $n \times n$ и содержит $\cos\alpha_{ik}$ и $\sin\alpha_{ik}$ и нули для тех стержней, которые не примыкают к k-ому узлу.

Вычисление нагрузок сводится к высилению обратной матрицы $\mathbf{C}^{-1}$. Для геометрически неизменяемых стрежневых систем $\det\mathbf{C} \neq 0$ и решение всегда существует

$$\mathbf{N} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}$$

Расчёт статически неопределимой фермы

Для расчета сил в стержнях в статически неопределимых фермах уравнений статики недостаточно, нужны дополнительные соотношения, выражающие условия совместности деформаций.

Для получения дополнительных соотношений можно использовать теорему Кастильяно, которая формулируется следующим образом:

$$y_i = \frac{\partial W}{\partial P_i},$$

где y_i – перемещение вдоль линии действия силы P_i, W – полная упругая энергия системы.

Обработка данных:

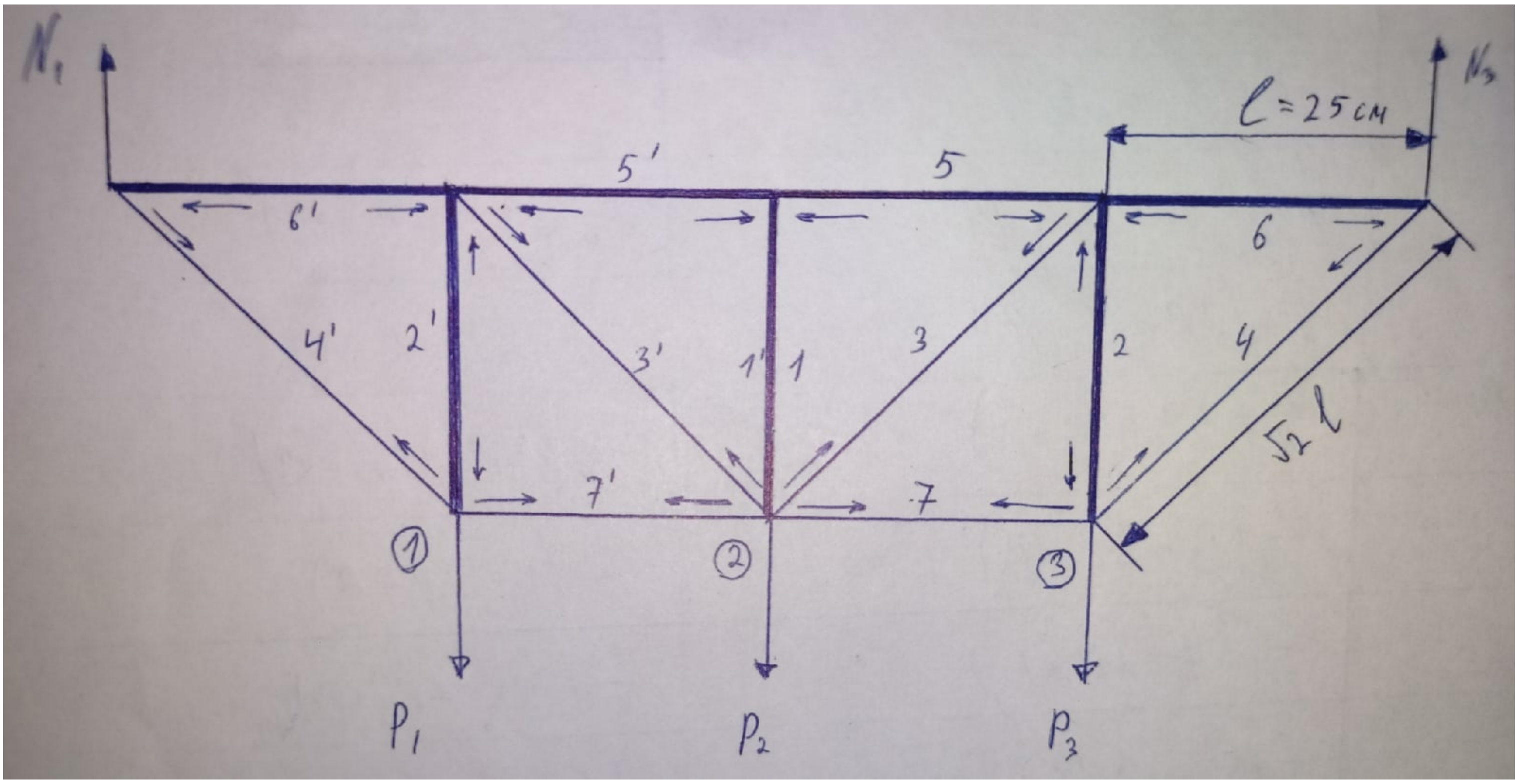

Рис. 1: Для расчёта сил в стержнях в произвольном случае

Параметры системы: $d_2 = 10$ мм – внешний диаметр полого стержня, $d_1 = 4$ мм – внутренний диаметр полого стержня, $d = 4{,}2$ мм – диаметр сплошного стержня, $l = 25$ см – длина вертикальных и горизонтальных стержней, $\sqrt{2}l \approx 35{,}36$ см – длина косых стержней. Модуль Юнга материала, из которого сделаны стержни, равен $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см^2. Стержни под номерами 1, 2, 5, 6 полые, под номерами 3, 4, 7 (и соответствующие им штрихованные) – сплошные.

В данной установке стержни 5, 5', 6 и 6' сдвоенные.

В работе система нагружалась двумя различными способами, а именно:

I) $P_1 = P_3 = 0$, $P_2 = 100$ Н

II) $P_1 = P_2 = P_3 = 100$ Н

В таблице ниже приведены результаты теоретической оценки и экспериментальных данных для обоих случаев.

Таблица 1: Сравнение теоретических и экспериментальных значений сил

I			II		
N	$F_{\text{теор}}$, Н	$F_{\text{эксп}}$, Н	N	$F_{\text{теор}}$, Н	$F_{\text{эксп}}$, Н
1	0	0,3	1	0	0,8
2	$P/2 = 50{,}0$	51,0	2	$P/2 = 50{,}0$	50,2
3	$\sqrt{2}P/2 = 70{,}7$	71,6	3	$\sqrt{2}P/2 = 70{,}7$	70,6
4	$\sqrt{2}P/2 = 70{,}7$	70,7	4	$3\sqrt{2}P/2 = 212{,}1$	212,7
5	$P/2 = 50{,}0$	58,8	5	$P = 100$	119,0
6	$P/2 = 50{,}0$	25,9	6	$3P/4 = 75{,}0$	79,3
7	$P/2 = 50{,}0$	51,4	7	$3P/2 = 150{,}0$	150,8

Таблица 2: Силы в стержнях в общем случае

	F, Н	
N	Лево	Право
1	0	0
2	$\frac{1}{4}(2P_2 + P_3 - P_1)$	$\frac{1}{4}(2P_2 + P_1 - P_3)$
3	$\frac{\sqrt{2}}{4}(2P_2 + P_3 - P_1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(2P_2 + P_1 - P_3)$
4	$\frac{\sqrt{2}}{4}(3P_1 + 2P_2 + P_3)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(3P_3 + 2P_2 + P_1)$
5	$\frac{1}{2}(P_1 + 2P_2 + P_3)$	$\frac{1}{2}(P_1 + 2P_2 + P_3)$
6	$\frac{1}{4}(3P_1 + 2P_2 + P_3)$	$\frac{1}{4}(3P_3 + 2P_2 + P_1)$
7	$\frac{1}{4}(3P_1 + 2P_2 + P_3)$	$\frac{1}{4}(3P_3 + 2P_2 + P_1)$

Энергия системы складывается из энергий стержней. Плотность энергии выражается в виде

$$\omega_i = \frac{\sigma_i^2}{2E} = \frac{F_i^2}{2ES_i^2}$$

Тогда энергия стержня равна

$$W_i = \frac{F_i^2}{2ES_i} l_i$$

где l_i – длина i-го стержня. Общая энергия системы равна

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \frac{F_i^2}{2ES_i} l_i$$

Подставив значения из таблицы, найдём выражение полной энергии системы $W = W(P_1, P_2, P_3)$

I) Продифференцируем полученное выражение по P_1, затем по P_2, найдём смещения Δy_1 и Δy_2, сравним значения с экспериментальными. II) Сделаем то же самое, результаты занесём в таблицу.

Таблица 3: Сравнение экспериментальных и теоретических смещений

	I		II	
	Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент
Δy_1, мм	0,8	$1{,}87 \cdot 10^{-2}$	2,1	$5{,}51 \cdot 10^{-2}$
Δy_2, мм	3,0	$3{,}33 \cdot 10^{-2}$	5,6	$6{,}74 \cdot 10^{-2}$