ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Изгиб балки

Рогозин Владимир
Группа Б03-106

Цель работы: 1) Ознакомление с теорией изгиба статически определимых и статически неопределимых балок, в частности, с теорией Костилиано.
2) Экспериментальное подтверждение методов расчёта статически неопределимых балок.

Теоретические сведения: Рассмотрим изгиб однородного бруса (балки) произвольного постоянного поперечного сечения на рис. 1. Ввиду бесконечной малости выделенного элемента можно считать, что в результате изгиба прямые AA$'$, NN', BB$'$ и все прямые, им параллельные, перейдут в окружности с центрами, лежащими на оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка.

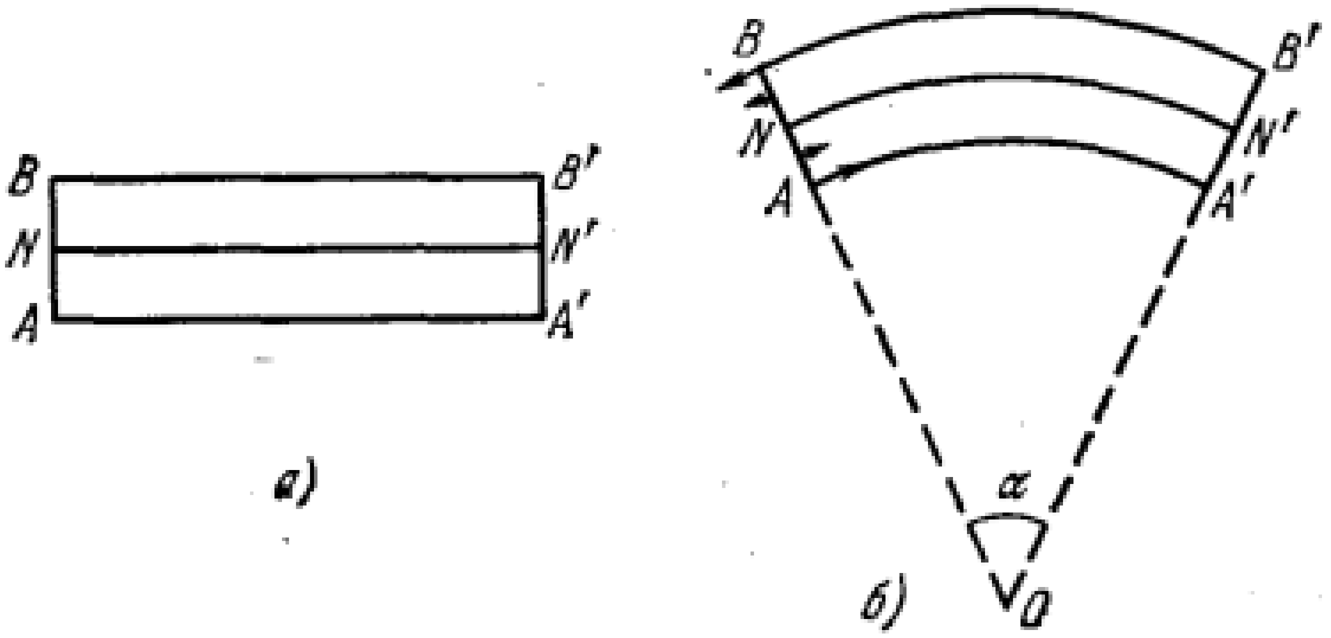

Рис. 1: а) Балка в покоящемся состоянии, б) изогнутая балка

Эта ось называется осью изгиба. Наружные волокна, лежащие выше линии NN', при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN', — укорачиваются. Длина линии NN' остается неизменной. Эта линия называется *нейтральной* линией. Проходящее через нее сечение (недеформированного) бруса плоскостью, перпендикулярной к плоскости рисунка называется *нейтральным* сечением. Пусть R — радиус кривизны нейтральной линии. Рассмотрим удлинение волокна бруса, находящегося на расстоянии ξ от нейтральной линни. Если брус не слишком толст, так что $|\xi| \ll R$, то длина рассматриваемого волокна будет $l = (R + \xi)\alpha$, а удлинение $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Получаем натяжение вдоль рассматриваемого волокна

$$\tau = E\frac{\xi}{R},$$

отсюда момент сил, действующий на брусок относительно оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через середину нейтральной линии

$$M_\tau = \frac{E}{R}\int \xi^2 dS = \frac{EJ}{R},$$

где обозначен осевой момент инерции

$$J = \int \xi^2 dS.$$

Вспоминая выражение для радиуса кривизны

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

при малых изгибах можно пренебречь квадратом производной. Окончательно запишем выражение для момента сил, действующих внутри стержня

$$M_\tau = EJy''.$$

При нагрузке балки в её сечении возникает *изгибающий момент*. Запишем уравнения равновесия для балки

$$\begin{cases} R_A + R_B - P = 0, \\ R_B \cdot 2a + M_A - P \cdot a = 0. \end{cases}$$

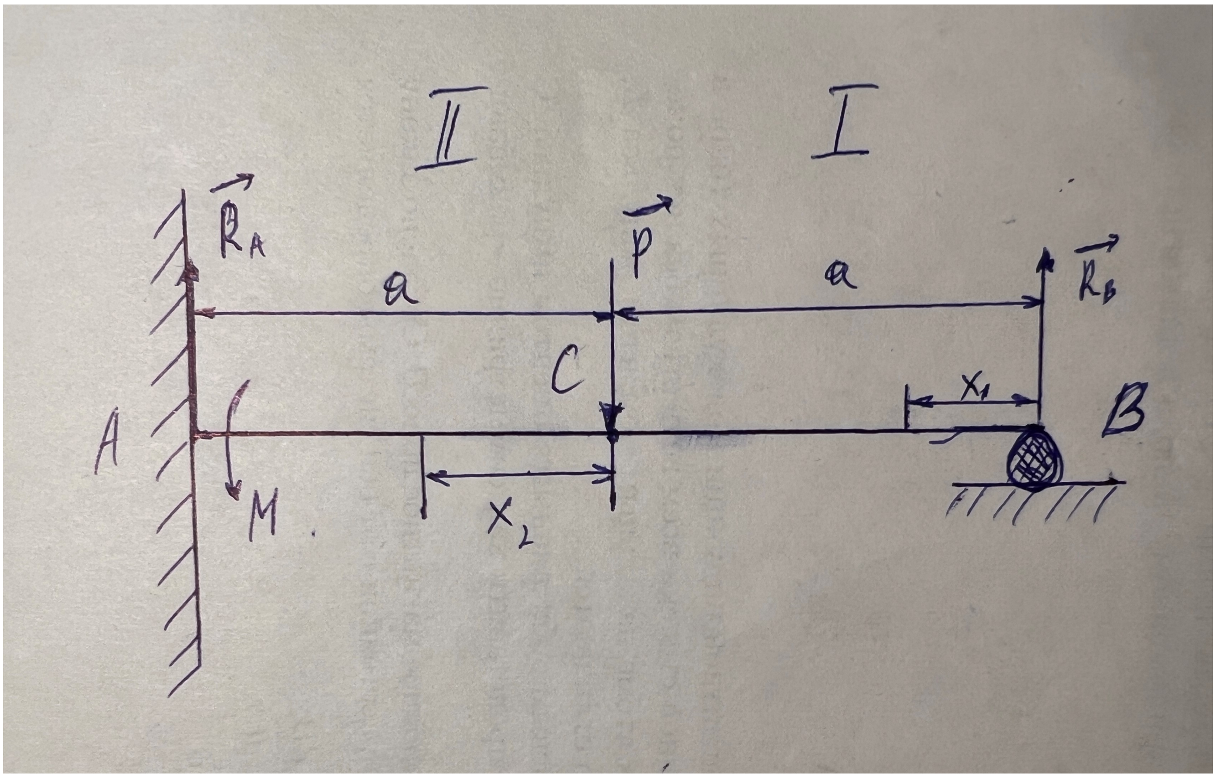

Рис. 2: Статически неопределимая балка

Задача один раз статически неопределима. Для получения дополнительного соотношения воспользуемся *теоремой Кастилиано*, которая записывается в виде

$$y_i = \frac{\partial W}{\partial P_i},$$

где W – полная упругая энергия системы, P_i – i-я приложенная точечная сила, y_i – перемещению точки приложения силы P_i в направление её действия.

При изгибе балки упругую энергию системы можно записать в виде

$$W = \int M d\alpha = \int \frac{1}{2} M(x) d\alpha = \int \frac{1}{2} M(x) \frac{dx}{R} = \int \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EJ} dx,$$

где $M(x)$ – изгибающий момент, E – модуль Юнга материала, J – осевой момент инерции. Тогда для смещения приложения силы получаем выражение

$$y_i = \frac{1}{EJ} \int M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial P_i} dx. \tag{1}$$

Так как в точке B смещение равно нулю, то можем записать недостающее уравнение для нашей системы

$$y_B = 0 = \frac{1}{EJ}\int M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial R_B}dx.$$

Распишем момент, действующий в балке, на два слагаемых

$$M_I(x) = R_B \cdot x_1, \quad M_{II}(x) = R_B \cdot (x_2 + a) - P \cdot x_2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_I(x)}{\partial R_B} = x_1, \quad \frac{\partial M_{II}(x)}{\partial R_B} = a + x_2;$$

$$0 = \int\limits_0^a R_B x_1^2 dx_1 + \int\limits_0^a (R_B(a+x_2) - Px_2)(a+x_2)dx_2.$$

Интегрируя, получаем дополнительное соотношение

$$R_B = \frac{5}{16}P. \tag{3}$$

Нагрузим балку силой $P = 5$кг, рассчитаем теоретическое значение R_B и сравним его с экспериментальным. Результаты представлены в таблице ниже.

Таблица 1: Результаты для силы реакции R_B

	Теория	Эксперимент	ε, %
R_B, Н	15,3	16,9	10,5

Далее, используя ранее полученные соотношения, вычислим y_C – прогиб балки в точке C, потом измерим значение прогиба в этой точке и сравним с вычисленным теоретически. Для этого подставим (3) в (2) и воспользуемся выражением (1). Параметры системы представлены в таблице ниже.

Таблица 2: Параметры системы

E, кг/см^2	h, мм	b, мм	a, см
$2 \cdot 10^6$	24,1	6,2	33,3

Осевой момент инерции выражается через b и h как

$$J = \frac{hb^3}{12}$$

Тогда для прогиба балки в точке C получим выражение

$$y_C = \frac{12}{Ehb^3}\left[\int\limits_0^a \frac{25}{16^2}P \cdot x_1^2 dx_1 + \int\limits_0^a \frac{P}{16^2}(5a - 11x_2)^2 dx_2\right]$$

$$y_C = \frac{12}{Ehb^3}\left(\frac{25}{768}Pa^3 + \frac{31}{768}Pa^3\right) = \frac{7}{8}\frac{Pa^3}{Ehb^3}$$

Таблица 3: Результаты для прогиба y_C

$P = 51{,}5$ Н			
	Теория	Эксперимент	ε, %
y_C, мм	1,48	1,73	16,9