ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Рогозин Владимир
Группа Б03-106

Цель работы: изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

Оборудование: цифровой анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

Теоретические сведения: В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов, амплитудно- и фазо-модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

Периодическая функция может быть представлена в виде бесконечного ряда гармонических функций – ряда Фурье.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Где $\omega_0 = 2\pi/T$, T – период функции $f(t)$. Коэффициенты $\{c_n\}$ могут быть найдены по формуле

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Наборы коэффициентов разложения в комплексной $\{c_n\}$ и действительной $\{a_n, \varphi_n\}$ формах связаны соотношением

$$a_n = 2|c_n|, \quad \varphi_n = \arg\, c_n.$$

Экспериментальная установка:

Схема установки приведена на рис. 1.

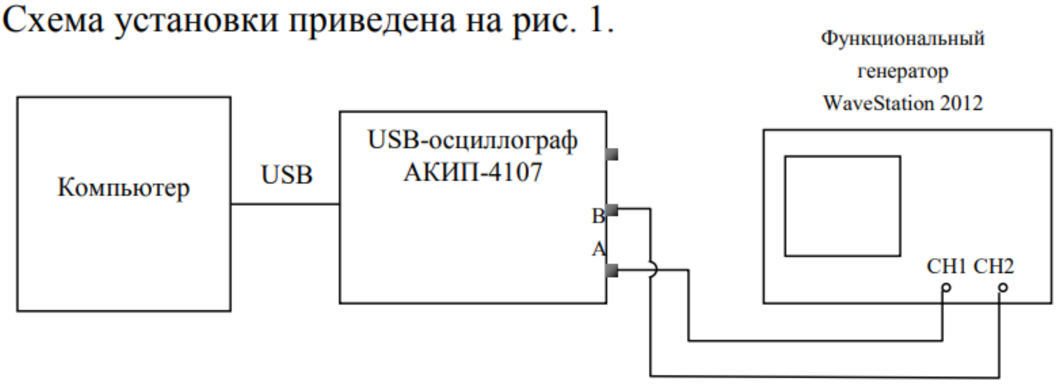


Рис. 1: Экспериментальная установка

Обработка данных:

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Найдём спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности τ с периодом следования импульсов $T > \tau$ и значением A.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-in\omega_0 t} dt = A \cdot \frac{\sin(\pi n \tau/T)}{\pi n}.$$

График функции $c(\omega)$ будет выглядеть следующим образом

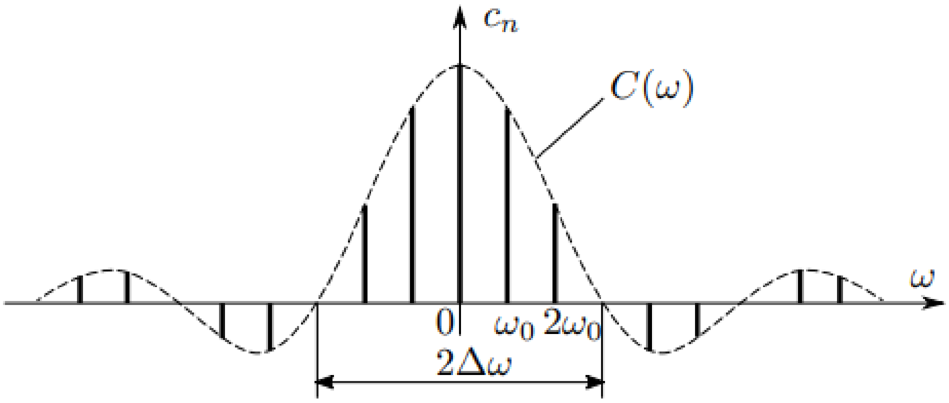


Рис. 2: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

где $\Delta\omega = 2\pi/\tau$. Основной вклад дают гармоники, частоты которых заполняют интервал $|\omega| < 2\pi/\tau$. Этот диапазон частот можно назвать можно назвать характерной шириной спектра.

Сначала выставим частоту повторения импульсов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Проанализируем полученный спектр.

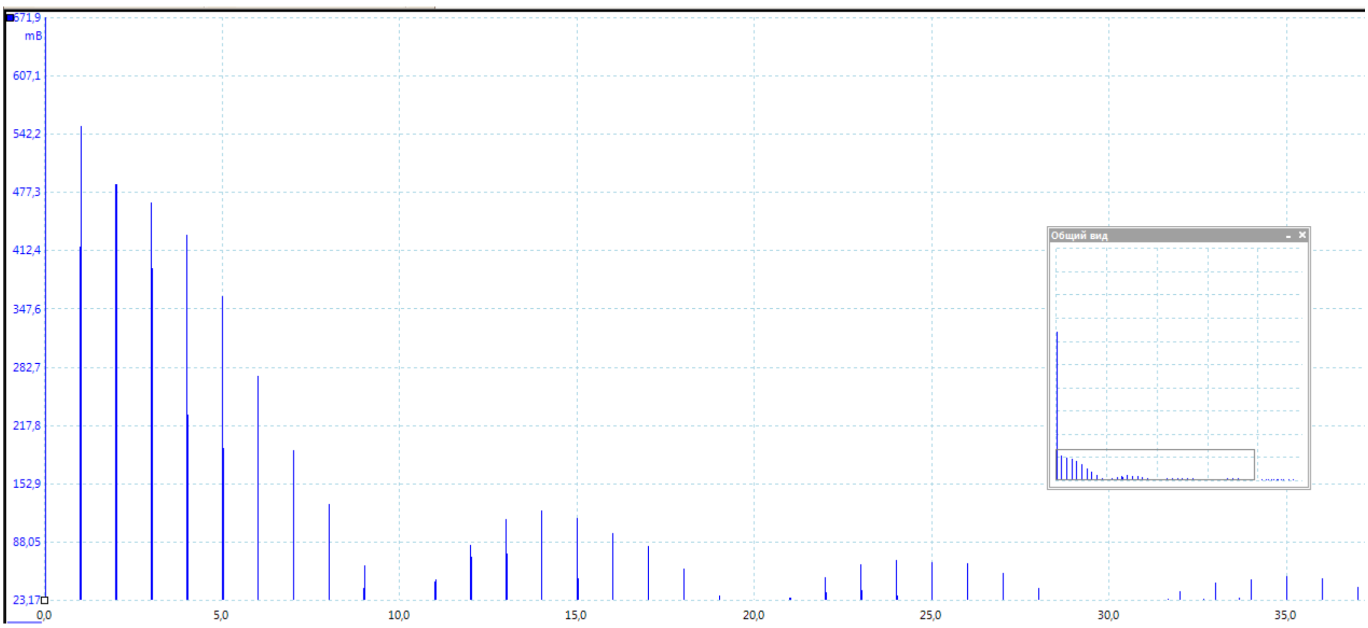


Рис. 3: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 100$ мкс

Из картинки видно, что спектр совпадает с теорией, характерная ширина спектра $\Delta\nu$ равна $\tau^{-1} = 10$ кГц.

Далее уменьшим в два раза длину импульса и посторим на получившийся спектр. По сравнению с предыдущим случаем изменились амплитуды частот, а также увеличилась характерная ширина спектра $\Delta\nu = 20$ кГц.

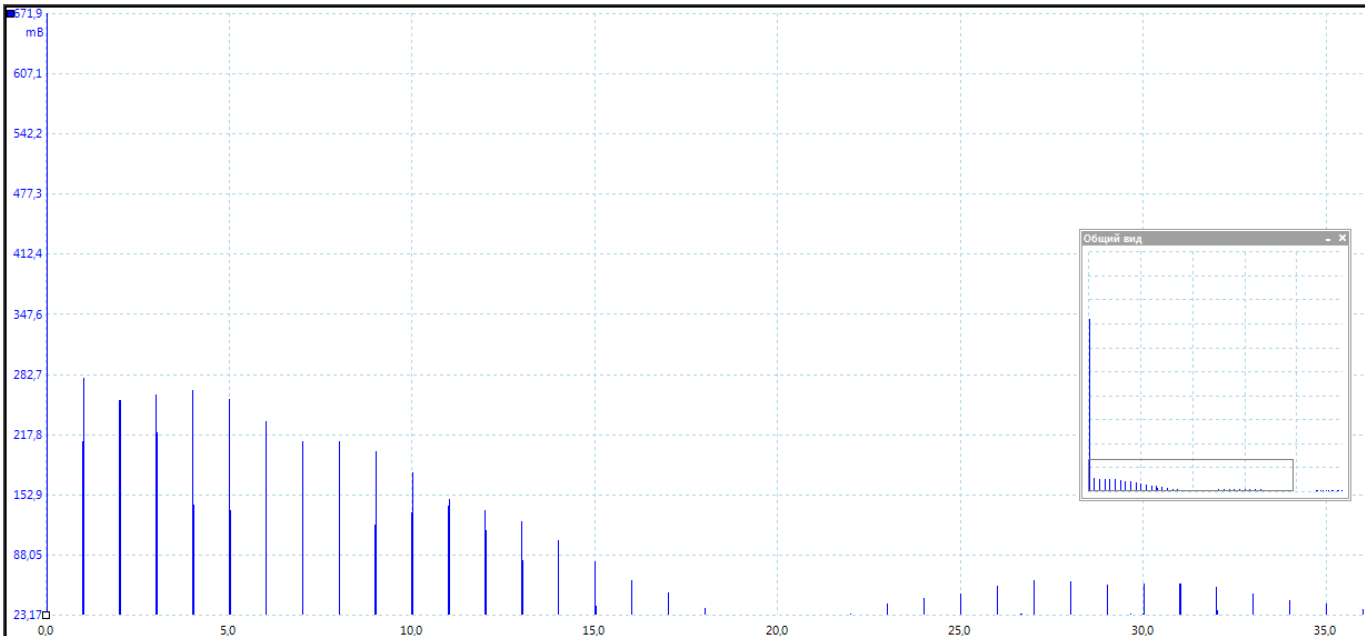


Рис. 4: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 50$ мкс

Теперь изменим частоту сигнала до $f_{\text{повт}} = 2$ кГц при $\tau = 50$ мкс, посмотрим на спектр.

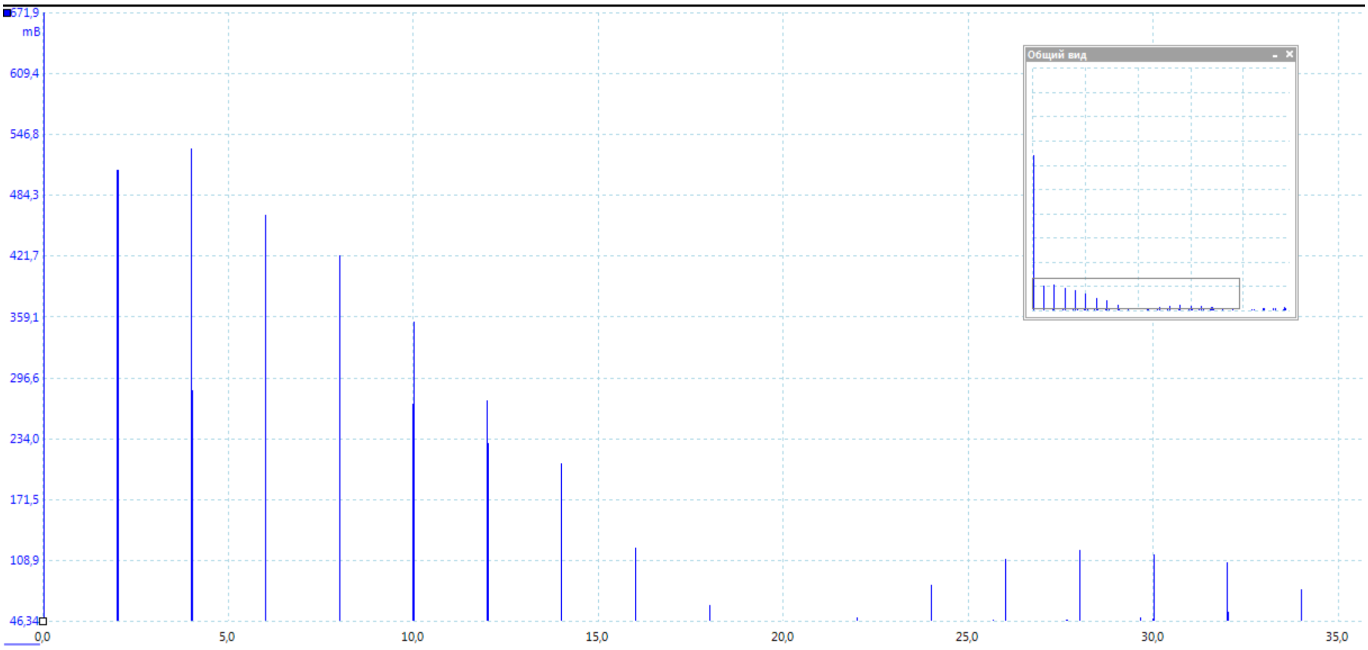


Рис. 5: Спектр прямоугольных импульсов $T = 500$ мкс; $\tau = 50$ мкс

Как и следовало ожидать изменились амплитуды частот и частоты стали встречаться реже, характерная ширина спектра осталась прежней.

Далее, при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц снимем зависимость $\Delta\nu$ от τ. По результатам построим график зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$. Данные представлены в таблице ниже.

Таблица 1: Данные измерений

$f_{\text{повт}} = 1$ кГц										
τ, мкс	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\Delta\nu$, кГц	50	25	17	12	10	8	7	6	5,5	5

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний.

Последовательность цугов длиной τ и периодом $T > \tau$ можно представить в виде

$$f(t) = f_0(t)\cos(\omega_0 t),$$

где $f_0(t)$ – прямоугольный импульс длины τ. Зная спектр прямоугольного импульса, можно изобразить спектр цуга. При домножении произвольной функции $g_0(t)$ на $e^{i\omega_0 t}$ спектр получившейся функции $g(t) = g_0(t)e^{i\omega_0 t}$ будет сдвинутым на величину ω_0 вправо спектром функции $g_0(t)$. Поэтому спектр цуга может быть представлен следующим образом.

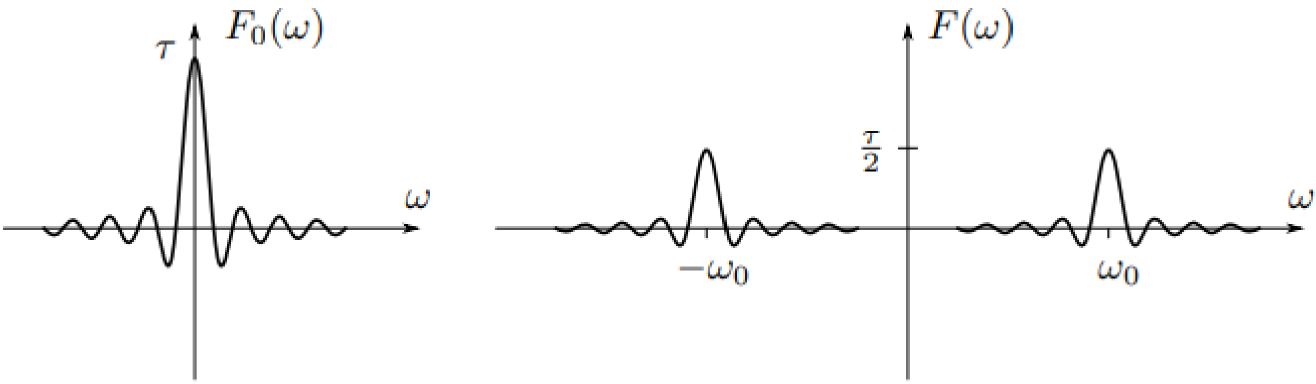


Рис. 6: Спектры а) прямоугольного импульса и б) синусоидального цуга

Сгенерируем цуги и посмотрим на спектр такого сигнала при $T = 1$ мс, $\tau = 0{,}1$ мс, $\nu_0 = 50$ кГц, где ν_0 – частота синусоиды.

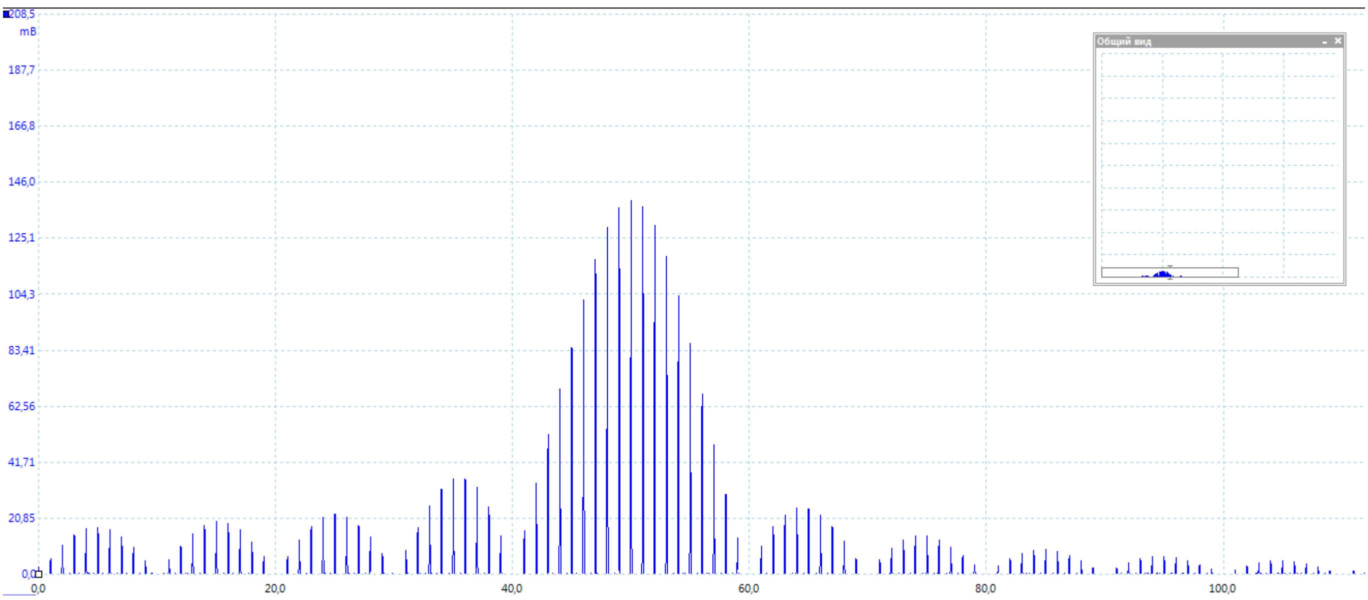


Рис. 7: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 0{,}1$ мс; $\nu_0 = 50$ кГц

Получили в точности смещённый на 50 кГц спектр прямоугольного импульса.

Теперь увеличим период сигнала до 2 мс.

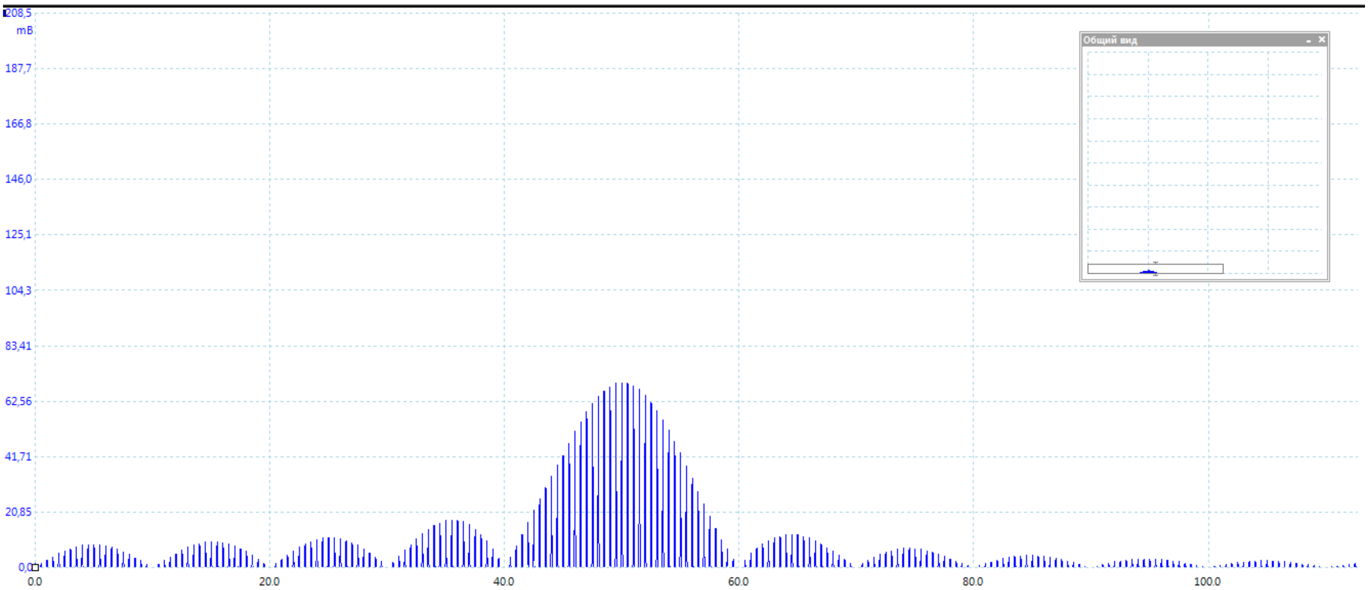


Рис. 8: Спектр прямоугольных импульсов $T = 2$ мс; $\tau = 0{,}1$ мс; $\nu_0 = 50$ кГц

Частоты располагаются плотнее друг к другу чем в предыдущем случае.

Увеличим частоту синусоиды в два раза.

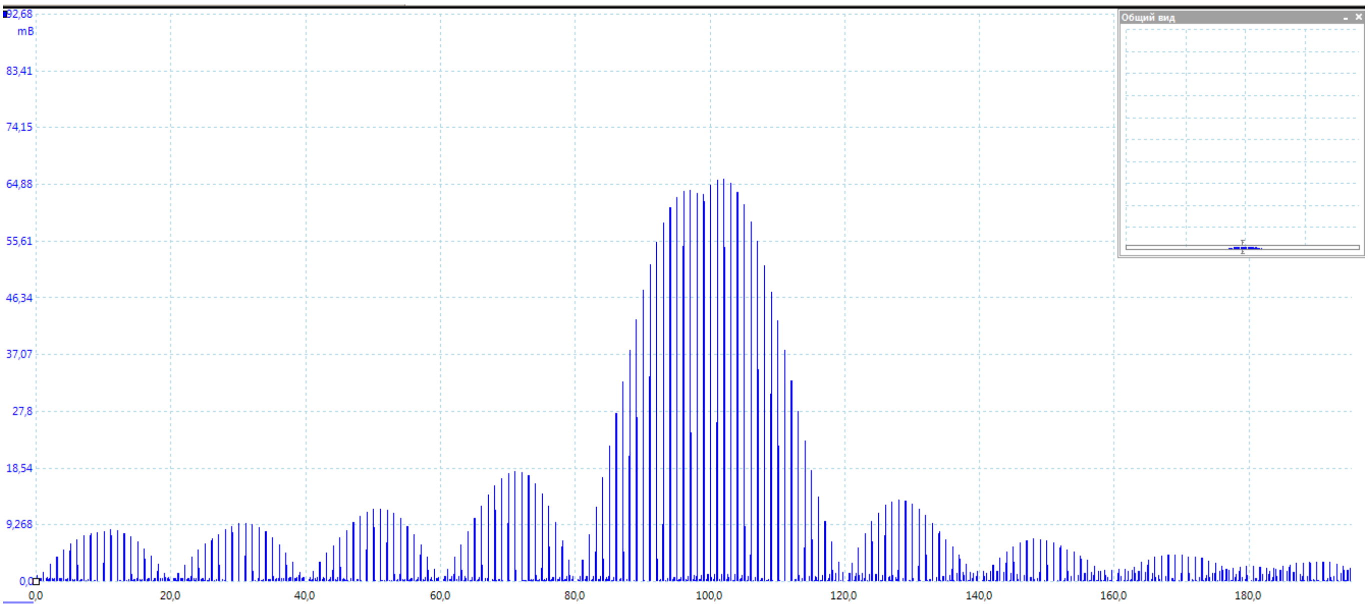


Рис. 9: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 0{,}05$ мс; $\nu_0 = 100$ кГц

Центр спектра, как и предсказывает теория, сместился вправо на 50 кГц, характерная ширина спектра увеличилась вдвое.

Увеличим длительность цуга до $\tau = 0{,}2$ мс. В результате видим сужение основного спектра.

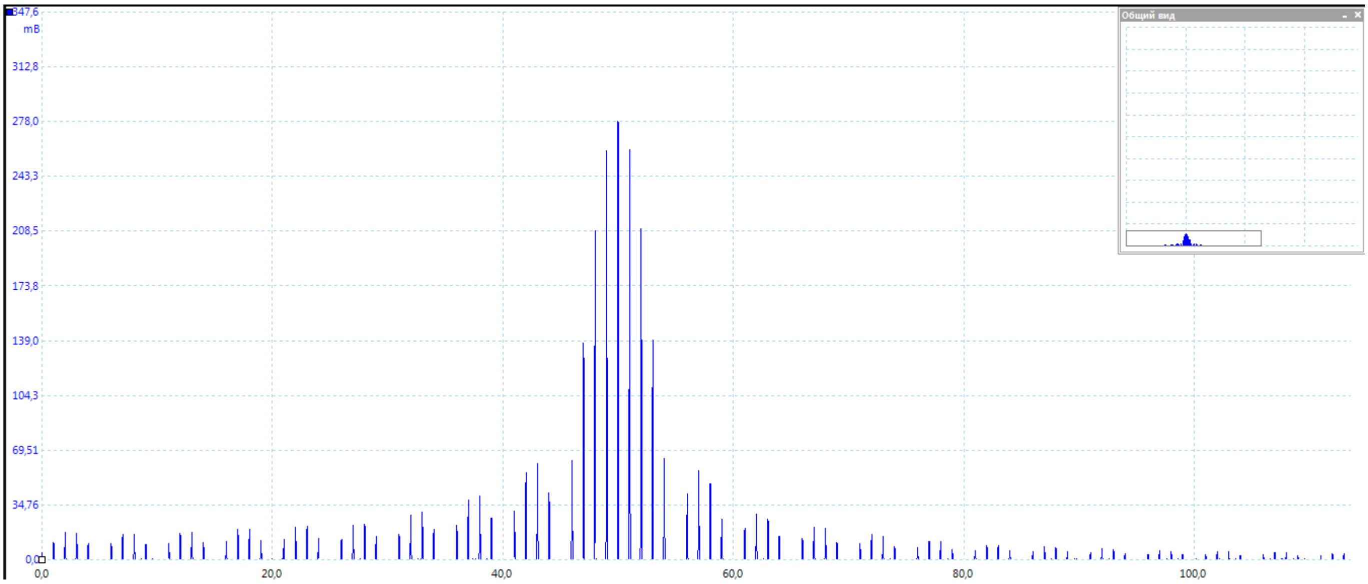


Рис. 10: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 0{,}2$ мс; $\nu_0 = 50$ кГц

Увеличим частоту синусоиды вдвое, уменьшим длительность цуга вдвое.

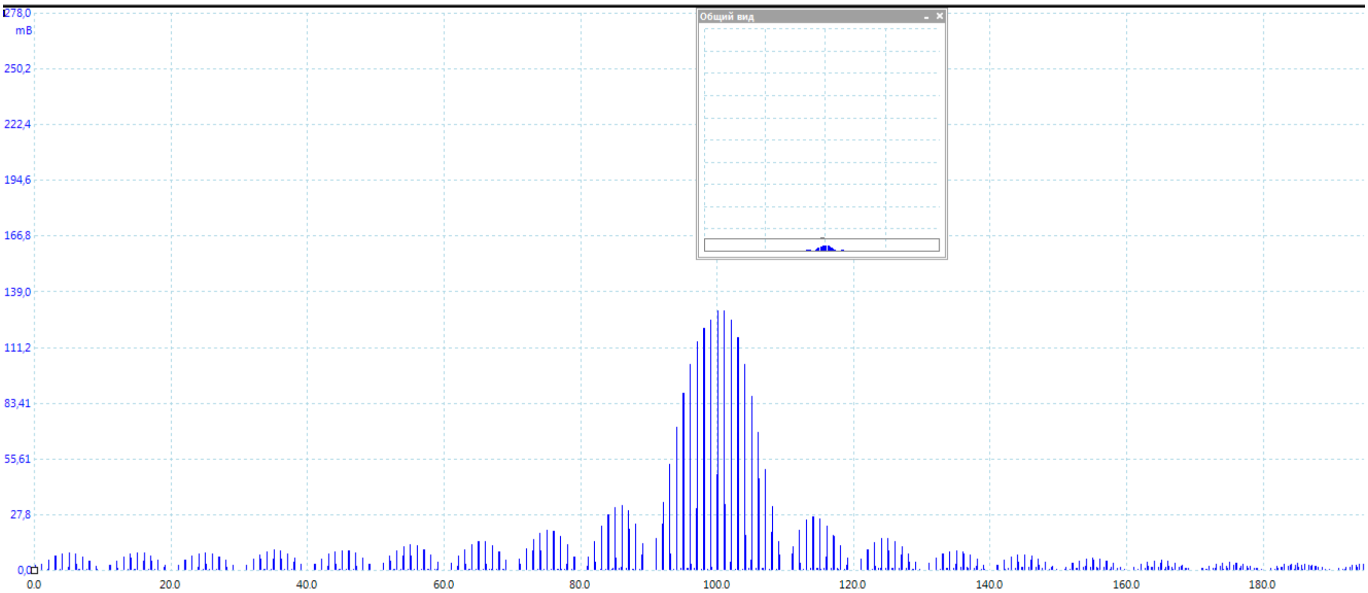


Рис. 11: Спектр прямоугольных импульсов $T = 1$ мс; $\tau = 0{,}1$ мс; $\nu_0 = 100$ кГц

Теперь снимем зависимость $\delta\nu$ – расстояния между соседними гармониками от частоты сигнала $f_{повт} = 1/T$. По результатам измерений построим график зависимости $\delta\nu(1/T)$. Данные представлены в таблице ниже.

Таблица 2: Данные измерений

$\nu = 50$ кГц, $N = 5$													
$1/f_{повт} = T$, мс	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\delta\nu$, кГц	9,95	2,55	1,681	1,25	1,0	0,67	0,5	0,4	0,34	0,28	0,24	0,22	0,2

B. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде.

Для передачи сигналов – музыки, речи, телевизионного изображения – необходимо нарушение синусоидальности. Отклонение от синусоидальности и выражает содержание передаваемой информации. Колебательный процесс, отличный от гармонического, называется *модулированным колебанием.*

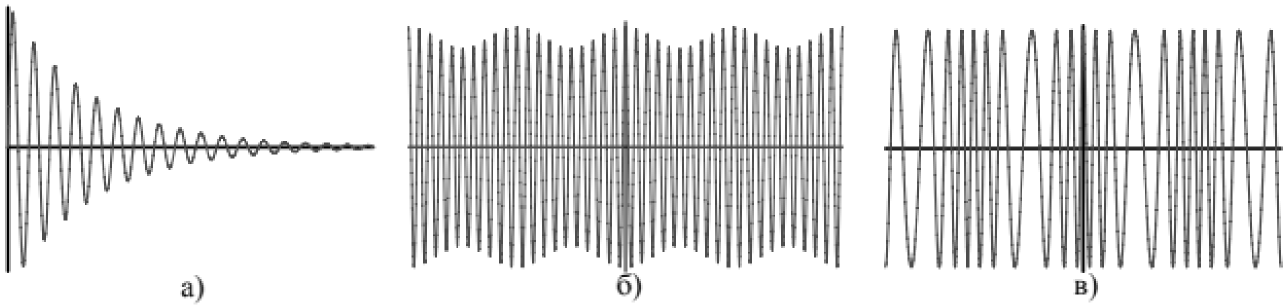


Рис. 12: Примеры модулированных колебаний: а, б) – по амплитуде, в) – по фазе

В общем случае модулированные колебания записываются в виде

$$f(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Если $\tau \gg T$, где τ – характерное время изменения амплитуды $a(t)$ и фазы $\varphi(t)$, то такие колебания называются *квазигармоническими.* В этом случае медленно меняющиеся величины $a(t)$ и $\varphi(t)$ принято называть *амплитудой* и *начальной фазой* модулированного колебания соответственно.

Для описания модулированных колебаний используется следующая терминология: говорят, что функция $a(t)$ описывает закон амплитудной модуляции, а функция $\varphi(t)$ – закон фазовой модуляции. Именно в этих функциях и может быть заложена передаваемая информация.

Если $\varphi(t) = \varphi_0 = const$, то такое колебание называют *модулированным по амплитуде.* Простейший случай амплитудно-модулированного колебания – в котором амплитуда модуляции является гармонической функцией.

$$f(t) = a(t)\cos\omega_0 t, \quad \text{где} \quad a(t) = a_0(1 + m\cos\Omega t).$$

Константа $0 < m \leq 1$ называется *глубиной модуляции.* Глубину модуляции можно выразить через максимальную a_{max} и минимальную a_{min} амплитуды сигнала:

$$m = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}}. \tag{1}$$

Преобразовав выражение для $f(t)$, получим соотношение

$$f(t) = a_0\cos\omega_0 t + \frac{ma_0}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{ma_0}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Итак, амплитудно-модулированное по гармоническому закону колебание представляется в виде суммы трёх гармонических колебаний:

$$f_0(t) = a_0\cos\omega_0 t,\ \ f_1(t) = \frac{ma_0}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)t,\ \ f_2(t) = \frac{ma_0}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Колебание $f_0(t)$ называется *несущим колебанием*, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – *боковыми гармониками.*

Проанализируем спектры амлитудно-модулированных сигналов при разных несущих и боковых частотах, а также различных глубинах модуляции.

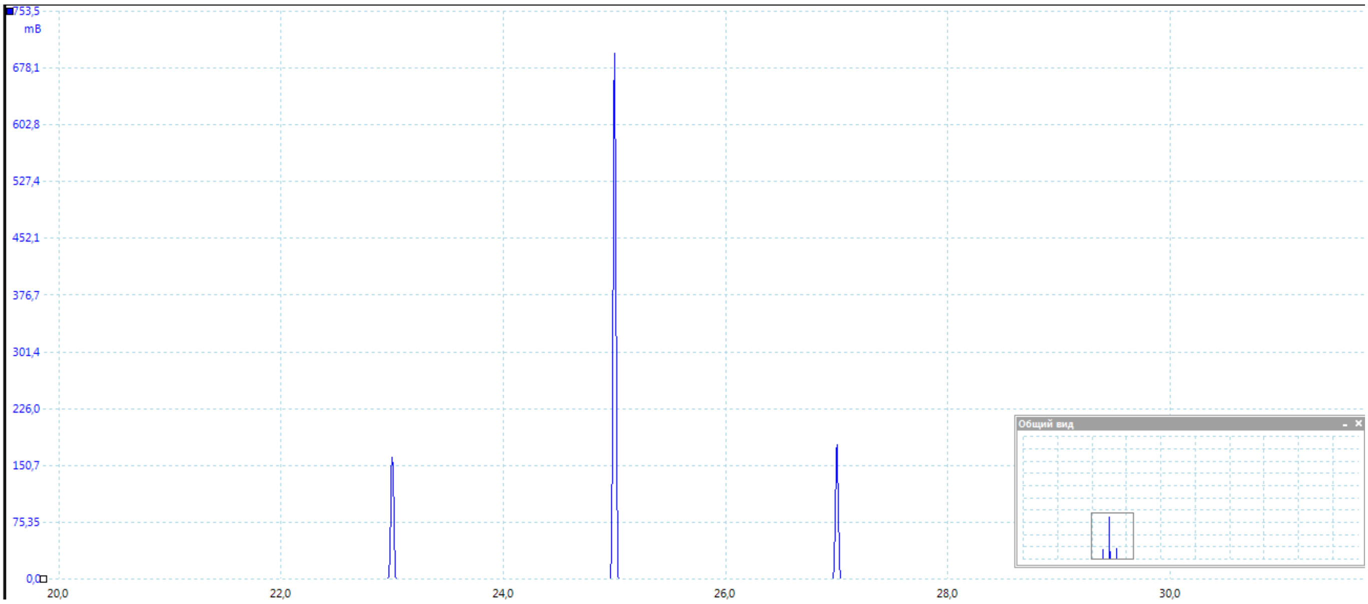


Рис. 13: $f_{\text{нес}} = 25$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $m = 0{,}5$

Как и должно быть, видим несущую гармонику на частоте $\nu = 25$ кГц и две боковых на частотах $(\nu = 25 \pm 2)$ кГц.

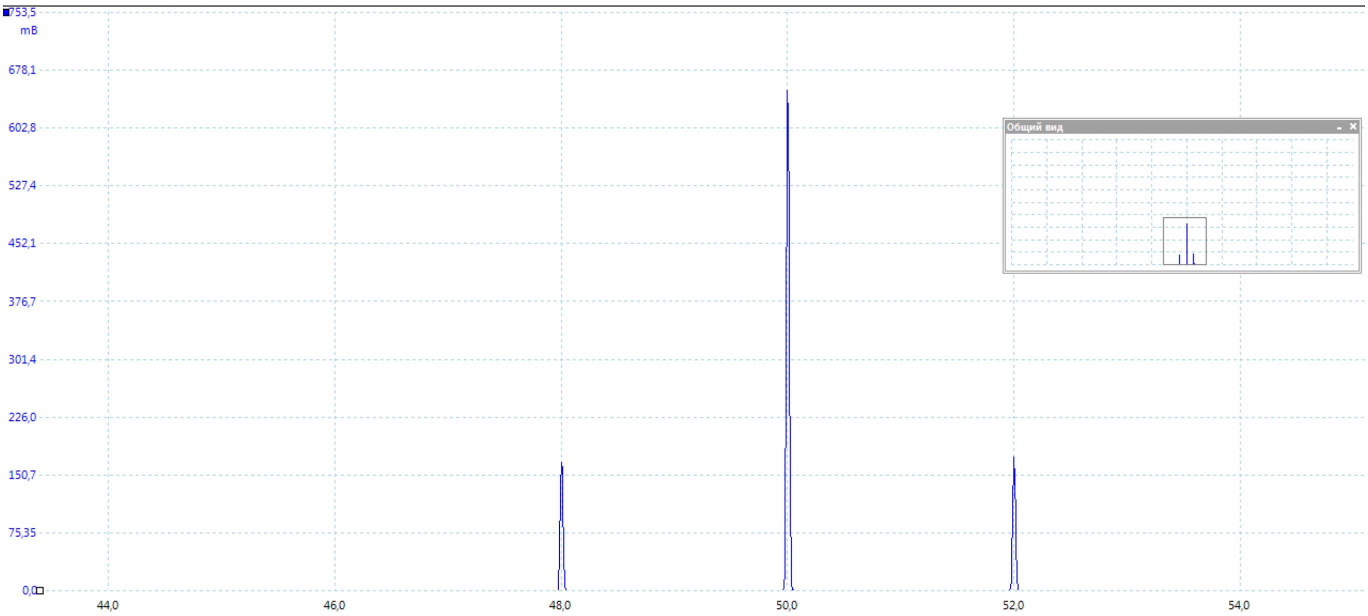


Рис. 14: $f_{\text{нес}} = 50$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $m = 0{,}5$

Теперь несущая гармоника находится на частоте 50 кГц, боковые (50 ± 2) кГц.

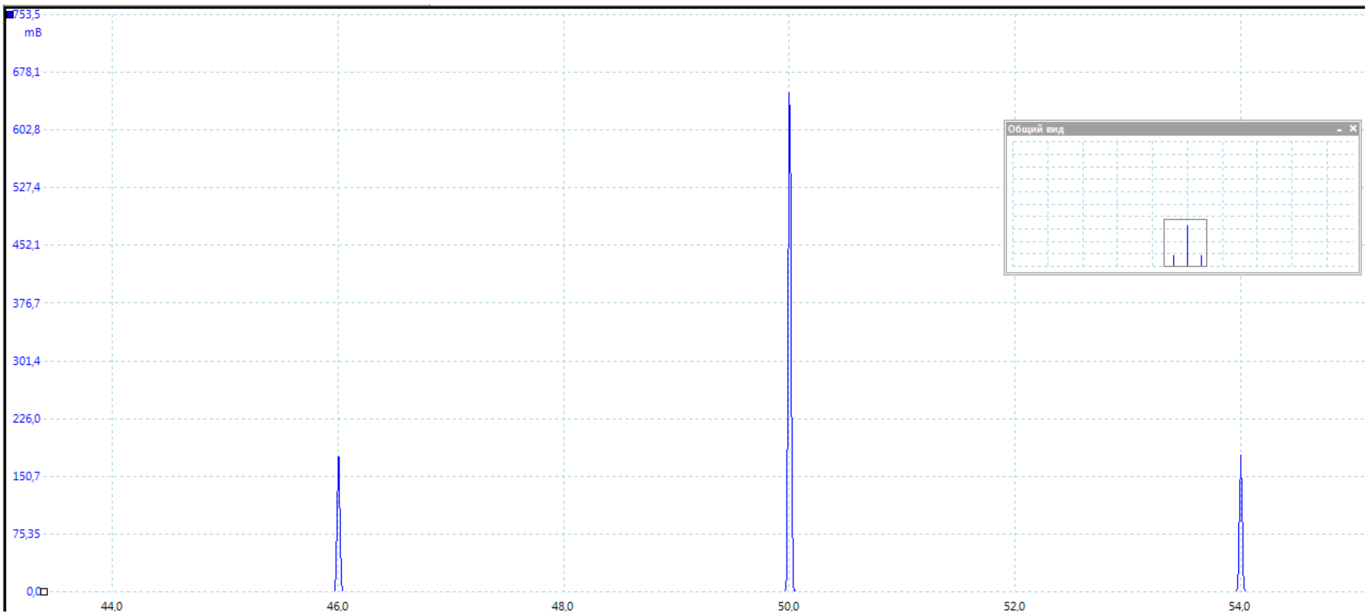


Рис. 15: $f_{\text{нес}} = 50$ кГц, $f_{\text{мод}} = 4$ кГц, $m = 0{,}5$

В этом случае несущая гармоника на такой же частоте, что и в предыдущем случае, боковые (50 ± 4) кГц.

Также, при $m_{\text{теор}} = 0{,}5$, запишем значения $a_{max} = 1529$ ед., $a_{min} = 515{,}5$ ед., и проверим справедливость формулы (1).

$$m_{\text{эксп}} = 0{,}496 \approx m_{\text{теор}} = 0{,}5.$$

Получаем совпадение с хорошей точностью.

Далее снимем зависимость отношения амплитуд боковой и несущей гармоник от глубины модуляции.

Таблица 3: Данные измерений $a_{\text{осн}}$ и $a_{\text{бок}}$ при различных m

m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$a_{\text{бок}}$, ед.	32,76	65,52	99,71	133,9	168,1	202,3	236,5	267,8	303,4	334,1
$a_{\text{осн}}$, ед.	658,1	662,3	669,0	659,5	660,9	658,1	659,5	659,5	659,5	655,2

По данным с таблицы построим график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m, проанализируем совпадение с теорией.

Г. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по фазе.

Рассмотрим теперь простейший пример фазовой модуляции:

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \qquad \text{где } \varphi(t) = m \cos \Omega t.$$

Константа m – *глубина модуляции фазы* – определяет диапазон изменения начальной фазы.

В общем случае закон модуляции приводит к довольно сложному спектру, поэтому рассмотрим случай $m \ll 1$. Тогда, после нескольких преобразований, получим

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{m a_0}{2} \cos\left((\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{m a_0}{2} \cos\left((\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2}\right).$$

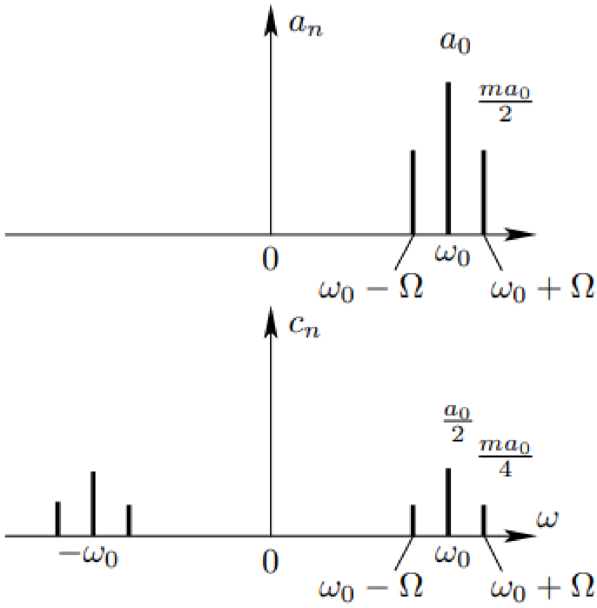


Рис. 16: Спектр колебаний, модулированных гармонически по фазе или амплитуде. Действительное (вверху) и комплексное (внизу) представления

Амплитудно-частотная характеристика обоих сигналов одинаковая, но сами сигналы сильно различаются. Всё дело в фазово-частотной характеристике, которая будет различна для этих сигналов. Из формул видно, что боковые гармоники отличаются фазовым сдвигом на $\frac{\pi}{2}$. Отсюда понятно, что чтобы восстановить сигнал мало знать амплитуды спектральных компонент, нужно ещё иметь информацию об их фазах.

Посмотрим на спектры сигналов, модулированных по фазе, с малой глубиной модуляции $m \ll 1$. Будем изменять величины ω_0, Ω и φ и смотреть как меняется спектр.

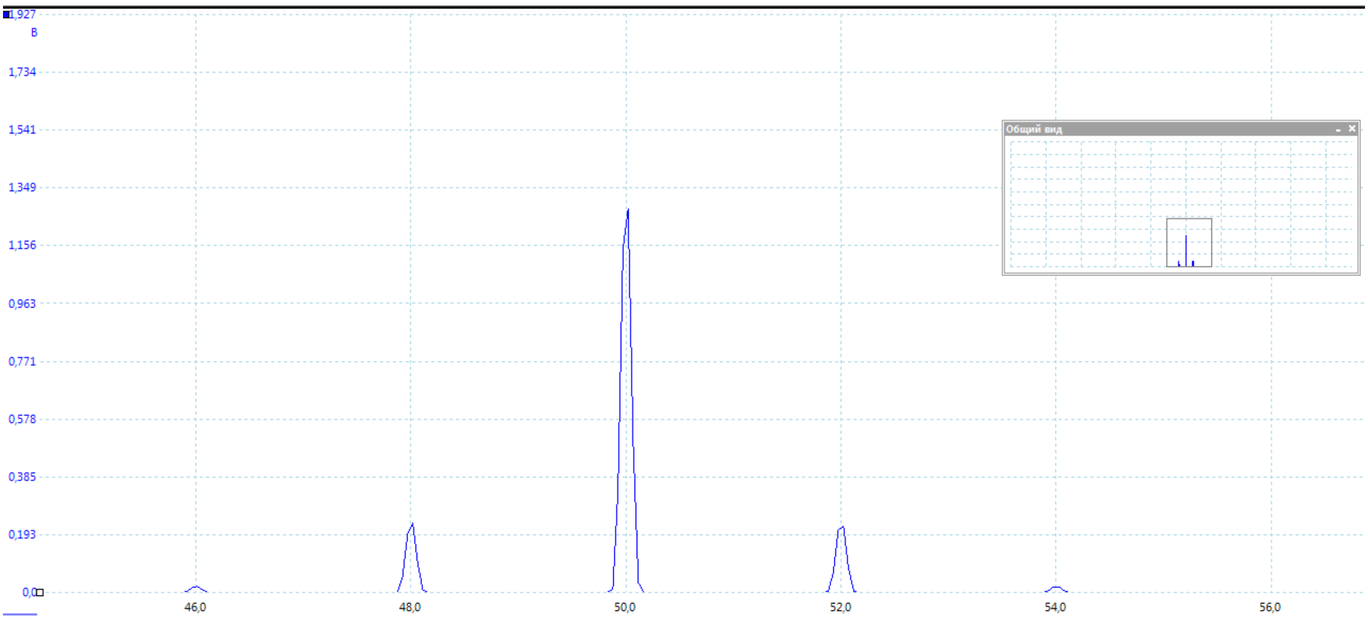


Рис. 17: $f_{\text{нес}} = 50$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi = 20°$

Видим, что спектр очень схож со спектром амлитудно-модулированного сигнала, но появляются дополнительные гармоники, которых в теории при $m \to 0$ не должно быть.

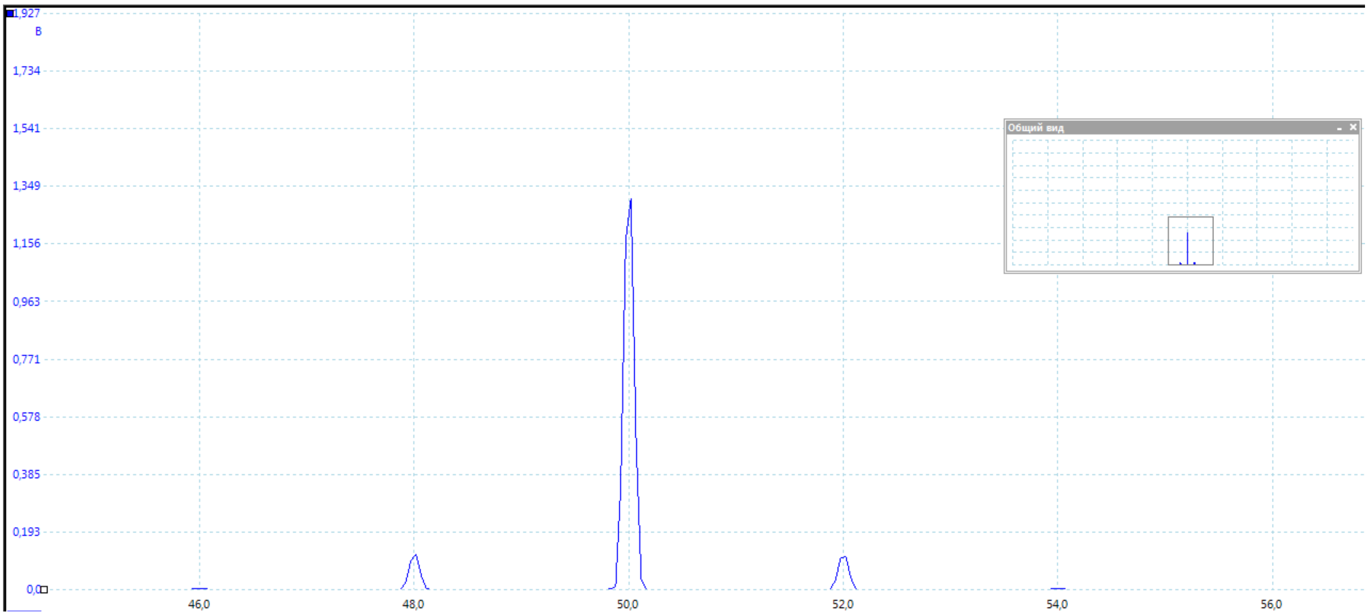


Рис. 18: $f_{\text{нес}} = 50$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi = 10°$

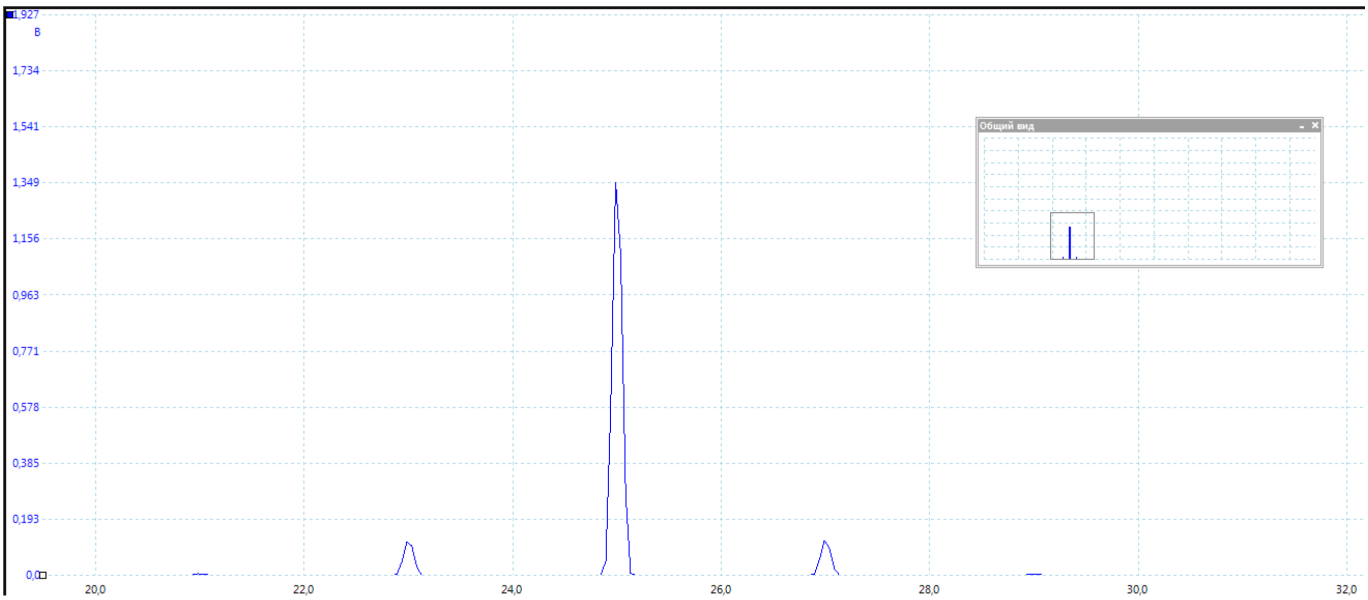


Рис. 19: $f_{\text{нес}} = 25$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi = 10°$

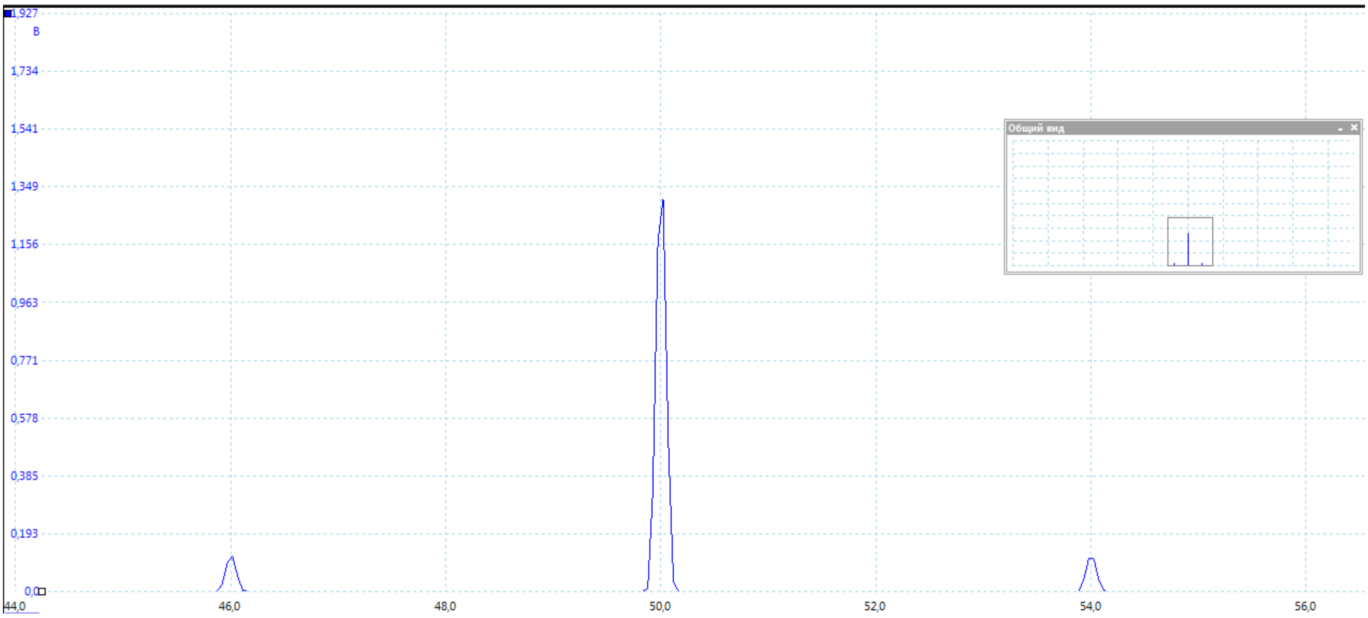


Рис. 20: $f_{\text{нес}} = 50$ кГц, $f_{\text{мод}} = 4$ кГц, $\varphi = 10°$

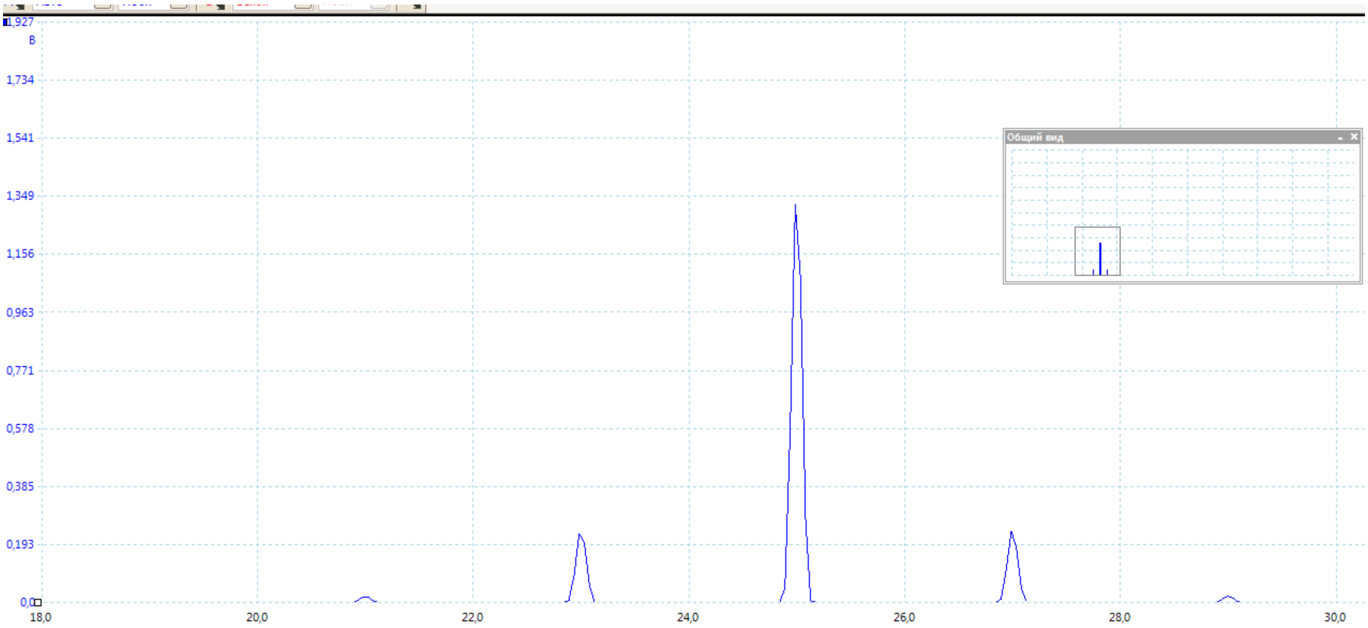
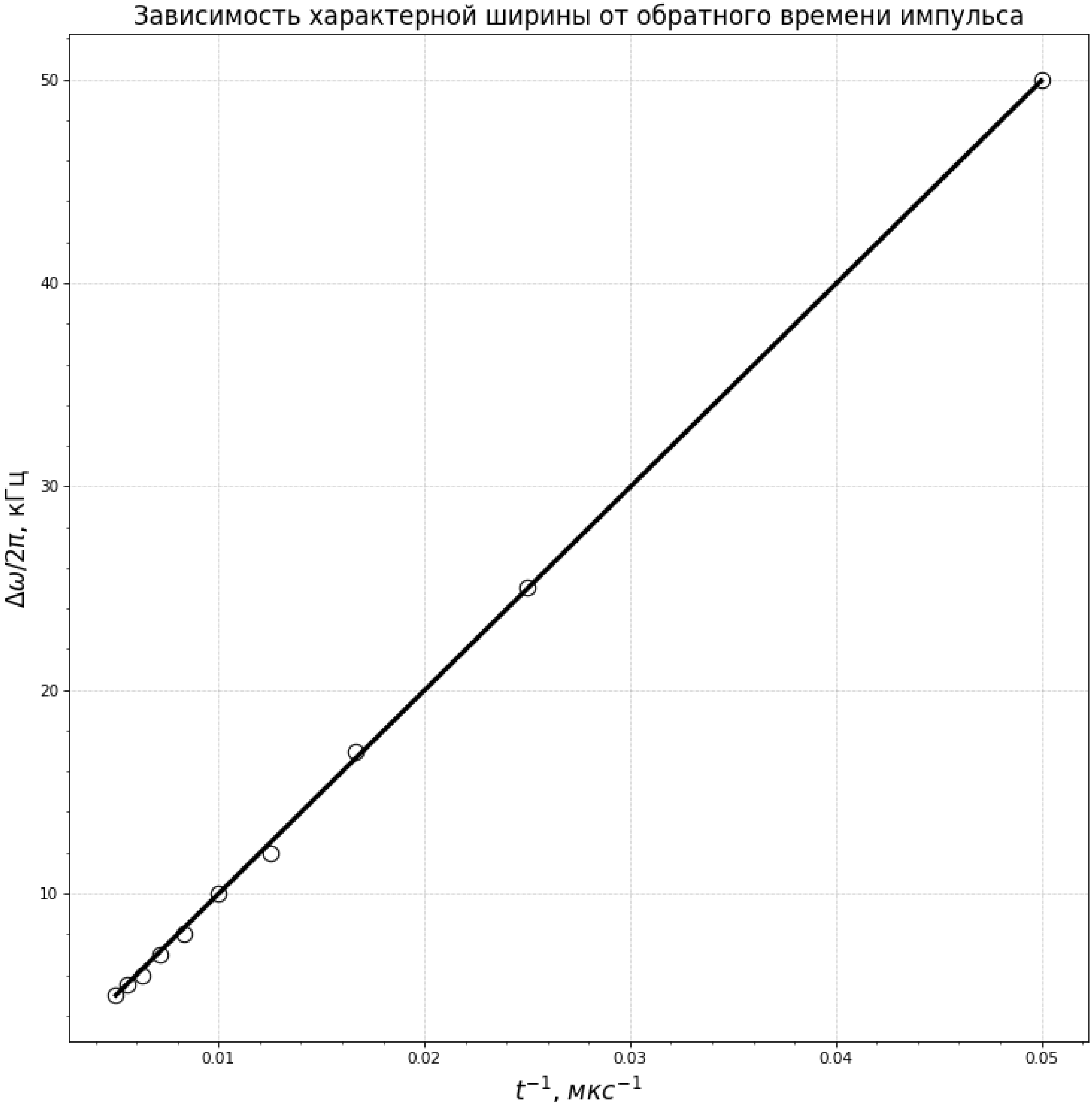


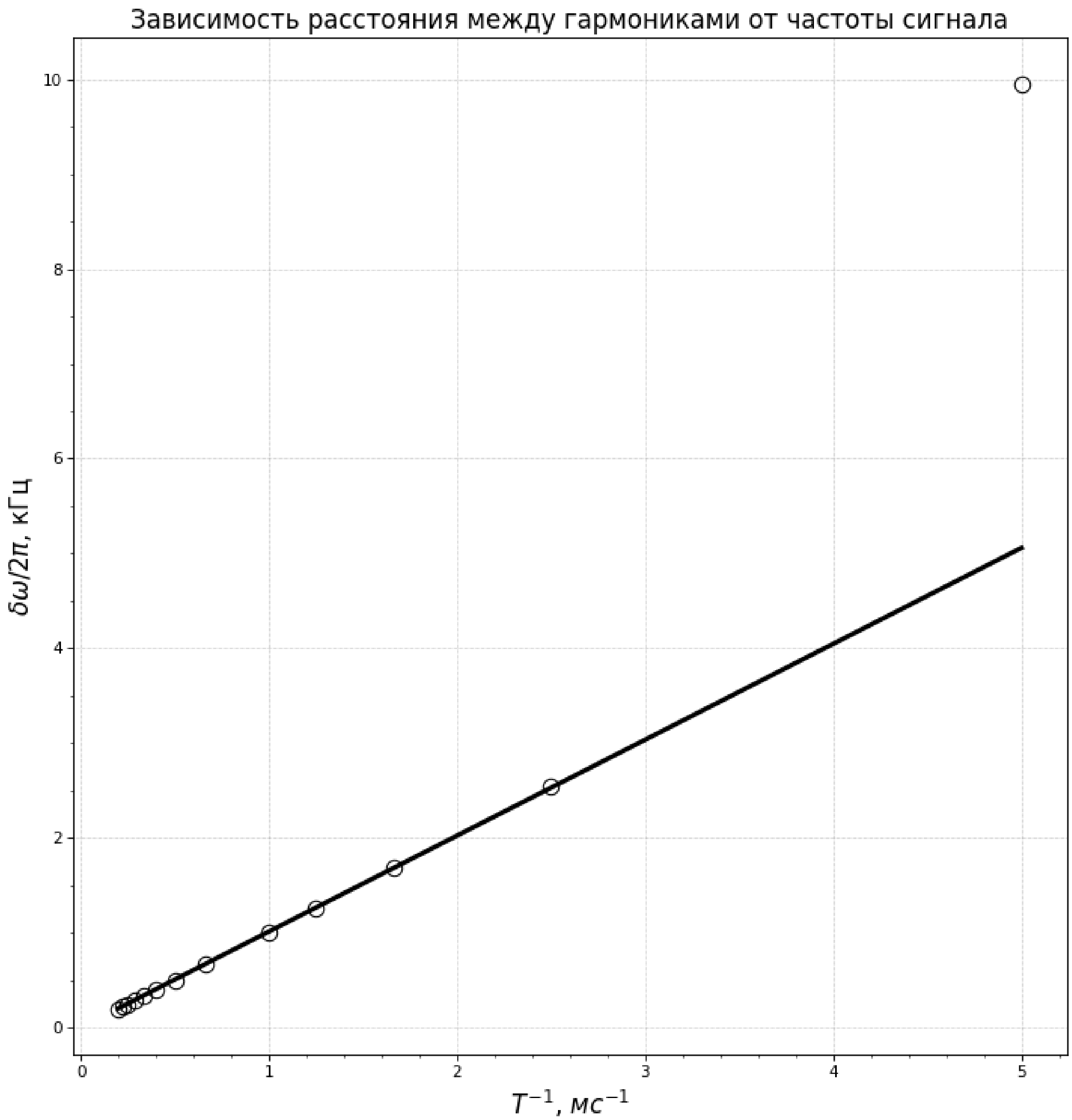
Рис. 21: $f_{\text{нес}} = 25$ кГц, $f_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi = 20°$

Вывод: В данной работе были исследованы спектры различных сигналов: периодической последовательности прямоугольных импульсов, периодической последовательности цугов гармонических колебаний, гармонических сигналов, модулированных по амплитуде и гармонических сигналов, модулированных по фазе. Результаты совпали с теоретической оценкой спектра каждого из сигналов. Также было проверено соотношение неопределённостей, результат с хорошей точностью совпал с теорией.



$$k = \frac{\Delta\omega \cdot \Delta t}{2\pi} = 0{,}998 \pm 0{,}004; \quad \varepsilon_k = 0{,}38\%$$

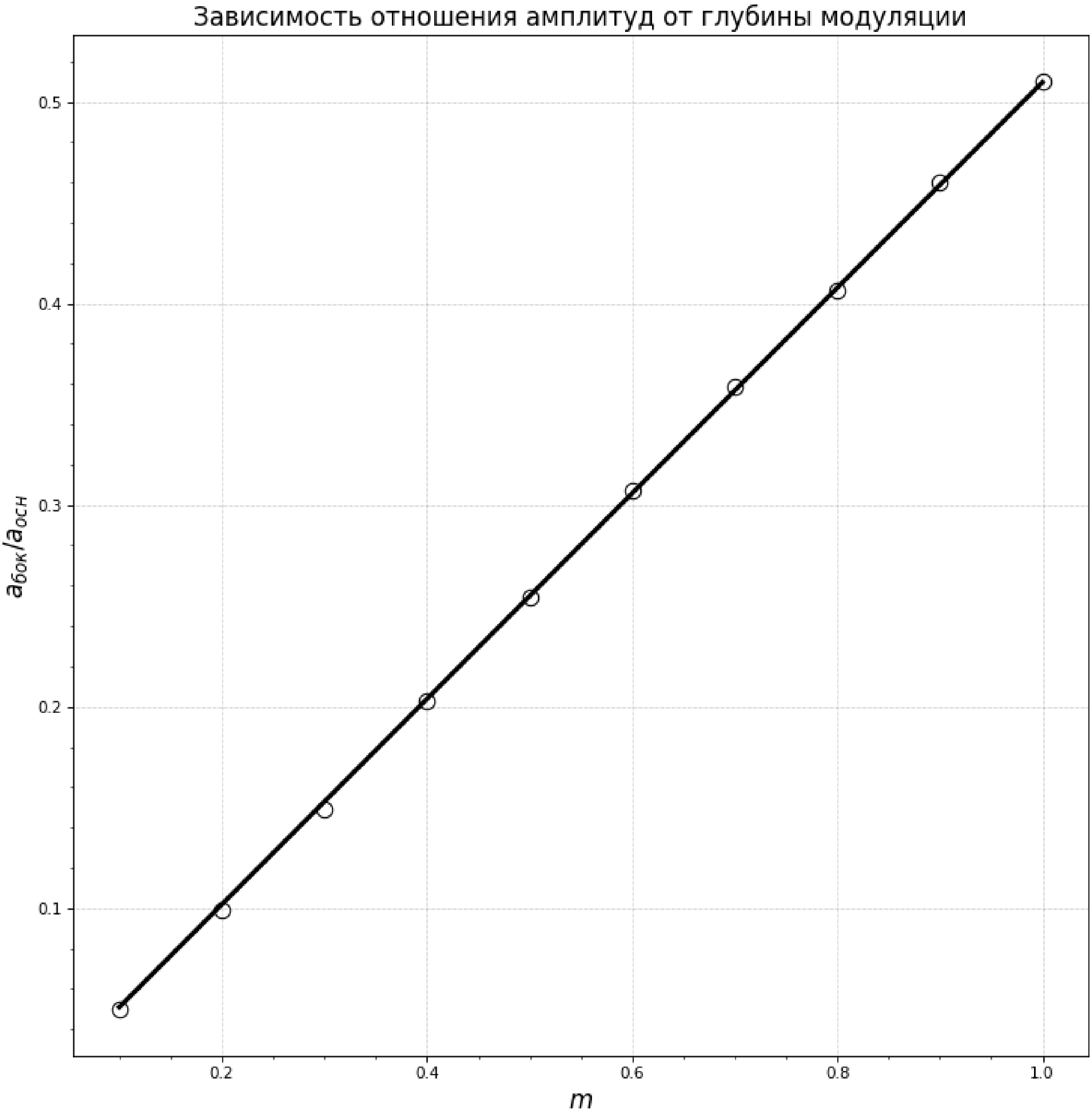
Следовательно получаем $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi$, что и подтверждает соотношение неопределённостей.



При аппроксимации были учтены все точки кроме самой первой ($T = 0{,}2$ мс).

$$k = 1{,}012 \pm 0{,}003; \quad \varepsilon_k = 0{,}27\%$$

При этом теоретическая зависимость имеет вид $\Delta\nu \cdot T = 1$, что хорошо подтверждается экспериментом.



$$k = 0{,}510 \pm 0{,}001; \quad \varepsilon_k = 0{,}19\%$$

Теоретическая оценка даёт зависимость

$$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{1}{2} m,$$

что с хорошей точностью совпадает с полученной экспериментально.