

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Определение критической силы при потере устойчивости стержней

Рогозин Владимир
Группа Б03-106

- Цель работы:** 1) Ознакомление с основными положениями теории устойчивости стержней по Эйлеру.
2) Проведение экспериментов и сопоставление расчётных и экспериментальных данных.

Теоретические сведения: Рассмотрим изгиб однородного бруса (балки) произвольного постоянного поперечного сечения на рис. 1. Ввиду бесконечной малости выделенного элемента можно считать, что в результате изгиба прямые AA' , NN' , BB' и все прямые, им параллельные, перейдут в окружности с центрами, лежащими на оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка.

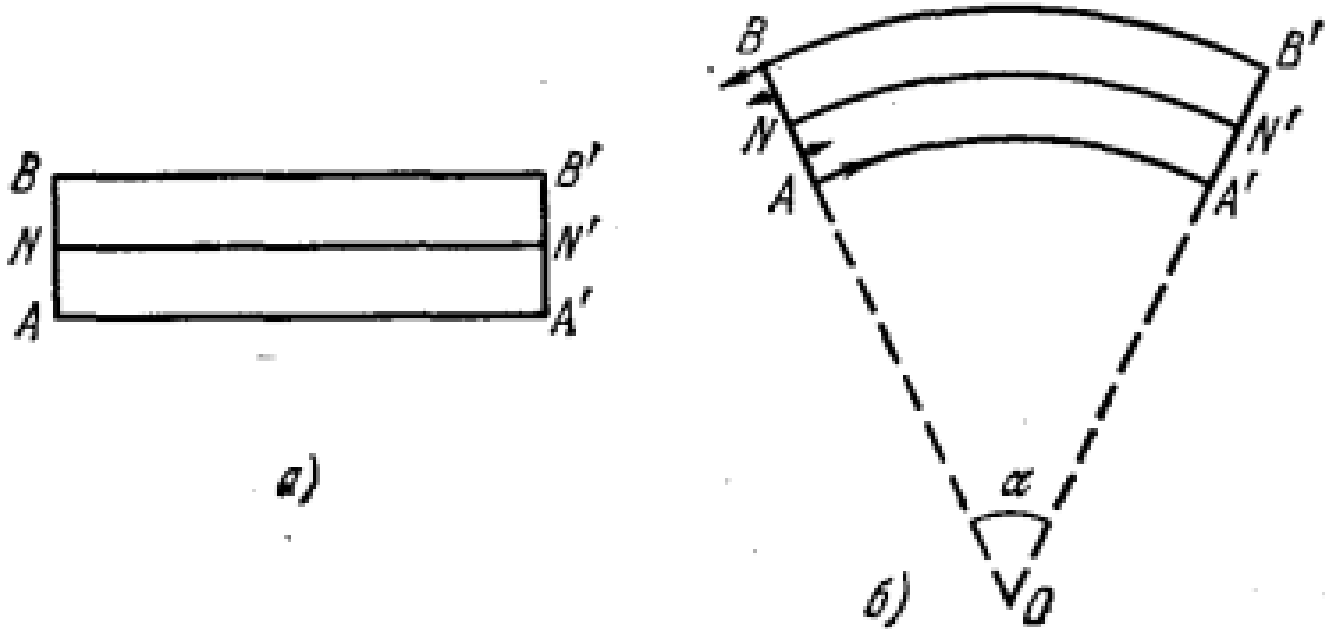


Рис. 1: а) Балка в покоем состоянии, б) изогнутая балка

Эта ось называется осью изгиба. Наружные волокна, лежащие выше линии NN' , при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN' , — укорачиваются. Длина линии NN' остается неизменной. Эта линия называется *нейтральной* линией. Проходящее через нее сечение (недеформированного) бруса плоскостью, перпендикулярной к плоскости рисунка называется *нейтральным* сечением. Пусть R — радиус кривизны нейтральной линии. Рассмотрим удлинение волокна бруса, находящегося на расстоянии ξ от нейтральной линии. Если брус не слишком толст, так что $|\xi| \ll R$, то длина рассматриваемого волокна будет $l = (R + \xi)\alpha$, а удлинение $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Получаем натяжение вдоль рассматриваемого волокна

$$\tau = E \frac{\xi}{R}$$

отсюда момент сил, действующий на брус относительно оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через середину нейтральной линии

$$M_\tau = \frac{E}{R} \int \xi^2 dS = \frac{EJ}{R}$$

где обозначен осевой момент инерции

$$J = \int \xi^2 dS$$

Вспоминая выражение для радиуса кривизны

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

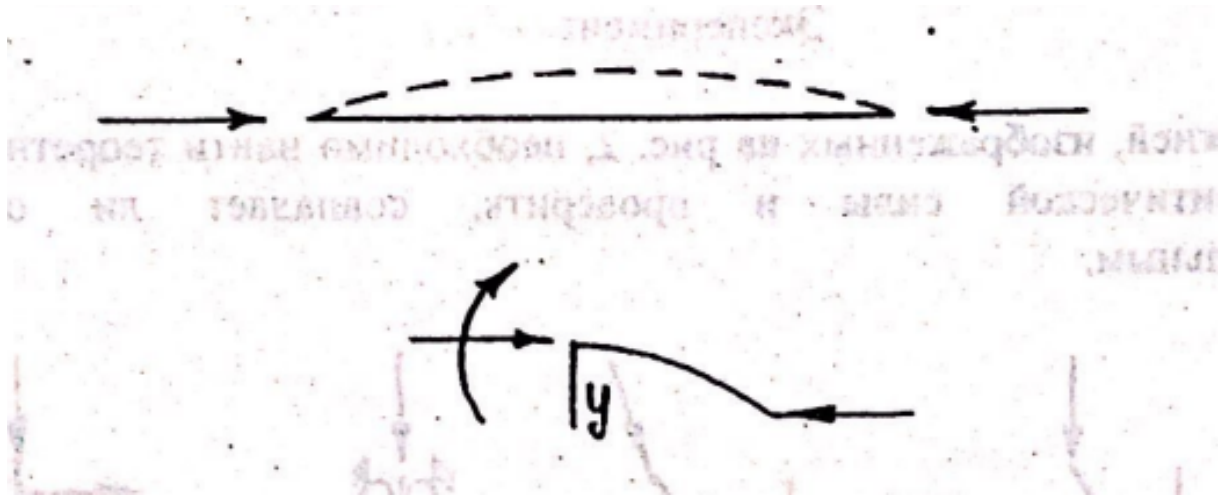


Рис. 2: Изгиб стержня под действием внешнего момента

при малых изгибах можно пренебречь квадратом производной. Окончательно запишем выражение для момента сил, действующих внутри стержня

$$M_\tau = EJy''$$

Внешний момент силы P равен

$$M = -Py$$

получаем уравнение

$$y'' + k^2y = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}$$

Общее решение данного уравнения представляется в виде

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

где A, B - произвольные постоянные, которые могут быть вычислены из граничных условий

$$x = 0, y = 0; \quad x = l, y = 0$$

окончательный результат

$$B = 0, \quad A \sin kl = 0$$

Случай $A = 0$ соответствует состоянию устойчивости. Потеря устойчивости происходит при условии

$$kl = \pi n, \text{ где } n - \text{целое число.}$$

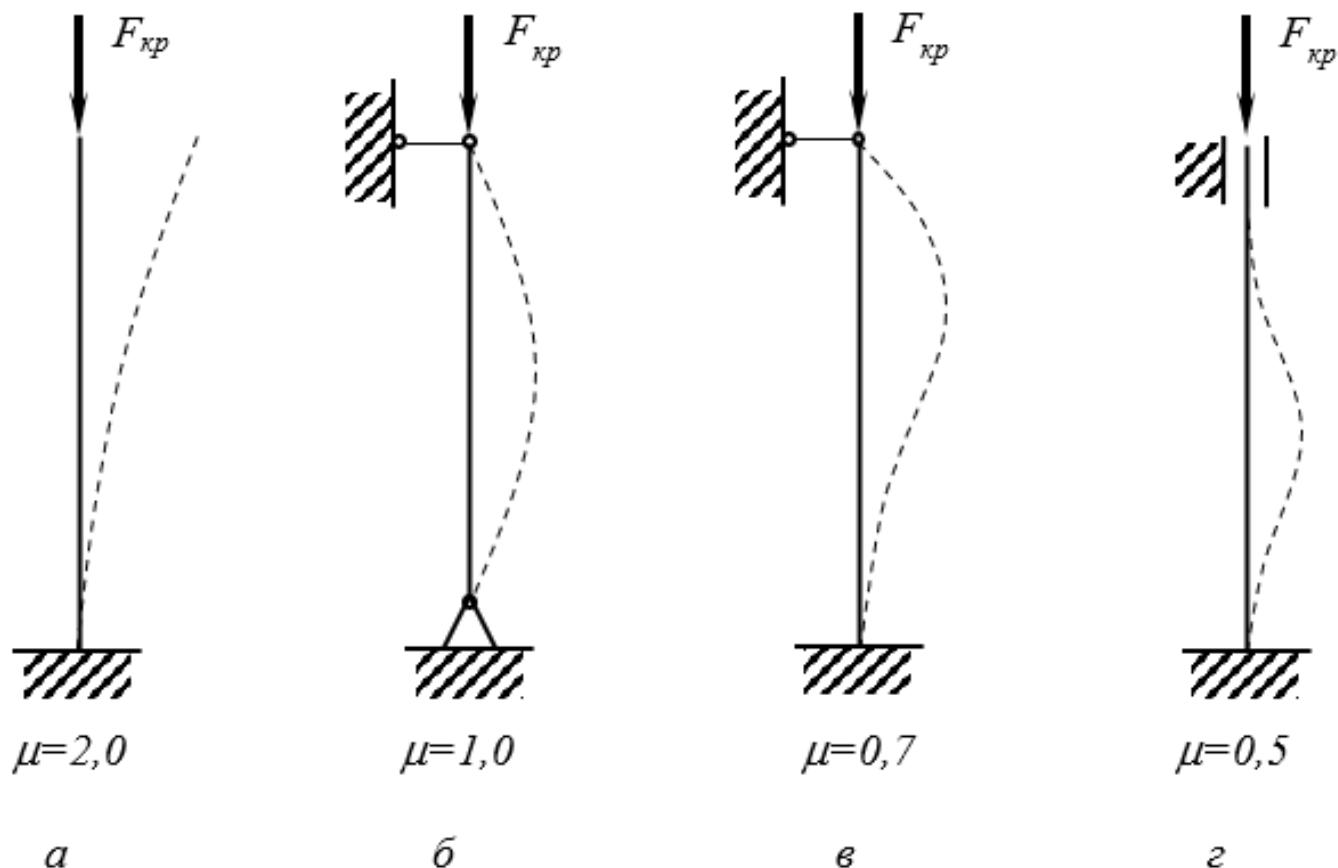
Выражая силу получим

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2}$$

беря наименьшее значение n получаем выражение для критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{\text{эфф}}^2}$$

Так как изначально формула была получена для шарнирно закреплённого с двух сторон стержня, то при изменении способа закрепления концов должно меняться и значение критической силы, это и отражает переменная в знаменателе $l_{\text{эфф}} = \mu l$, где l - фактическая длина стержня, μ - коэффициент, показывающий во сколько раз критическая сила при данном закреплении меньше критической силы при двойном шарнирном креплении для стержней одинаковой длины.


 Рис. 3: Значения коэффициента μ для различных способов закрепления стержня

Обработка данных: В данной работе рассчитывалась критическая сила для каждого из четырех представленных выше способов крепления стержня. Длины каждой из линеек, а также их коэффициенты μ представлены на схеме ниже. Параметры каждой из линеек:

$$b_I = 2,81 \text{ см}, \quad b_{II} = 3,59 \text{ см}, \quad h_1 = h_2 = h = 0,95 \text{ мм} \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$$

где b_I, b_{II} – высоты ближней и дальней линеек соответственно, h – их толщина, E – модуль Юнга стали. Осевой момент инерции рассчитывается по формуле

$$J = \int \xi^2 dS = \frac{bh^3}{12}$$

Таблица 1: Параметры каждой из линеек

№	l , см	b , см	μ	J , см ⁴
I.1	23,1	2,81	2,0	$2,007 \cdot 10^{-4}$
I.2	26,7		0,7	
I.3	31,8		1,0	
II.4	46,5	3,59	0,5	$2,564 \cdot 10^{-4}$
II.5	32,8		0,7	

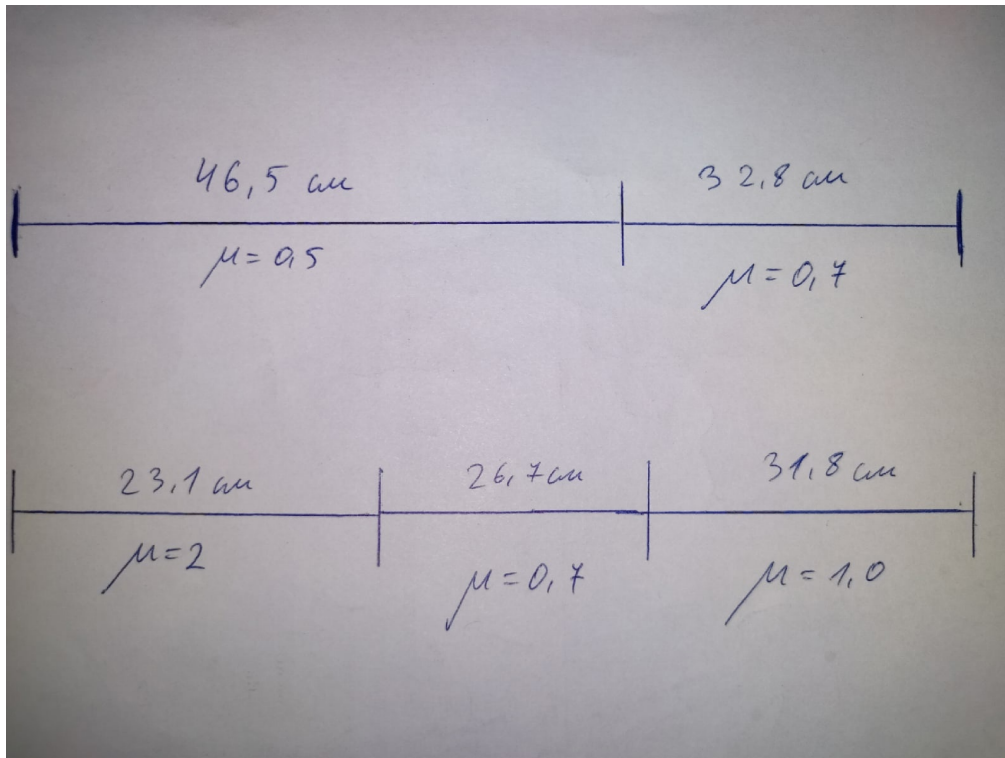


Рис. 4: Схема установки

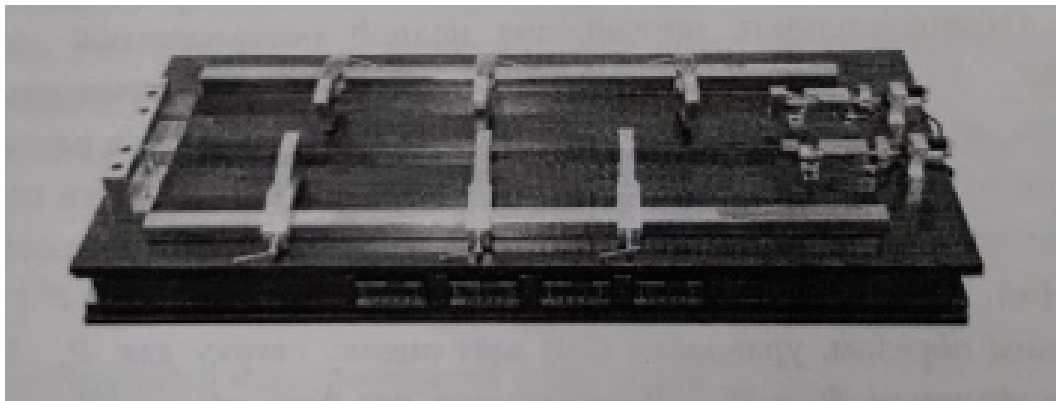


Рис. 5: Фото установки

Далее, рассчитаем критическую силу для каждого из участков и сравним со значением, полученным на установке

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$$

Таблица 2: Сравнение теоретических и экспериментальных значений $P_{кр}$

№	$P_{теор}, Н$	$P_{эксп}, Н$
I.1	18,21	18,0
I.2	111,26	—
I.3	38,43	—
II.4	91,85	83,0
II.5	100,20	—

Рассчитаем погрешности $P_{кр}$ учитывая, что

$$\sigma_l = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \sigma_b = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad \text{text}\sigma_h = 10^{-5} \text{ м}$$

$$P = f(h, b, l), \quad \sigma_P^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2$$

$$\varepsilon_P^2 = \varepsilon_b^2 + 9\varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_l^2$$

Таблица 3: Результаты расчета $P_{кр}$ с учётом погрешностей

№	$P_{\text{теор}}, \text{ Н}$	$\varepsilon_P, \%$
I.1	$18,21 \pm 0,55$	3,04
I.2	$111,26 \pm 3,37$	3,03
I.3	$38,43 \pm 1,16$	3,03
II.4	$91,85 \pm 2,76$	3,01
II.5	$100,20 \pm 3,03$	3,02

Вывод: В данной работе исследовались основные понятия теории устойчивости стержней, в качестве стержней использовались металлические линейки. Для каждой из линеек, в зависимости от способа закрепления её концов, была рассчитана критическая сила $P_{кр}$, для двух из линеек были получены и значения этих сил экспериментально, таким образом была проверена справедливость формулы Эйлера.