

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лабораторная работа 3.4.1
Диа- и парамагнетики

Рогозин Владимир
Группа Б03-106

Цель работы: измерение магнитной восприимчивости диа- и парамагнитного образцов.

Оборудование: электромагнит, весы, милливеберметр, регулируемый источник постоянного тока, образцы диа- и пара-магнетиков.

Теоретические сведения: Известно, что вещество может обладать как собственной намагниченностью, так и изменять свою намагниченность при помещении во внешнее магнитное поле. Микроскопическими источниками магнитного поля в среде являются орбитальное движение электронов в молекулах и атомах, а также собственное вращение (спин) электронов и ядер. При *макроскопическом* описании свойств среды можно считать, что каждый элемент объёма среды может являться элементарным источником магнитного поля — *магнитным диполем*. Для описания усреднённых свойств среды используют вектор намагниченности \mathbf{M} , равный магнитному моменту единичного объёма вещества.

Величина магнитного поля \mathbf{B} в данной точке среды определяется как значение микрополя, усреднённое по малому (элементарному) объёму, содержащему при этом большое количество частиц. \mathbf{B} называется индукцией магнитного поля.

Помимо этого, принято вводить вспомогательный вектор \mathbf{H} напряжённости поля.

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

В простейшем практически важном случае намагниченность \mathbf{M} в каждой точке среды прямо пропорциональна вектору напряжённости магнитного поля \mathbf{H} в этой же точке

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$$

Коэффициент пропорциональности χ называется называют магнитной восприимчивостью среды. Вещества, для которых справедлива такая зависимость между намагниченностью и напряжённостью, называются парамагнетиками ($\chi > 0$) и диамагнетиками ($\chi < 0$). В парамагнетиках элементарные диполи ориентированы в основном по приложенному полю, а в диамагнетиках — против него.

В итоге для напряжённости поля можем записать

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

где μ — магнитная проницаемость вещества

$$\mu = 1 + 4\pi\chi$$

Диамагнетизм

Диамагнетизм ($\chi < 0$) возникает из-за электромагнитной индукции молекулярных токов в электронных оболочках атомов и присущ в той или иной степени всем веществам без исключения. В зависимости от того, обладает ли электрон в атоме начальным моментом импульса \mathbf{L} , механизмы возникновения диамагнетизма несколько отличаются.

1) $\mathbf{L} = 0$. Рассмотрим электрон в состоянии с нулевым орбитальным моментом импульса. С классической точки зрения такое состояние можно представить как симметрично «размазанное» облако заряда вокруг ядра.

Плавно (квазистатически) включим внешнее однородное магнитное поле \mathbf{B} . Согласно закону электромагнитной индукции, величина этого поля на расстоянии r от оси системы определяется соотношением

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

отсюда

$$E = -\frac{1}{2}r \frac{dB}{dt}$$

Запишем уравнение моментов для точечного электрона, находящегося на «орбите» радиуса

$$m_e r^2 \frac{d\omega}{dt} = -erE = \frac{1}{2} er^2 \frac{dB}{dt}$$

Интегрируя по времени, найдём, что независимо от расстояния r электрон при включении поля B приобретает угловую скорость вращения

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} B$$

Величину ω_L называют ларморовской частотой.

При вращении с ларморовской частотой электрон создаёт магнитное поле, равное полю витка с током $I_L = e \frac{\omega_L}{2\pi}$. Этот ток в свою очередь создаёт магнитный момент, по модулю равный

$$m_L = I_L \cdot S = -\frac{e^2 S}{4\pi m_e} B$$

где S – площадь эквивалентного витка. Если полагать, что $S \sim \pi a^2$, где a – среднее расстояние электронов до ядра. Тогда для атома, содержащего Z электронов, имеем намагниченность среды $M = Zn \cdot \Delta m_L$, где n есть число атомов в единице объёма. Получаем оценку для магнитной восприимчивости

$$\chi_{\text{диа}} \sim -\mu_0 \frac{e^2 a^2}{4m_e} Zn$$

2) $L \neq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда электрон исходно обладает некоторым орбитальным моментом импульса $L = mvr$. Орбитальное движение электрона эквивалентно витку с током, магнитный момент которого m_L пропорционален L и направлен против него. Его величину можно найти как произведение тока $e \cdot \frac{v}{2\pi r}$ на площадь «витка» πr^2 : $m_L = \frac{1}{2} e v r$. При включении внешнего магнитного поля B , направленного вдоль z , на электрон начинает действовать момент силы $m_L \times B$, и уравнение движения электрона будет иметь вид

$$\frac{dL}{dt} = m_L \times B$$

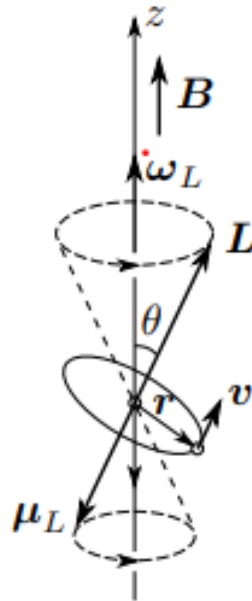


Рис. 1: Прецессия электронной орбиты в магнитном поле

Его решением является прецессия электронной орбиты с ларморовской угловой частотой: $\omega_L = \frac{m_L}{L} B = \frac{e}{2m_e} B$. При этом вектор m_L описывает конус вокруг вектора B . Эта прецессия не зависит от угла θ и приводит к дополнительному вращению электрона вокруг поля B , налагающемуся на его орбитальное движение.

Отсюда следует, что диамагнитная восприимчивость не зависит от температуры или величины поля и возрастает пропорционально порядковому номеру элемента. Видно, что диамагнитный эффект присущ всем веществам независимо от того, имеется у атомов собственный магнитный момент или нет. Однако у некоторых веществ он перекрывается более сильным парамагнитным эффектом.

Парамагнетизм

Парамагнетизм ($\chi > 0$) характерен для веществ, микроскопические частицы которых (атомы, ионы, молекулы) обладают собственным магнитным моментом в отсутствие внешнего магнитного поля.

В парамагнетиках энергия взаимодействия между соседними магнитными моментами атомов мала по сравнению с тепловой энергией, поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля микроскопические магнитные моменты полностью разупорядочены, и намагниченность среды равна нулю. При помещении во внешнее поле магнитным моментам энергетически выгодно ориентироваться преимущественно по полю, что и приводит к парамагнитному эффекту.

Оценим температурную зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика в классической модели. Пусть среднее число атомов в единице объёма равно n , а абсолютная величина магнитного момента атома \mathbf{m}_a . В магнитном поле с индукцией B энергия магнитного диполя, составляющего с направлением поля угол α , равна

$$U = -\mathbf{m}_a B \cos \alpha$$

и может меняться в диапазоне от $-\mathbf{m}_a B \cos \alpha$ до $\mathbf{m}_a B \cos \alpha$

Из термодинамики известно, что доля атомов dn , обладающих в условиях равновесия энергией $U(\alpha)$, определяется распределением Больцмана:

$$dn \propto e^{-\frac{U(\alpha)}{k_B T}} d\alpha$$

Пусть внешнее магнитное поле достаточно мало, так что энергия магнитных моментов атомов в нём много меньше тепловой: $\mathbf{m}_a B \ll k_B T$. Число атомов, имеющих положительную ($\alpha > 0$) проекцию на направление B , может быть записано как

$$n_+ = n_0 e^{\mathbf{m}_a B / k_B T} \approx n_0 \left(1 + \frac{\mathbf{m}_a B}{k_B T} \right)$$

Для атомов с отрицательной проекцией момента ($\alpha < 0$)

$$n_- = n_0 e^{-\mathbf{m}_a B / k_B T} \approx n_0 \left(1 - \frac{\mathbf{m}_a B}{k_B T} \right)$$

Учитывая условие нормировки $n_+ + n_- = n$, найдём: $n_0 \approx n/2$.

Величину суммарного магнитного момента единицы объёма можно оценить как

$$M \sim n_+ \mathbf{m}_a + n_- (-\mathbf{m}_a) \approx \frac{\mathbf{m}_a^2 n}{k_B T} B$$

Более аккуратное усреднение по углам даст поправочный множитель порядка единицы (в классической модели получается коэффициент $1/3$).

Таким образом, парамагнитная восприимчивость равна

$$\chi_{\text{пар}} \sim \mu_0 \frac{\mathbf{m}_a^2 n}{3k_B T} \propto \frac{1}{T}$$

Температурная зависимость восприимчивости парамагнетиков называется *законом Кюри*.

Методика измерения: Магнитная восприимчивость тел может быть определена по измерению сил, действующих на тела в магнитном поле. Существуют два классических метода таких измерений: *метод Фарадея* и *метод Гюи*. В данной работе предлагается использовать метод Гюи. В методе Гюи используется тонкий и длинный стержень, один из концов которого помещают в зазор электромагнита (обычно в область однородного поля), а другой конец – вне зазора, где величиной магнитного поля можно пренебречь. Закон изменения поля — от максимального до нулевого — в этом случае несуществен.

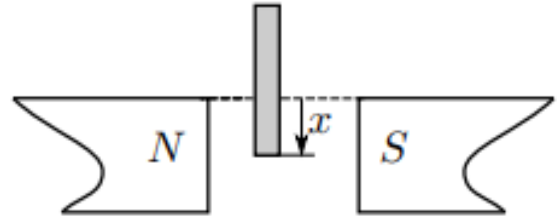


Рис. 2: Расположение образца в зазоре электромагнита

Найдём выражение для силы, действующей со стороны магнитного поля на цилиндрический стержень, помещённый в зазор электромагнита (рис. 1). Пусть площадь сечения образца равна S , его магнитная проницаемость – μ , поле в зазоре равно B_0 и образец помещён в зазор на глубину x .

Ток в обмотке электромагнита I поддерживается постоянным, поэтому сила, действующая на образец со стороны магнитного поля равна

$$F_M = \left(\frac{\partial W_M}{\partial x} \right)$$

где $W_M(x)$ – магнитная энергия системы при $I = \text{const}$ в зависимости от смещения образца x .

Магнитная энергия может быть рассчитана по формуле:

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{B^2}{\mu} dV$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Найдём распределение магнитного поля в длинном цилиндре, частично помещённом в зазор электромагнита.

Систему можно условно разбить на 3 части. В области I вне электромагнита поле мало $B_1 \approx 0$ и его вкладом в энергию можно пренебречь. В части стержня II , погружённой в электромагнит, поле приближённо равно $B_2 \approx \mu B_0$. В области III вдали от стержня поле мало отличается от $B_3 \approx B_0$. Наконец, в пограничных областях между I и II и между II и III (отмечены пунктиром) распределение поля простыми методами рассчитано быть не может. Найдём изменение магнитной энергии при заданном смещении:

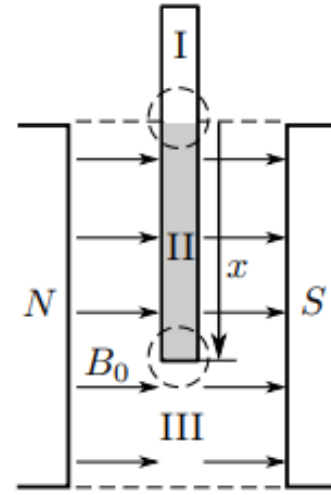


Рис. 3: К вычислению распределения поля в образце

$$dW_M(\Delta x) \approx \frac{B_2^2}{2\mu\mu_0} S dx - \frac{B_3^2}{2\mu_0} S dx = (\mu - 1) \frac{B_0^2}{2\mu_0} S dx$$

Отсюда, сила равна

$$F_M = \left(\frac{\partial W_M}{\partial x} \right)_{B_0} \approx \chi \frac{B_0^2}{2\mu_0} S$$

Знак силы зависит от знака восприимчивости, парамагнетики ($\chi > 0$) втягиваются в зазор электромагнита, а диамагнетики ($\chi < 0$) выталкиваются из него.

Экспериментальная установка:

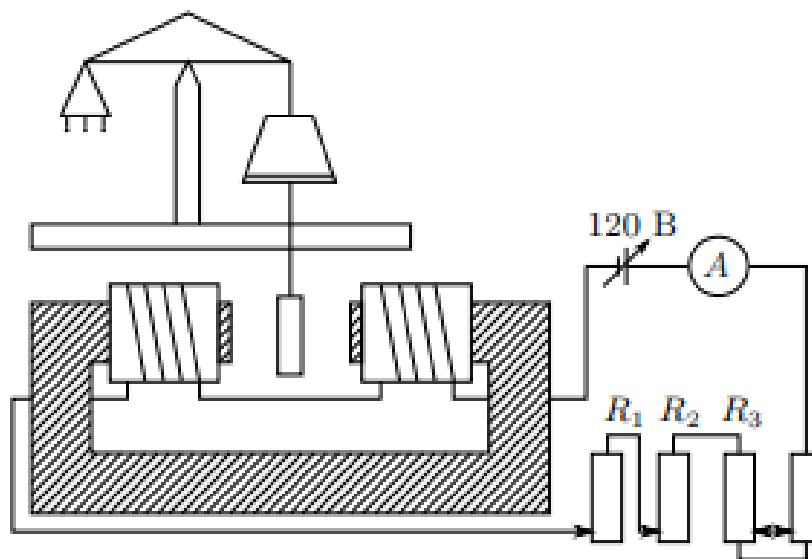


Рис. 4: Схема экспериментальной установки

Схема установки изображена на рис. 4. Магнитное поле с максимальной индукцией ≈ 1 Тл создаётся в зазоре электромагнита, питаемого постоянным током. Диаметр полюсов существенно превосходит ширину зазора, поэтому поле в средней части зазора достаточно однородно. Величина тока, проходящего через обмотки электромагнита, задаётся регулируемым источником постоянного напряжения.

Градуировка электромагнита (связь между индукцией магнитного поля B в зазоре электромагнита и силой тока I в его обмотках) производится при помощи милливексметра.

При измерениях образцы поочерёдно подвешиваются к аналитическим весам так, что один конец образца оказывается в зазоре электромагнита, а другой — вне зазора, где индукцией магнитного поля можно пренебречь. При помощи аналитических весов определяется перегрузка $\Delta P = F$ — сила, действующая на образец со стороны магнитного поля.

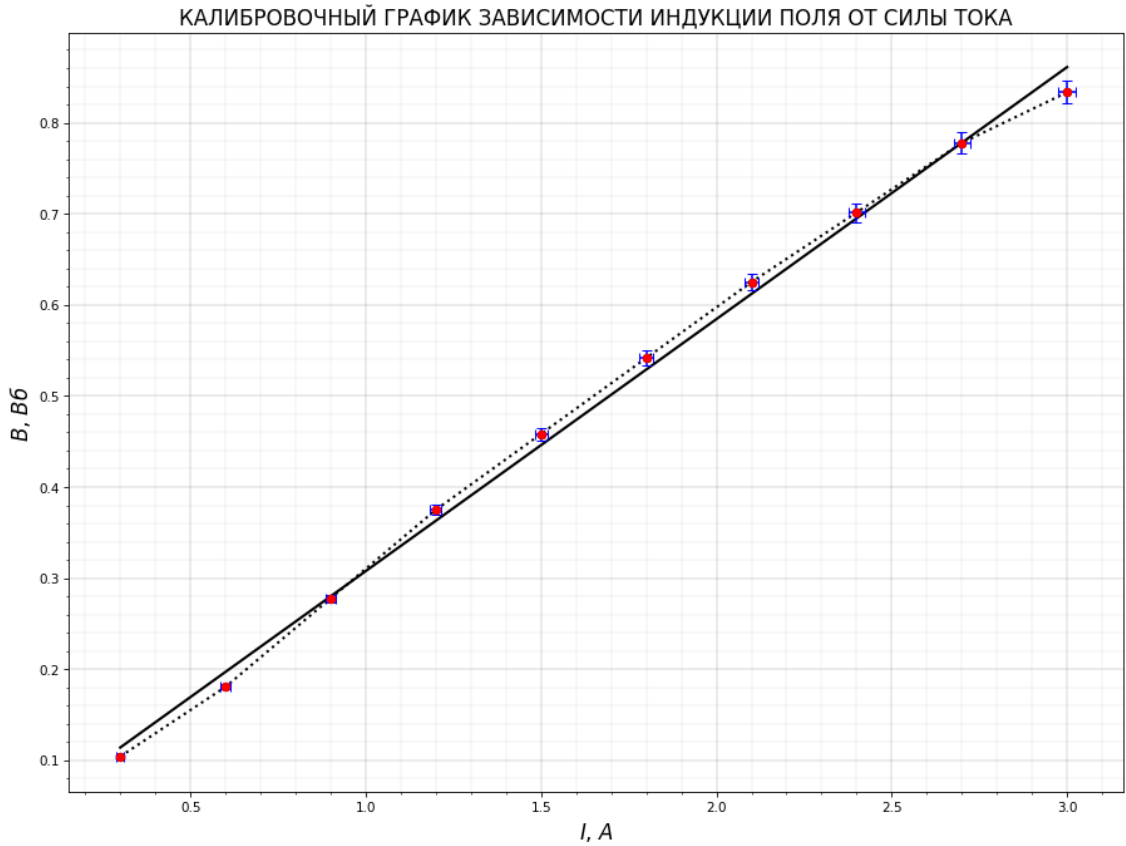
Силы, действующие на диа- и парамагнитные образцы, очень малы. Небольшие примеси ферромагнетиков (сотые доли процента железа или никеля) способны кардинально изменить результат опыта, поэтому образцы были специально отобраны.

Обработка данных: Сначала прокалибруем электромагнит, для этого с помощью милливексметра снимем зависимость магнитного потока Φ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока I . Таким образом найдём зависимость $B(I)$ ($\Phi = BSN$), где $SN = 72 \text{ см}^2$. Данные для калибровки представлены ниже в таблице:

Таблица 1: Данные для калибровки электромагнита

$I, \text{ A}$	$\Phi, \text{ мВб}$	$I, \text{ A}$	$\Phi, \text{ мВб}$
0,3	0,75	1,8	3,9
0,6	1,3	2,1	4,5
0,9	2	2,4	5,05
1,2	2,7	2,7	5,6
1,5	3,3	3,0	6

Внешнее сопротивление цепи равно $r_{\text{внеш}} = 5 \text{ Ом}$, при таком сопротивлении относительная погрешность измерения потока не превышает $\varepsilon_{\Phi} = 1,5\%$. Погрешность измерения силы тока не превышает $0,5\% + 2$ единицы младшего разряда ($0,01 \text{ А}$). По значениям из таблицы выше построим график зависимости $B(I)$.



$$k = (276,65 \pm 4,92) \text{ мВб/А}, \quad \varepsilon_k = 1,78\%$$

$$b = (31,01 \pm 4,24) \text{ мВб}, \quad \varepsilon_b = 13,69\%$$

Теперь, с помощью весов, измерим силу, действующую каждый из образцов, при различных значениях силы тока I в катушке (а следовательно и различных значениях индукции B). Причём снимем значения силы при увеличении силы тока, а затем при уменьшении, то есть идя в обратную сторону. Всего в работе использовались четыре образца из различных металлов. Данные по каждому из них представлены в таблицах ниже, абсолютная погрешность измерения диаметра образцов равна $\sigma_d = 0,1 \text{ мм}$.

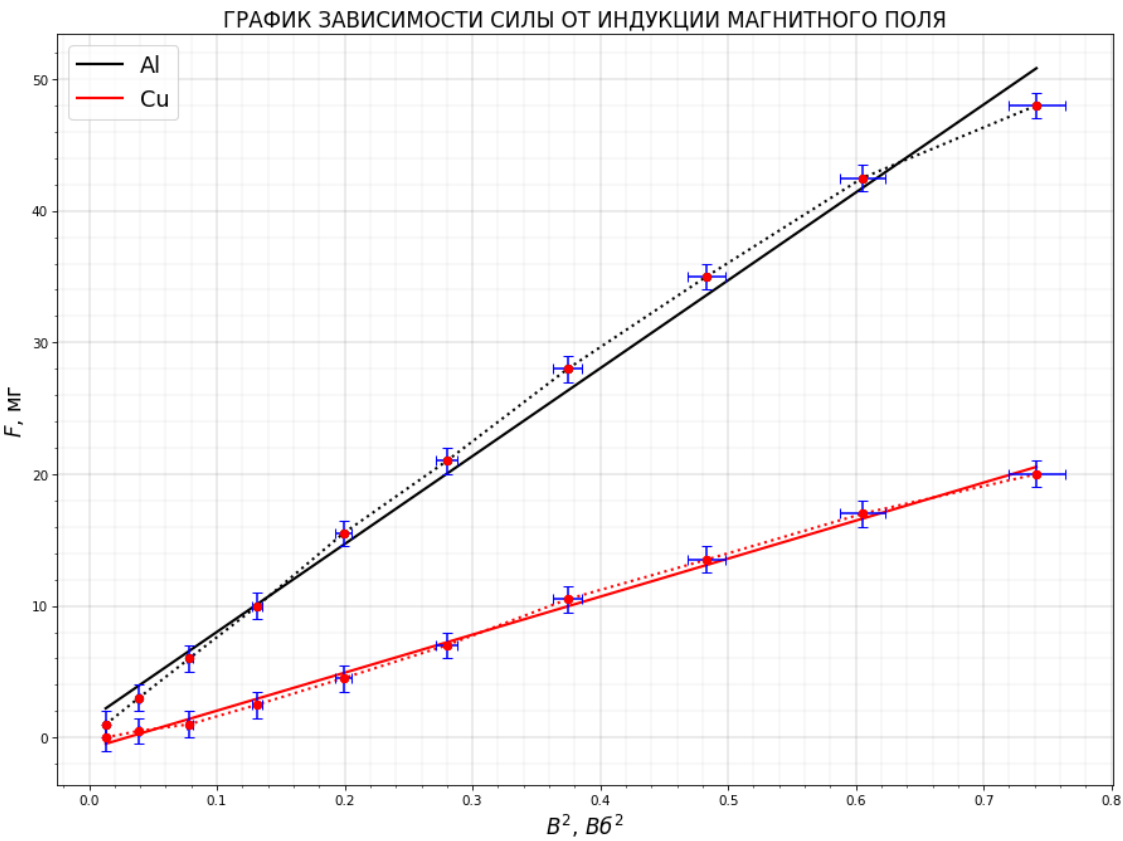
Таблица 2: Параметры образцов

	Образец			
$I, \text{ А}$	Al	Cu	C	W
$m, \text{ г}$	25,305	83353	11,859	13,843
$d, \text{ мм}$	10,0	10,0	10,0	3,1

Таблица 3: Данные для построения графиков зависимости

	Al, up	Al, down	Cu, up	Cu, down	C, up	C, down	W, up	W, down
I, A	$\Delta P, мГ$							
0,3	0	2	0	0	-14	-18	0	0
0,6	2	4	0	-1	-36	-44	0	0
0,9	5	7	0	-2	-68	-72	0	1
1,2	9	11	-2	-3	-96	-100	1	1
1,5	14	17	-4	-5	-122	-129	2	2
1,8	20	22	-6	-8	-149	-156	4	4
2,1	27	29	-10	-11	-176	-182	7	7
2,4	34	36	-12	-15	-199	-206	9	10
2,7	42	43	-16	-18	-221	-225	12	12
3,0	48	48	-19	-21	-239	-239	14	14

По данным из таблицы построим графики зависимости ΔP от B^2 , где значение ΔP берётся среднее арифметическое двух (вверх и вниз). Абсолютная погрешность измерения ΔP равна $\sigma_{\Delta P} = 1 \text{ мГ}$.



$$k_{Al} = (66,75 \pm 1,77) \text{ мГ/Тл}^2, \quad \varepsilon_k = 2,65\%$$

$$k_{Cu} = (28,87 \pm 0,56) \text{ мГ/Тл}^2, \quad \varepsilon_k = 1,93\%$$

Для меди и алюминия рассчитаем магнитную восприимчивость

$$\chi = 2k \cdot \frac{\mu_0}{S}$$

где S – площадь поперечного сечения образца $S = \pi d^2/4$, μ_0 – магнитная постоянная.

$$\chi_{Al} = (21,41 \pm 0,71) \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_\chi = 3,32\%$$

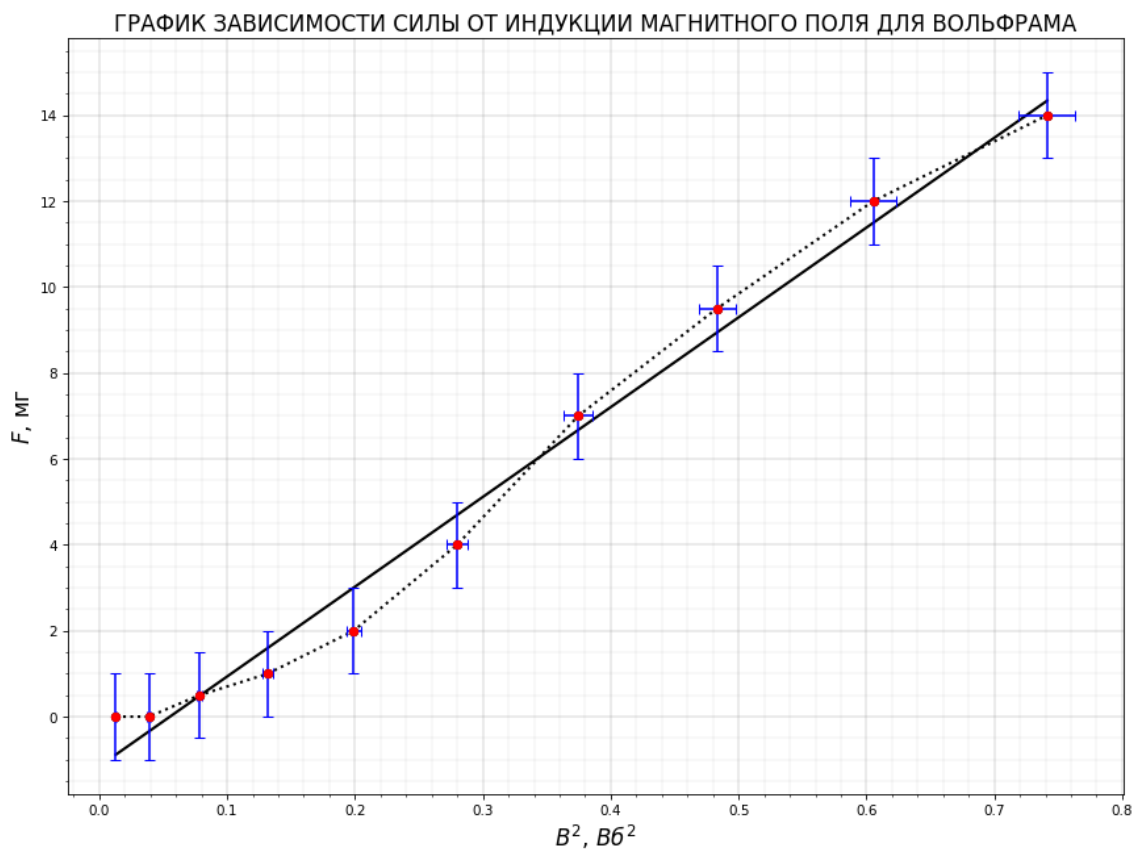
$$\chi_{Cu} = (-9,26 \pm 0,36) \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_\chi = 2,78\%$$

Относительная погрешность магнитной восприимчивости была найдена по формуле

$$\varepsilon_\chi^2 = \varepsilon_k^2 + 4\varepsilon_d^2$$

Сравним полученные значения с табличными: $\chi_{Al \text{ табл}} = 23 \cdot 10^{-6}$, полученное для алюминия значение отличается от табличного на $\sim 7\%$; $\chi_{Cu \text{ табл}} = -1 \cdot 10^{-5}$, для меди результат отличается от табличного также на $\sim 7\%$.

Далее построим аналогичные графики и рассчитаем магнитную восприимчивость для образцов из вольфрама и графита.

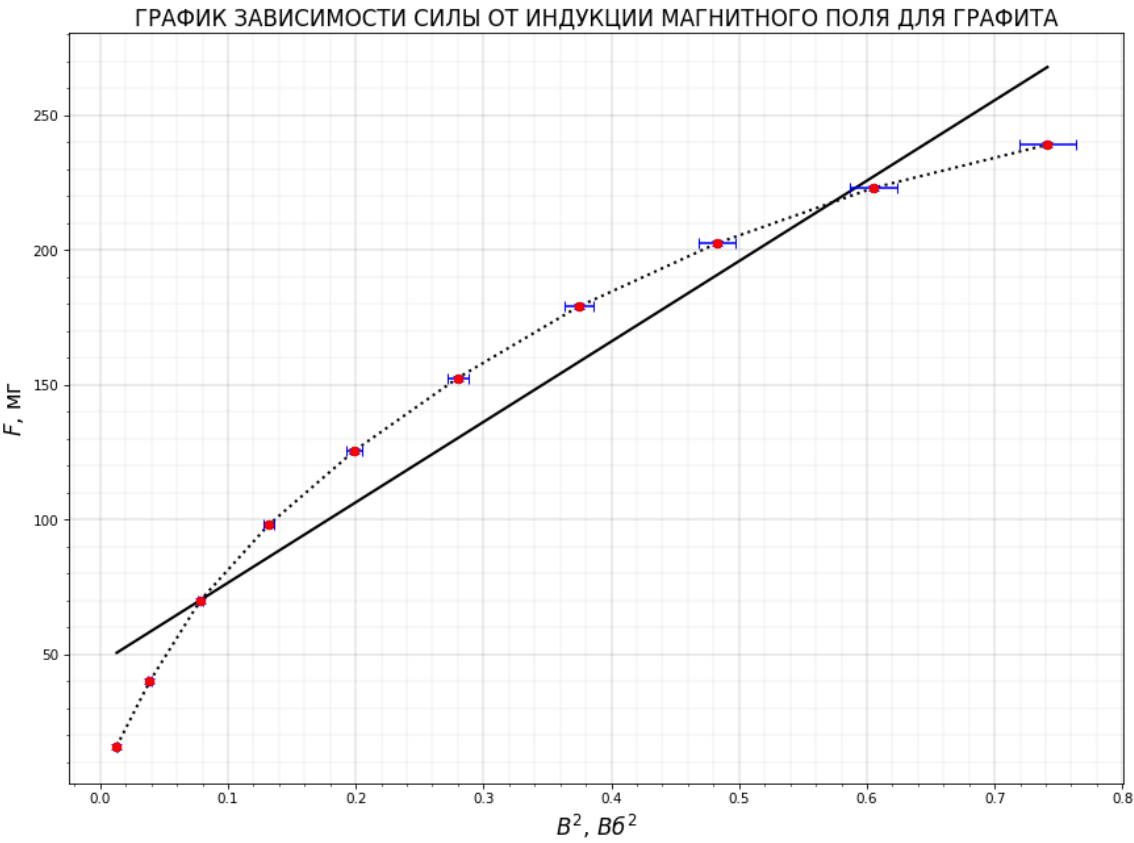


$$k_W = (20,90 \pm 0,79) \text{ мГ/Тл}^2, \quad \varepsilon_k = 3,78\%$$

$$\chi_W = (69,78 \pm 2,99) \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_\chi = 4,28\%$$

Табличное значение магнитной восприимчивости для вольфрама $\chi_{W \text{ табл}} = 55 \cdot 10^{-6}$, полученная на опыте величина отличается на $\sim 27\%$.

Далее найдём χ для материала последнего образца – графита.



$$k_C = (298,20 \pm 26,48) \text{ мг/Тл}^2, \quad \varepsilon_k = 8,88\%$$

$$\chi_C = (95,68 \pm 8,71) \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_\chi = 9,10\%$$

Табличное значение магнитной восприимчивости графита $\chi_{C \text{ табл}} = 85 \cdot 10^{-6}$ отличается от $\chi_{\text{эксп}}$ на $\sim 13\%$.

Занесём все результаты в таблицу и проанализируем их.

Таблица 4: Результаты вычислений

Материал	Алюминий	Медь	Вольфрам	Графит
$\chi_{\text{табл}} \cdot 10^6$	23,0	-9,26	55	85
$\chi_{\text{эксп}} \cdot 10^6$	21,41	-10	69,78	95,68
$\varepsilon_{\chi_{\text{эксп}}}, \%$	3,32	2,78	4,28	9,10
Различие, %	6,91	7,4	26,87	12,56

Вывод: В данной работе были исследованы пара- и диамагнитные свойства меди, алюминия, вольфрама и графита, а также были вычислены значения магнитной восприимчивости

для каждого из материалов. Результаты эксперимента неплохо совпали с теорией для алюминия и меди (отличие $\sim 7\%$), совпали хуже для графита ($\sim 13\%$) и гораздо хуже для вольфрама ($\sim 27\%$).