Algebra lineare in Python con NumPy

Programmazione di Applicazioni Data Intensive

Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche
DISI – Università di Bologna, Cesena

Proff. Gianluca Moro, Roberto Pasolini
`nome.cognome@unibo.it`

Outline

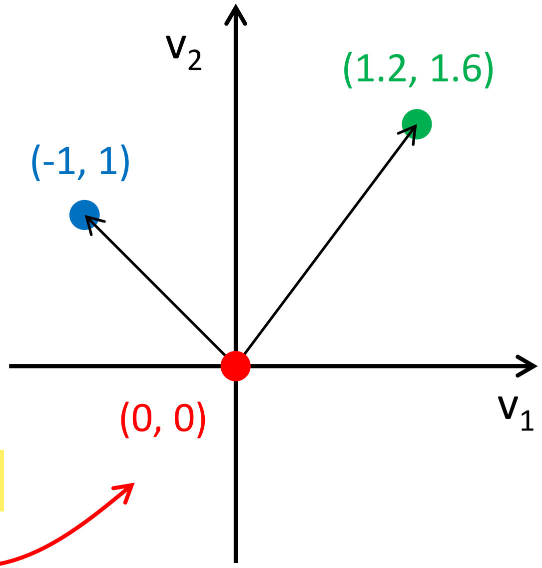
- Richiami di algebra lineare: vettori, matrici, operazioni di base
- Perché l’algebra lineare in data science, machine learning e deep learning?
- Introduzione a NumPy ed agli array
- Creazione di array
- Selezione di elementi dagli array
- Operazioni sugli array
- Funzionalità di algebra lineare

Richiami di Algebra Lineare: Vettori

- L'***algebra lineare*** studia vettori, matrici, spazi vettoriali, sistemi di equazioni lineari e trasformazioni lineari
- Un ***vettore*** è una tupla di *n* numeri (*componenti*) reali

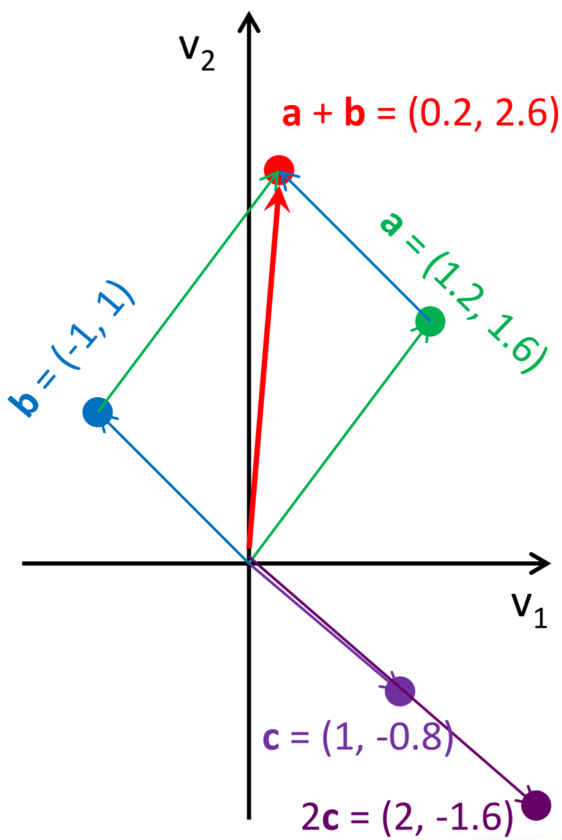
$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{es. } (12, 4.5, 2.1)$$

- Geometricamente le componenti di un vettore sono le coordinate di un punto in uno spazio *N*-dimensionale
  - nella figura sono visualizzati esempi di vettori a 2 valori in un piano 2D con origine in 0,0
  - direzione di **v** è data dalla retta passante per gli estremi, il verso dall'orientamento della freccia
  - Il vettore nullo ha tutte le componenti a 0
  - il modulo di **v** è la lunghezza, il vettore unitario ha modulo 1



Richiami di Algebra Lineare: Operazioni di Base sui Vettori

- La somma di due vettori di pari dimensioni è data dal vettore con le componenti sommate una ad una
  - es. (1.2, 1.6) + (-1, 1)
    = (1.2-1, 1.6+1)
    = (0.2, 2.6)



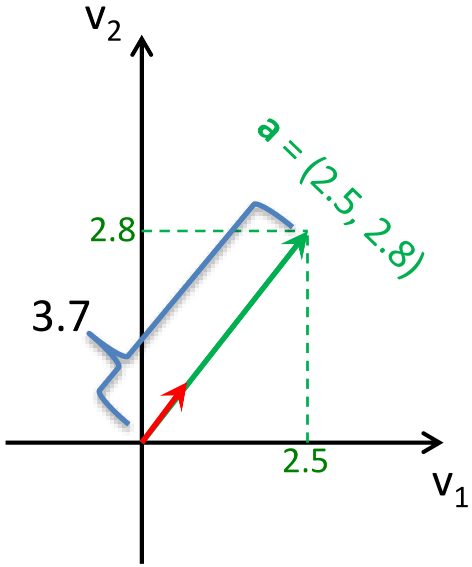
- Il prodotto tra uno *scalare* *x* (un numero singolo) ed un vettore è dato dal vettore con le componenti moltiplicate per *x*
  - es. 2 · (1, -0.8) = (2·1, -2·0.8) = (2, -1.6)
    -1 · (1, -0.8) = (-1, 0.8)

Norma Euclidea di un Vettore

- La norma euclidea di un vettore **a** (detta anche norma 2) è la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Sia la norma 2 (o norma euclidea) che il modulo di un vettore misurano la lunghezza del vettore



- e.g. $sia\ \ \mathbf{a} = (2.5,\ 2.8)$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt[2]{2.5^2 + 2.8^2} = 3.7$$

- la norma 2 è la lunghezza di **a** ed equivale ad applicare il teorema di Pitagora alle componenti
- con $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ si ottiene il vettore unitario di **a** che ha norma 1 (0.67, 0.75)

Richiami di Algebra Lineare: Prodotto Scalare tra due Vettori (i)

- Il *prodotto scalare* (*dot product*) tra due vettori a, b di dimensioni *n* è la somma dei prodotti delle rispettive coppie di componenti

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

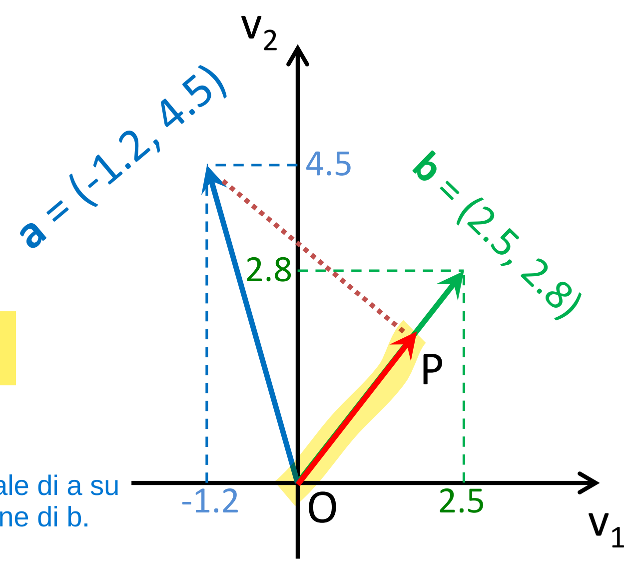
- e.g. **a** = (-1.2, 4.5), **b** = (2.5, 2.8),

  a·b =-1.2 x 2.5 + 4.5 x 2.8 = 9.6

- **a·b** geometricamente è indicatore della lunghezza della proiezione ortogonale OP di **a** su **b**

  Questa quantità è la lunghezza della proiezione ortogonale di a su b, chiamata anche componente scalare di a nella direzione di b.

  – minore è l'angolo tra loro, maggiore è la lunghezza della proiezione ortogonale



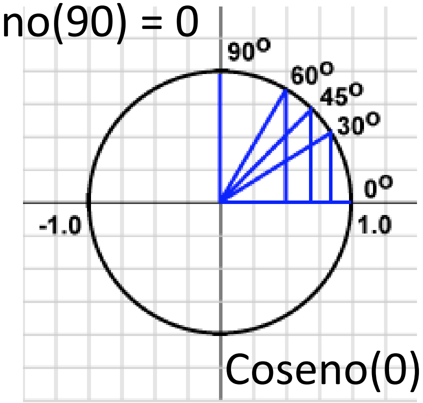
Richiami di Algebra Lineare: Prodotto Scalare tra due Vettori (ii)

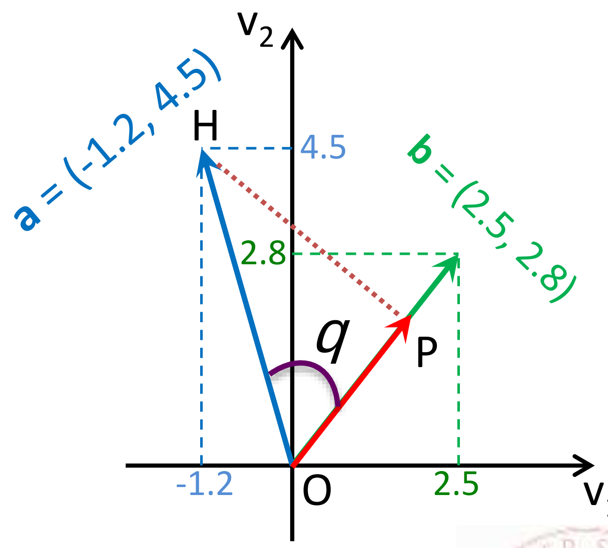
- **a·b** è indicatore della lunghezza della proiezione ortogonale OP di **a** su **b**, perché ?
- sia q l'angolo tra due vettori che formano un triangolo, dalla geometria sappiamo che $\mathrm{OP} = \mathrm{OH} \times \mathrm{coseno}(q)$
- cioè $\mathrm{OP} = \|\mathbf{a}\| \times \mathrm{coseno}(q)$
- ma il prodotto scalare tra i vettori a, b è

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \times \|\mathbf{b}\| \times \mathrm{coseno}(q) = \|\mathbf{b}\| \times \mathrm{OP}$$

- perciò **a·b** è la proiezione ortogonale di **a** su **b**, scalata rispetto alla lunghezza di **b**
- maggiore è il prodotto scalare, più due vettori sono simili

il prodotto scalare è massimo quando i due vettori puntano nella stessa direzione, e si riduce (fino a diventare negativo) man mano che si allontanano da quella direzione.



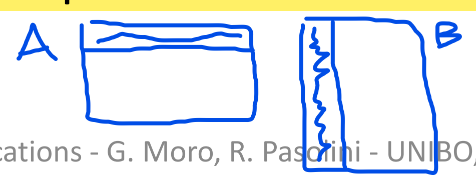


Richiami di Algebra Lineare: Matrici

- Una ***matrice*** *m*×*n* è una tabella di numeri reali con *m* righe e *n* colonne, e.g. 2x3

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \qquad \text{es.}: \begin{bmatrix} 2.1 & -4 & 2.4 \\ -3.2 & 1.1 & 5 \end{bmatrix}$$

  - Ogni riga ed ogni colonna è rappresentabile come un vettore
  - Una matrice con una sola riga (1×*n*) o una sola colonna (*m*×1) è detta rispettivamente *matrice riga* o *matrice colonna*
  - Una matrice è *nulla* se tutti gli elementi sono 0
  - La somma tra matrici di pari dimensioni ed il prodotto tra scalari e matrici avviene per singoli valori, come per i vettori operazioni note anche come *element wise operation*
- Il prodotto tra due matrici $A_{m,p}$ x $B_{p,n}$ è una matrice *mxn*
  - dove la cella *i,j* è data dal prodotto scalare tra il vettore riga *i* di A con il vettore colonna *j* di B



Perché Vettori e Matrici ?
I dati reali sono modellati con Vettori e Matrici

	Prod1	Prod2	Prod3	Prod4	Prod5
Carl	0	1	0	4	0
Mike	0	1	2	0	3
Jake	0	3	0	3	5
Tom	3	3	1	5	4

- Utenti x Prodotti
  - ogni riga è un vettore utente e le componenti > 0 sono i prodotti che ha acquistato (o recensito)
- Auto: ogni vettore è un'auto con le proprie caratteristiche
  - Costi di manutenzione dell'anno al tempo t
  - Costi di manutenzione dell'anno al tempo t + 1 VARIABILE DA PREDIRE
  - Costi di assicurazione, Costi di proprietà (bollo), Costi totali di rifornimento di carburante, etc. etc.
- Abitazioni: ogni vettore è un'abitazione con proprie variabili
  - mq, vetustà, quartiere, stanze, bagni, piano
  - prezzo di vendita VARIABILE DA PREDIRE

NumPy

- ***NumPy*** è una libreria Python di uso comune per la gestione di array ad *N* dimensioni e l'algebra lineare
- Molte operazioni sugli array usano la normale sintassi Python
  - indicizzazione con `[...]`, operatori `+`, `-`, `*`, ...
- Le operazioni con oggetti NumPy sono spesso 10+ volte più veloci rispetto all'uso di oggetti standard Python (es. liste)
- Array e funzioni di NumPy sono usati da molte altre librerie
- Tutte le funzionalità sono contenute nel package `numpy`, convenzionalmente importato col nome "`np`"

```
>>> import numpy as np
```

N-Dimensional Array

`ndarray`

- `ndarray` è un array a *N* dimensioni di valori dello stesso tipo
- Ogni `ndarray` ha come attributi fondamentali:
  - il tipo di valori che contiene
  - il numero di dimensioni e il numero di elementi lungo ogni dimensione
- I valori in un `ndarray` sono mutabili, ma **non** è possibile cambiare il tipo e il numero totale di valori
- NumPy supporta determinati tipi di valori, di cui sono comuni:
  - numeri reali a 8 byte (`np.float64`)
  - numeri interi a 8 byte (`np.int64`)
- Vettori e matrici sono rappresentati da array con valori numerici, rispettivamente a 1 e 2 dimensioni
  - si possono creare array a più di 2 dimensioni (noti anche come *tensori*)

Attributi dei `ndarray`

Gli attributi di un oggetto `ndarray` includono

- `ndim`: numero di dimensioni (dette anche *assi*)
  - ad es. 1 per i vettori e 2 per le matrici
- `shape`: *forma* dell'array, una tupla che indica il numero di valori lungo ciascuna dimensione
  - ad es. `(4, )` per un vettore con 4 elementi
    `(2, 3)` per una matrice 2×3 (2 righe e 3 colonne)
  - per qualsiasi array `x`: `len(x.shape) == x.ndim`
- `size`: numero totale di valori
  - pari al prodotto tra gli elementi di `shape`
- `dtype`: tipo dei valori contenuti

Creare un `ndarray`

- La funzione `array` crea un `ndarray` da una sequenza (es. lista)
- Il tipo dell'array è di default determinato dai valori contenuti
  - con soli numeri interi, il tipo è `int64` o `int32`
  - se almeno un numero è decimale, il tipo è `float64`
  - è possibile specificare un tipo con l'argomento opzionale `dtype`
  - il metodo `astype` restituisce una copia dell'array cambiando il dtype

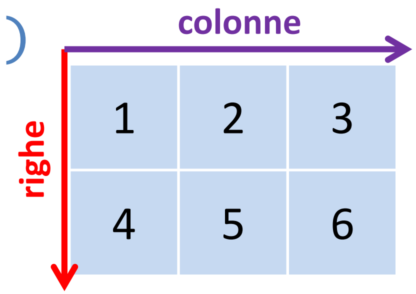
```
>>> x = np.array([1, 2.5, 5])
>>> x          # stampa i contenuti dell'array
array([ 1. ,  2.5,  5. ])
>>> x.dtype    # tipo di dati nell'array
dtype('float64')
>>> x.ndim     # numero di dimensioni
1
>>> x.shape    # numero di valori per dimensione
(3,)
```

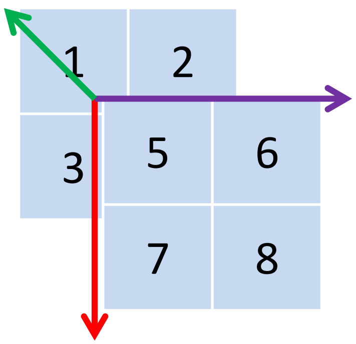
1	2.5	5

Creare un ndarray Multidimensionale

- Con liste innestate, si creano matrici e array a più dimensioni

```
>>> x = np.array([ [1, 2, 3], [4, 5, 6] ])
>>> x
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
>>> x.dtype    # tutti numeri int -> interi
dtype('int64')
>>> x.ndim, x.size
2, 6
>>> x.shape    # matrice 2x3
(2, 3)
>>> y = np.array([[[1,2], [3,4]], [[5,6], [7,8]]])
>>> y.shape
(2, 2, 2)
```





Array con Valori Costanti

- La funzione `full` crea un array di forma indicata con tutti i valori inizializzati a quello dato
  - è possibile specificare un `dtype`, se non indicato è dedotto dal valore

```
>>> np.full((3, ), 7)  # vettore di 3 valori tutti 7
array([7, 7, 7])
```

- Per valori 0 o 1 si possono usare le funzioni `zeros` e `ones`

```
>>> np.zeros((2, 3))   # matrice 2x3 di zeri
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
```

- La funzione `empty` crea un array di forma indicata senza inizializzarlo, lasciando dati “dirty” presenti in memoria
  - utilizzabile se **tutti** i valori saranno poi impostati manualmente

```
>>> data = np.empty((2, 3))
array([[ -1.72723371e-077,  -4.33230621e-311,   9.64734874e-315],
       [  4.89584003e-085,   4.89209922e-085,   4.80427054e-309]])
```

Vettori con Intervalli di Valori

- La funzione `arange` crea un vettore di numeri a intervalli regolari in modo analogo alla funzione `range` di Python

```
>>> np.arange(5)    # da 0 (implicito) a 5 escluso
array([0, 1, 2, 3, 4])
>>> np.arange(10, 20, 2.5) # da 10 a 20 escluso con passo 2,5
array([10. , 12.5, 15. , 17.5])
```

- La funzione `linspace` è simile, ma fa specificare la lunghezza desiderata del vettore piuttosto che l'incremento (cioè quanti elementi voglio di quel intervallo)

```
>>> np.linspace(0, 1, 4)    # 4 valori tra 0 e 1
array([0., 0.3333333, 0.6666667, 1.])
```

Crea una sequenza di num valori equidistanti in scala logaritmica tra start e stop.

- `geomspace` è simile a `linspace`, ma fa una progressione esponenziale invece che lineare (c'è anche `logspace`)

```
>>> np.geomspace(1, 1000, 4)
array([1., 10., 100., 1000.])
```

Qui ogni valore è 10 volte il precedente, allora progressione esponenziale.

Array con Valori Casuali

- `np.random` offre funzioni per generare array di valori casuali
- La funzione `seed` imposta il seed per le chiamate successive

```
>>> np.random.seed(42)
```

- `random` restituisce valori distribuiti uniformemente in [0, 1)

```
>>> np.random.random((2, 3))    # matrice casuale 2x3
array([[0.31637396, 0.5995927 , 0.19594632],
       [0.04312813, 0.84134461, 0.5603397 ]])
```

- `randint` restituisce valori interi tra a (incluso) e b (escluso)

```
>>> np.random.randint(1, 7, 3) # min 1, max 6, 3 valori
array([6, 1, 4])
```

- `binomial`, `normal`, `geometric` ...valori da varie distribuzioni
  - in queste funzioni è possibile specificare parametri (es. media e dev. standard per `normal`)

Accesso agli Elementi di un Array

- L'accesso ad elementi di un vettore funziona come per le liste
  - si può anche qui usare -*n* per accedere all'*n*-ultimo elemento

```
>>> x = np.array([10, 20, 30, 40, 50])
>>> x[1], x[-2]    # secondo e penultimo elemento
20, 40
```

- Per array a più dimensioni, va indicato un indice per ciascuna

```
>>> y = np.array([ [11, 12, 13], [21, 22, 23] ])
>>> y[0, 2]    # prima riga, terza colonna
13
```

	0	1	2
0	11	12	13
1	21	22	23

- Si può assegnare un valore ad un elemento

```
>>> y[0, 2] = 100
>>> y
array([[ 11,  12, 100],
       [ 21,  22,  23]])
```

Accesso a Intervalli di Vettori (*slicing*)

- Come per le liste, si possono estrarre intervalli di vettori

```
>>> x = np.array([10, 20, 30, 40, 50])
>>> y = x[2:4]
>>> y
array([30, 40])
```

- Si possono usare tutte le varianti di intervallo ammesse per le liste: indici negativi, inizio/fine impliciti e selezionare ogni N

```
>>> x[:3]     # primi 3 elementi
array([10, 20, 30])
>>> x[-3:]    # ultimi 3 elementi
array([30, 40, 50])
>>> x[1::2] # dal 2° ogni 2 elementi (indice dispari)
array([20, 40])
```

Viste degli Array

- Un array ottenuto selezionando un intervallo di *x* è una ***vista*** dell’array *x*, che condivide con esso la memoria usata
  - per questo qualsiasi modifica su uno ha effetto anche sull’altro
  - da una vista si può risalire all'array originale con l'attributo `base`
  - si può ottenere una copia indipendente dalla base col metodo `copy`

```
>>> x = np.array([10, 20, 30, 40, 50])
>>> y = x[2:4]
>>> y[1] = 100
>>> x                   →  array([10, 20, 30, 100, 50])
>>> y.base is x         →  True
```

- Altre operazioni (es. conversioni di tipo) per cui non è possibile creare una vista restituiscono già una copia
  - se si tratta di una copia, l'attributo `base` è `None`

Intervalli di Array Multidimensionali

- Gli intervalli si usano allo stesso modo in array a N dimensioni

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
>>> x[:2, 1:3]    # prime due righe, 2a e 3a colonna
array([[2, 3], [5, 6]])
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- "**:**" indica tutti gli indici lungo una dimensione

```
>>> x[:, :2]        # tutte le righe, prime 2 colonne
array([[1, 2], [4, 5], [7, 8]])
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- Gli elementi "**:**" più a destra si possono omettere

```
>>> x[-2:, :]       # ultime 2 righe (tutte le colonne)
array([[4, 5, 6], [7, 8, 9]])
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Vettori Riga e Colonna

- Se invece di un intervallo si seleziona un singolo indice di una dimensione, questa dimensione viene rimossa dall'array risultante
- Ad esempio, selezionando una singola riga o una singola colonna di una matrice (2D), otteniamo un vettore (1D)

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
>>> x.shape
(3, 3)
>>> x[:, 1]    # tutte le righe, seconda colonna
array([2, 5, 8])
>>> x[:, 1].shape    # è un vettore, non una matrice!
(3, )
>>> x[-1]    # ultima riga (tutte le colonne)
array([7, 8, 9])
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Selezione di Elementi con Lista di Indici

- Al posto di un indice singolo o un intervallo, è possibile passare una lista o un vettore di interi come indici

```
>>> x = np.array([ [1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8] ])
>>> x[:, [0, 2]]   # tutte le righe, colonne 0 e 2
array([[1, 3],
       [5, 7]])
```

1	2	3	4
5	6	7	8

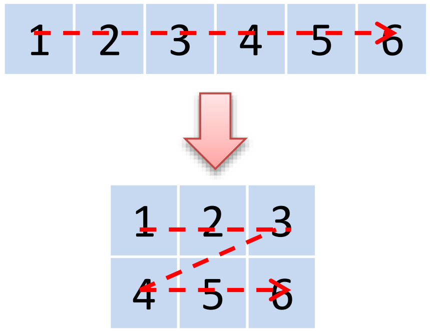
- Passando molteplici sequenze di *N* interi come indici otteniamo un vettore con *N* elementi selezionati
  - al contrario degli intervalli, questo metodo di selezione restituisce sempre array con copie dei dati

```
>>> x[[0, 1], [2, 3]]   # vettore [ x[0,2], x[1,3] ]
array([3, 8])
```

1	2	3	4
5	6	7	8

Cambiare la Forma di un Array (1)

- La forma di un array può essere cambiata in una che preveda lo stesso numero complessivo di elementi
- L'ordine dei valori rimane invariato iterando le dimensioni dalla prima (esterna) all'ultima (interna)
  - ad es. in matrici i valori sono letti riga per riga, colonna per colonna
- Il metodo `reshape` crea una matrice di forma diversa ma con gli stessi dati
  - `reshape` può restituire una vista o una copia in base alla contiguità o meno nella memoria fisica




```
>>> x = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
>>> x.reshape((2, 3))
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
```

Stesso numero di elementi, ma in 2 righe e 3 colonne

Cambiare la Forma di un Array (2)

- Nella tupla passata a `reshape` è possibile inserire un -1 (non più d'uno) per determinare automaticamente la lunghezza di un asse in base al numero totale di elementi

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3],
                  [4, 5, 6]])
>>> x.reshape((-1, 2))  →  array([[1, 2],
                                  [3, 4],
                                  [5, 6]])
```

x·2 = 2·3 = 6 → x=3

- Il metodo `ravel` riforma qualsiasi array ad un vettore 1D
  - se riesce a preservare la continguità in memoria non crea una copia
  - per forzare la creazione di una copia, usare invece `x.flatten()`
  - in pratica `x.ravel() == x.reshape((-1, ))`

```
>>> x.ravel()  →  array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
```

Conversione da Array ad Oggetti Python

strutture dati di python (list, tuple, set, dictionary)

- I `ndarray` possono essere trattati come collezioni Python
  - possono essere iterati con `for`, convertiti in liste o altri tipi, …
- Iterando un vettore, si ottengono i suoi valori in sequenza

```
>>> x = np.array([1, 2, 3])
>>> list(x)
[1, 2, 3]
```

un vettore (1D) è convertito in una lista di valori scalari (0D)

- Iterando una matrice, se ne ottengono le singole righe

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> list(x)
[array([1, 2, 3]), array([4, 5, 6])]
```

una matrice (2D) è convertita in una lista di vettori (1D)

  - si possono ottenere i singoli valori iterando su `x.flat`
- In generale: `list(x) == [x[0], x[1], …]`

Concatenazione di Array

- Si può usare `concatenate` per concatenare vettori tra loro

```
>>> np.concatenate([np.arange(3), np.arange(4)])
array([0, 1, 2, 0, 1, 2, 3])
```

- Se si concatenano matrici, si può specificare lungo quale dimensione vanno concatenate (default = 0, righe)

```
>>> a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
>>> b = np.array([[5, 6], [7, 8]])
```

1	2
3	4

5	6
7	8

```
>>> np.concatenate([a, b])
array([[1, 2], [3, 4], [5, 6], [7, 8]])
```

1	2
3	4
5	6
7	8

```
>>> np.concatenate([a, b], 1)
array([[1, 2, 5, 6], [3, 4, 7, 8]])
```

1	2	5	6
3	4	7	8

Operazioni tra Componenti di Array

- Le operazioni aritmetiche tra numeri (+, -, *, ...) sono definite anche tra ndarray
- Operazioni tra array di pari forma son sempre eseguite elemento per elemento
  - es. con x e y array e z=x+y si ha z[i]==x[i]+y[i] per ogni indice i
  - lo stesso vale per -, *, /, ...
- Con l'operatore + si esegue quindi la somma canonica tra vettori o tra matrici

```
>>> x = np.array([[1, 2],
                  [3, 4]])
>>> y = np.array([[2, 3],
                  [4, 5]])
>>> x + y
array([[3, 5],
       [7, 9]])
>>> x * y
array([[ 2,  6],
       [12, 20]])
```

Operazioni tra Array e Scalari

- Le stesse operazioni base si possono anche applicare tra un `ndarray` ed un valore singolo (*scalare*)
- In questo caso, si ottiene un array della stessa forma di quello usato, col risultato dell'operazione applicata a ciascun elemento
- Con l'operatore `*` si ottiene quindi il prodotto canonico tra scalare e vettore

```
>>> x = np.array([[1, 2],
                  [4, 8]])
>>> x ** 2 # potenza di 2
array([[ 1,  4],
       [16, 64]])
>>> 1 / x
array([[1.   , 0.5  ],
       [0.25 , 0.125]])
```

Array Binari e Booleani

- Esistono diversi casi in cui si usano vettori e matrici *binari* in cui tutti i valori sono 0 o 1
  - ad es. nell'e-commerce possiamo codificare un ordine con un vettore di 1 e 0 per ogni prodotto acquistato e non tra quelli esistenti
  - per indicare un'opzione tra *N* possibili è comune usare un vettore binario con *N* elementi di cui uno solo è 1 (detto vettore *one-hot*)
- Possono essere rappresentati in NumPy da array di tipo `bool`
  - gli 1 sono rappresentati come `True` e gli 0 come `False`

```
x = np.array([True, False, True, False])
```

- Con `astype`, si può convertire tra valori `bool` e `int`
  - `astype` restituisce sempre una copia dell'array

```
>>> x.astype(np.int)  →  array([1, 0, 1, 0])
```

Selezione di Elementi con Array Booleani

- Usando un array di `bool` come indice di un array *x*, si ottiene una copia di *x* con i soli elementi corrispondenti a valori `True`

```
>>> x =      np.array([   -1,      2,      3,     -4])
>>> flags = np.array([ True, False,  True, False])
>>> x[flags]    # estraggo da x valori True in flags
array([-1, 3])
```

- Un array di `bool` può essere ottenuto dagli stessi array, in modo da selezionare elementi che soddisfino una condizione

```
>>> x > 0       # quali valori di x sono positivi?
array([False,  True,  True, False])
>>> x[x > 0]    # estraggo da x i valori positivi
array([2, 3])
```

Operatori su Array Booleani

- Gli array booleani supportano gli operatori &, |, ^ e ~ per calcolare AND, OR, XOR e NOT elemento per elemento
  - si possono applicare anche ad array di interi per operazioni bit a bit

```
>>> np.array([False, True]) & np.array([True, True])
array([False,  True])
>>> ~np.array([True, True, False])
array([False, False,  True])
```

- Si possono usare per selezionare valori di array componendo diverse condizioni

```
>>> x = np.array([21, 13, 8, 18, 25, 14])
>>> x[(x >= 10) & (x <= 20)]  # elementi tra 10 e 20
array([13, 18, 14])
```

In espressioni come questa **le condizioni devono essere scritte tra parentesi** per applicare la corretta precedenza tra gli operatori

Operazioni tra Array di Forme Diverse

- Applicando un'operazione tra due array di forma diversa, NumPy tenta di conformarli per eseguirla (*broadcasting*)

1. Se gli array hanno un numero di dimensioni diverse allora a quello che ne ha meno aggiunge dimensioni di lunghezza 1
   - es. un vettore con *n* elementi è conformabile ad una matrice 1×*n*
2. Per ciascuna dimensione, se ha lunghezza 1 in un array e *n* nell'altro, i valori del primo sono ripetuti *n* volte
   - es. una matrice 1×*n*, per essere sommata ad una *m*×*n*, è convertita anch'essa ad una *m*×*n* copiando *m* volte la stessa riga di *n* elementi

- Se gli array non sono conformabili secondo queste regole allora l'operazione produce errore

Esempio di Broadcasting

- Ad esempio, come è calcolata la somma tra questi array?

```
>>> a = np.array([10, 20, 30])                # 3
>>> b = np.array([ [1, 2, 3], [4, 5, 6] ])    # 2x3
```

1 • Ad a è aggiunta una dimensione per conformità con b
  - da vettore con 3 elementi a matrice 1×3

2 • a e b hanno rispettivamente 1 e 2 righe → l'unica riga di a è replicata 2 volte

- a e b hanno entrambe 3 colonne → nessuna ulteriore azione è necessaria

```
>>> a + b
array([[11, 22, 33],
       [14, 25, 36]])
```

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 14 & 25 & 36 \end{bmatrix}$$

1

Aggiungere una Dimensione ad un Array

- Di un array si può ottenere una vista "espansa" con una dimensione aggiunta (o più d'una), mantenendone inalterati i valori
  - ad esempio un vettore (1D) può essere trasformato in una matrice (2D) con una singola riga o una singola colonna
  - questo può essere utile in operazioni tra array di forma diversa se il broadcasting non da il risultato voluto
- Per far ciò, usiamo la selezione ad intervalli aggiungendo None in corrispondenza della dimensione da aggiungere

```
>>> x = np.array([1,2,3])
>>> x[None, :]
array([[1, 2, 3]])
>>> x[:, None]
array([[1],
       [2],
       [3]])
```

aggiungo la prima dimensione (righe) -> ottengo una matrice riga 1x3

aggiungo la seconda dimensione (colonne) -> ottengo una matrice colonna 3x1

Esempio di Operazione su Array Espansi

- Sia dato il vettore `x = np.array([1, 2, 3])`
- Come ottenere una matrice 3x3 **A** dove ogni elemento $a_{i,j}$ è il prodotto tra l'*i*-esimo e il *j*-esimo elemento di **x** ?
- Moltiplico **x** espanso a matrice riga (1x3) per **x** espanso a matrice colonna (3x1)

```
>>> x[None, :] * x[:, None]
array([[1, 2, 3],
       [2, 4, 6],
       [3, 6, 9]])
```

- Lo stesso principio si può applicare su qualsiasi operazione, anche su due vettori differenti

$$\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

broadcasting a matrici 3x3

$$= \begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$$

Funzioni Universali

- Le *funzioni universali* di NumPy applicano una funzione a tutti gli elementi di uno o più array
  - le funzioni unarie includono `abs` (valore assoluto), `sqrt` (radice quadrata), `log` (logaritmo), `floor` (arrotondamento per difetto), …
  - le funzioni binarie includono `maximum` (elemento maggiore tra i due array element-wise), `minimum` (elemento minore tra i due array), …
    - se gli array hanno forme diverse, si applica il broadcasting

```
>>> np.abs(np.array([-1, 2, -3, 4]))
array([1, 2, 3, 4])
>>> np.maximum(np.array([[4, 3], [2, 1]]),
               np.array([[1, 2], [3, 4]]))
array([[4, 3],
       [3, 4]])
```

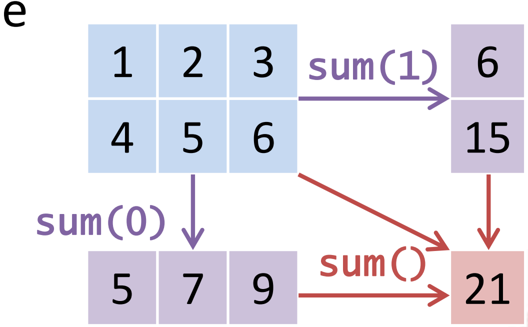
Funzioni Aggregate

- `ndarray` offre diversi metodi per ottenere statistiche aggregate dai valori dell'array: `min`, `max`, `sum`, `mean`, …
- Senza specificare argomenti, tutti i valori dell'array sono aggregati insieme in un unico valore scalare

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> x.sum()      # somma di tutti i valori
21
```

- In alternativa, si può aggregare lungo una dimensione
  - nelle matrici, 0 aggrega le righe e 1 le colonne

```
>>> x.sum(0) # somma delle righe
array([5, 7, 9])
>>> x.sum(1) # somma delle colonne
array([6, 15])
```



Lista di Funzioni Aggregate Comuni

- `sum` / `prod` / `mean` = somma / prodotto / media dei valori
- `cumsum` / `cumprod` = somma / prodotto cumulativi
  - es. cumsum([1, 2, 3]) = [1, 1+2, 1+2+3] = [1, 3, 6]
- `var` / `std` = varianza / deviazione standard
  - di default sulla popolazione (denominatore N), per la stima su un campione (denominatore N-1) specificare parametro `ddof=1`
- `min` / `max` = valore minimo / massimo
- `argmin` / `argmax` = indice del valore minimo / massimo
  - es. argmax([23, 8, 64, 12, 53, 23]) = 2
- `all` / `any` = `True` se tutti / almeno un elemento sono `True`
  - si ricordi che in Python sono `True` tutti i numeri diversi da 0

Ordinamento dei Valori di un Vettore

- La funzione `sort` applicata su un array ne restituisce uno nuovo con i valori in ordine crescente

```
>>> x = np.array([32, 8, 2, 4, 16, 64, 1])
>>> np.sort(x)
array([ 1,  2,  4,  8, 16, 32, 64])
```

- Il metodo `sort` riordina i valori di un vettore modificando il vettore stesso ("in place")
- Il metodo `argsort` restituisce gli indici dell'array (da 0 a N-1) ordinati secondo l'ordine crescente dei valori in esso
  - per qualsiasi vettore `x` si ha `x[x.argsort()] == np.sort(x)`

```
>>> x.argsort()
array([6, 2, 3, 1, 4, 0, 5])
```

significa che l'elemento più piccolo dell'array è quello di indice 6, il secondo più piccolo è quello di indice 2 e così via

Algebra Lineare in NumPy

- Abbiamo visto come creare array per rappresentare vettori e matrici e come eseguire semplici operazioni su di essi
  - lettura / modifica di elementi singoli o multipli
  - applicazione di operazioni o funzioni su ciascun elemento
  - calcolo di statistiche (minimo, massimo, media, …)
- Abbiamo visto come svolgere operazioni di base tra vettori e matrici con gli operatori standard Python
  - la somma tra vettori o matrici di pari dimensioni `a` e `b` è data da `a+b`
  - il prodotto tra un vettore o matrice `a` e uno scalare `c` è dato da `c*a`
  - NB: il prodotto tra vettori o tra matrici è diverso! (lo vedremo a breve)
- Nel seguito vediamo operazioni più avanzate, come si svolgono in NumPy e come si possono usare nella pratica

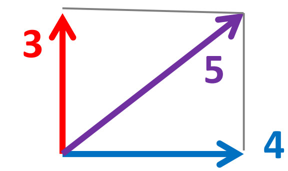
Norma di un Vettore

- La norma *euclidea* (o norma 2) di un vettore indica intuitivamente la sua "lunghezza"

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

- In NumPy si ottiene con la funzione `norm` del modulo `linalg`

```
>>> x = np.array([4, 3])
>>> np.linalg.norm(x)  →  5.0
```



$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- Passando una matrice `X`, di default viene calcolata la *norma di Frobenius*, equivalente alla norma di `X.flatten()`
- In alternativa, indicando `axis=0` o `axis=1`, il risultato è un vettore con le norme euclidee di ciascuna colonna o riga

```
>>> X = np.array([[ 4,  3],
                  [ 5, 12]])
>>> np.linalg.norm(X, axis=1)  →  array([5, 13])
```

Vettori Unitari e Normalizzazione

- Un *vettore unitario* (*versore*) è un vettore con norma 1
- Qualsiasi vettore non nullo può essere diviso per la sua norma per ottenerne uno *normalizzato* con norma 1
- Intuitivamente, con la normalizzazione si estrae la "direzione" di un vettore, eliminando l'informazione sulla lunghezza
  - ciò è utile ad esempio nell'analisi di testi, come vedremo
- In NumPy non c'è una funzione apposita, ma si può creare...

```
>>> def normalize(v):    # si assume v non sia nullo!
...     return v / np.linalg.norm(v)
>>> normalize(np.array([4, 3]))
array([0.8, 0.6])
>>> np.linalg.norm(normalize(np.array([4, 3])))
1.0
```

Prodotto Scalare tra Vettori

- Il *prodotto scalare* (*dot product*), definito tra vettori di pari lunghezza, è pari alla somma dei prodotti tra le componenti corrispondenti dei due vettori
  - in termini NumPy: `(a*b).sum()`

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

- In NumPy, si può eseguire indifferentemente tramite la funzione `dot`, il metodo `dot` degli `ndarray` o l'operatore `@`

```
>>> x = np.array([1, 2, 3])
>>> y = np.array([4, 2, 1])
>>> np.dot(x, y)  →  11
>>> x.dot(y)      →  11
>>> x @ y         →  11
```

$$[1 \quad 2 \quad 3] \cdot [4 \quad 2 \quad 1] = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$$

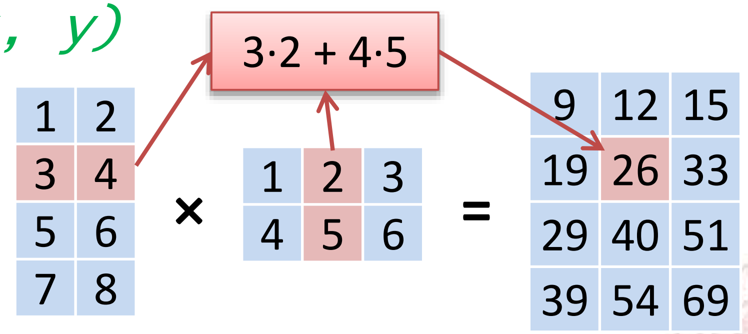
Prodotto tra Matrici

- Sia **A** una matrice *n×m* e **B** una matrice *m×p*
  - le colonne di **A** devono essere quante le righe di **B**

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

- Il prodotto **AB** è la matrice *n×p* in cui ciascun elemento *i, j* è il prodotto scalare tra la riga *i* di **A** e la colonna *j* di **B**
  - per il prodotto tra matrici **non** vale la proprietà commutativa (**AB ≠ BA**)
- In NumPy, si esegue anch'esso con `dot` o con `@`

```
>>> x = np.array([[1, 2], [3, 4], [5, 6], [7, 8]])
>>> y = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> x.dot(y) # oppure np.dot(x, y)
array([[ 9, 12, 15],
       [19, 26, 33],
       [29, 40, 51],
       [39, 54, 69]])
```



Un Esempio Pratico …

- Molti problemi pratici possono essere risolti rappresentando i dati in forma di matrici ed usando operazioni come il prodotto
- ***Esempio:*** tre aziende P_1, P_2, P_3 hanno bisogno di comprare prodotti nelle quantità indicate nella tabella a fianco…

	roll	bun	cake	bread
P_1	6	5	3	1
P_2	3	6	2	2
P_3	3	4	3	1

- …nelle vicinanze esistono due fornitori S_1, S_2 che vendono questi articoli, ai prezzi indicati nella tabella a fianco…

	S_1	S_2
roll	1.50	1.00
bun	2.00	2.50
cake	5.00	4.50
bread	16.00	17.00

- …qual è la spesa minima di ciascuna azienda, assumendo che ciascuna acquisti tutti i suoi prodotti dallo stesso fornitore?
- Di solito scriveremmo un programma che ottiene la spesa totale per ogni azienda presso ogni fornitore tramite cicli for

Soluzione “Classica” in Python

```
# DATI
P1 = {"roll": 6, "bun": 5, "cake": 3, "bread": 1}
P2 = {"roll": 3, "bun": 6, "cake": 2, "bread": 2}
P3 = {"roll": 3, "bun": 4, "cake": 3, "bread": 1}
S1 = {"roll": 1.5, "bun": 2, "cake": 5, "bread": 16}
S2 = {"roll": 1, "bun": 2.5, "cake": 4.5, "bread": 17}
# SOLUZIONE
result = [] # minimi per azienda
for needs in [P1, P2, P3]:
    min_cost = None
    for supplier in [S1, S2]:
        cost = 0
        for item, count in needs.items():
            cost += count * supplier[item]
        if min_cost is None or cost < min_cost:
            min_cost = cost # salva prezzo minore
    result.append(min_cost) # aggiorna risultati
```

per prodotto

per fornitore

per azienda

Soluzione in Python basata su *Comprehensions*

```python
# DATI
P1 = {"roll": 6, "bun": 5, "cake": 3, "bread": 1}
P2 = {"roll": 3, "bun": 6, "cake": 2, "bread": 2}
P3 = {"roll": 3, "bun": 4, "cake": 3, "bread": 1}
S1 = {"roll": 1.5, "bun": 2, "cake": 5, "bread": 16}
S2 = {"roll": 1, "bun": 2.5, "cake": 4.5, "bread": 17}
# SOLUZIONE (istruzione singola!)
result = [
    min(
        sum(
            count * supplier[item]
            for item, count in needs.items()
        ) for supplier in [S1, S2]
    ) for needs in [P1, P2, P3]
]
```

per prodotto

per fornitore

per azienda

Soluzione con Calcolo di Matrici in NumPy

- Definendo una matrice **Q** con le quantità di prodotti richiesti e una matrice **P** dei prezzi unitari dei prodotti…

3 aziende × 4 prodotti

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 2 & 2.5 \\ 5 & 4.5 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$$

4 prodotti × 2 fornitori

- … la spesa di un'azienda da un forniore è il prodotto scalare tra la riga delle quantità in **Q** e la colonna dei prezzi in **P**
- Possiamo quindi calcolare il prodotto tra **Q** e **P** con tutti i totali e selezionare quello minimo da ogni riga (azienda)

$$\mathbf{R} = \mathbf{QP} = \begin{bmatrix} 50 & \boxed{49} \\ \boxed{58.5} & 61 \\ 43.5 & \boxed{43.5} \end{bmatrix}$$

3 aziende × 2 fornitori

- In NumPy, una volta definite **Q** e **P**, basta quindi scrivere:

```
result = (Q @ P).min(1)
```

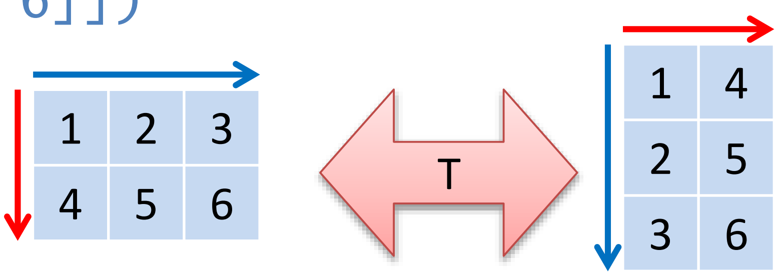
Matrici Trasposte

- Data una matrice **A** $m \times n$, la sua *trasposta* $\mathbf{A}^T$ è la matrice $n \times m$ in cui righe e colonne sono scambiate
- Per le matrici trasposte si verificano le proprietà:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T \qquad\qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

- In NumPy, la trasposta di una matrice è data dall'attributo `T`
  - `T` è una vista sull'array d'origine, non una copia

```
>>> x = np.array([[1, 2, 3],
                  [4, 5, 6]])
>>> x.T
array([[1, 4],
       [2, 5],
       [3, 6]])
```



Matrici Quadrate

- Una matrice si dice *quadrata* se ha tante righe quante colonne
  - il numero di righe e colonne è detto *ordine* della matrice
- Una matrice quadrata **A** è
  - *simmetrica* se è uguale alla sua trasposta ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

es.:

1	-2	3
-2	5	4
3	4	6

  - *antisimmetrica* se è uguale all'opposto della sua trasposta ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$)

es.:

1	2	-3
-2	5	-4
3	4	6

Matrici Diagonali

- La *diagonale principale* di una matrice quadrata è il vettore degli elementi lungo la diagonale da 1,1 a *n*,*n*
- Una matrice quadrata è *diagonale* se tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono 0
- Con la funzione `diag` si può
  - estrarre la diagonale di una matrice quadrata
  - creare una matrice diagonale da un vettore con i valori della diagonale

```
>>> x = np.array(
  [[1, 2, 3],
   [4, 5, 6]
   [7, 8, 9]])
>>> np.diag(x)
array([1, 5, 9])
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(alternativa: `x.diagonal()`)

```
>>> np.diag([1, 2, 3])
array([[1, 0, 0],
       [0, 2, 0],
       [0, 0, 3]])
```

1	0	0
0	2	0
0	0	3

Matrice Identità

- La matrice *identità* di ordine *n*, indicata con $\mathbf{I}_n$, è la matrice diagonale $n \times n$ con tutti gli elementi della diagonale pari ad 1

$$\text{es.}: \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice identità costituisce l'elemento neutro della moltiplicazione tra matrici

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \quad \text{per qualsiasi matrice } m \times n \ \mathbf{A}$$

- Una matrice identità si può creare in NumPy con le funzioni `identity` oppure `eye`, indicando l'ordine della matrice

```
>>> np.eye(3)    # matrice identità di ordine 3
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

Matrici Inverse

- Una matrice quadrata *n×n* **A** è *invertibile* se esiste una matrice *inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ di pari dimensioni tale che $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$
- Una matrice quadrata *non* invertibile è detta *singolare*
- Per matrici invertibili valgono le proprietà:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1} \qquad (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

- Per l'inversa in NumPy, usare la funzione `inv` di `linalg`

```
>>> x=np.array([[1, 2],
                [3, 4]])
>>> np.linalg.inv(x)
array([[-2. ,  1. ],
       [ 1.5, -0.5]])
>>> x.dot(np.linalg.inv(x))
array([[1.0000000e+00, 0.0000000e+00],
       [8.8817842e-16, 1.0000000e+00]])
```

Non si ottiene esattamente $\mathbf{I}_2$ *(ma una sua buona approssimazione) per perdite di precisione durante il calcolo*

Sistemi di Equazioni Lineari in Forma di Matrici

- Un sistema di *m* equazioni lineari in *n* incognite può essere scritto in forma di matrici come **A x = b**

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

  - con **A** matrice *m*×*n*, **b** matrice *m*×1 e **x** matrice *n*×1
- Se la matrice **A** è quadrata (*m*=*n*) e invertibile, i valori delle incognite possono essere trovati tramite calcolo tra matrici:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- In NumPy diventa:

```
>>> x = np.linalg.inv(A).dot(b)
```

- … oppure tramite l’apposita funzione `solve`:

```
>>> x = np.linalg.solve(A, b)
```

Risoluzione di Sistemi Lineari con NumPy: Esempio

- **Quesito:** In un totale di 7 monete da 5 e 10 centesimi il cui valore è 55 centesimi, quante sono le monete dei due tagli ?
- **Sistema di equazioni**
  - sia *x* = num. monete da 5 centesimi e *y* = num. monete da 10

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 5x + 10y = 55 \end{cases}$$

- **Risoluzione in NumPy**

```
>>> A = np.array([ [1, 1], [5, 10] ])
>>> b = np.array([7, 55])
>>> np.linalg.solve(A, b)
array([3., 4.])
```

x = 3 monete da 5c
y = 4 monete da 10c