Richiami di Algebra Lineare

Sia n un numero intero positivo. Sia R^n l'insieme delle n-uple di numeri reali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Esiste una corrispondenza biunivoca fra le n-uple di numeri reali e i vettori a n componenti reali, cioè

$$\text{(n-uple)} \Leftrightarrow \text{vettori}$$

Si suole perciò indicare con R^n anche l'insieme dei vettori ad n componenti reali.

$$x \in R^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si definiscano in R^n le operazioni di addizione tra due vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

$$x \in R^n, y \in R^n \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ .. \\ \ldots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ .. \\ \ldots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in R$$

Si dimostra facilmente che esse godono delle seguenti proprietà.

1. L'addizione tra vettori è commutativa ed associativa.

2. L'elemento $0 \in R^n$, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle, detto vettore zero o vettore nullo è tale che $v+0=v \ \forall \ v \in R^n$;

3. $0 \cdot v=0$, $1 \cdot v=v$, essendo rispettivamente 0 ed 1 rispettivamente lo zero e l'unità di R..

4. Per ogni elemento $v \in R^n$ esiste il suo opposto $-v$ in R^n tale che $v+(-v)=0$;

5. valgono le seguenti proprietà distributive:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x, y \in R^n, \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n, \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta$$

6. vale la seguente proprietà associativa:

$$\forall\ \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

L' insieme R^n in cui sono definite queste due operazioni è munito di una struttura di spazio vettoriale sul campo R.

R^n è solo un esempio di spazio vettoriale. Un altro importante esempio di spazio vettoriale è Π_n, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad n sull'intervallo [a,b] su cui sono definite le analoghe operazioni di somma tra due polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

Ritorniamo per semplicità a parlare di R^n.

Dati k vettori, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in R^n$ e k scalari $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k \in R$, la quantità

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k$$

si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$

Definizione di lineare indipendenza: *I vettori* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k = 0$$

solo per $\lambda_i = 0$ $\quad i=1,2,..,k$, cioè se nessuno di essi può essere ottenuto come combinazione lineare degli altri.

In R^n il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è *n*, cioè la dimensione dello spazio.
Una n-upla di vettori linearmente indipendenti costituisce una base per R^n, cioè un sistema di vettori generatori di R^n,

Un esempio di base di R^n è la base canonica. Essa è formata dai vettori:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad \qquad \text{i=1,...n}$$

Quando scriviamo un vettore in genere lo pensiamo rappresentato nella base canonica

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori della base canonica, oltre a essere linearmente indipendenti, possiedono un'ulteriore proprietà: l'ortogonalità. Per definirla è necessario introdurre il concetto di prodotto scalare.
Definiamo il prodotto scalare canonico su R^n, (che è stato munito di struttura di spazio vettoriale)

Definizione: Siano $x, y \in R^n$, il loro prodotto scalare canonico è definito come:

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Per indicare il prodotto scalare canonico tra due vettori si può utilizzare anche la notazione equivalente $x^T y$

Esempio:

Siano $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, il loro prodotto scalare canonico è dato da:

$$x \cdot y := 3 \cdot (-2) + 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = -6 + 2 - 3 = -7$$

In generale, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale R^n è un'applicazione da $R^n \times R^n$ a R che gode delle seguenti proprietà:

Proprietà

1) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R^n$

2) $x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x \cdot y_1 + \lambda_2 x \cdot y_2 \quad \forall x, y_1, y_2 \in R^n, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$

3) $x \cdot x > 0 \quad se \quad x \neq 0$

Definizione di vettori ortogonali. *Due vettori* $x, y \in R^n$ *si dicono* *ortogonali* *rispetto al prodotto scalare* introdotto *se* $x \cdot y = 0$, *o equivalentemente se* $< x, y >= 0$.

$x^T \cdot y$

Matrici

Siano m ed n due interi positivi. Si definisce matrice (mxn) una tabella di m righe e n colonne di elementi reali o complessi del tipo:

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Poiché la tabella è costituita da m righe ed n colonne si dice che la matrice ha dimensioni m ed n, cioè è una matrice $m \times n$. Possiamo pensarla come n *vettori*, detti vettori colonna, di dimensione m ciascuno.

Una matrice $m \times 1$ coincide con un vettore colonna appartenente ad R^m; una matrice 1xm coincide con un vettore riga (o trasposto di un vettore colonna) di dimensione m.

Se $m=n$ la matrice è quadrata di dimensione n.

L'insieme delle matrici $m \times n$, in genere si indica con $M(m \times n)$

Operazioni tra matrici:

Somma tra matrici

Siano $A, B \in M(m \times n)$ *si definisce matrice somma la matrice* $C \in M(mxn)$ *definita come segue:*

$$C = A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \quad i = 1, \dots m, \ j = 1, \dots, n$$

Somma dei coeff.
in stessa posizione

Prodotto di uno scalare per una matrice

Siano $A \in M(m \times n)$, $\lambda \in R$ *si definisce*

$$\lambda \cdot A = \left[\lambda \cdot a_{ij}\right] \quad i = 1, \dots m \quad j = 1, \dots, n$$

Prodotto per ogni
coeff. con lo scalare

$M(m \times n)$ è così munito della struttura di spazio vettoriale.

Prodotto tra matrici

Siano $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$, *si definisce matrice prodotto la matrice* $C \in M(m \times n)$ *definita come segue:*

$$C = A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \right] \quad i = 1, \ldots m, \quad j = 1, \ldots, n$$

Prodotto riga per colonna, sommando i risultati

cioè la matrice C= A·B ha come elemento [i j] il prodotto scalare della riga i-esima di A per la j-esima colonna di B.

Esempio

0*1+2*0+(-1)*1 = -1

$$\underbrace{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underbrace{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underbrace{C}_{2\times 2} = A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota bene:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Non vale in generale la proprietà commutativa.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

L'elemento neutro dell'operazione prodotto tra matrice è la matrice identità:

$$I_{nxn} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ldots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se $A \in M(n \times n)$ $\qquad I \cdot A = A \cdot I$

Definizione di prodotto matrice vettore: *Data la matrice* $A \in M(m \times n)$ *ed il vettore* $x \in R^n$, *si definisce prodotto matrice vettore il vettore Ax di* R^m *che ha come i-esima componente il prodotto scalare tra la riga i-esima della matrice A ed il vettore x, cioè*

$$Ax = = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

In modo equivalente *Ax* si può definire come il vettore ottenuto dalla combinazione lineare delle colonne di *A* con i coefficienti dati dagli elementi di *x*, cioè indicate con $\underline{a}_i$, *i=1,..,n* le colonne di *A*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}_i$$

Somma Coeff. di A

Osservazione:

Dati due vettori $x, y \in R^n$ il prodotto scalare canonico può essere visto anche come:

$$x^T y = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = y^T x$$

(matrice riga per matrice colonna)

Attenzione: Il prodotto $x \; y^T$ dà come risultato una matrice *n*×*n*, che prende il nome di *matrice diade.*

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad \dots \quad y_n] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & \dots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

Definizione di matrice inversa: *Si definisce matrice inversa di una matrice* $A \in M(nxn)$*, una matrice* $A^{-1} \in M(nxn)$ *tale che:*

$$A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

Definizione di rango di una matrice: *Si definisce rango di una matrice il numero di vettori colonna linearmente indipendenti di A*.

Esempio: Una matrice diade ha rango 1.

Teorema: *Una matrice* $A \in M(n \times n)$ *si dice invertibile, cioè ammette inversa* $A^{-1} \in M(n \times n)$, *se e solo se è a rango massimo,* cioè *se ha n colonne tutte linearmente indipendenti*.

Definizione di Matrice Trasposta:

Sia $A \in M(m \times n)$, *si definisce matrice trasposta di A e si indica con* $A^T \in M(n \times m)$, *la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A, cioè*

$$\boldsymbol{A^T = [a_{ji}] \quad i = 1, .. n \; j = 1, .., m}$$

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Proprietà della trasposizione di matrici.

Se $A, B \in M(m \times n)$, *si ha*

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Se $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$ *si ha che*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Se $A \in M(n \times n)$ *si ha che*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

cioè l'operazione di trasposizione può essere scambiata con quella di inversione.

Definizione di matrice simmetrica $A \in M(m \times n)$ *si dice simmetrica se* $A^T = A$, *cioè se coincide con la sua trasposta.*

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \quad \text{è} \quad \textit{simmetrica}$$

Definizione di matrice diagonale. *Una matrice* $A \in M(n \times n)$ *si dice diagonale se*

$$a_{ij} = 0 \quad per\ i \neq j$$

Si può esprimere nel seguente modo:

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Si definisce matrice inversa di una matrice diagonale, la matrice

$$A^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \qquad \lambda_i \neq 0 \quad i = 1, \ldots n$$

Definizione di matrice a diagonale dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale dominante se*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots n$$

Ogni elemento sulla diagonale é maggiore o uguale alla somma di tutti gli elementi della propria riga

Definizione di matrice a diagonale strettamente dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale strettamente dominante se*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots n$$

Ogni elemento sulla diagonale é maggiore alla somma di tutti gli elementi della propria riga

***Definizione di matrice ortogonale*.**

Una matrice $A \in M(nxn)$ *è ortogonale se è invertibile e la sua inversa coincide con la sua trasposta:*

$$Q^{-1} = Q^T$$

Proprietà delle matrici ortogonali:

- Il prodotto di matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

- Le matrici ortogonali preservano il prodotto scalare canonico e quindi la norma 2 di vettori. Infatti, ricordando che

$$\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x^T x}$$

si ha

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{< Qx, Qx >} = \sqrt{x^T Q^T Qx} = \sqrt{x^T Q^{-1} Qx} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2$$

Definizione di matrice simmetrica definita positiva.

Una matrice $A \in M(n \times n)$ simmetrica è definita positiva se

$$A = A^T \; e \quad x^T Ax > 0 \qquad \forall \; x \neq 0$$

Proprietà delle matrici definite positive:

Se due matrici A e B sono definite positive ed il loro prodotto commuta, cioè AB=BA, allora il loro prodotto è ancora una matrice definita positiva.

Se una matrice simmetrica ha elementi diagonali positivi ed è a diagonale dominante, allora è definita positiva.

Definizione di matrice simmetrica semidefinita positiva.

Una matrice $A \in M(n \times n)$ simmetrica è semidefinita positiva se

$$A = A^T \; e \quad x^T Ax \geq 0 \qquad \forall \; x \neq 0$$

Autovalori ed autovettori

Sia $A \in C^{nxn}$, il numero $\lambda \in C$, reale o complesso, è detto **autovalore** di A se esiste un vettore $x \in C^n$, $x \neq 0$, tale che valga la relazione

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

Allora il vettore x è detto **autovettore** di A corrispondente all'autovalore λ.

L'insieme degli autovalori di una matrice A costituisce lo ***spettro*** di A e l'autovalore di A di modulo massimo è detto ***raggio spettrale*** e si indica con ρ(A).

Il sistema (1) può essere riscritto nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0 . \qquad (2)$$

Per il teorema fondamentale dei sisitemi lineari esso ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0 ,$$

cioè se

$$\det(A - \lambda I) = P_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 , \qquad (3)$$

in cui

$$a_0 = (-1)^n$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} tr(A) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad e \quad a_n = \det(A) .$$

Il polinomio $P_n(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* di A e l'equazione $P(\lambda)=0$ è detta *equazione caratteristica* di A.

Gli autovalori di A sono tutti e soli i valori che annullano $P_n(\lambda)$, cioè le radici di $P_n(\lambda)$.
Poiché un polinomio di grado n ammette sempre n radici reali o complesse, distinte o coincidenti, una matrice *nxn* ha sempre n autovalori, non necessariamente distinti.

Dalle relazioni che legano i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica risulta che

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) \quad e \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A).$$

Gli autovettori corrispondenti agli auto valori di A sono le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo (2). Quindi un autovettore corrispondente ad un autovalore λ risulta determinato a meno di una costante moltiplicativa $\alpha \neq 0$, cioè se x è un autovettore di A anche αx è un autovettore di A corrispondente allo stesso autovalore.

Esempio1:

Il polinomio caratteristico della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

si ricava dal determinante

$$\underline{\det(A - \lambda I)} = \det \begin{bmatrix} 1-\underline{\lambda} & 3 \\ 3 & 1-\underline{\lambda} \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

L'equazione caratteristica corrispondente

$$\underline{\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0}$$

ha come radici λ_1=-2 e λ_2=4 che sono gli autovalori della matrice A.

autovettore

L'~~autovalore~~ corrispondente all'autovalore λ_1=-2 si calcola risolvendo il sistema (2) che in questo caso diventa

i Coeff. sono ricavati
sostituendo lambda
con autovalore

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dalla prima equazione di ottiene $x_1+x_2=0$ da cui $x_1=-x_2$

Da cui segue che qualunque vettore

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

autovettore

Con $\alpha \neq 0$ è un autovettore di A corrispondente a λ_1.

Proprietà degli autovalori

- Gli autovalori di una matrice diagonale o triangolare sono uguali agli elementi diagonali.
- Se λ è un autovalore di una matrice A non singolare e x un autovettore corrispondente, allora risulta
  1. $\lambda \neq 0$
  2. $1/\lambda$ è autovalore di A^{-1} con x autovettore corrispondente. Infatti dalla (1) si ha

$$x = \lambda A^{-1} x$$

e quindi

$$\lambda \neq 0 \quad e \quad A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x \, .$$

- Per il raggio spettrale di A vale $|\rho(\lambda)| \leq \|A\|$

  Infatti abbiamo $\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

  perciò vale $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq \|A\|$

- Se λ è un autovalore di una matrice A, allora esso è anche autovalore di A^T. Infatti, poiché

$$\det A^T = \det A,$$

si ha

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I).$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A ortogonale, cioè tale che $A^T = A^{-1}$, allora risulta $|\lambda| = 1$. Infatti dalla relazione (1) si ha

$$(Ax)^T = (\lambda x)^T$$

e quindi

$$x^T A^T = \lambda x^T,$$

da cui si ha

$$x^T A^T A x = \lambda \lambda x^T x.$$

Poiché A è ortogonale, $A^T A = I$ e quindi si ha

$$x^T x = \lambda^2 x^T x.$$

Essendo $x^T x \neq 0$, segue che

$$\lambda^2 = 1, \quad e \quad quindi \quad |\lambda| = 1.$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A, allora λ^k è anche autovalore di A^k.

  Infatti dalla relazione $Ax = \lambda x$ si ottiene

$$A^k x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k\,volte} x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k-1\,volte} \lambda x = \underbrace{A \cdot A \ldots \cdot A}_{k-2\,volte} \lambda^2 x = .. = \lambda^k x$$

Autovalori di matrici speciali:

Le matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali.

Le matrici simmetriche definite positive hanno tutti gli autovalori reali e positivi.

Matrici Simili

Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine, si dice che B è simile ad A, o che B è ottenuta da A mediante una **trasformazione di similitudine** se esiste una matrice quadrata non singolare T tale che

$$B = T^{-1} A T$$

Si osserva che la similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza, cioè

- A è simile ad A
- Se A è simile a B $\Rightarrow$ B è simile ad A
- Se A è simile a B e B è simile a C $\Rightarrow$ A è simile a C

<u>Proprietà di matrici simili:</u>

- Due matrici simili hanno lo stesso spettro, cioè gli stessi autovalori. Inoltre hanno gli autovettori legati tra loro dalla matrice di similitudine T. Infatti è facile verificare che se (λ, x) è una coppia autovalore-autovettore di A allora (λ, $T^{-1}x$) lo è di $B=T^{-1}BT$.

  Se λ è autovalore di A ed x è il relativo autovettore vale

  $$Ax = \lambda x$$

  Sia ora $y= T^{-1}x$ allora si ha

  $$By = T^{-1}ATT^{-1}x = T^{-1}Ax = T^{-1}\lambda x = \lambda y$$

  da cui

  $$By = \lambda y$$

  cioè A e B hanno gli stessi autovalori e autovettori legati dalla matrice di similitudine.

- Due matrici simili A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioè

  $$P_A(\lambda)=P_B(\lambda)$$

  e quindi hanno gli stessi autovalori.

Infatti si ha

$$
\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) = \det\left[(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T)\right] = \det\left[(T^{-1}(A-\lambda I)T)\right] \\
&= \det(T^{-1})\det(A-\lambda I)\det(T) = \det(A-\lambda I)\det(T^{-1}T) \\
&= \det(A-\lambda I) = P_A(\lambda)
\end{aligned}
$$