Polinomio di Taylor di una funzione bivariata

Sia $f(x,y): R^2 \to R$ una funzione derivabile n volte in un intervallo $I \subset R^2$ contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Il polinomio di Taylor di ordine $n, P_n(x,y)$, di $f(x,y)$ centrato in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$

rappresenta il polinomio bivariato di grado n che meglio approssima $f(x,y)$in un intorno di P_0 :

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{i!\,j!} \frac{\partial^{i+j} f(x_0,y_o)}{\partial x^i\, \partial y^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

$$i + j \leq n$$

A differenza del Polinomio di Taylor ad una variabile, bisogna fare le derivate parziali per x e y

$\boldsymbol{n = 1}$

$$P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Rappresenta il piano che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e rappresenta il piano tangente alla superficie in $P_0 = (x_0, y_0)$:

$\boldsymbol{n = 2}$

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]$$

Rappresenta il polinomio di grado 2 bivariato che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$

$\boldsymbol{n = 3}$

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\ \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)\right.$$

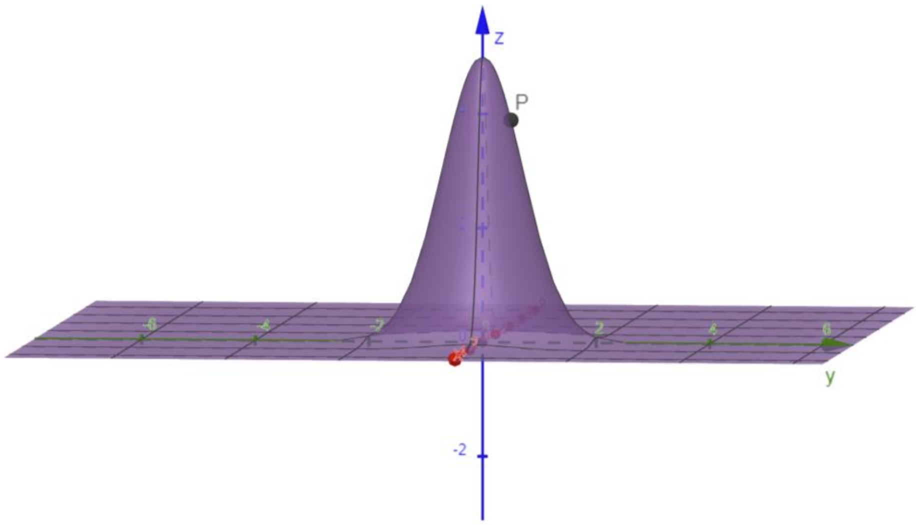
$$\left. +3(x-x_0)\ \ (y-y_0)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\ \ \partial y^2}(x_0,y_0) + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\right]$$

Rappresenta il polinomio di grado 3 bivariato che meglio approssima la funzione bivariata in un intorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$

Esempio:

$$f(x,y) = 5e^{-x^2-y^2}$$

Sia $P \equiv (0,0.5)$



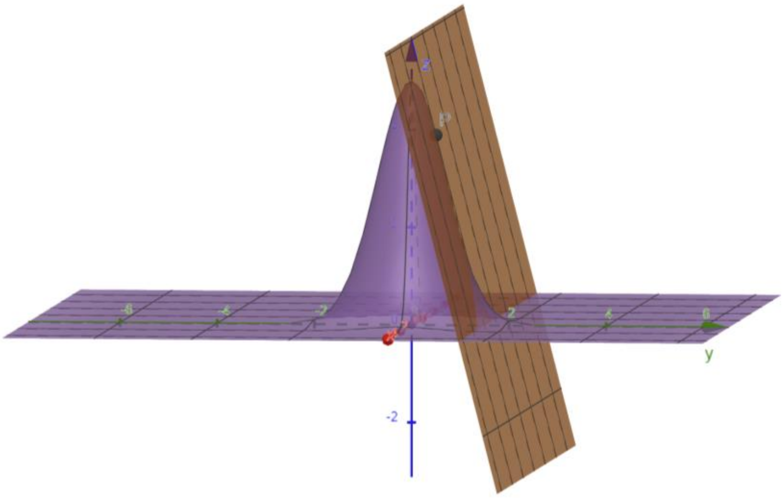
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10xe^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -10ye^{-x^2-y^2}$$

Il polinomio bivariato di grado 1 che meglio approssima la funzione in un intorno di questo punto ha equazione:

$$P_1(x,y) = f\left(x_0,y_0\right) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right) + \left(y-y_0\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$$

$$P_1(x,y) = f(P) + (x-0)\cdot\left(-10\cdot 0\cdot e^{-0^2-0.5^2}\right) + (y-0.5)\cdot(-10\cdot 0.5\cdot e^{-0^2-0.5^2})$$



Calcoliamo adesso il polinomio di Taylor di grado n=2

$$P_2(x,y) = f\left(x_0, y_0\right) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \left(y - y_0\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) +$$

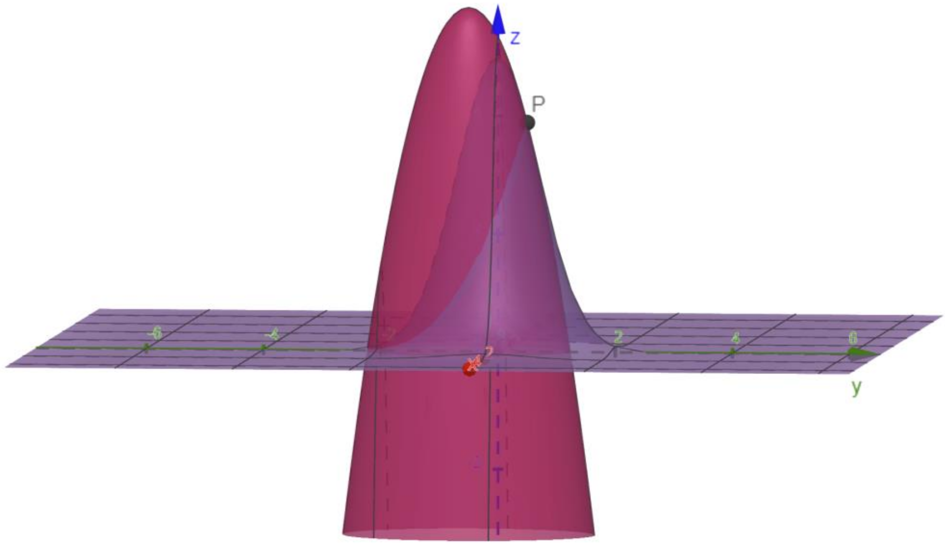
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]$$

Valutiamo le derivate seconde parziali

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = -10e^{-x^2-y^2} + 20x^2e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = -10e^{-x^2-y^2} + 20y^2e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = 20xye^{-x^2-y^2}$$


z
P
y