

Operazioni di macchina tra  
numeri macchina

L'insieme dei Numeri di Macchina (o Insieme Floating Point) è definito come l'insieme dei numeri reali esattamente rappresentabili con quel calcolatore.

$$F(\beta, t, L, U) = \{0\} \cup \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \alpha = \text{sign}(\alpha) 0.a_1 a_2 \dots a_t \beta^p = \text{sign}(\alpha) \left( \sum_{i=1}^t a_i \beta^{-i} \right) \beta^p \right\}$$

Base di rappresentazione  $\beta$

t cifre per la mantissa

Esponenti minimi e massimi L e U ( $L < 0$ ,  $U > 0$ )

$$fl(\alpha) \in F(\beta, t, L, U) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ \pm m_t \beta^p & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$m_t = a_1 \beta^{-1} + a_2 \beta^{-2} + \dots + \tilde{a}_t \beta^{-t} \quad \text{con } a_1 \neq 0.$$

o equivalentemente:

$$fl(\alpha) = \pm 0.a_1 a_2 \dots \tilde{a}_t \beta^p.$$

dove

- nel caso di troncamento  $\tilde{a}_t = a_t$ ;

nel caso di arrotondamento (usato se  $\beta$  è pari) :

$$\tilde{a}_t = \begin{cases} a_t & \text{se } a_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ a_t + 1 & \text{se } a_{t+1} \geq \frac{\beta}{2} \end{cases} ;$$

$$\frac{|\alpha - fl(\alpha)|}{|\alpha|} \leq \begin{cases} \beta^{1-t} & (\text{ caso di troncamento}) \\ \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \textcolor{red}{u} & (\text{ caso di arrotondamento}) \end{cases}$$

$$|\varepsilon| \leq u \quad \text{e} \quad fl(\alpha) = \alpha(1 + \varepsilon)$$

In doppia precisione  $t=53$  corrisponde ad avere circa 16 cifre decimali significative,

$$\text{infatti } u = \frac{1}{2}2^{-52} = 2^{-53} \cong 10^{-16}$$

Errore relativo della somma finita tra due numeri di macchina e la somma calcolata in aritmetica reale:

Assumiamo  $x, y \in R$ , ma  $x, y \notin F$ .

Pertanto,  $x$  e  $y$  devono innanzitutto essere arrotondati in  $F$ :

$$x \rightarrow fl(x) = x(1 + \epsilon_x) \in F, \quad y \rightarrow fl(y) = y(1 + \epsilon_y) \in F,$$

$$fl(fl(x) \oplus fl(y)) = [x(1 + \epsilon_x) + y(1 + \epsilon_y)](1 + \epsilon_s) \quad |\epsilon_x| \leq u, |\epsilon_y| \leq u, |\epsilon_s| \leq u,$$

$$\left| \frac{x + y - fl(fl(x) + fl(y))}{x + y} \right| \approx \left| \frac{x}{x + y} \epsilon_x + \frac{y}{x + y} \epsilon_y + \epsilon_s \right| \leq \left| \frac{x}{x + y} \right| u + \left| \frac{y}{x + y} \right| u + u$$

**Se  $x$  e  $y$  hanno lo stesso segno** allora  $\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$  e  $\left| \frac{y}{x+y} \right| \leq 1$  e di conseguenza

$$\left| \frac{x + y - fl(fl(x) + fl(y))}{x + y} \right| \leq 3u$$

**Se  $x$  e  $y$  non hanno lo stesso segno e sono vicini in modulo** allora  $\left| \frac{x}{x+y} \right|$  e  $\left| \frac{y}{x+y} \right|$  possono crescere in maniera incontrollata e rappresentare dei fattori di amplificazione degli errori di arrotondamento e quindi portano ad avere un errore relativo elevato.

**NB.** Se  $x$  e  $y$  sono rappresentabili esattamente in  $F$ , e quindi  $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ , allora la situazione non è pericolosa numericamente.

Errore relativo del prodotto in aritmetica finita tra due numeri di macchina ed il prodotto calcolato in aritmetica reale:

Assumiamo  $x, y \in R$ , ma  $x, y \notin F$ .

Pertanto,  $x$  e  $y$  devono innanzitutto essere arrotondati in  $F$ :

$$x \rightarrow fl(x) = x(1 + \epsilon_x) \in F, \quad y \rightarrow fl(y) = y(1 + \epsilon_y) \in F,$$

$$fl(fl(x) \otimes fl(y)) = [x(1 + \epsilon_x) \cdot y(1 + \epsilon_y)](1 + \epsilon_p) \qquad |\epsilon_x| \leq u, |\epsilon_y| \leq u, |\epsilon_p| \leq u,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x \cdot y - fl(fl(x) \otimes fl(y))}{x \cdot y} \right| &= \frac{|x \cdot y(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_p) - xy|}{|xy|} = \\ &= |(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_p) - 1| = \\ &= |\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_p + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_p + \epsilon_y\epsilon_p + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_p| \\ &\approx |\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_p| \leq |\epsilon_x| + |\epsilon_y| + |\epsilon_p| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{x \cdot y - fl(fl(x) \otimes fl(y))}{x \cdot y} \right| \leq 3u$$

Quindi qualunque siano i numeri  $x, y \in R$ , da cui si parte, l'errore relativo sul prodotto è sempre minore o uguale a  $3u$ .

La **somma algebrica macchina** (addizione e sottrazione) tra due numeri  $x, y \in F(\beta, t, L, U)$  richiede le seguenti fasi:

1. Si scala la mantissa del numero con l'esponente minore in modo tale che i due addendi abbiano lo stesso esponente (ovvero quello dell'esponente maggiore);
2. Si esegue la somma tra le mantisse;
3. Si normalizza il risultato aggiustando l'esponente in modo tale che la mantissa sia un numero minore di 1.
4. Si arrotonda (o si tronca) la mantissa alle prime  $t$  cifre;

Consideriamo per esempio i numeri  $x, y \in F(10, 5, L, U)$

$$x = 0.78546 \cdot 10^2, y = 0.61332 \cdot 10^{-1}$$

e calcoliamo il numero macchina  $x \oplus y$

1. Scaliamo  $y$  in maniera tale che abbia la stessa parte esponente di  $x$   
 $y = 0.61332 \cdot 10^{-1} \cdot (10^{-2}) \cdot (10^2) = 0.00061332 \cdot 10^2$
2. Sommiamo le mantisse:  $0.78546 \cdot 10^2 + 0.00061332 \cdot 10^2 = 0.78607332 \cdot 10^2$
3. Il risultato in questo caso è già normalizzato.
4.  $fl(0.78607332 \cdot 10^2) = 0.78607 \cdot 10^2$

Consideriamo per esempio la differenza tra i due numeri

$$x = 0.75869 \cdot 10^2, y = 0.75868 \cdot 10^2$$

esattamente rappresentabili nell'insieme  $F(10, 5, L, U)$

$$fl(x - y) = fl(0.75869 \cdot 10^2 - 0.75868 \cdot 10^2) = fl(0.00001 \cdot 10^2) = 0.1000 \cdot 10^{-2}$$

Normalizzazione dove  $a1 \neq 0$   
e il numero  $<1$

In aritmetica reale:

$$x - y = 0.75869 \cdot 10^2 - 0.75868 \cdot 10^2 = 0.1000 \cdot 10^{-2}$$

Nonostante ci sia la cancellazione di cifre significative, la situazione non è pericolosa, infatti l'errore relativo è nullo

$$E_{rel} = \frac{|x - y - fl(x - y)|}{|x - y|} = \frac{|0.1000 \cdot 10^{-2} - 0.1000 \cdot 10^{-2}|}{|0.1000 \cdot 10^{-2}|} = 0$$

Questo è giustificato, come abbiamo visto in teoria, dal fatto che i dati  $x$  e  $y$  sono rappresentabili esattamente in nell'insieme  $F(10, 5, L, U)$



Consideriamo adesso la differenza tra i due numeri

$$x = 0.75868531 \cdot 10^2, y = 0.75868100 \cdot 10^2$$

nell'insieme  $F(10, 5, L, U)$ , in cui  $x$  ed  $y$  non sono esattamente rappresentabili.

$$fl(x) = 0.75869 \cdot 10^2$$

$$fl(y) = 0.75868 \cdot 10^2$$

$$fl(fl(x) - fl(y)) = fl(0.75869 \cdot 10^2 - 0.75868 \cdot 10^2) = fl(0.00001 \cdot 10^2)$$

Normalizzazione della mantissa

$$0.00001 \cdot 10^2 = 0.00001 \cdot 10^4 \cdot (10^{-4}) \cdot 10^2 = 0.10000 \cdot 10^{-2}$$

$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.10000 \cdot 10^{-2}$$

In aritmetica reale:

$$x - y = 0.430999\ldots \cdot 10^{-3}$$

Calcoliamo l'errore relativo che commettiamo quando al posto del calcolo della somma in aritmetica reale sostituiamo il calcolo della somma in aritmetica finita:

$$\frac{|x - y - fl(fl(x) - fl(y))|}{|x - y|} = \frac{|0.430999\ldots \cdot 10^{-3} - 0.10000 \cdot 10^{-2}|}{|0.430999\ldots \cdot 10^{-3}|} \approx 1.32016$$

L'errore relativo commesso è del 132.016% Perché x e y hanno segno diverso e vicini in modulo

Il **prodotto macchina** tra due numeri  $x, y \in F(\beta, t, L, U)$

richiede le seguenti fasi:

1. Si esegue il prodotto tra le mantisse;
2. Si esegue l'arrotondamento (o il troncamento) alle prime  $t$  cifre;
3. Si sommano gli esponenti, normalizzando, se necessario, la mantissa ad un numero minore di 1.

### Esempio:

Consideriamo per esempio il prodotto tra i due numeri

$$x = 0.11111 \cdot 10^3, y = 0.52521 \cdot 10^2$$

nell'insieme  $F(10, 5, L, U)$ .

1. Il prodotto delle mantisse produce 0.05835608;
2. L'arrotondamento a 5 cifre produce  $0.58356 \cdot 10^{-1}$
3. Somma degli esponenti  $x * y = 0.58356 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 0.58356 \cdot 10^{-1} \cdot 10^5 = 0.58356 \cdot 10^4$

La **divisione macchina** tra due numeri  $x, y \in F(\beta, t, L, U)$  richiede le seguenti fasi:

1. Si scala il dividendo  $x$  finchè la sua mantissa non risulti minore di quella del divisore  $y$ ;
2. Si esegue la divisione tra le mantisse;
3. Si esegue l'arrotondamento (o il troncamento) alle prime  $t$  cifre;
4. Si sottraggono gli esponenti

(x) dividendo / (y) divisore

Consideriamo la divisione tra i due numeri

$$x = 0.12100 \cdot 10^5, y = 0.11000 \cdot 10^2$$

nell'insieme  $F(10, 5, L, U)$

1. Scaliamo il dividendo di una cifra decimale  **$0.012100 \cdot 10^6$**  (in questo modo la sua mantissa risulta minore di quella del divisore);
2. Dividiamo le mantisse  $0.01210/0.11000 = 0.11000$ ;
3. Il troncamento fornisce lo stesso numero  $0.11000$ ;
4. Si sottraggono gli esponenti ottenendo il risultato

$$fl\left(\frac{x}{y}\right) = 0.11000 \cdot 10^4$$

$10^{(6-2)}$



In  $F(\beta, t, L, U)$

Non vale la proprietà associativa di somma e prodotto;  $(a+b)+c \neq a+(b+c) \parallel (ab)c \neq a(bc)$

Non vale la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.  $a(b+c) \neq ab+ac$

### Esempio 1: (La somma tra numeri finiti non gode della proprietà associativa)

Sia  $\beta=10$ , e  $t=8$ . Dati i numeri reali  $a=0.23371258 \cdot 10^{-4}$ ,  $b=0.33678429 \cdot 10^2$ ,  $c= -0.33677811 \cdot 10^2$

a

+	0.	2	3	3	7	1	2	5	8	$10^{-4}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

b

+	0.	3	3	6	7	8	4	2	9	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

c

-	0.	3	3	6	7	7	8	1	1	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

I numeri  $a, b, c$  appartengono ad F. Calcoliamo  $fl(fl(a + b) + c)$  e  $fl(a + fl(b + c))$

1)  $fl(fl(a + b) + c)$

Si trasforma il numero  $a$  con esponente minore rispetto  $b$  in modo che i numeri abbiano lo stesso esponente

$$0.23371258 \cdot 10^{-4} = (0.23371258 \cdot 10^{-4}) \mathbf{10^{-2}} \cdot \mathbf{10^2} = 0.00000023371258 \cdot 10^2$$

a

+	0.	0	0	0	0	0	0	2	3	3	7	1	2	5	8	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

b

+

+	0.	3	3	6	7	8	4	2	9	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

---

+	0.	3	3	6	7	6	4	5	2	3	7	1	2	5	8	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

$$\text{fl}(a + b) = \text{fl}(0.33678452371258 \cdot 10^2) = 0.33678452 \cdot 10^2$$

$\text{fl}(a + b)$

+	0.	3	3	6	7	8	4	5	2	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

c

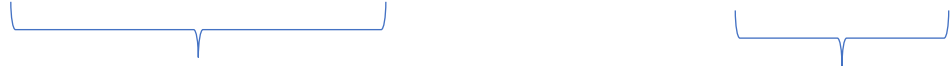
-	0.	3	3	6	7	7	8	1	1	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

---

+	0.	0	0	0	0	0	6	4	1	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

## Normalizzazione della mantissa e conseguente aggiustamento dell'esponente:

$$0.00000641 (10^{+5})(10^{-5})(10^{+2}) = 0.6410000 (10^{-3})$$



$$fl(fl(a + b) + c) =$$

+	0.	6	4	1	0	0	0	0	0	$10^{-3}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

2) Calcoliamo adesso  $fl(a + fl(b + c))$

b

+	0.	3	3	6	7	8	4	2	9	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

+

c

-	0.	3	3	6	7	7	8	1	1	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------

---

+	0.	0	0	0	0	0	6	1	8	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	--------



## Normalizzazione della mantissa e conseguente aggiustamento dell'esponente:

$$fl(b + c) = 0.00000618 (10^{+5})(10^{-5})(10^{+2}) = 0.6180000 (10^{-3})$$

a      

+	0.	0	2	3	3	7	1	2	5	8	$10^{-3}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

fl(b + c)      

+	0.	6	1	8	0	0	0	0	0	$10^{-3}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

---

+	0.	6	4	1	3	7	1	2	5	8	$10^{-3}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

$$fl(a + fl(b + c)) =$$

+	0.	6	4	1	3	7	1	2	6	$10^{-3}$
---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----------

Il risultato in aritmetica reale è  $a+b+c = 0.641371258 \cdot 10^{-3}$

**Esercizio 2:** Si consideri l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e sia  $\beta = 10$  e  $t=4$  cifre.

$$a = 1, \quad b = -6.433, \quad c = 0.009474$$

Calcoliamo le radici dell'equazione in aritmetica finita.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a= 

+	0.	1	0	0	0	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

b= 

-	0.	6	4	3	3	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

c= 

+	0.	9	4	7	4	$10^{-2}$
---	----	---	---	---	---	-----------

Calcoliamo  $\text{fl}(\sqrt{\text{fl}(b^2) - \text{fl}(4ac)})$

$$b^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline - & 0. & 6 & 4 & 3 & 3 & 10^1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline - & 0. & 6 & 4 & 3 & 3 & 10^1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0 & 4 & 1 & 3 & 8 & 3 & 4 & 8 & 9 & 10^2 \\ \hline \end{array}$$

$$fl(b^2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 4 & 1 & 3 & 8 & 10^2 \\ \hline \end{array}$$

$$4ac \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 9 & 4 & 7 & 4 & 10^{-2} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 4 & 0 & 0 & 0 & 10^1 \\ \hline \end{array} =$$

$$(0.9474 \cdot 0.4)10^{-2} \cdot 10^1 = 0.37896 \cdot 10^{-2} \cdot 10^1 = 0.37896 \cdot 10^{-1}$$

$$fl(4ac) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 3 & 7 & 8 & 9 & 10^{-1} \\ \hline \end{array}$$

**Approssimazione per troncamento**

$$fl(b^2) \quad + \quad 0. \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 8 \quad 10^2$$

-

$$fl(4ac) \quad + \quad 0. \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10^{-1}$$

Si trasforma il numero con esponente minore in modo che i numeri abbiano lo stesso esponente

$$0.3789 (10^{-1})(10^{-2})(10^{+2}) = 0.0003789 (10^2)$$

$$fl(b^2) \quad + \quad 0. \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 8 \quad 10^2$$

-

$$fl(4ac) \quad + \quad 0. \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10^2$$

---


$$fl(b^2) - fl(4ac) \quad + \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 10^2$$

$$\eta = fl(fl(b^2) - fl(4ac)) = + \quad 0. \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 10^2$$

$$\sqrt{\eta} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 6 & 4 & 2 & 9 & 6 & 2 & 2 & 7 & 1 & 4 & 0 & 4 & . & 10^1 \\ \hline \end{array}$$

$$fl(\sqrt{\eta}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 6 & 4 & 2 & 9 & 10^1 \\ \hline \end{array} \quad \text{Approssimazione per troncamento}$$

$$-b \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 6 & 4 & 3 & 3 & 10^1 \\ \hline \end{array}$$

$$fl(\sqrt{\eta}) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 6 & 4 & 2 & 9 & 10^1 \\ \hline \end{array}$$

-

$$-b - fl(\sqrt{\eta}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 0 & 0 & 0 & 4 & 10^1 \\ \hline \end{array}$$

**Normalizzazione della mantissa e conseguente aggiustamento dell'esponente:**

$$\gamma = fl(-b - fl(\sqrt{\eta})) = 0.0004 \cdot (10^3) (10^{-3}) 10^1 = 0.4000 \cdot 10^{-2}$$

$$fl(x_1) = fl\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & 0. & 2 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \\ \hline \end{array}$$

Calcoliamo adesso la radice  $x_2$

$-b$ 

+	0.	6	4	3	3	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

+

$fl(\sqrt{\eta})$ 

+	0.	6	4	2	9	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

$-b + fl(\sqrt{\eta}) =$ 

+	1.	2	8	6	2	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

+	0.	1	2	8	6	2	$10^2$
---	----	---	---	---	---	---	--------

$\gamma = fl(-b + fl(\sqrt{\eta})) =$ 

+	0.	1	2	8	6	$10^2$
---	----	---	---	---	---	--------

$fl(x_2) = fl\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ 

+	0.	6	4	3	0	$10^1$
---	----	---	---	---	---	--------

In conclusione, le due soluzioni dell'equazione di partenza calcolare in aritmetica finita con  $\beta = 2$  e  $t = 4$

$$fl(x_1) = fl\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \boxed{+ \quad 0. \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10^{-2}}$$

$$fl(x_2) = fl\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \boxed{+ \quad 0. \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \quad 10^1}$$

In aritmetica reale:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6.433 - \sqrt{41.383489 - 0.037896}}{2} = \frac{6.433 - 6.4300538}{2} = 0.001473056 \dots \\ &= 0.1473056 \dots \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{6.433 + \sqrt{41.383489 - 0.037896}}{2} = \frac{6.433 + 6.4300538}{2} = 6.431526943899537 \\ &= 0.6431526943899537 \dots \cdot 10^1 \end{aligned}$$

**Errore relativo sul calcolo delle due soluzioni in aritmetica finita rispetto alle soluzioni calcolate in aritmetica reale:**

$$\frac{|x_1 - fl(x_1)|}{|x_1|} = \frac{|0.1473056... \cdot 10^{-2} - 0.2000 \cdot 10^{-2}|}{|0.1473056... \cdot 10^{-2}|} \approx 0.36$$

L'errore relativo sul calcolo della soluzione  $x_1$  è del 36%

$$\frac{|x_2 - fl(x_2)|}{|x_2|} = \frac{|0.6431526943899537 \dots \cdot 10^1 - 0.6430 \cdot 10^1|}{|0.6431526943899537 \dots \cdot 10^1|} \approx 0.2374 \cdot 10^{-3}$$

L'errore relativo sul calcolo della soluzione  $x_2$  è dello 0.02374%

Un algoritmo più efficiente per il calcolo delle radici di un'equazione di II° grado è il seguente:

calcolo la radice che, in base al segno di  $b$ , non porta problemi, cioè evita la differenza tra numeri molto vicini in modulo, nel nostro caso si suggerisce di calcolare  $x_2$  e poi calcolare  $x_1$ , tenendo conto

della relazione che lega le due radici di un'equazione di secondo grado:  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  e quindi  $x_1 = \frac{c}{ax_2}$



$$fl(x_1) = fl\left(\frac{c}{ax_2}\right) = fl\left(\frac{0.9474 \cdot 10^{-2}}{0.6430 \cdot 10^1}\right) = fl(0.1473405909797823... \cdot 10^{-2}) = 0.1473 \cdot 10^{-2}$$

Rivalutiamo adesso l'errore relativo sul calcolo della soluzione  $x_1$

$$\frac{|x_1 - fl(x_1)|}{|x_1|} = \frac{|0.1473056... \cdot 10^{-2} - 0.1473 \cdot 10^{-2}|}{|0.1473056... \cdot 10^{-2}|} \approx 0.3808440341125482 \cdot 10^{-6}$$

L'errore relativo sul calcolo della soluzione  $x_2$  è dello 0.000038%