# Ricerca Operativa
# Modulo 2

## Teoria dei Grafi: Parte 1
## Introduzione

Marco A. Boschetti

Università degli Studi di Bologna
Dipartimento di Matematica
marco.boschetti@unibo.it

# Outline

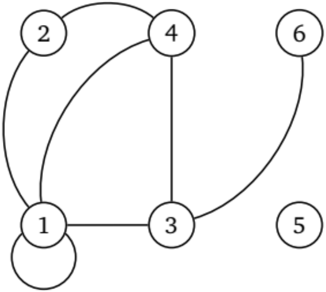
1. Introduzione alla Teoria dei Grafi
    - Definizioni di Base e Notazione
    - Applicazioni
    - Taglio di un grafo
    - Cammini, circuiti e cicli
    - Grafi parziali, sottografi e componenti
    - Alberi
    - Rappresentazione dei Grafi

# Grafi non orientati e orientati

- Un grafo non orientato, rappresentato come $G = (V, E)$, è definito dall'insieme dei *vertici* (o *nodi*) e dall'insieme dei *lati* che congiungono coppie non ordinate di vertici:
  - $V = \{1, 2, \dots, n\}$: insieme dei vertici (o nodi);
  - $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$: insieme dei lati, che corrispondono a coppie *non ordinate* di vertici di $V$ che sono *collegati*, i.e., un lato $e_k = \{i, j\}$ *collega* i vertici $i$ e $j$.

- Un grafo orientato (o grafo diretto) $G = (V, A)$ si differenzia da un grafo non orientato per la sostituzione dell'insieme dei lati con l'insieme degli *archi*, che sono coppie *ordinate* di vertici:
  - $V = \{1, 2, \dots, n\}$: insieme dei vertici (o nodi);
  - $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$: insieme degli archi, che corrisponde a coppie *ordinate* di vertici di $V$, i.e., l'arco $a_k = (i, j)$ indica che il vertice $i$ è collegato al vertice $j$.

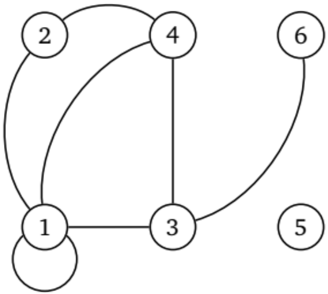
# Esempio di grafo non orientato




$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}\}$$

- Il lato $\{i, j\}$ *collega* $i$ e $j$. Due vertici sono *adiacenti* se esiste il lato che li collega. Due lati sono *consecutivi* se hanno un vertice in comune.
- Il grafo ha un *loop* (lato $\{1, 1\}$), anche detto *autoanello* o *cappio*.

# Esempio di grafo non orientato




S = sottoinsieme di Vertici del Grafo

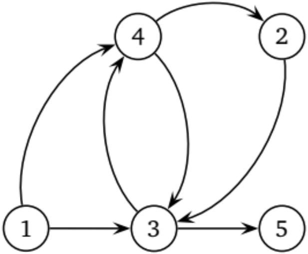
(vertici)

- Si denota con $E(S)$ l'insieme dei lati con entrambi gli estremi nel sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ e $\Gamma(i)$ insieme dei vertici collegati a $i$.

gamma

- Se $S = \{1, 2, 4\}$ allora $E(S) = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$.
- $\Gamma(2) = \{1, 4\}$, $\Gamma(4) = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma(5) = \emptyset$.

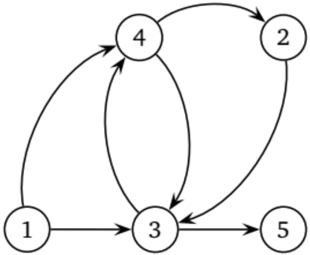
# Esempio grafo orientato




$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad A = \{(1, 4), (1, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 2), (2, 3), (3, 5)\}$

- L'arco $(1, 4)$ *esce* dal vertice 1 e *entra* nel vertice 4.
- Dato l'arco $(i, j)$ il vertice $i$ è detto *vertice iniziale* (*coda* oppure *tail*) e $j$ è detto *vertice terminale* (*testa* oppure *head*). Il vertice $j$ è anche detto *successore* di $i$ mentre $i$ è detto *predecessore* di $j$.

# Esempio grafo orientato




S = sottoinsieme di Vertici del Grafo

- Si denota con $A(S)$ l'insieme degli archi con entrambi gli estremi (vertice iniziale e finale) nel sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$ e con $\Gamma^+(i)$ e $\Gamma^-(i)$ gli insiemi dei successori e dei predecessori di $i$.

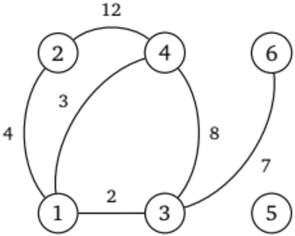
  gamma  gamma

- Se $S = \{1, 3, 4\}$, allora $A(S) = \{(1, 4), (1, 3), (3, 4), (4, 3)\}$.
- $\Gamma^+(1) = \{3, 4\}$, $\Gamma^+(4) = \{2, 3\}$, $\Gamma^+(5) = \emptyset$, mentre $\Gamma^-(1) = \emptyset$, $\Gamma^-(4) = \{1, 3\}$, $\Gamma^-(5) = \{3\}$.

# Grafi pesati (non orientati e orientati)

- Il grafo $G$ non orientato (orientato) è pesato sui lati (archi) se esiste una funzione $c : E \rightarrow R$ ($c : A \rightarrow R$) che associa un valore (o *peso*) ad ogni lato (arco). ad ogni arco/lato associo un peso
- Il grafo $G$ è pesato sui vertici se esiste una funzione $w : V \rightarrow R$ che associa un valore (*peso*) ad ogni vertice. ad ogni vertice associo un peso

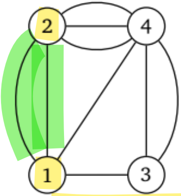
## Esempio: grafo non orientato pesato



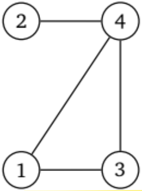
# Grafi multipli, semplici e completi

- Un grafo è *multiplo* se può avere più di un lato per la stessa coppia di vertici. ma non è necessario che ogni coppia di vertici abbia più lati.
- Un grafo è *semplice* se non comprende loop e lati multipli.
- Generalmente considereremo solo grafi semplici.
- Un grafo è *completo* se per ogni coppia di vertici esiste un lato.

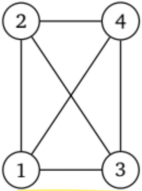
## Esempi




(a) Grafo multiplo




(b) Grafo semplice




(c) Grafo completo

# Grafi: Applicazioni

Tra gli argomenti più noti nell'ambito della teoria dei grafi possiamo citare ad esempio:

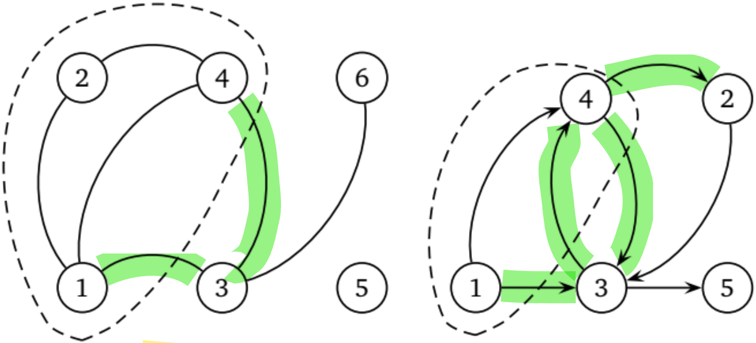
- Cammini Euleriani: originato dal problema posto da Eulero, per determinare un percorso che, partendo da una qualsiasi delle quattro zone della città di Könisberg, attraversasse tutti i sette ponti una ed una sola volta ritornando al punto di partenza.
- Colorazione dei grafi: dove un esempio di applicazione è la colorazione delle mappe per garantire di non usare lo stesso colore per nazioni confinanti.
- Problema della clique (cricca): per esempio per calcolare la clique (i.e., sottografo completo) di cardinalità massima.

# Grafi: Applicazioni Reali (Reti Fisiche)

| Applications | Physical Analog of Nodes | Physical Analog of Arcs | Flow |
|---|---|---|---|
| Communication systems | Telephone exchanges, computers, transmission facilities, satellites | Cables, fiber optic links, microwave relay links | Voice messages, data, video transmissions |
| Hydraulic systems | Pumping stations, reservoirs, lakes | Pipelines | Water, gas, oil, hydraulic fluids |
| Integrated computer circuits | Gates, registers, processors | Wires | Electrical current |
| Mechanical systems | Joints | Rods, beams, springs | Heat, energy |
| Transportation systems | Intersections, airports, rail yards | Highways, railbeds, airline routes | Passengers, freight, vehicles, operators |

# Taglio di un grafo

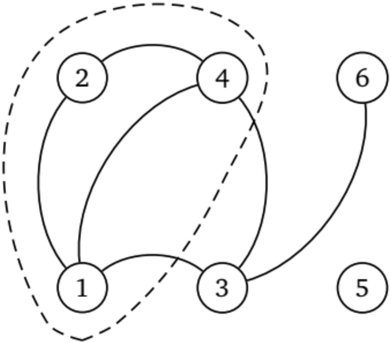
- Dato un sottoinsieme $S$ di vertici, si dice *taglio* l'insieme dei lati (o archi) che congiungono i vertici in $S$ con quelli in $V \setminus S$.




(a) Grafo non orientato (b) Grafo orientato

# Taglio di un grafo non orientato

- Per i grafi non orientati:
  $\delta_G(S) = \{\{i,j\} \in E : i \in S, j \in V \setminus S$ oppure $j \in S, i \in V \setminus S\}$.

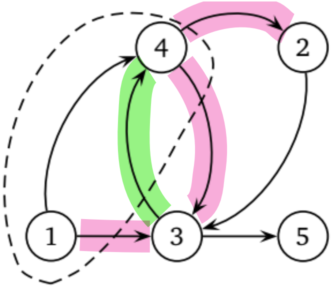



Nell'esempio $\delta_G(\{1,2,4\}) = \{(1,3),(3,4)\}$.

# Taglio di un grafo orientato

- Nei grafi orientati distinguiamo tra archi uscenti ed entranti in $S \subset V$:
  - $\delta_G^+(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \notin S\}$; Uscente da uno dei nodi di S
  - $\delta_G^-(S) = \{(i,j) \in A : j \in S, i \notin S\}$. Entrare ad uno dei nodi di S

  Si noti che $\delta_G^+(S) \equiv \delta_G^-(V \setminus S)$. perché gli uscenti da S sono gli entranti a V \ S




Nell'esempio $\delta_G^+(\{1,4\}) = \{(1,3),(4,2),(4,3)\}$ e $\delta_G^-(\{1,4\}) = \{(3,4)\}$.

# Cammini

- Un cammino è una sequenza di vertici $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ tale che per ogni coppia di vertici consecutivi $(v_i, v_{i+1})$ esiste il corrispondente lato (grafo non orientato) o arco (grafo orientato).
- Un cammino $P$ si può rappresentare sia come una sequenza di vertici:

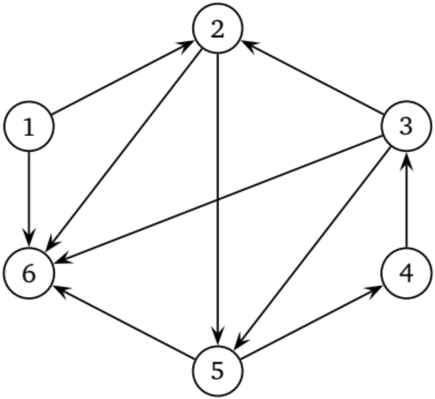
$$P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$$

- Un cammino può essere rappresentato anche come una sequenza archi (o lati):

$$P = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \ldots, (v_{k-1}, v_k))$$

- In generale non ci sono vincoli che impediscono di visitare più volte alcuni vertici o percorrere più volte alcuni archi (o lati).

# Cammini: Esempi




Esempi di cammini:

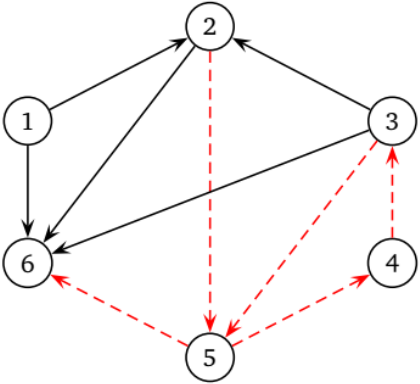
$P_1 = (2, 5, 4, 3, 5, 6)$

$P_2 = (1, 2, 5, 4, 3)$

$P_3 = (1, 2, 5, 4, 3, 2, 5)$

$P_4 = (3, 5, 4, 3)$

# Cammini: Esempi




Esempi di cammini:

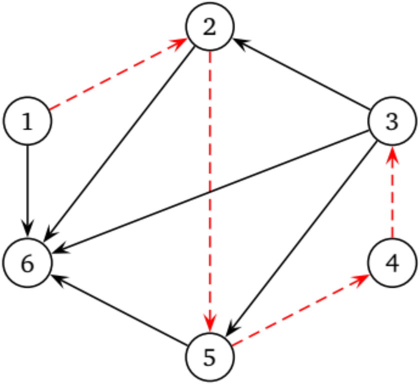
$P_1 = (2, 5, 4, 3, 5, 6)$

$P_2 = (1, 2, 5, 4, 3)$

$P_3 = (1, 2, 5, 4, 3, 2, 5)$

$P_4 = (3, 5, 4, 3)$

# Cammini: Esempi




Esempi di cammini:

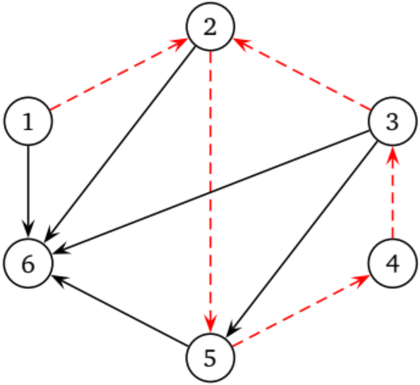
$P_1 = (2, 5, 4, 3, 5, 6)$

$P_2 = (1, 2, 5, 4, 3)$

$P_3 = (1, 2, 5, 4, 3, 2, 5)$

$P_4 = (3, 5, 4, 3)$

# Cammini: Esempi




Esempi di cammini:

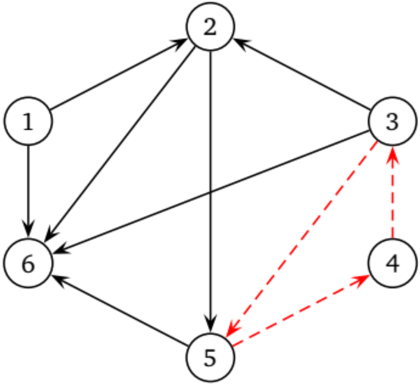
$P_1 = (2, 5, 4, 3, 5, 6)$

$P_2 = (1, 2, 5, 4, 3)$

$P_3 = (1, 2, 5, 4, 3, 2, 5)$

$P_4 = (3, 5, 4, 3)$

# Cammini:Esempi




Esempi di cammini:

$P_1 = (2, 5, 4, 3, 5, 6)$

$P_2 = (1, 2, 5, 4, 3)$

$P_3 = (1, 2, 5, 4, 3, 2, 5)$

$P_4 = (3, 5, 4, 3)$

# Costo di un cammino

- Dato un cammino $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ il suo *costo* $c(P)$ è dato da:

$$c(P) = \sum_{i=1}^{k-1} c_{v_i v_{i+1}}$$

dove $c_{ij}$ è il costo dell'arco $(i,j)$.

- Il costo di un cammino, a seconda del contesto e dell'applicazione, è anche detto *lunghezza*, *peso*, etc.

- Per esempio, se il costo di ciascun arco $(i,j)$ corrisponde al tempo necessario per spostarsi dalla località $i$ alla località $j$, allora il costo del cammino corrisponde al tempo necessario per visitare le località $v_i$, $i = 1, \ldots, k$, nell'ordine indicato dal cammino.

# Cammini, circuiti e cicli

- Cammino semplice: non usa più di una volta lo stesso arco/lato. ($P_1$, $P_2$ e $P_4$ sono semplici; $P_3$ no) (cioè ogni arco/lato nel Cammino viene visitato una volta sola)
- Cammino elementare: non passa più di una volta per lo stesso vertice. ($P_2$ è elementare; $P_1$, $P_3$ e $P_4$ no) (cioè ogni vertice nel Cammino viene visitato una volta sola)

ogni vertice del grafo viene toccato una sola volta durante il percorso, e non rimane nessun vertice non visitato.

- Cammino hamiltoniano: usa una ed una sola volta tutti i vertici del grafo; quindi deve visitare tutti vertici del grafo.

ogni arco/lato del grafo viene attraversato una sola volta durante il percorso, e non rimane nessun arco/lato non visitato.

- Cammino euleriano: usa una ed una sola volta tutti gli archi/lati del grafo.
- Circuito: in un grafo orientato è un cammino in cui il vertice iniziale coincide con il vertice terminale.

È la versione non orientata di un circuito.

- Ciclo: controparte non orientata di un circuito.

In un grafo non orientato, un ciclo è un cammino chiuso che inizia e termina nello stesso vertice senza ripetere archi o vertici

# Cammini, circuiti e cicli (2)

- Circuito elementare: è un circuito che, a parte il primo e l'ultimo vertice (che coincidono), non passa più di una volta per lo stesso vertice.

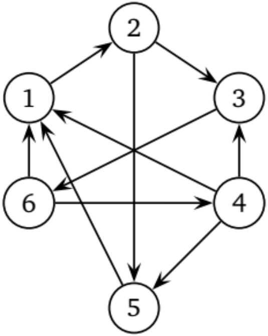
Visita ogni vertice una sola volta e poi torna al punto di partenza.

- Circuito hamiltoniano: è un circuito elementare che passa attraverso ogni vertice del grafo. Oppure, equivalentemente, è un cammino hamiltoniano chiuso (i.e., con un arco che collega l'ultimo vertice con il primo del cammino).

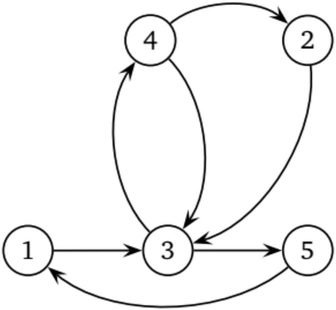
- Circuito euleriano: è un circuito elementare che passa attraverso ogni arco del grafo una sola volta. Oppure, equivalentemente è un cammino euleriano chiuso.

- I grafi che possiedono almeno un circuito/ciclo hamiltoniano sono detti grafi hamiltoniani. Invece, i grafi che possiedono almeno un circuito/ciclo euleriano sono detti grafi euleriani.

# Esempio di Circuiti




(a) Grafo hamiltoniano

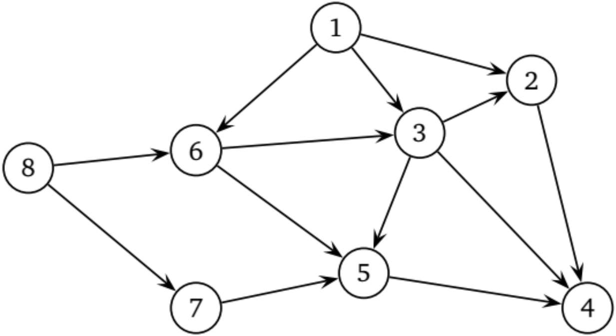



(b) Grafo non hamiltoniano

Circuito elementare (a) $C_1 = (1, 2, 3, 6, 1)$, (b) $C_2 = (3, 4, 2, 3)$.
Circuito hamiltoniano (a) $C_3 = (1, 2, 3, 6, 4, 5, 1)$, (b) non ne possiede.

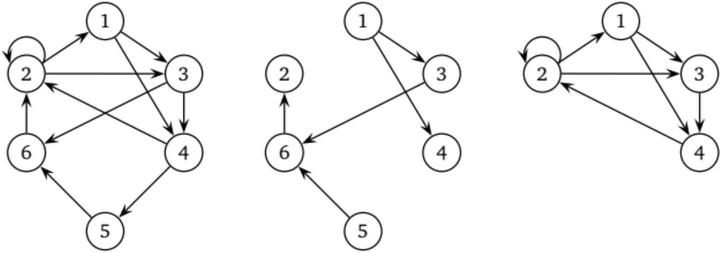
# Grafi Aciclici

- Grafo aciclico: è un grafo che non contiene circuiti (cicli).



# Grafi Parziali e Sottografi

- Grafo parziale di $G=(V,A)$: è il grafo $G'=(V,A')$ dove $A'\subset A$.
- Sottografo di $G=(V,A)$: è il grafo $G'=(V',A')$ dove $V'\subseteq V$ e $A'\subseteq A$.

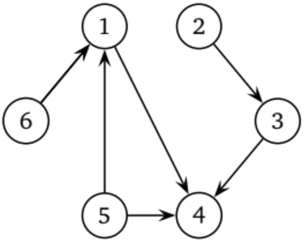



(a) Grafo orientato (b) Grafo parziale (c) Sottografo

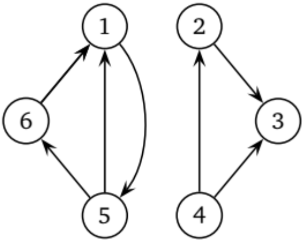
# Connessioni e Componenti di un Grafo Orientato

- Grafo connesso: se il grafo *non orientato* relativo al grafo orientato ha almeno un cammino che congiunge ogni coppia di vertici.
- Se tale cammino non esiste allora il grafo viene detto disconnesso.

La principale differenza risiede nel tipo di grafo considerato: nei grafi non orientati si parla di connessione, mentre nei grafi orientati si distingue tra connessione debole (esiste un cammino non orientato tra ogni coppia di vertici) e connessione forte (esiste un cammino orientato in entrambe le direzioni per ogni coppia di vertici).




(a) Grafo connesso




(b) Grafo disconnesso

- Grafo fortemente connesso: se nel grafo orientato esiste almeno un cammino orientato che congiunge ogni coppia di vertici.

# Alberi

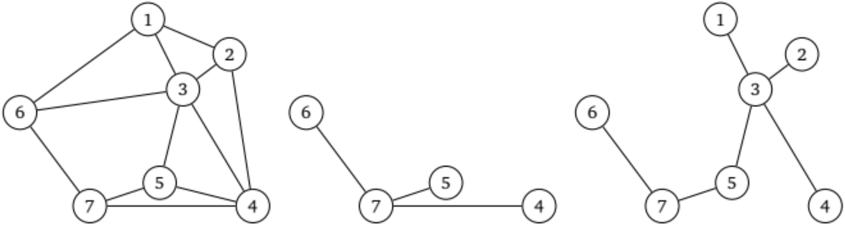
- Un grafo $G_a$ non orientato di $n$ vertici è un albero se rispetta le seguenti condizioni, che sono equivalenti:
  - $G_a$ è connesso e aciclico;
  - $G_a$ è aciclico e si crea un ciclo semplice se si aggiunge un lato al grafo $G_a$;
  - $G_a$ è connesso, ma diventa non connesso non appena si elimina un solo lato di $G_a$;
  - $G_a$ è connesso ~~a~~ e ha $n-1$ lati;
  - $G_a$ non ha cicli semplici e ha $n-1$ lati.

- In letteratura esistono anche altre condizioni equivalenti. Ognuna di queste definizioni equivalenti può essere utile a "identificare" e "utilizzare" gli alberi.

# Alberi (2)

- Dato un grafo $G$, possono essere definiti dei sottografi di $G$ che sono alberi. Tra questi, si definisce albero completo di $G$ (detto anche spanning tree) un grafo parziale di $G$ (i.e., "copre" tutti i vertici) che è un albero.

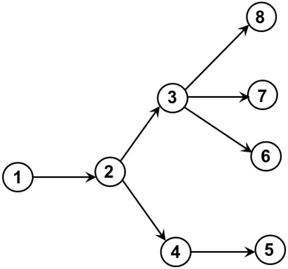
- Ogni grafo connesso ha almeno uno spanning tree.



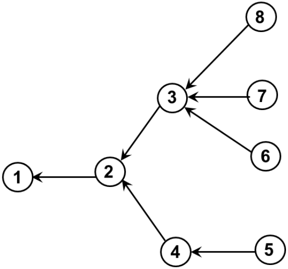

(a) Grafo $G$ (b) Albero (c) Albero completo

# Alberi (3)

- Directed-out-tree: Albero in cui l'unico cammino dal nodo $s$ a tutti gli altri nodi è diretto.
- Directed-in-tree: Albero in cui l'unico cammino da un qualsiasi altro nodo al nodo $s$ è diretto.




(a) Directed-Out-Tree




(b) Directed-In-Tree

# Rappresentazione dei Grafi

- Il ruolo delle strutture dati è cruciale nello sviluppo di algoritmi efficienti.
- Il modo in cui sono salvati i dati del grafo (*rete*) nella memoria del calcolatore determina le performance degli algoritmi che operano su tali dati.
- Alcune delle operazioni che devono essere svolte dagli algoritmi sono le seguenti:
  - Accedere alle informazioni dei vertici;
  - Accedere alle informazioni degli archi;
  - Determinare tutti gli archi che partono da un vertice $i$;
  - Determinare tutti gli archi che arrivano a un vertice $i$;
  - Determinare tutti gli archi che incidono su un vertice $i$.

    significa individuare tutti gli archi del grafo che sono collegati al vertice i.

# Rappresentazione dei Grafi (2)

- In letteratura sono presentate numerose proposte. Alcune permettono un efficiente accesso ai dati, ma sono dispendiose dal punto di vista dell'occupazione di memoria, altre forniscono efficaci compromessi.
- La scelta della struttura dati più opportuna dipende principalmente dall'algoritmo che si deve implementare e dalle "risorse" a disposizione.

1A

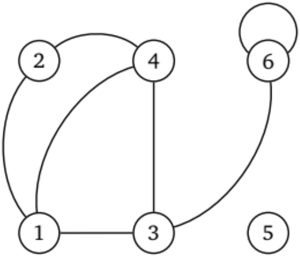
# Rappresentazione dei Grafi: Matrice di Adiacenza

**Definizione.** La matrice di adiacenza $Q$ di un grafo non orientato semplice $G = (V, E)$ è la matrice simmetrica $|V| \times |V|$ con elementi:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i,j\} \in E; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## Esempio

insieme dei vertici collegati a i.




(a) Grafo $G$

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \to \Gamma(1) \\ \to \Gamma(2) \\ \to \Gamma(3) \\ \to \Gamma(4) \\ \to \Gamma(5) \\ \to \Gamma(6) \end{array}$$

(b) Matrice di adiacenza

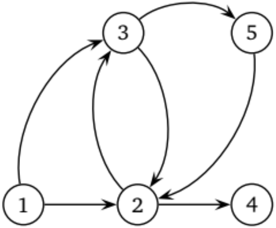
1B

# Rappresentazione dei Grafi: Matrice di Adiacenza

**Definizione.** La matrice di adiacenza $Q$ di un grafo orientato semplice $G = (V, A)$ è la matrice $|V| \times |V|$ con elementi:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in A; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## Esempio




(a) Grafo $G$

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left. \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\downarrow \; \Gamma^-(i)} \right\} \rightarrow \Gamma^+(i) \end{array}$$

insieme dei successori di i

insieme dei predecessori di i.

(b) Matrice di adiacenza

2A

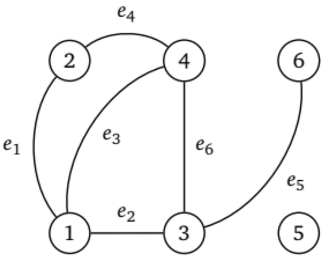
# Rappresentazione dei Grafi: Matrice di Incidenza

**Definizione.** La matrice di incidenza nodi-lati $D$ di un grafo non orientato $G = (V, E)$ è la matrice $|V| \times |E|$ con elementi:

collegato con il

$$d_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se il } k\text{-esimo lato è incidente nel vertice } i \text{ (i.e., } e_k = \{i, j\}); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## Esempio




(a) Grafo $G$

$$D = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) Matrice di incidenza

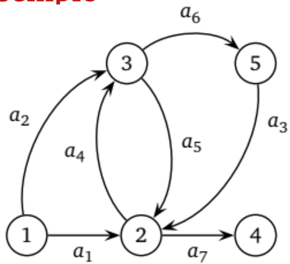
2B

# Rappresentazione dei Grafi: Matrice di Incidenza

**Definizione.** La matrice di incidenza nodi-archi $D$ di un grafo orientato $G = (V, A)$ è la matrice $|V| \times |A|$ con elementi:

$$d_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se il } k\text{-esimo arco esce dal vertice } i \text{ (i.e., } a_k = (i,j));\\ -1 & \text{se il } k\text{-esimo arco entra nel vertice } i \text{ (i.e., } a_k = (j,i));\\ 0 & \text{se } i \text{ non è vertice terminale di } a_k. \end{cases}$$

## Esempio




(a) Grafo $G$

$$D = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

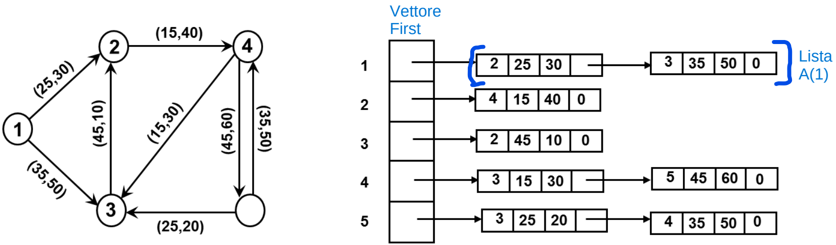
(b) Matrice di incidenza

3

# Rappresentazione dei Grafi: Liste di Adiacenza

- Le liste di adiacenza conservano per ogni vertice $i$ la lista $A(i)$ degli archi che partono da esso.

- Per cui è necessario un vettore $n$-dimensionale ($n = |V|$) *first*, dove *first*$(i)$ memorizza il puntatore al primo elemento della lista $A(i)$.




- Impiegando le liste di adiacenza si risparmia tempo calcolo e spazio di memoria. Però richiedono una "gestione" più complessa.

4A

# Rappresentazione dei Grafi: Forward Star

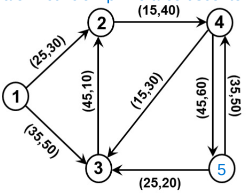
struttura dati utilizzata per rappresentare grafi orientati in modo efficiente, specialmente quando si desidera accedere rapidamente agli archi uscenti di un nodo.

- La rappresentazione forward star richiede di salvare le informazioni degli archi in un vettore $m$-dimensionale ($m = |A|$). Gli archi devono essere ordinati per indice del *vertice iniziale* (*tail node*) crescente.

- Un vettore $n$-dimensionale ($n = |V|$) di puntatori *point* memorizza l'indice in cui sono salvate le informazioni del primo arco che *parte* dal vertice $i$ nel corrispondente vettore. Gli archi che *partono* dal vertice $i$ sono posizionati da $point(i)$ fino a $point(i+1)-1$.

Ad esempio: point(1) ha l'indice del vettore m-dimensionale in cui c'é il primo arco uscente dal nodo 1

Ad esempio: point(6)-1 = 8




| | point |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 9 |

Archi

| | tail | head | cost | capacity |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 25 | 30 |
| 2 | 1 | 3 | 35 | 50 |
| 3 | 2 | 4 | 14 | 40 |
| 4 | 3 | 2 | 45 | 10 |
| 5 | 4 | 3 | 15 | 30 |
| 6 | 4 | 5 | 45 | 60 |
| 7 | 5 | 3 | 25 | 20 |
| 8 | 5 | 4 | 35 | 50 |

4B

# Rappresentazione dei Grafi: Forward e Backward Star

- La rappresentazione forward star consente di accedere in modo efficiente agli archi che partono da un determinato vertice $i$.
- Nel caso sia necessario accedere agli archi che arrivano a un vertice $i$, la forward star non permette un'equivalente performance.
- Nel caso l'algoritmo necessiti di accedere agli archi che arrivano a un determinato vertice $i$ è necessario utilizzare la backward star.
- La rappresentazione backward star è analoga alla forward star, ma gli archi sono ordinati per indice del *vertice finale* (*head node*) crescente;
- Inoltre, il vettore $point(i)$ memorizza l'indice in cui sono salvate le informazioni del primo arco che *arriva* al vertice $i$ nel corrispondente vettore. Gli archi che arrivano al vertice $i$ sono posizionati da $point(i)$ fino a $point(i+1)-1$.