Programmazione Lineare: Introduzione

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.) & Marco Boschetti (D.M.).

rev. 2.1(AH) – 2024

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la <u>funzione obiettivo</u> φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la <u>regione ammissibile</u> $F \subseteq \mathrm{R}^n$ è definita da

  $g_i(x) \le 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$

  con $g_i, h_j : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

  Es. $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \ge d_i$

Forma matriciale

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

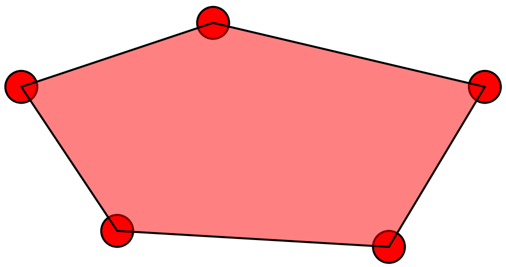
$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Nella programmazione lineare, l'ottimizzazione si riduce a trovare il miglior punto tra un insieme finito di vertici del poliedro che rappresenta la regione ammissibile, rendendo il problema un tipo di problema combinatorio.

Regione ammissibile di PL

- *F* è un insieme convesso (poliedro)

Questo insieme convesso è rappresentato graficamente come un poliedro (una figura geometrica tridimensionale o più generica, un politopo in più dimensioni).



Anche se la regione ammissibile può contenere infiniti punti, per determinare la soluzione ottimale x* (massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo lineare), è sufficiente esaminare un numero finito di punti. Questi punti sono i vertici del poliedro. La teoria della programmazione lineare afferma che la soluzione ottimale si trova sempre in uno dei vertici della regione ammissibile.

- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro)

    $\Rightarrow$ problema combinatorio

Il fatto che bisogna esaminare i vertici del poliedro per trovare la soluzione ottimale implica che il problema ha una natura combinatoria. Questo perché i vertici rappresentano combinazioni specifiche delle soluzioni dove alcuni vincoli diventano equazioni di uguaglianza. La ricerca della soluzione ottimale consiste, quindi, nel valutare queste combinazioni di vertici.

Esempio

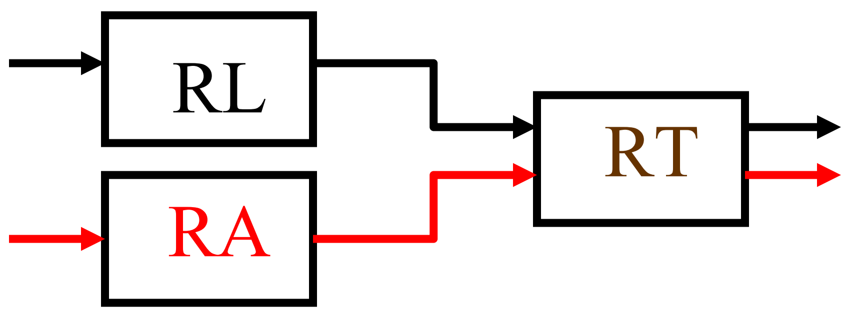
$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 \quad\quad + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ -2\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

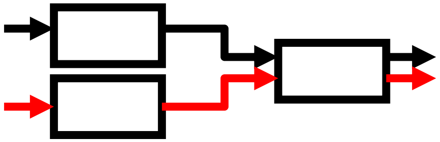
Es. 1: Produzione di sedie (1)

- 2 prodotti:
  - Sedia in Legno (SL)
  - Sedia in Alluminio (SA)
- 3 reparti:
  - Lavorazione parti in Legno (RL)
  - Lavorazione parti in Alluminio (RA)
  - Lavorazione parti in Tessuto (RT)



Produzione di sedie (2)

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)



	RL	RA	RT	Ricavo
SL	10	-	30	30
SA	-	20	20	50
D.	40	120	180	

Formulazione del problema LP (1)

0. Capire il problema.

1. Individuare le variabili decisionali.

2. Definire la funzione obiettivo come combinazione delle variabili decisionali.

3. Definire i vincoli come combinazione delle variabili.

1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:
  - Tempi di Produzione (min. per pezzo)
  - Disponibilità reparti (min. per periodo)
  - Ricavo netto (Euro per pezzo)

Supponendo di poter vendere tutta la produzione quante sedie di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?

- Variabili decisionali:
  - x_1 = n. di sedie di legno prodotte in un periodo
  - x_2 = n. di sedie di alluminio prodotte in un periodo
  - x_1 ed x_2 possono essere frazionarie

3. Funzione obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

SL	SA
30	50

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

4. Vincoli

- Consumo tempo per unità di prodotto:

Reparto	SL	SA	Disp.
RL	10	–	40
RA	–	20	120
RT	30	20	180

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

$$\begin{array}{llcl} \text{(RL)} & 10\, x_1 & & \le 40 \\ \text{(RA)} & & 20\, x_2 & \le 120 \\ \text{(RT)} & 30\, x_1 & +\ 20\, x_2 & \le 180 \end{array}$$

5. Upper e lower bound

- valori negativi delle *x* privi di senso
- vincoli di non negatività delle variabili:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \max z = 30\,x_1 & + 50\,x_2 & \\
\text{RL)} & 10\,x_1 & & \leq 40 \\
\text{RA)} & & 20\,x_2 & \leq 120 \\
\text{RT)} & 30\,x_1 + & 20\,x_2 & \leq 180 \\
\longrightarrow & x_1 \quad , & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Modello LP completo

- stabilità numerica degli algoritmi:
- coefficienti interi e piccoli in valore assoluto

(Semplifico rimuovendo uno zero da entrambi i membri delle disequazioni)

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{RL)} & x_1 & & & \leq & 4 \\
\text{RA)} & & & 2\,x_2 & \leq & 12 \\
\text{RT)} & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. 2: Produzione di vasche (1)

- Un'azienza produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	€350	€300

- sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione

Modello LP

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 350\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & \leq & 200 \\
 & 9\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 1566 \\
 & 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & \leq & 2880 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Funzione Obiettivo

Vincoli

Problemi di Mix di Produzione

Colonna Matrice Riga Matrice

- n prodotti, m risorse (materie prime, macchine …)
- a_{ij} quantità della risorsa i necessaria per produrre 1 unità del prodotto j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i quantitativo di risorsa i (i=1,…,m) disponibile

Somma di 1 riga (1 risorsa) = Utilizzo Totale di quella risorsa per ogni prodotto creato

- r_j ricavo per 1 unità del prodotto j (j=1,…,n)
- x_j quantità del prodotto j da produrre (j=1,…,n)

$$\max r^T x$$

$$Ax \leq d$$

$$x \geq 0$$

Es. 3: Problema della dieta

… per cani e gatti

n

m

Sostanze	Alimenti (contenuto g/Kg)			Contenuto minimo (g)
	A1	A2	A3	
Proteine	500	300	300	800
Grassi	300	300	100	400
Carboidrati	0	100	200	2000

Costo (€/Kg)	5	2	1
Variabili (Kg)	x_1	x_2	x_3

Modello LP

x_1, x_2, x_3 : Kg di A$\overset{1}{\cancel{2}}$, A2, A3 da acquistare

$$
\begin{aligned}
\min\ z = \quad & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 8 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\
& \phantom{3x_1 + {}} x_2 + 2x_3 \geq 20 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema della dieta (generale)

- n alimenti, m sostanze nutritive
- a_{ij} quantità della sostanza i in 1 unità dell'alimento j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i fabbisogno della sostanza i (i=1,…,m)
- c_j costo 1 unità dell' alimento j (j=1,…,n)
- x_j quantità dell'alimento j da acquistare (j=1,…,n)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Soluzione LP: Approccio intuitivo

- Blue Tornado (x_1) ha un profitto unitario più alto
  - conviene produrne il maggior numero possibile
  - Ponendo $x_2 = 0$
    - Vincolo 1: $x_1 \le 200$
    - Vincolo 2: $9\,x_1 \le 1566$ o $x_1 \le 174$
    - Vincolo 3: $12\,x_1 \le 2880$ o $x_1 \le 240$

$$
\begin{array}{llcrcrcl}
\max & 350\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & \le & 200 \\
 & 9\,x_1 & + & 6\,x_2 & \le & 1566 \\
 & 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & \le & 2880 \\
 & & & x_1 & \ge & 0 \\
 & & & x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

- Il massimo valore di x_1 è 174 e il profitto totale è €350*174 + €300*0 = €60900
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- No! ($x_1 = 122$, $x_2 = 78$, è amm. e vale €66100)

Soluzione LP: Approccio Grafico

- I vincoli di un problema LP definiscono la sua regione ammissibile.

- Il punto migliore nella regione ammissibile è la soluzione ottima per il problema.

- Per problemi LP con 2 (o 3) variabili, è possibile disegnare la regione ammissibile e trovare la soluzione ottima.

Interpretazione geometrica di LP

- *F* è l'intersezione di insiemi convessi associati ai vincoli

$$H = \{ x \in R^n : a^T x = d \}$$

Vincoli di Uguaglianza

$$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$$

Vincoli di Disuguaglianza

- *F* è un insieme convesso intersezione di un numero finito di insiemi convessi definiti dalle relazioni lineari: F é un poliedro convesso (se limitato: politopo)

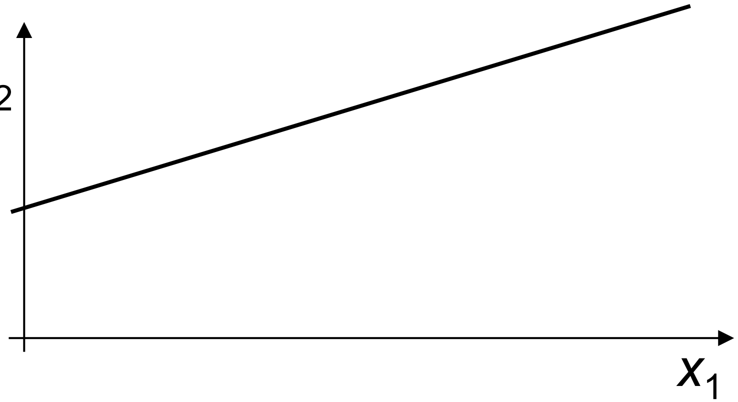
Politopo: Se il poliedro è limitato, ossia ha una "dimensione finita" (nel senso che non si estende all'infinito in tutte le direzioni), allora è chiamato politopo. Un politopo è quindi una regione convessa limitata, che in geometria è un oggetto che ha un numero finito di vertici e facce.

La distinzione tra poliedro convesso e politopo convesso dipende dalla limitatezza della regione ammissibile:
- Se la regione ammissibile F è illimitata, è un poliedro convesso.
- Se la regione ammissibile F è limitata, è un politopo convesso.

Equazioni Lineari

H={ $x \in R^n$: $a^T x = d$ }   è un iperpiano

L'insieme H rappresenta un iperpiano nello spazio R^n. Geometricamente, l'iperpiano è un "piano" (o una struttura di dimensione n−1) che separa lo spazio in due metà.

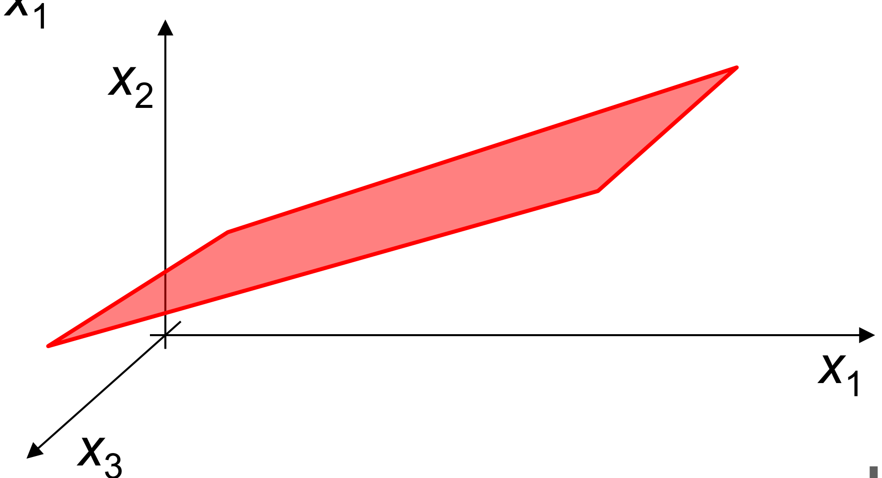


$$a_1x_1 + a_2x_2 = d$$

in R^2 è una retta

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$$

in R^3 è un piano



in R^4, un iperpiano è un sottospazio tridimensionale.

Disequazioni Lineari

Un semispazio S è una regione nello spazio che si trova "da un lato" dell'iperpiano definito dalla corrispondente equazione aTx=d.

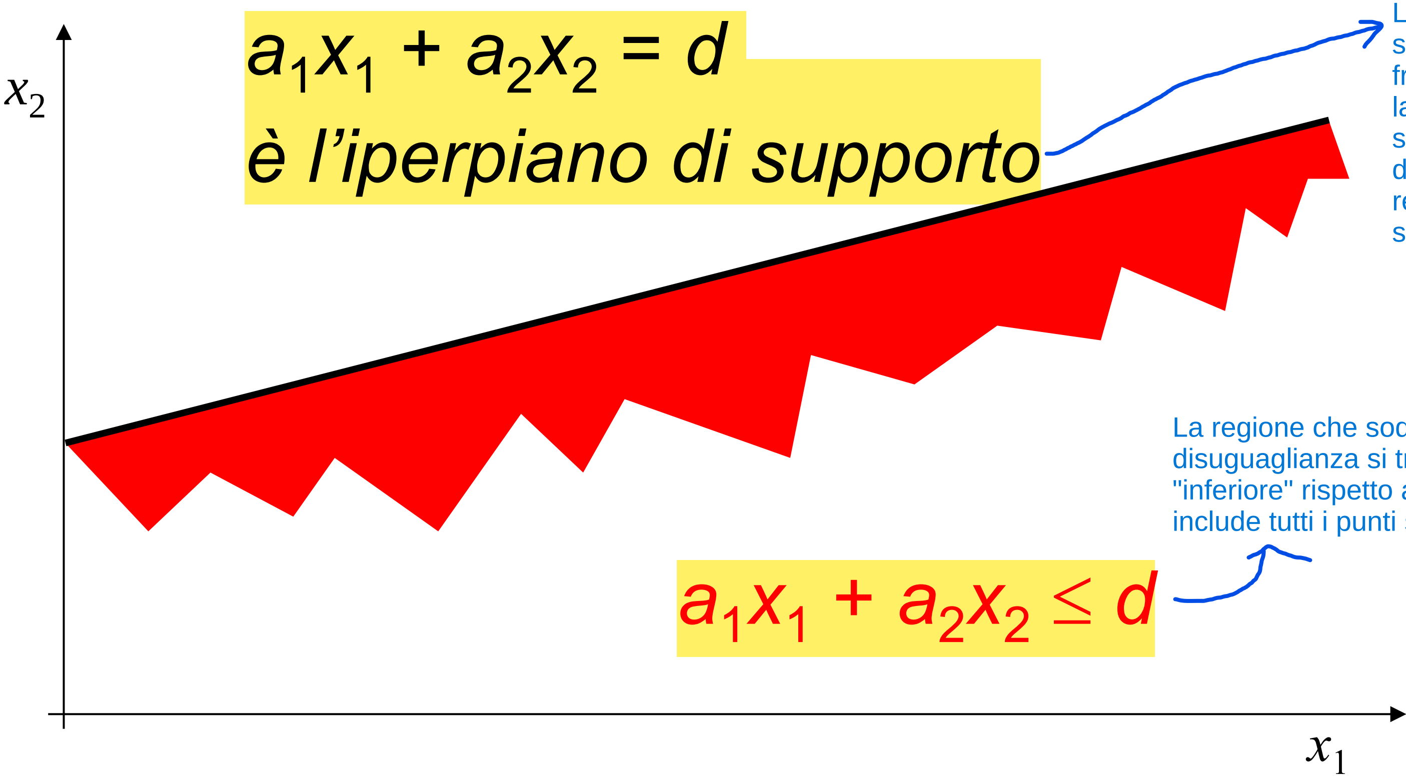
$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$ è un semispazio

che divide lo spazio in due metà.

$a_1x_1 + a_2x_2 = d$

è l'iperpiano di supporto

L'iperpiano di supporto è una frontiera che separa la regione che soddisfa la disuguaglianza dalla regione che non la soddisfa.

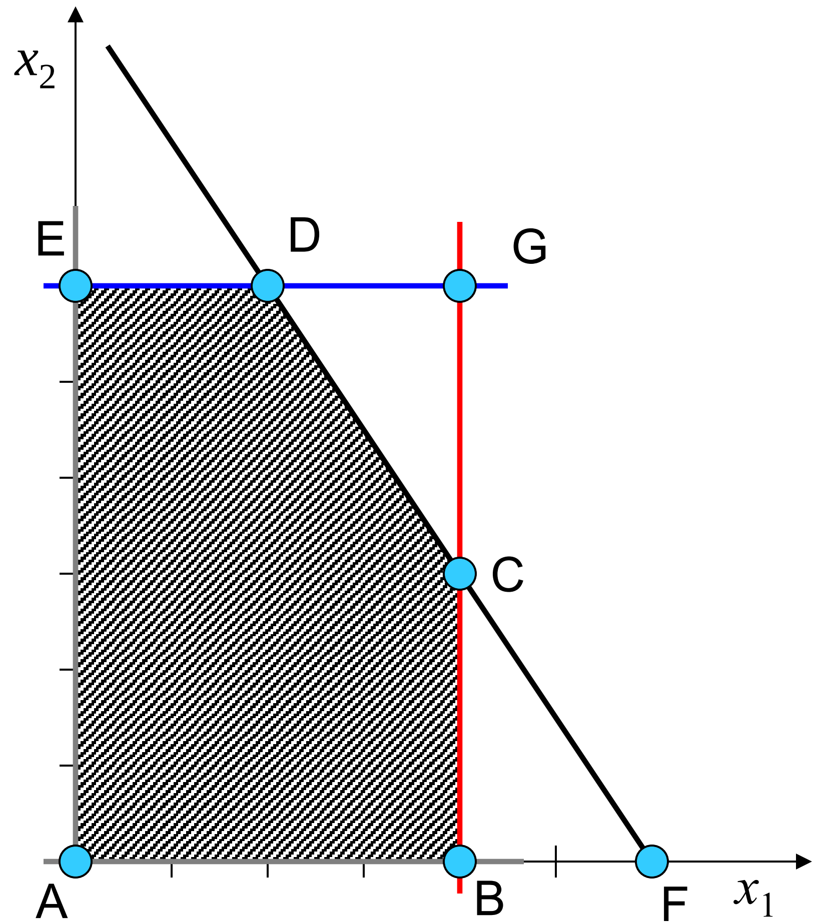


La regione che soddisfa la disuguaglianza si trova nel semispazio "inferiore" rispetto all'iperpiano, cioè include tutti i punti sotto o sulla retta

$a_1x_1 + a_2x_2 \leq d$

Regione ammissibile

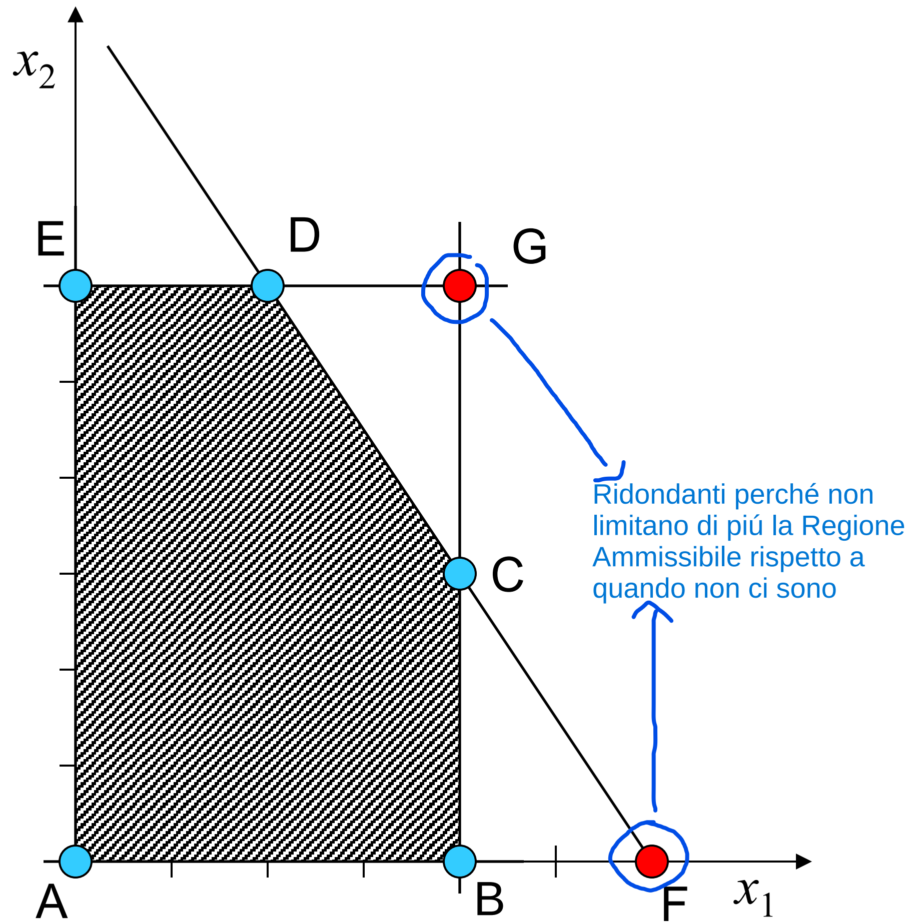
$$\begin{array}{llll}\max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\ s.t. & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\ & x_1 & , x_2 & \geq 0\end{array}$$



Vertici: intersezione di vincoli o di iperpiani di supporto

Vincoli ridondanti

$$
\begin{array}{llll}
\max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\
s.t. & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

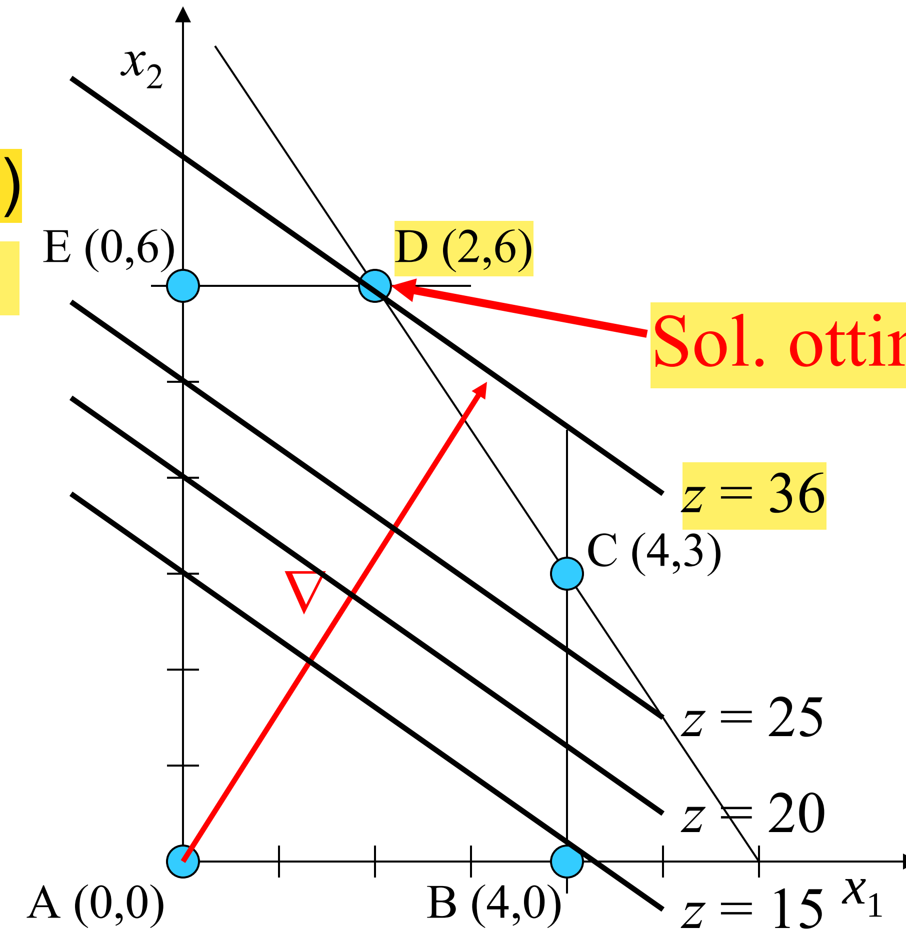


Soluzione grafica (1)

- si disegnano le rette
  $z = c^T x = costante$
  (perpendicolari al gradiente)
- si cerca l'intersezione tra F e la retta con z massimo (minimo)

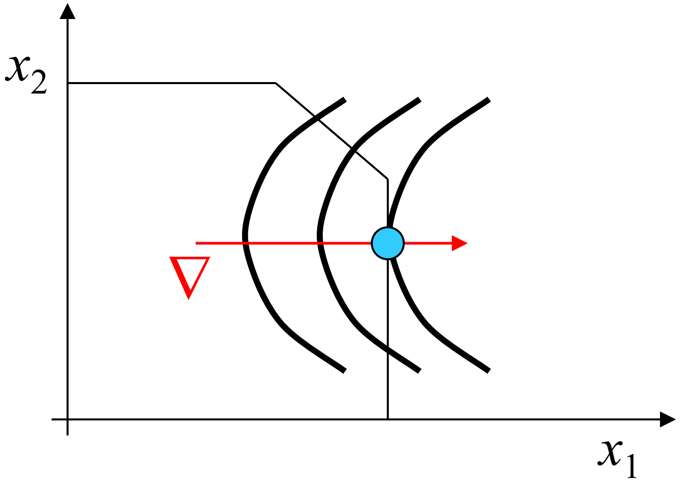
$\max z = 3x_1 + 5x_2$

$\nabla = (3,5)$

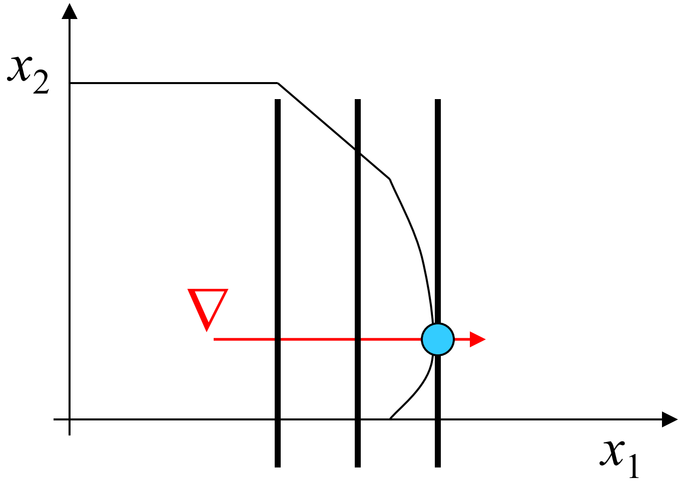


Soluzione grafica (2)

- L'intersezione ottima avviene sempre in corrispondenza di almeno un vertice di *F*
- <u>vero solo per LP</u> (quando Funzione Obiettivo e Vincoli Lineari)



φ non lineare



vincoli non lineari

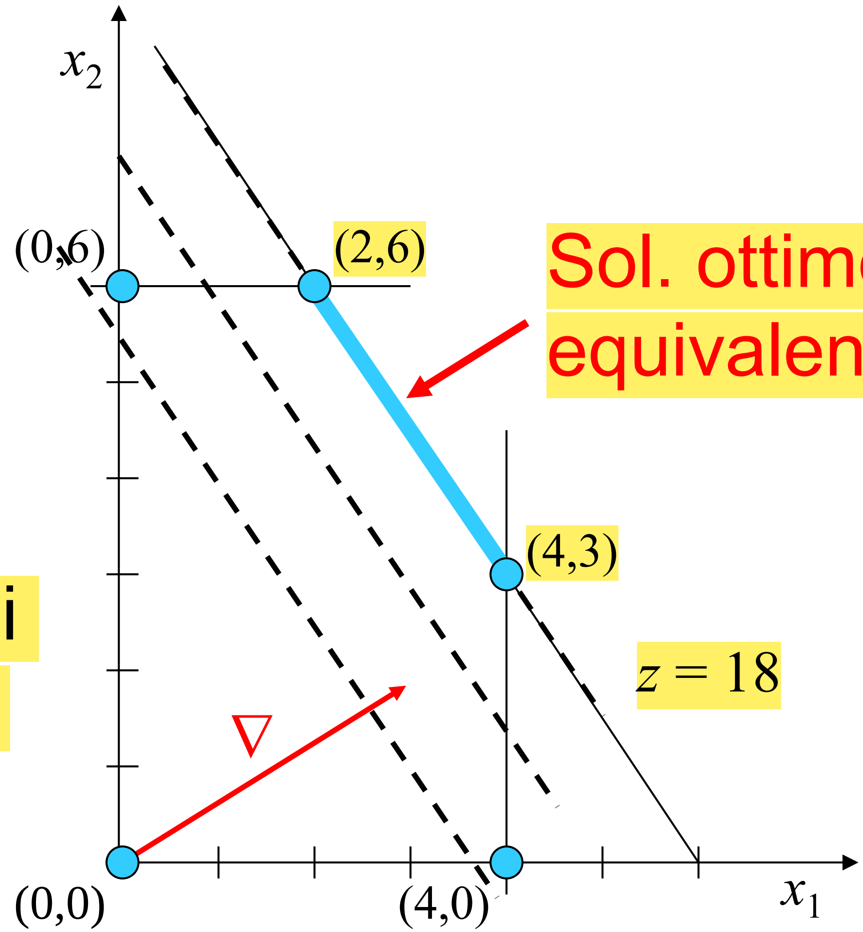
Soluzioni ottime alternative

- Esempio di soluzioni ottime alternative

$\max z = 3x_1 + 2\, x_2$

$\nabla = (3,2)$

- tra le infinite soluzioni ottime ci sono anche dei vertici



Esercizio

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } Z = \quad & 150\, X_1 + 100\, X_2 \\
\textbf{Subject to:} \quad & X_1 + X_2 \leq 600 \\
& 2\, X_1 + X_2 \leq 1000 \\
& X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Graphical Solution

$$\text{Max } Z = 150\, X_1 + 100\, X_2$$

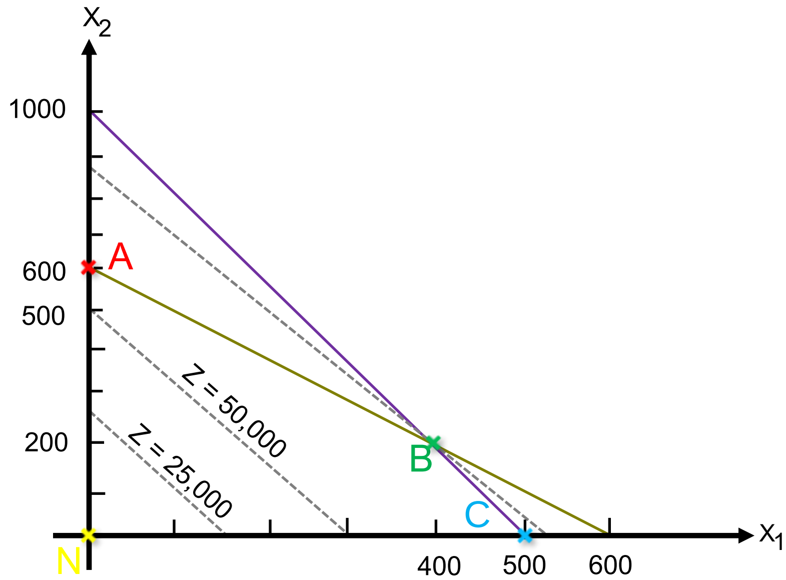
Subject to:

$$X_1 + X_2 \le 600$$

$$2\, X_1 + X_2 \le 1000$$

$$X_1,\ X_2 \ge 0$$

Sostituisco le Incognite X1 e X2, uno alla volta, con delle costanti: per sapere dove la retta passa per quei punti



Corner Points	X_1	X_2	Z
N	0	0	0
A	0	600	60,000
B	400	200	80,000*
C	500	0	75,000

Corner point B is the (unique) optimal solution with objective value Z = 80,000.

Notes:

- *Active* or *binding* constraints intersect with solution point.
- *Redundant* constraints have no effect on the feasible region.

Un vincolo è definito come attivo o vincolo di supporto se interseca il punto ottimale della soluzione, cioè se il punto di ottimo si trova sulla frontiera definita da quel vincolo.

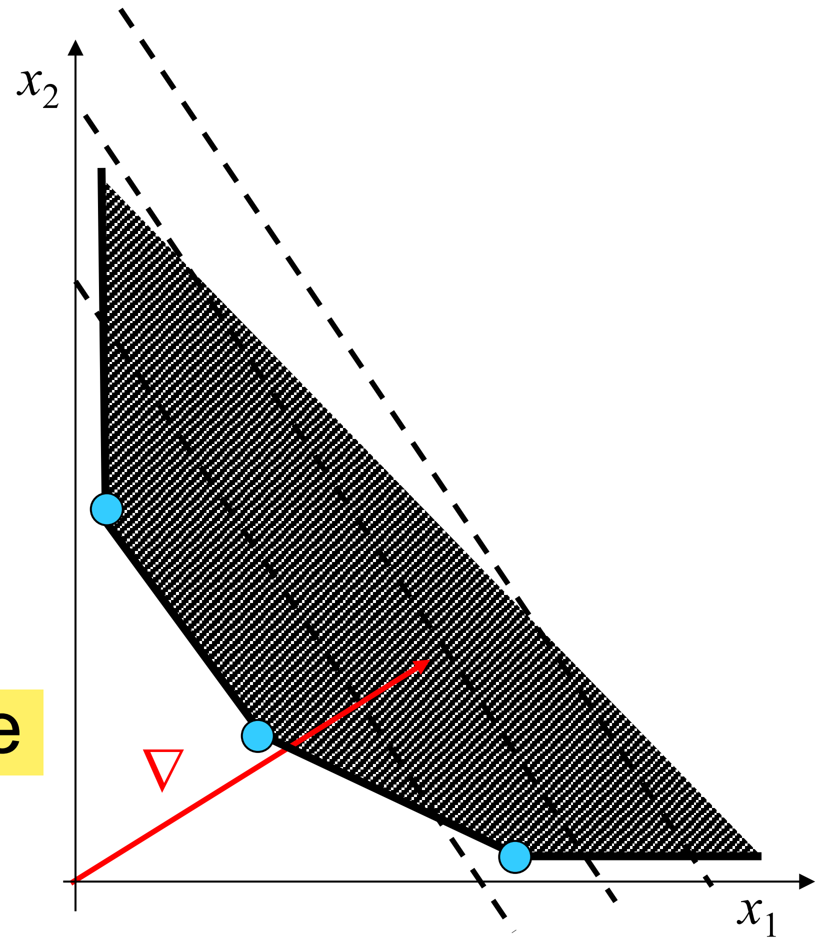
Un vincolo è definito come ridondante se non influisce sulla regione ammissibile, ossia se la sua rimozione non cambia la regione delle soluzioni ammissibili.

Soluzione ottima illimitata

- La regione ammissibile può essere illimitata

- La soluzione può a sua volta essere illimitata

- Normalmente significa che il modello è “sbagliato”



Limiti di LP

si riferiscono ai principi e alle condizioni di base che devono essere soddisfatte affinché il modello di ottimizzazione lineare sia valido e funzionante.

- Assunzioni implicite nella formulazione di un modello LP:

  1) Proporzionalità

  2) Additività

  3) Divisibilità

  4) Certezza

1A

Proporzionalità

La proporzionalità implica che:

- Gli effetti della variabile xh sono lineari: se aumenti la quantità di una risorsa, l'effetto su funzione obiettivo o vincoli sarà direttamente proporzionale. Cioè, se raddoppi la variabile xh, l'effetto sull'output della funzione obiettivo o sui vincoli sarà raddoppiato.
- Questo vale per tutte le variabili all'interno dei loro limiti ammessi: la proporzionalità non si applica solo a un punto specifico, ma a tutte le soluzioni che soddisfano i vincoli (cioè l'intervallo di ammissibilità delle variabili).

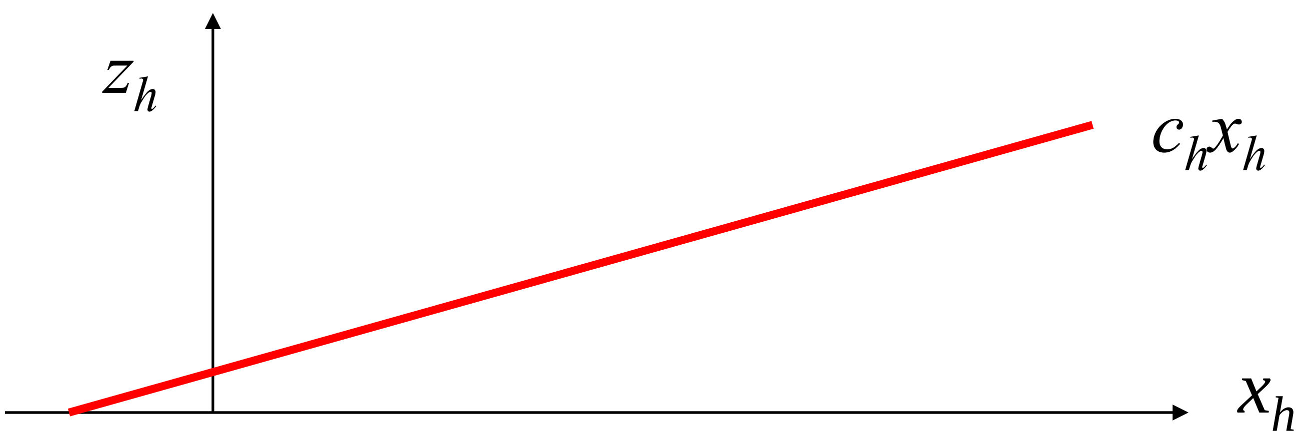
Se xh è la quantità di risorsa impiegata nella soluzione ottimale, l'effetto che questa risorsa ha sull'obiettivo (ad esempio, sui guadagni o sui costi) e sui vincoli è direttamente proporzionale a xh. Questo significa che ogni incremento o decremento della risorsa impatta l'obiettivo in maniera lineare.

Funzione Obiettivo

$$z = \ldots + c_h x_h \qquad \ldots$$

$$\ldots + a_{ih} x_h + \qquad \ldots \le d_i$$

- l'effetto dell'uso della risorsa h (f.o., vincoli) è proporzionale al livello x_h impiegato
- la proporzionalità si mantiene in tutto l'intervallo di ammissibilità per x_h



1B

Proporzionalità (2)

I fenomeni di saturazione indicano che, oltre un certo livello, l'ulteriore impiego di una risorsa o il cambiamento di una variabile non comporta più un miglioramento significativo dei risultati (funzione obiettivo) e può portare a una diminuzione dell'efficienza del sistema.

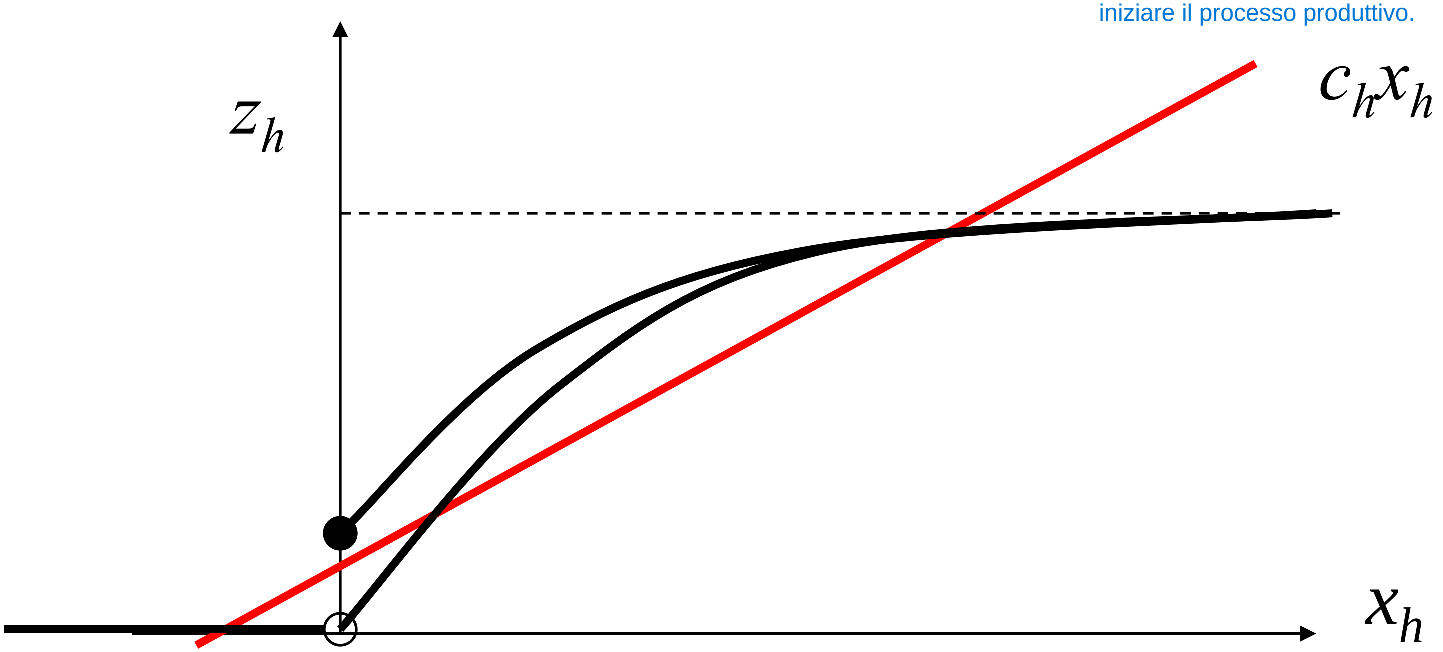
Un fenomeno di saturazione si verifica quando l'effetto di una variabile su una funzione non aumenta più in modo proporzionale, ma si riduce man mano che la variabile aumenta.

- fenomeni di saturazione (costo marginale decrescente)

Costo Marginale Decrescente: Si riferisce alla situazione in cui l'incremento del costo per ogni unità aggiuntiva di produzione diminuisce man mano che si aumenta la quantità di risorse impiegate. Questo fenomeno è spesso legato a una maggiore efficienza a lungo termine nell'uso delle risorse.

situazioni di start–up (avviamento)

Indicano i costi fissi iniziali necessari per avviare un'attività, che non dipendono direttamente dalla quantità di produzione o uso delle risorse, ma sono essenziali per iniziare il processo produttivo.



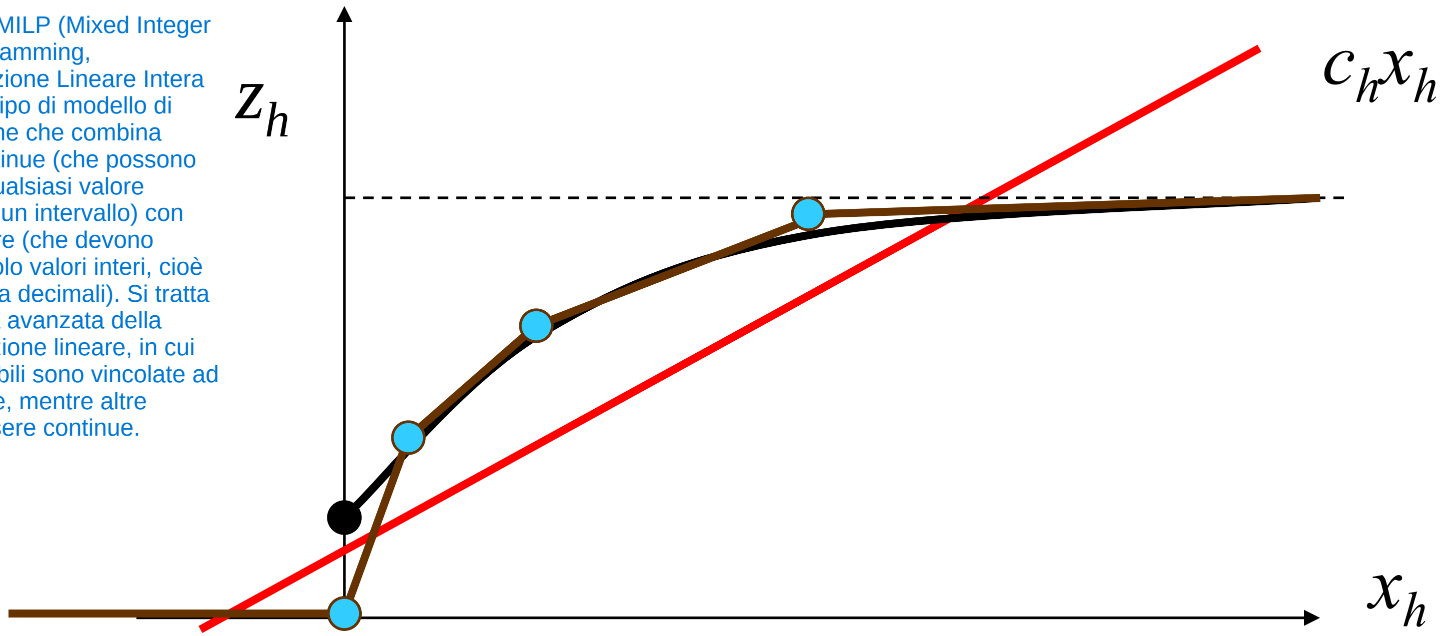
1c

Proporzionalità (3)

- Migliore approssimazione con funzione lineare a tratti → modello MILP (es. fixed–charge problem)

"migliore approssimazione con funzione lineare a tratti", ci si riferisce a un metodo per approssimare una funzione non lineare o complessa utilizzando una funzione lineare suddivisa in tratti. La "migliore approssimazione" indica che si cerca di ottenere la rappresentazione più fedele possibile della funzione originale, minimizzando l'errore tra la funzione approssimata e quella originale.

Un modello MILP (Mixed Integer Linear Programming, Programmazione Lineare Intera Mista) è un tipo di modello di ottimizzazione che combina variabili continue (che possono assumere qualsiasi valore all'interno di un intervallo) con variabili intere (che devono assumere solo valori interi, cioè numeri senza decimali). Si tratta di una forma avanzata della programmazione lineare, in cui alcune variabili sono vincolate ad essere intere, mentre altre possono essere continue.



2

Additività

l'additività garantisce che ogni attività contribuisca in modo lineare e indipendente sia al costo totale che al consumo delle risorse, facilitando la modellizzazione e la risoluzione dei problemi di programmazione lineare.

la programmazione lineare cerca di ottimizzare il costo totale (funzione obiettivo) rispettando i limiti di risorse definiti dai vincoli.

- costo soluzione e consumo delle risorse nei vincoli

$$z = \ldots + c_h x_h + c_k x_k \ldots$$

$$\ldots + a_{ih} x_h + a_{ik} x_k \ldots \leq d_i$$

Funzione obiettivo: Ogni attività contribuisce al costo totale in modo separato, senza che ci siano interazioni tra le attività.
Vincoli: Il consumo totale di risorse è dato dalla somma dei contributi indipendenti di ogni attività.

- somma dei termini indipendenti legati alle attività

$\Rightarrow$ Non vi sono interazioni tra le diverse attività che influenzano il costo o i vincoli

$\Rightarrow$ L'effetto dovuto ad una attività non dipende dal livello di produzione delle altre

3

Divisibilità

- Le variabili decisionali possono essere suddivise ed assumere anche valori non interi
  (Es. tasso di produzione….)
- Spesso solo i valori interi hanno significato
  (Es. n. addetti, n. di pezzi prodotti…):
  - riformulazione con variabili che rappresentano percentuali sul numero totale
    (Es. tasso di produzione….)
  - formulazione con modelli ILP e MILP
  - alcuni LP hanno soluzione ottima sempre intera

ILP: Programmazione Lineare Intera, dove le variabili decisionali devono assumere esclusivamente valori interi.
MILP: Programmazione Lineare Intera Mista, dove alcune variabili decisionali sono intere, altre continue (non intere)

1

Certezza

- Tutti i parametri del modello sono costanti note
- Spesso i parametri sono frutto di stime, previsioni o sono affetti da errori di misura
- se si modifica un costo o un coefficiente la soluzione resta ottima?
- analisi di sensitività della soluzione alla variazione dei parametri

Forme di PL

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = \boxed{c^T x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

$$g_i(x) \leq 0, \; h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, p)$$

con $g_i, h_j : R^n \rightarrow R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

Es. $\boxed{a_{i1} x_1} + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \boxed{\geq d_i}$

Regione ammissibile di PL

- *F* è un insieme convesso (poliedro)

- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito (≡ vertici del poliedro)
  ⇒ problema combinatorio

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$

Funzione Obiettivo, dove c indica i parametri della funzione obiettivo per ogni variabile decisionale

$$Ax \geq d$$

Vincoli, dove A indica i parametri dei Vincoli legati alle variabili decisionali

$$x \geq 0$$

Non Negatività della Soluzione

Esempio

Funzione Obiettivo $\min 3x_1 - 2x_2 + 1x_3$

Vincoli

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 &\geq 1 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Colonne — 2 Righe

$$n = 3; \; m = 2 \quad c^T = [3\; -2\; 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (1)

La Forma Generale di un problema di PL è la rappresentazione più flessibile e comprende:
- Funzione obiettivo: può essere sia di massimizzazione che di minimizzazione.
- Vincoli: possono includere disuguaglianze di tipo "<=" (minori o uguali), ">=" (maggiori o uguali) o uguaglianze "=".
- Variabili: POSSONO (non devono) essere soggette a restrizioni di non negatività o essere illimitate (cioè, possono assumere valori positivi o zero).

Questa forma è utile per modellare una vasta gamma di problemi reali senza restrizioni specifiche sulla natura dei vincoli o delle variabili.

- Forma generale

A = matrice intera m x n — Indica i parametri dei Vincoli

d = vettore intero di m elementi — m = Numero di Vincoli

c = vettore intero di n elementi — n = Numero di Variabili Decisionali

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^T x & & \\
 & a_i^T x = d_i & & i \in M \\
 & a_i^T x \geq d_i & & i \in M' \\
 & x_j \geq 0 & & j \in N \\
 & x_j \text{ libera} & & j \in N'
\end{array}
$$

Esempio

$$
\begin{array}{llll}
\min & x_1 & & + x_3 \\
 & & x_2 & - 2x_3 = 4 \\
 & x_1 & + x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0 \\
 & & & x_3 \text{ libera}
\end{array}
$$

$M = \{1\}$

$M' = \{2\}$

$N = \{1,2\}$ $N' = \{3\}$

$m = 2$

$n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (2)

- Forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

La Forma Canonica è un'altra rappresentazione standardizzata dei problemi di PL, caratterizzata da:
- Funzione obiettivo: formulata come un problema di minimizzazione.
- Vincoli: espressi come disuguaglianze.
- Variabili: tutte le variabili devono essere non negative.

La forma canonica è utile perché molti problemi reali presentano vincoli come disuguaglianze, e questa forma permette di rappresentarli direttamente senza necessità di trasformazioni aggiuntive.

- Forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

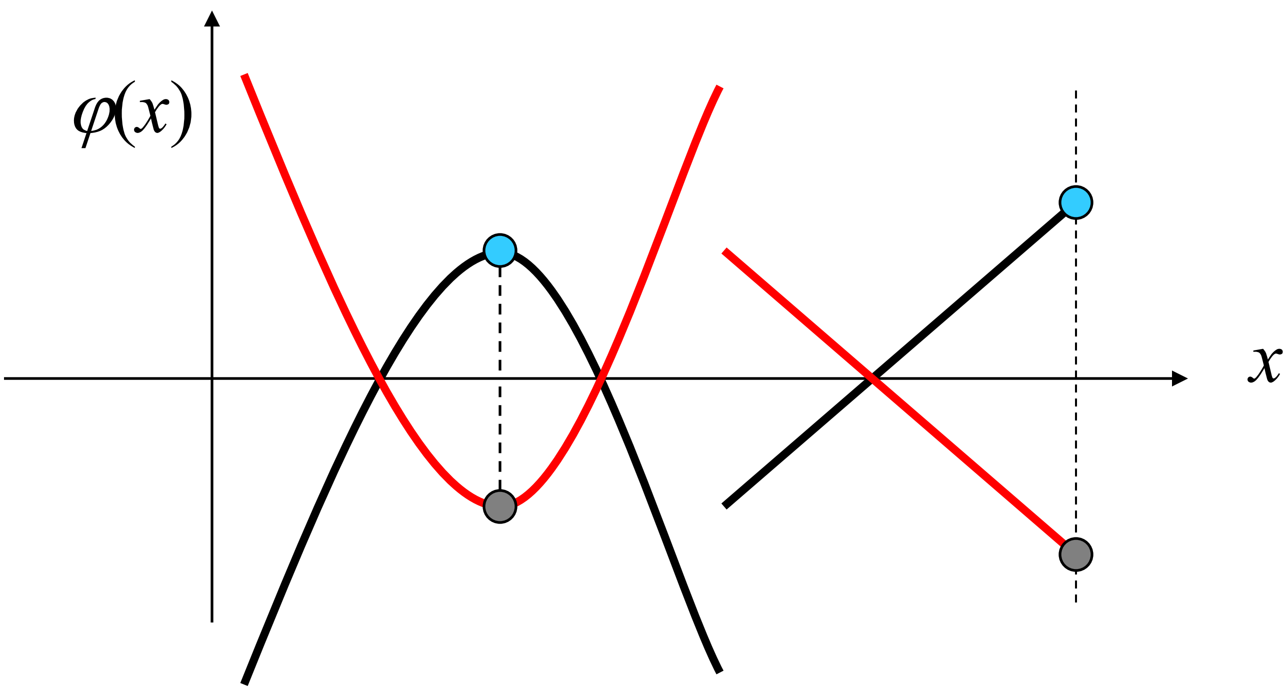
La Forma Standard è una rappresentazione più restrittiva e richiede che il problema sia strutturato come segue:
- Funzione obiettivo: formulata come un problema di minimizzazione.
- Vincoli: espressi come uguaglianze (equazioni lineari).
- Variabili: tutte le variabili devono essere non negative.

La forma standard è spesso utilizzata perché facilita l'applicazione di algoritmi di soluzione, come il Metodo del Simplesso.

Le 3 forme sono equivalenti (1)

a) Funzione obiettivo:

$$\max c^T x = -\min (-c^T x)$$



Variabili aggiuntive, chiamate variabili di slack (eccedenza);
Variabili di surplus (mancanza)

Le 3 forme sono equivalenti (2)

che è un passaggio fondamentale per convertire un problema in Forma Standard, dove tutti i vincoli devono essere espressi come equazioni.

b) Trasformazione di disequazioni in equazioni:

b1) $x_1 \leq d_1 \qquad \Rightarrow \quad x_1 + x_s = d_1$

$x_s \geq 0$ variabile slack (xs aggiunta per far si che x1 sia uguale a d1)

In ogni soluzione ammissibile (x_1, x_s):

se $x_s = 0 \Rightarrow x_1 = d_1$; se $x_s > 0 \Rightarrow x_1 < d_1$

b2) $x_1 \geq d_1 \qquad \Rightarrow \quad x_1 - x_s = d_1$

$x_s \geq 0$ variabile surplus (xs tolta per far si che x1 sia uguale a d1)

se xs=0 allora x1=d1 ; se xs<0 allora x1>d1

Le 3 forme sono equivalenti (3)

c) Trasformazione di equazioni in disequazioni:

$$a_i^T x = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x \geq d_i \\ -a_i^T x \geq -d_i \end{cases}$$

Esempio:
- Se xi>0: la variabile xi+ assume il valore positivo di xi, mentre xi− è zero.
- Se xi<0: succede il contrario di xi>0 (xi+ é zero mentre xi- assume valore negativo di xi)
- Se xi=0: entrambi sono zero

Le due nuove variabili xi+ e xi- sono sempre non negative (xi viene scomposta in due variabili utilizzabili dagli algoritmi standard di Programmazione Lineare)

d) Variabili libere

parte negativa della variabile xi

$$x_i \text{ libera} \Rightarrow x_i = x_i^+ - x_i^- \text{ con } x_i^+, x_i^- \geq 0$$

parte positiva della variabile xi

b), d) *aumentano n* (Aumentano le Variabili Decisionali)

c) *aumenta m* (Aumentano i Vincoli)

Esempio

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = -2x_1 + 3x_2 & & \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
2x_1 - x_2 & = & 2 \\
& & \\
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (1)

$$
\begin{array}{llll}
\max z = -2x_1 + 3x_2 & & & \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 4 & \\
2x_1 - x_2 & \cancel{=} & \cancel{2} & \geq 2 \\
\boxed{-2x_1 + x_2} & \boxed{\geq} & \boxed{-2} & \\
x_1 & \geq & 0 & \\
x_2 & & \text{libera} &
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (2)

$$
\begin{array}{rrrl}
\max z = & -2x_1 & \cancel{+\,3x_2}\ +3x_2^+ - 3x_2^- & \\
& x_1 & \cancel{+\,2x_2}\ +2x_2^+ - 2x_2^- & \leq 4 \\
& 2x_1 & \cancel{-\,x_2}\ - x_2^+ + x_2^- & \geq 2 \\
& -2x_1 & \cancel{+\,x_2}\ + x_2^+ - x_2^- & \geq -2 \\
& x_1 & ,\ x_2^+,\ x_2^- & \geq 0 \\
& & \cancel{x_2} & \text{libera}
\end{array}
$$

Essendo x2 libera, devo scomporla in due variabili non negative

Forma generale → F. canonica (3)

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max z = & -2x_1 & + 3x_2^+ & - 3x_2^- & \\
& \overset{-}{} x_1 & \overset{-}{\cancel{+}}\, 2x_2^+ & \overset{+}{\cancel{-}}\, 2x_2^- & \cancel{\le 4} \quad \ge -4 \\
& 2x_1 & - x_2^+ & + x_2^- & \ge 2 \\
& -2x_1 & + x_2^+ & - x_2^- & \ge -2 \\
& x_1\,, & x_2^+\,, & x_2^- & \ge 0
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (4)

$$\cancel{\max}\; z = \overset{+}{\cancel{-}}\, 2x_1 \overset{-}{\cancel{+}}\, 3x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}}\, 3x_2^-$$

$$-\min - z =$$

$$\begin{array}{rcl}
- x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq & -4 \\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- & \geq & 0
\end{array}$$

Forma generale → F. canonica (5)

$$
\begin{array}{rrcl}
-\min -z = & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- & & \\
& -x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq & -4 \\
& 2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
& -2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
& x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma generale → Forma standard

$$- \min -z = \quad 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^-$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2^+ + x_2^- &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- \;,\; x_3 \geq 0$$

Prima ho cambiato i segni per girare la disequazione da maggiore a minore e poi ho tolto la disequazione per avere una equazione (tramite Variabile Slack)

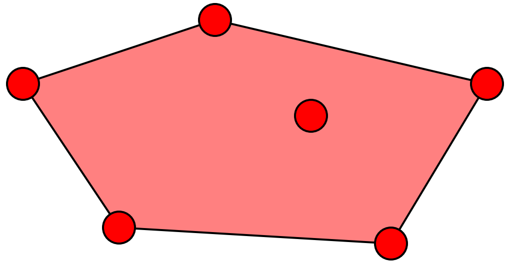
Vertici ed Insiemi Convessi

Def.: z è vertice di un insieme convesso S

se e solo se

$\Leftrightarrow$ non è esprimibile come combinazione convessa di altri punti di S

Def.: Dato un insieme di punti $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_K\} \subset R^n$ si dice chiusura convessa di P, $conv$(P) il più piccolo insieme convesso che contiene P.



La chiusura convessa conv(P) è semplicemente l'insieme di tutti i punti che possono essere scritti come combinazioni convesse dei punti in P. È il "contenitore convesso minimo" che racchiude tutti i punti di P.

Unicità: La chiusura convessa di un insieme P è unica.
Invariabilità: Se P è già convesso, allora conv(P)=P.

Teoremi

Th. 1: (Ogni punto interno o sul bordo del politopo può essere scritto come combinazione convessa dei vertici).

Ogni punto di un politopo (poliedro limitato) è combinazione convessa dei vertici del politopo

Th. 2:

In un problema PL con F non vuoto e limitato esiste sempre almeno un vertice ottimo

Se esiste una soluzione ottima a un problema lineare, allora ALMENO UNA delle soluzioni ottime si trova in uno dei vertici del politopo definito dai vincoli.

Dimostrazione (probl. di minimo)

c = vettore costo; (i parametri legati alle Variabili Decisionali della Funzione Obiettivo)

$x^{(0)}$ = soluzione ottima (non vertice)

$x^{(1)},\dots,x^{(p)}$ = vertici di F (politopo convesso)

Combinazione Convessa dei vertici di F

1 $x^{(0)} \in F \Rightarrow x^{(0)} = \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)}$ con $\sum_{i=1,p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \; \forall i$

x(j) é il vertice con costo minimo tra tutti i vertici

tra tutti i vertici

2 sia $x^{(j)}$ il vert. di costo min.: $c^T x^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq p} \{c^T x^{(i)}\}$

3 $c^T x^{(0)} = c^T \sum_{i=1,p} \lambda_i \underbrace{x^{(i)}}_{\text{vertice i}} \geq c^T x^{(j)} \sum_{i=1,p} \lambda_i = c^T x^{(j)}$

>= perché cT x(j) é il vertice con costo minimo tra tutti i vertici

$$\Rightarrow \boxed{c^T x^{(0)} \geq c^T x^{(j)}}$$

Esiste un vertice $x^{(j)}$ cui corrisponde una soluzione non peggiore di $x^{(0)}$!!!

Esercizi su modelli PL