

Programmazione Lineare Intera: Algoritmo Branch and Bound

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.)

rev. 2.2(AH) – 2024



Algoritmi generali per PLI

- Metodi **esatti** tradizionali (anni 60-oggi):
 - Metodo dei piani di taglio (cutting planes)
 - **Branch-and-Bound**
 - Programmazione Dinamica
- ...
- Metodi esatti più avanzati (anni 90-oggi):
 - Branch-and-Bound + **Cutting planes** = Branch-and-**Cut**
 - Branch-and-Price/Column generation

Branch and Bound

- Tecnica generale per la risoluzione di problemi di **ottimizzazione combinatoria** (F finito) \rightarrow L'insieme delle soluzioni è finito
- Si basa sulla scomposizione del problema in sottoproblemi (“Divide and Conquer”)
- Problema da risolvere: $P^0 = (z(\cdot), F(P^0))$
 - Funzione obiettivo: $z(\cdot)$
 - Regione ammissibile: $F(P^0)$
- Soluzione ottima: $z^* = z(P^0) = \min \{ z(x) : x \in F(P^0) \}$
- Miglior soluzione ammissibile nota: z^{Best}
(alla fine $z^* = z^{Best}$)

Branch and Bound (2)

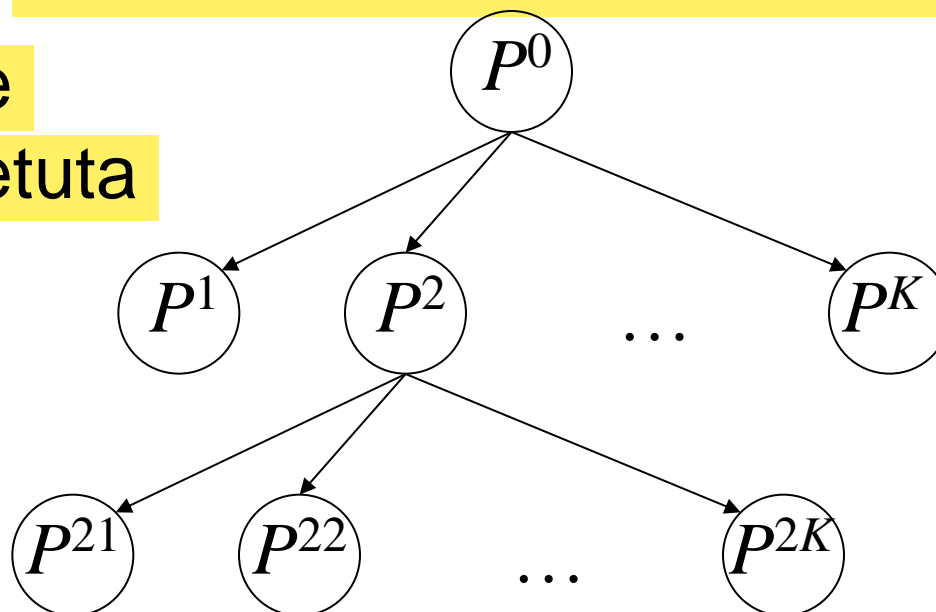
- Suddivisione di P^0 in K sottoproblemi: P^1, P^2, \dots, P^K la cui totalità rappresenti P^0
- Ad esempio si ottiene suddividendo $F(P^0)$ in sottoinsiemi $F(P^1), F(P^2), \dots, F(P^K)$ tali che

$$\bigcup_{k=1}^K F(P^k) = F(P^0)$$

- preferibilmente la regione ammissibile va partizionata: $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset \quad \forall P^i, P^j: i \neq j$

Rappresentazione

- Il processo di suddivisione (**ramificazione, Branching**) si può rappresentare mediante un albero decisionale (**Branch Decision Tree**)
 - Nodi: problemi, Archi: relazione di discendenza
 - La suddivisione può essere ripetuta ricorsivamente



Branch and Bound (3)

- La soluzione ottima del sottoproblema P^k è:

$$z^k = z(P^k) = \min \{ z(x) : x \in F(P^k) \}$$
- risolvere P^0 equivale a risolvere tutti i P^k generati:

$$z^* = z(P^0) = \min \{ z(P^1), z(P^2), \dots, z(P^K), \dots \}$$
- Un sottoproblema P^k è risolto se: soddisfa una delle seguenti condizioni:
 - Si determina la soluzione ottima di P^k
(Es. PLI: $P^k \rightarrow C(P^k)$ con soluzione x^{Ck} intera);
 - Si dimostra che $F(P^k) = \emptyset$ (P^k impossibile); (Regione Ammissibile Vuota)
 - Si dimostra che $z(P^k) \geq z^{Best}$
(Es. PLI : se $z^{Ck} \geq z^{Best}$ allora anche $z^k \geq z^{Best}$)
- I sottoproblemi non risolti vanno suddivisi

Non ha senso continuare a esaminare quel sottoproblema. Questo perché, anche se si trovasse la soluzione ottima di P_k , non sarebbe migliore della soluzione già conosciuta z^{Best} (miglior soluzione attualmente conosciuta).



Branch and Bound per PLI

- $(P^0) \min z^0 = c^T x$ Funzione Obiettivo (dove X variabili decisionali)
- $Ax = d$ Matrice dei Vincoli
- $x \geq 0$, intero X devono essere interi e non negativi

Notazione:

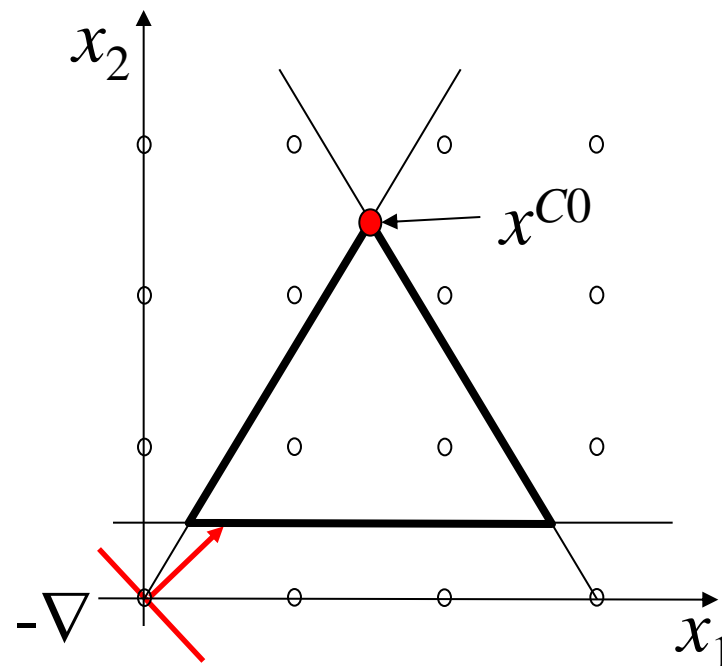
- x^k soluzione ottima di P^k (intera), di valore z^k ($z^0 \equiv z^*$)
- x^{Ck} soluzione ottima di $C(P^k)$, di valore z^{Ck} (x^{Ck} soluzione di Problema rilassato, cioè senza vincoli di interezza)
- Si noti che: $z^{Ck} = c^T x^{Ck} \leq z^k = c^T x^k$
- Se x^{C0} è intera $\Rightarrow x^* = x^0 = x^{C0}$ (soluzione ottima);
- Altrimenti ...

Branch and-Bound per PLI (2)

Esempio di problema PLI:

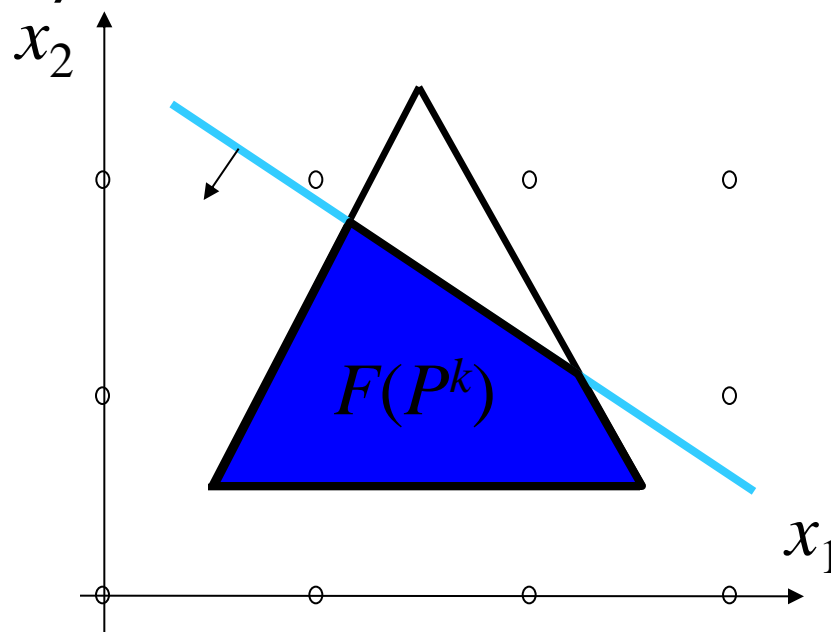
$$\begin{array}{llll}
 \max z & x_1 & +x_2 & \\
 s.t. & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\
 & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \\
 & & x_2 & \geq 1/2 \\
 & x_1 & , & x_2 \geq 0 \\
 & & & \text{intere}
 \end{array}$$

- $x^{C0} = (3/2, 5/2)$



Branching

- La soluzione di $C(P^0)$ è frazionaria:
 → suddividi $F(P^0)$ in K parti (Es. $K=2$)
- $F(P^k)$ si può ottenere aggiungendo a $F(P^0)$ un vincolo $\alpha^k x \leq \beta^k$



Branching (2)

Due o più eventi sono mutuamente esclusivi se non possono verificarsi contemporaneamente. Un insieme di eventi è esaustivo se copre tutte le possibili outcomes. Significa che almeno uno degli eventi deve verificarsi in ogni esperimento.

- Scelta una componente x^{C0}_j frazionaria, imponiamo due condizioni **mutuamente esclusive** ed **esaustive**, valide per ogni soluzione intera di P^0 :

$$x_j \leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor \quad \text{or} \quad x_j \geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

Aggiungo Vincolo

$$(P^1) \min z^1 = c^T x$$

$$Ax = d$$

$$x \geq 0, \text{intero}$$

$$x_j \leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor$$

$$(P^2) \min z^2 = c^T x$$

$$Ax = d$$

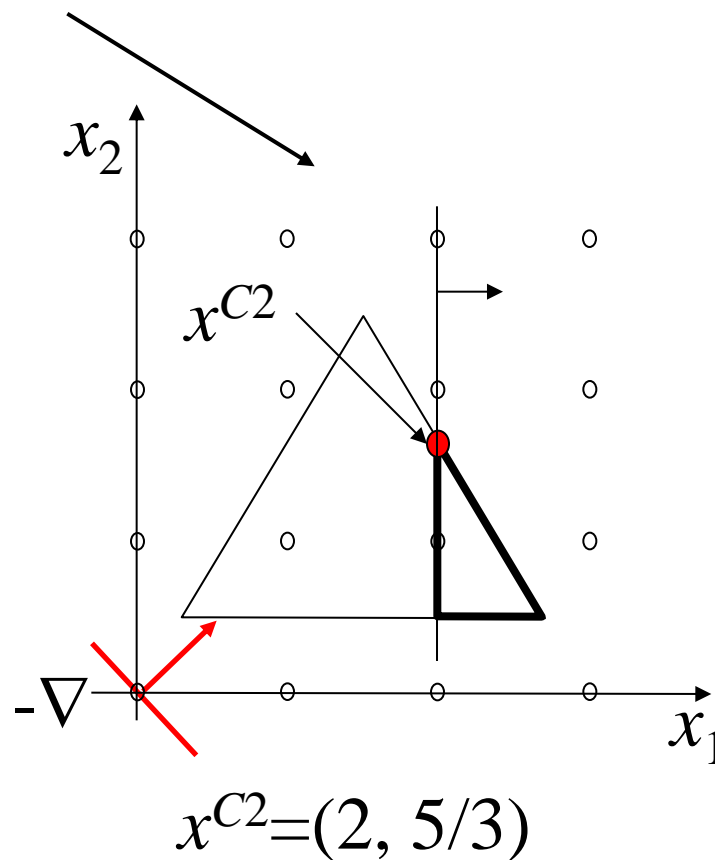
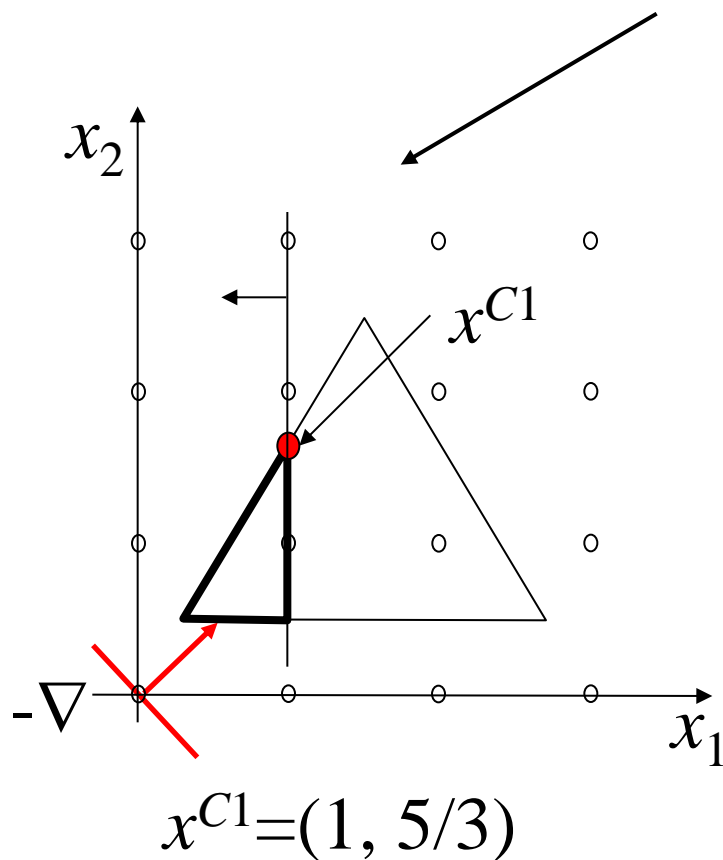
$$x \geq 0, \text{intero}$$

$$x_j \geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

$$z^0 = \min (z^1, z^2)$$

Prima ramificazione

- Es : $x_1^{C0} = 3/2 \Rightarrow x_1 \leq 1$ or $x_1 \geq 2$:



Branching (3)

- Normalmente x^{C1} e /o x^{C2} non sono interi
 \Rightarrow si continua a ramificare, cioè :
- Da ogni problema P^i si creano due nuovi problemi P^j e P^k a meno che :
 - x^{Ci} sia intero, oppure
 - il rilassamento continuo di P^i sia impossibile
- Quale variabile si sceglie per il Branching ?
 - la prima frazionaria Si seleziona la prima variabile che presenta una parte frazionaria.
 - quella con parte frazionaria maggiore In alternativa, si può scegliere la variabile con la parte frazionaria maggiore.
 - ...

Strategia di esplorazione

- Se esiste più di un sottoproblema “in sospeso”, qual è il prossimo da esaminare ?
- $z^{C1} = 8/3 \geq z^1$; $z^{C2} = 11/3 \geq z^2$ (problema di max)
- se c^T è intero, allora $z^* = c^T x$ è intera con x intera da cui $z^C \geq \lfloor z^C \rfloor \geq z^*$ (upper bound migliore)
(se problema di minimo: $z^C \leq \lceil z^C \rceil \leq z^*$)
- Prossimo sottoproblema da esaminare:
 - $z^1 \leq \lfloor 8/3 \rfloor = 2$, mentre $z^2 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$
 - ➔ meglio P^2 !

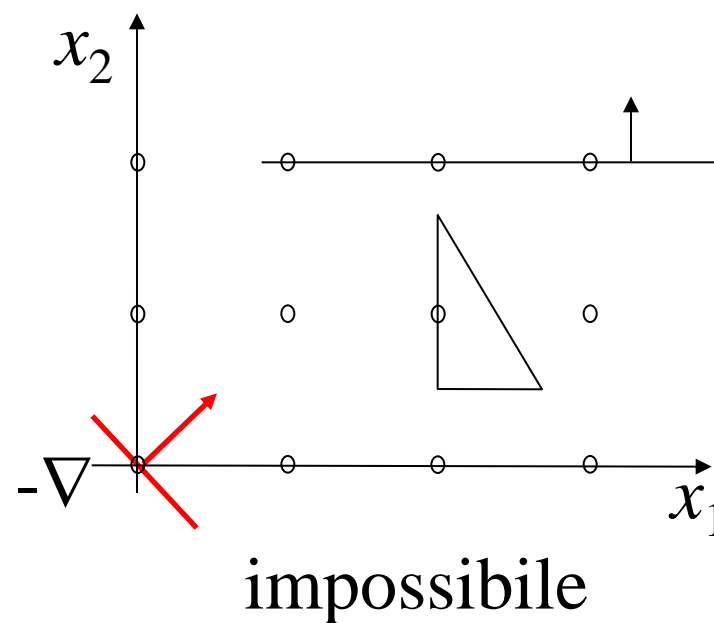
Se Problema di Massimo, scelgo il Sottoproblema con Upper Bound Maggiore.
Se Problema di Minimo, scelgo il Sottoproblema con Lower Bound Minore.

Scegliere un sottoproblema con un lower/upper bound minore/maggiore significa che si sta esplorando una soluzione che ha il potenziale di essere migliore (ovvero, più vicina all'ottimo) rispetto agli altri sottoproblemi. Questo approccio mira a minimizzare il numero di sottoproblemi che devono essere risolti, aumentando l'efficienza complessiva della ricerca.

- $$x^{C2}_2 = 5/3$$

$$(P^3) \ P^2 + x_2 \leq 1$$

$$(P^4) \quad P^2 + x_2 \geq 2$$



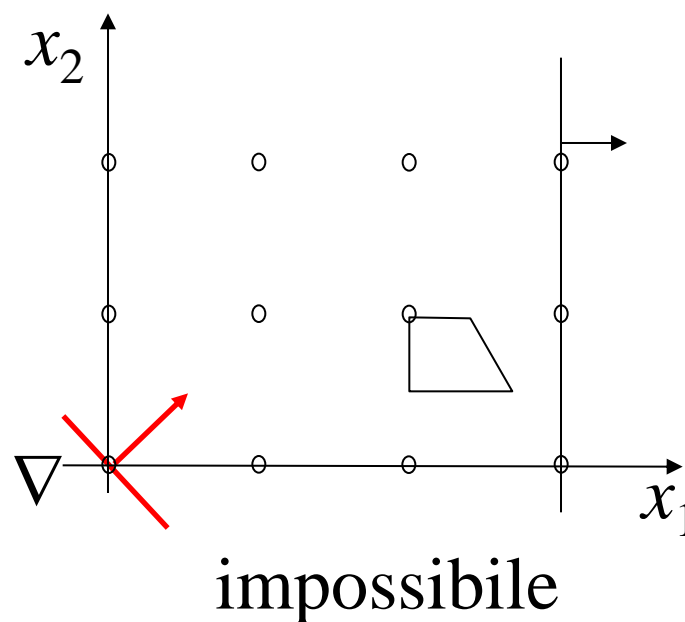
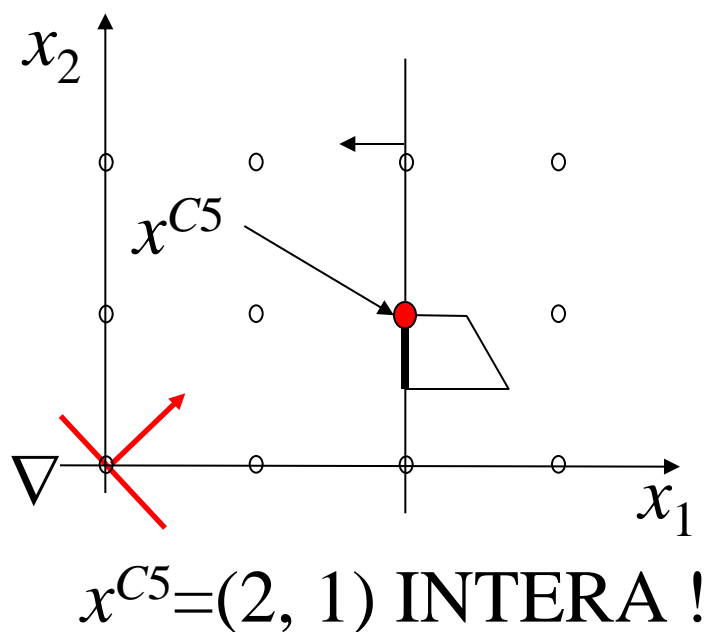
Terza ramificazione

- Es: da P^3 :

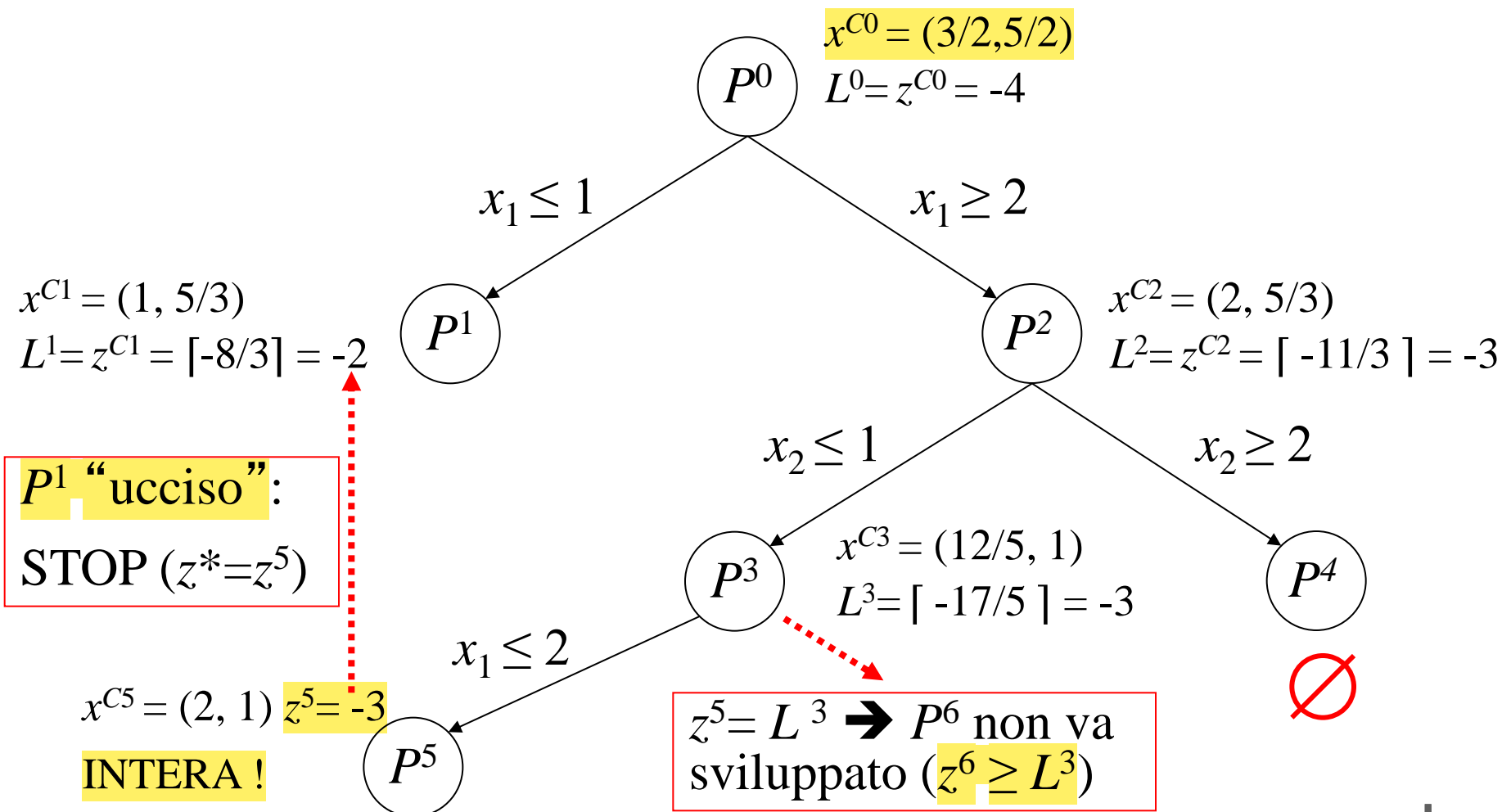
$$x^{C3}_1 = 12/5$$

$$(P^5) P^3 + x_1 \leq 2$$

$$(P^6) P^3 + x_1 \geq 3$$



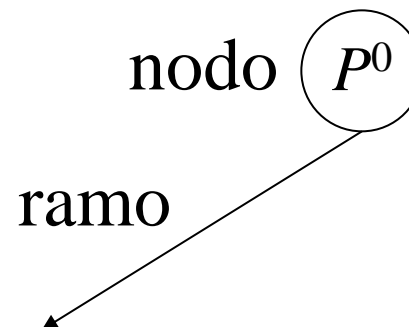
Albero decisionale



Terminologia

P indica Problema

- 0 (o P^0) nodo radice
- 4, 5, ... nodi “foglia” P4 e P5 nodi foglia
- 2 “padre” di 3 e 4 P2 padre di 3 e 4
- 3 e 4 “figli” di 2 P3 e P4 figli di P2
- 2 “progenitore” di 3, 4 e 5 P2 progenitore di P3, P4 e P5
- 3, 4, 5 “discendenti” di 0 e 2 P3, P4, P5 discendenti di P0 e P2



- Si continua il branching finché esistono nodi attivi
- Soluzione di P^0 = sol. della foglia di costo massimo