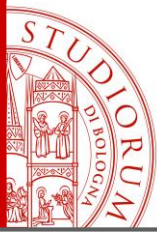


# Resource-Constrained Project Scheduling

Alessandro Hill

rev. 1.1(AH) – 2024



$t$  = istante di tempo  
 $T$  = periodo di tempo

# The Resource-Constrained Project Scheduling Problem

## We are given:

- Resources  $R = \{1, 2, \dots\}$  (*renewable resources*)  
Per-period availability for resource  $r$ :  $q_r > 0$
  - Jobs  $J = \{1, 2, \dots\}$   
Duration of job  $j$ :  $d_j \geq 0$   
Per-period consumption of resource  $r$ :  $u_{j,r} \geq 0$
  - Time horizon  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$
  - Job precedences  $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 7), \dots\}$
- Si cerca un piano (schedule) che minimizzi la durata complessiva (makespan) del progetto
- Annotations:**
- Sono risorse rinnovabili, cioè si rigenerano e vengono riutilizzate in ogni periodo di tempo. Ogni risorsa  $r$  ha una disponibilità per periodo, rappresentata da  $q_r$ , che deve essere maggiore di zero.
  - Ogni attività  $j$  ha una durata  $d_j \geq 0$ , che rappresenta il numero di periodi richiesti per completarla. Durante la sua esecuzione, l'attività consuma risorse  $u_{j,r} \geq 0$ , dove  $u_{j,r}$  è il consumo di risorsa  $r$  da parte dell'attività  $j$ .
  - rappresenta i periodi di tempo disponibili per pianificare le attività.
  - L'insieme  $A$  contiene le coppie ordinate di attività  $(i, j)$ , dove  $i$  deve essere completata prima che  $j$  possa iniziare.

The **Resource-Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP)\*** asks for a schedule of minimum duration (makespan) such that

- all jobs are scheduled within the time horizon,
- all job precedences are satisfied, and
- the resource availability is respected for every resource in every time period.

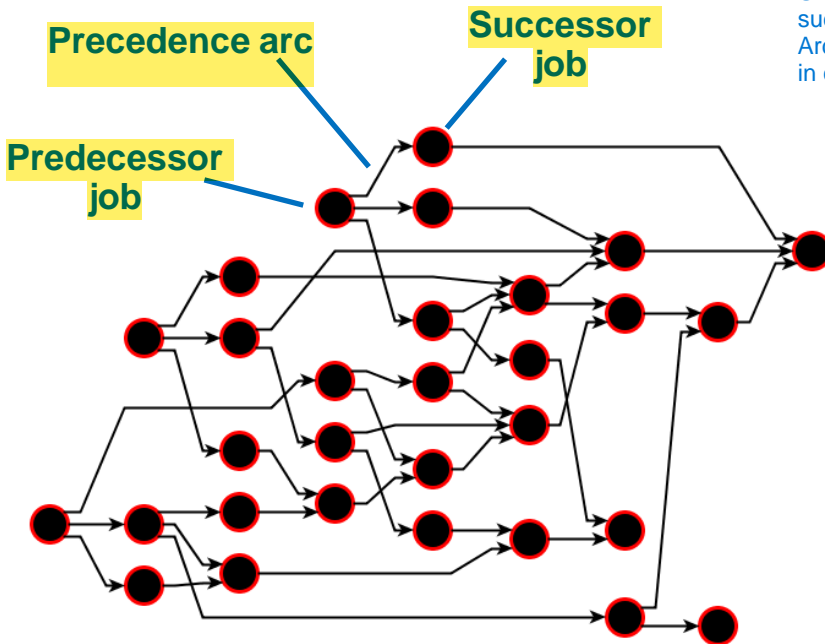
**Annotations:**

- Temporal: tutte le attività devono essere completate, entro l'orizzonte temporale.
- Precedenze: le attività devono essere svolte nell'ordine indicato dai vincoli di precedenza.
- Disponibilità delle risorse: la disponibilità di ogni risorsa  $r$  deve essere rispettata in ogni periodo di tempo.

\*NP-hard (extremely difficult to optimize)

# The Resource-Constrained Project Scheduling Problem

**Precedence Relation Digraph** → Questo grafo rappresenta la struttura logica e i vincoli di precedenza tra i compiti/attività.  
Precedenza = i due lavori solo in sequenza (non in parallelo)

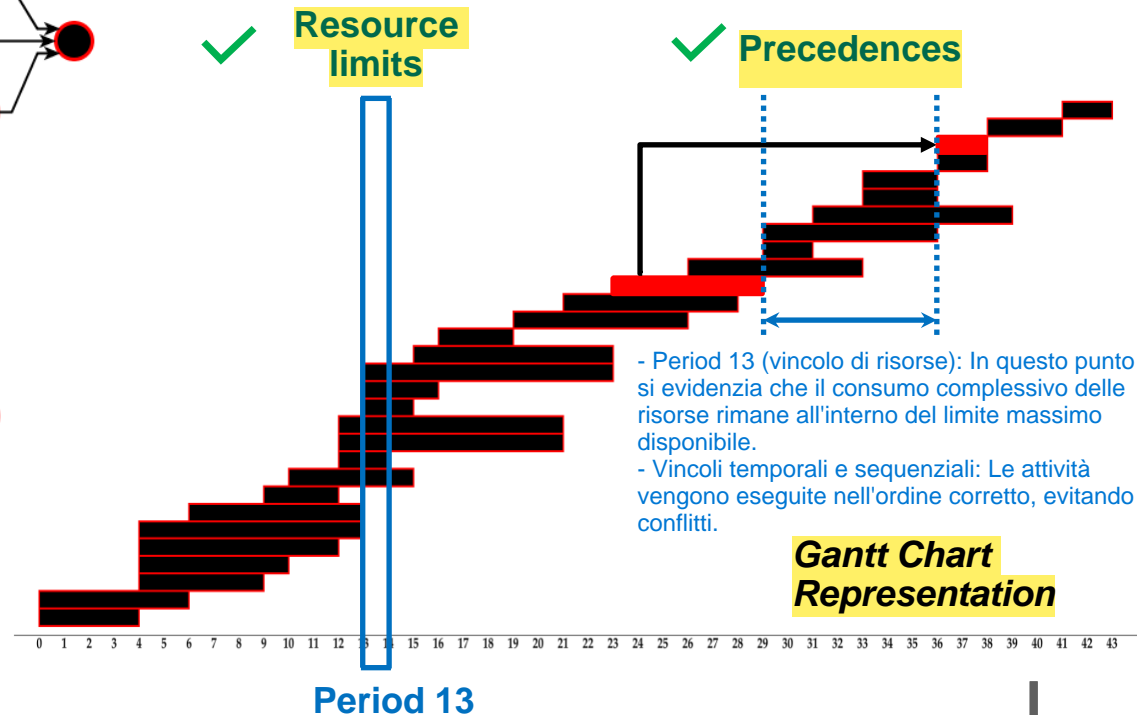


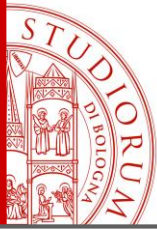
Nodi (Jobs): Ogni nodo nel grafo rappresenta un'attività o un compito. Un nodo iniziale (predecessor job) deve essere completato prima che le attività successive (successor jobs) possano iniziare.  
Archi (Precedence Arc): Le frecce indicano i vincoli di precedenza, ovvero la relazione in cui una determinata attività deve essere completata prima di passare a un'altra.

**Assumption: Directed graph  $(J, A)$  is acyclic!**

Il grafo  $(J, A)$  è aciclico, il che significa che non ci sono cicli nelle relazioni tra le attività. Ciò garantisce che il problema possa essere risolto in modo sequenziale senza conflitti di dipendenza.

## Solution Schedule



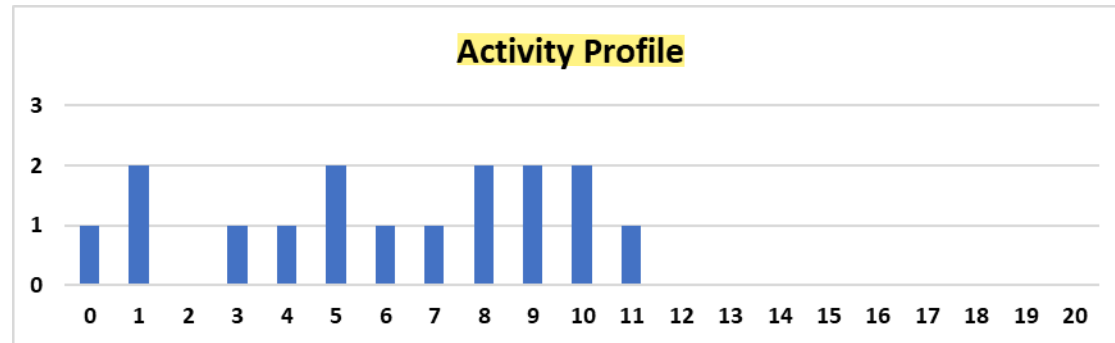


# The Resource-Constrained Project Scheduling Problem

Sull'asse x: i periodi di tempo. Sull'asse y: il numero di attività attive.

An **activity profile** for a schedule **S** shows the number of active jobs for every time period.

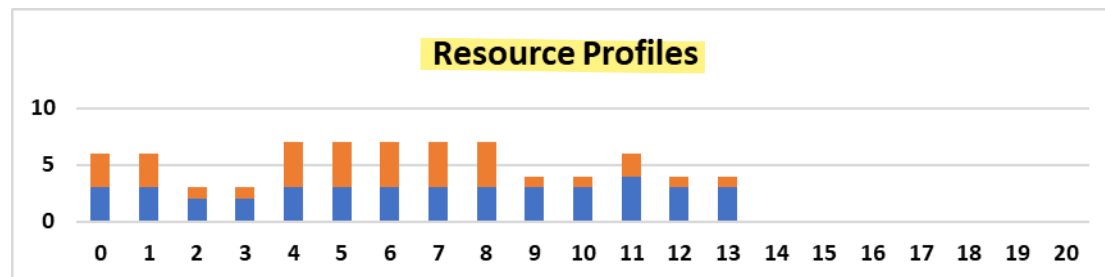
Il profilo delle attività per una data schedule **S** rappresenta il numero di attività attive, in parallelo, in ogni periodo di tempo. Un'attività è considerata attiva quando è in esecuzione durante un determinato periodo.



Sull'asse x: i periodi di tempo. Sull'asse y: il consumo della risorsa.

A **resource profile** for a schedule **S** and a resource **r** shows the consumption of **r** in every time period.

Il profilo delle risorse per una data Schedule **S** ed una risorsa **r** mostra il consumo della risorsa **r** in ogni periodo di tempo.





# The Resource-Constrained Project Scheduling Problem

## IP Model

### Binary job end-at-time variables:

La variabile binaria  $x_{j,t}$  indica se il lavoro  $j$  termina al tempo  $t$

$$x_{j,t} = \begin{cases} 1 & \text{if job } j \text{ will end at time } t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

L'obiettivo è minimizzare il makespan, cioè il tempo di completamento dell'ultima attività  $n$  (l'attività terminale):  
Qui,  $t \cdot x_{n,t}$  rappresenta il tempo in cui termina il lavoro finale  $n$ . La funzione cerca di ridurre questo valore.

**Minimize**  $\sum_{t \in T} t \cdot x_{n,t}$  ( $n$  is the terminal job)

$$\sum_{t \in T} x_{j,t} = 1$$

Ogni lavoro  $j$  deve essere pianificato per terminare in un unico momento  $t$ .  
(Ogni attività disponibile deve essere completata esattamente una volta)

$$\forall j \in J$$

(Schedule Jobs)

Far rispettare le precedenze (Job  $J$  inizia dopo che Job  $I$  è finito) (Il termine del Job  $i$  (LHS) deve avvenire almeno  $d_j$  unità di tempo prima del termine del Job  $j$ .)

$$\sum_{t \in T} t \cdot x_{i,t} \leq \sum_{t \in T} t \cdot x_{j,t} - d_j \quad \forall (i, j) \in A \quad (\text{Precedences})$$

Il consumo di una risorsa  $r$  da parte di tutte le attività in esecuzione in un dato periodo  $t$  non deve superare la disponibilità massima  $q_r$  per quel periodo.

$$\sum_{j \in J} \sum_{t'=t}^{t+d_j-1} u_{j,r} \cdot x_{j,t'} \leq q_r \quad \forall t \in T, r \in R \quad (\text{Resource Availability})$$

quantità della risorsa  $r$  richiesta dal lavoro  $j$

periodo in cui un'attività inizia.

**Can also be formulated using job start-at-time variables.**

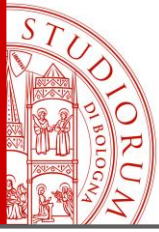
# Es. Capitol Construction (2a. Revisited)

La Capitol Construction Company deve completare la ristrutturazione del suo attuale ufficio il più rapidamente possibile...

Compito	Simbolo	Precedenza	Durata	Persone	Costi (in 1000)
Preparare opzioni di finanziamento	A	-	2	3	3
Preparare schizzi preliminari	B	-	3	2	1
Delineare le specifiche	C	-	1	1	3
Preparare disegni	D	A	4	3	4
Scrivere le specifiche	E	C, D	5	3	1
Eseguire le stampe	F	B	1	1	1

Resource availability:  $q_{Persone} = 4$ ,  $q_{Costi} = 5$

- Costruire il modello in Excel che minimizza il «makespan» usando Excel Solver.
- Visualizzare il «activity profile».
- Visualizzare il «resource profile».



# Exercise 1)

---

**Find an optimal schedule for the model in Exercise 1 using CP in MiniZinc.**  
(Model on Virtuale)

# Exercise 2)

In Table 1.1, a RCPSP instance is given with  $n = 10$  real activities and  $|\mathcal{R}| = 2$  resources with availabilities  $B_1 = 7$  and  $B_2 = 4$ .

$A_i$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$
$p_i$	0	6	1	1	2	3	5	6	3	2	4	0
$b_{i1}$	0	2	1	3	2	1	2	3	1	1	1	0
$b_{i2}$	0	1	0	1	0	1	1	0	2	2	1	0

## 1. Find an optimal schedule.

Option 1: Build the Excel IP model.

Option 2: Use CP.

Option 3: Use the solver of your choice.

## 2. Visualize the schedule using a Gantt chart.

## 3. Visualize activity and resource profiles.

## 4. How much does the makespan increase if we reduce the availability of resource 1 to 5?

Verify your results visually.

