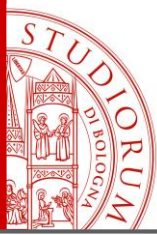


Introduzione alla Ricerca Operativa ed al Supporto alle Decisioni

Alessandro Hill

Basato sul materiale di
Daniele Vigo (D.E.I.) & Marco Boschetti (D.M.).

rev. 1.2(AH) – 2024



Cos'è la ricerca operativa (RO)?

What is Operations Research (OR)?

“OR is the application of scientific & mathematical methods to the study & analysis of problems involving complex systems.” (INFORMS)

“La RO è l'applicazione di metodi scientifici e matematici allo studio e all'analisi di problemi che coinvolgono sistemi complessi.»

“In a nutshell, OR is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions.” (www.scienceofbetter.org)

«In poche parole, la RO è la disciplina che applica metodi analitici avanzati per aiutare a prendere decisioni migliori.»

“OR applies scientific method to the management of organized systems in business, industry, government and other enterprises.” (Cornell University)

«La RO applica il metodo scientifico alla gestione di sistemi organizzati in ambito aziendale, industriale, governativo e in altre imprese.»

“The central objective of OR is optimization, i.e., to do things best under the given circumstances.” (Wolfram MathWorld)

“L'obiettivo centrale della RO è l'ottimizzazione, ossia fare le cose nel modo migliore possibile nelle circostanze date.»



Cos'è la ricerca operativa?

La Ricerca Operativa è l'approccio scientifico alla decisione esecutiva, che consiste in:

1. L'arte della modellizzazione matematica dei sistemi complessi,
2. La scienza dello sviluppo di tecniche di soluzione utilizzate per risolvere questi modelli,
3. La capacità di comunicare efficacemente i risultati al decisore.



Utilizzi dei modelli decisionali

- Risolvi **problemi complessi**.
- Quadro analitico per valutare i **problemi aziendali moderni**.
- Tecniche applicabili in **molte aree** come:
 - Contabilità, Economia e Finanza
 - Logistica, Management e Marketing
 - Produzione, Operazioni e Trasporti

Tuttavia, esse sono soggette a **limitazioni**...



Utilizzi dei modelli decisionali

Possono essere applicati quando:

- Si progetta e si implementa nuove operazioni o procedure,
- Si valuta un insieme di operazioni o procedure in corso,
- Si determinano e si raccomandano azioni correttive per operazioni e procedure che producono risultati insoddisfacenti.

→ Discussion



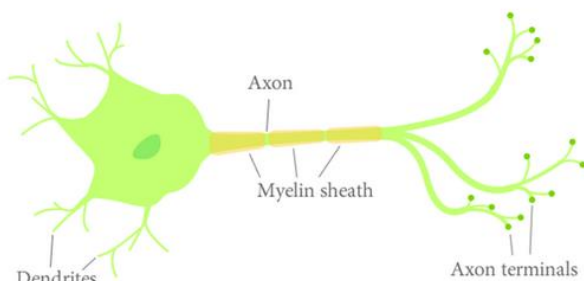
Introduzione

- I metodi di ottimizzazione hanno un'ampia gamma di applicazioni e tra i diversi ambiti abbiamo il **Supporto alle Decisioni**.
- In questa introduzione forniremo il contesto generale e degli **esempi di applicazioni**. Lo scopo è quello di motivare quanto vedremo nelle lezioni successive, che saranno necessariamente più impegnative.
- Il corso si concentrerà sui metodi dell'ottimizzazione propri della **Ricerca Operativa**, ma in questa introduzione proveremo a definire le possibili interrelazioni con altri ambiti.
- Ricordate che la matematica non è una punizione per chi si è iscritto a un corso di laurea scientifico, ma **uno strumento di lavoro molto prezioso**.

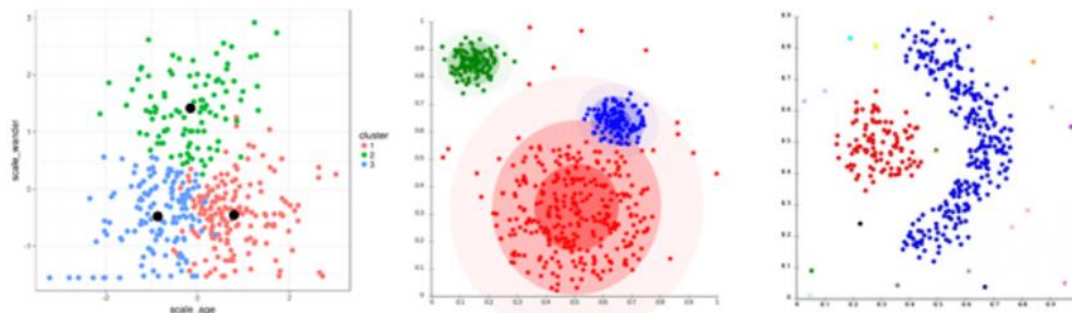
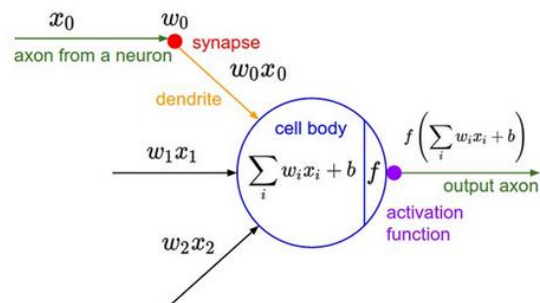
Introduzione

Dietro all'Intelligenza Artificiale c'è molta ottimizzazione.

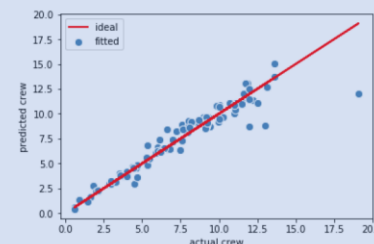
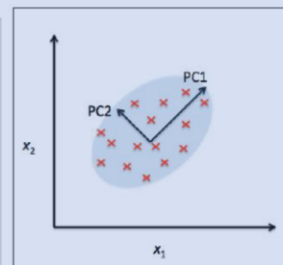
Real Neuron



Artificial Neuron



$X_1^{(1)}$	$X_2^{(1)}$	$X_3^{(1)}$	$X_4^{(1)}$
$X_1^{(2)}$	$X_2^{(2)}$	$X_3^{(2)}$	$X_4^{(2)}$
$X_1^{(3)}$	$X_2^{(3)}$	$X_3^{(3)}$	$X_4^{(3)}$
.	.	.	.
.	.	.	.
$X_1^{(n)}$	$X_2^{(n)}$	$X_3^{(n)}$	$X_4^{(n)}$



$$\sigma_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_j^{(i)} - \mu_j}{\sigma_j} \right) \left(\frac{X_k^{(i)} - \mu_k}{\sigma_k} \right) \quad MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad P(B/A) = \frac{P(B) \times P(A/B)}{P(A)}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{precision} + \frac{1}{recall} \right) \quad \hat{y}_i = \omega_0 + \sum_{j=1}^4 X_{ij} \omega_j$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$Sensitivity = \frac{TP}{TP + FN}$$



Introduzione

- Il processo di **Trasformazione Digitale** ha pervaso l'intera società e le aziende, per cui il ruolo dell'ICT (Information & Communications Technology) è diventato centrale.
- Chi progetta e sviluppa soluzioni ICT è prima di tutto un consulente che deve saper **risolvere problemi**.
- Uno degli ambiti di applicazione dell'ICT è il supporto alle decisioni, che consiste nel realizzare **soluzioni software** che aiutano manager, medici, operatori, etc., a individuare la “miglior” decisione in ambito aziendale, finanziario, medico, etc.
- I metodi utilizzati per sviluppare soluzioni software per il supporto alle decisioni spaziano **dall'ottimizzazione all'intelligenza artificiale** e richiedono una conoscenza approfondita della matematica.
- L'ottimizzazione matematica e l'intelligenza artificiale sono settori strettamente legati e **spesso sovrapponibili**, ma non coincidono.

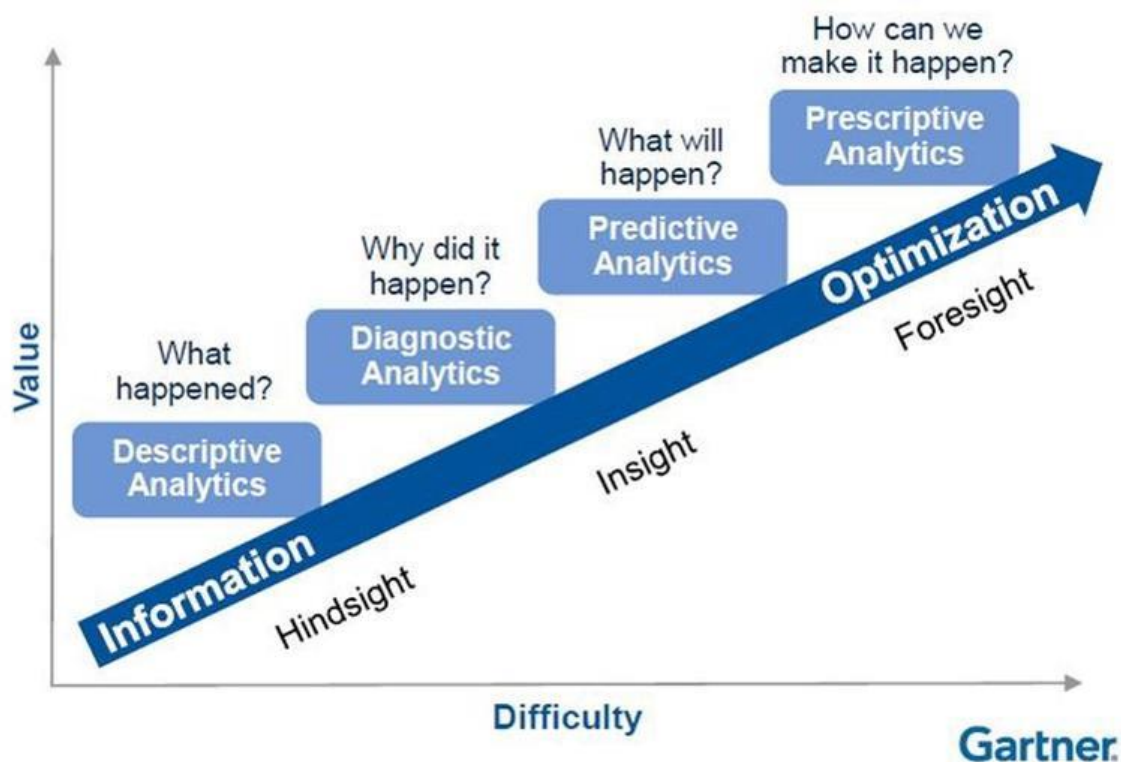


Introduzione

- In questo corso dimostreremo che per sviluppare una soluzione per il supporto alle decisioni sono necessari i seguenti passi:
 1. modellare matematicamente il problema che si vuole risolvere;
 2. identificare la sua complessità (se possibile);
 3. progettare un algoritmo più adatto,
- Mostreremo come problemi **molto semplici** da formulare possono risultare molto difficili da risolvere e.
- Problemi **molto complessi** da descrivere possono essere in realtà molto facili da risolvere.
- **Partiremo definendo** cosa è un problema, un modello e un algoritmo.

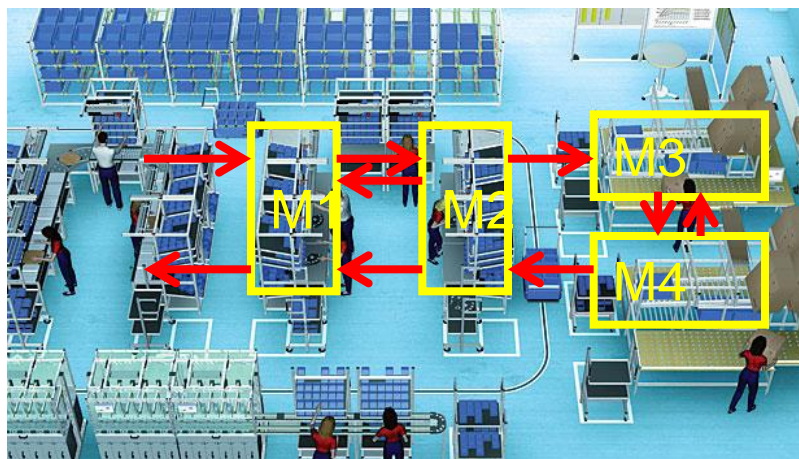
Operations Research & Analytics

La R.O. è una disciplina dell'Intelligenza Artificiale nota anche come:
Prescriptive Analytics



Cosa è un problema decisionale ?

- Scelta, tra diverse **alternative**, della combinazione di un insieme di decisioni (=soluzione) che consente di ottenere dal sistema le prestazioni desiderate
- Es. Impianto produttivo con macchine multiutensile



Decisioni:

- layout impianto
- tipo di macchine
- sequenza lavorazioni

Prestazioni (KPI): max produttività, min costo, ...

Le basi della Ricerca Operativa ?

Matematica,
Fisica, Statistica

Ingegnerie



Informatica

Economia

Ricerca Operativa (Operations Research)

Scienza della Gestione (Management Science)

Scienza delle Decisioni (Decision Science)



Decisioni quaLitative

- Un qualsiasi problema decisionale può essere affrontato in maniera **qualitativa**, ad esempio:
 1. scegliendo la decisione più simile a quelle prese in passato;
 2. attraverso una votazione democratica;
 3. basandosi sull'esperienza;
 4. ...



Decisioni quaNTitative

- Oppure, si può procedere in maniera **quantitativa**:
 1. definendo una funzione di merito (profitto, costo) per ciascuna delle opzioni possibili;
 2. valutando ciascuna delle alternative rispetto a vincoli e obiettivi, e
 3. scegliendo l'alternativa che rispetta obiettivi e vincoli e **massimizza la funzione di merito**.



Decisioni quantitative (#2)

- Il passo precedente

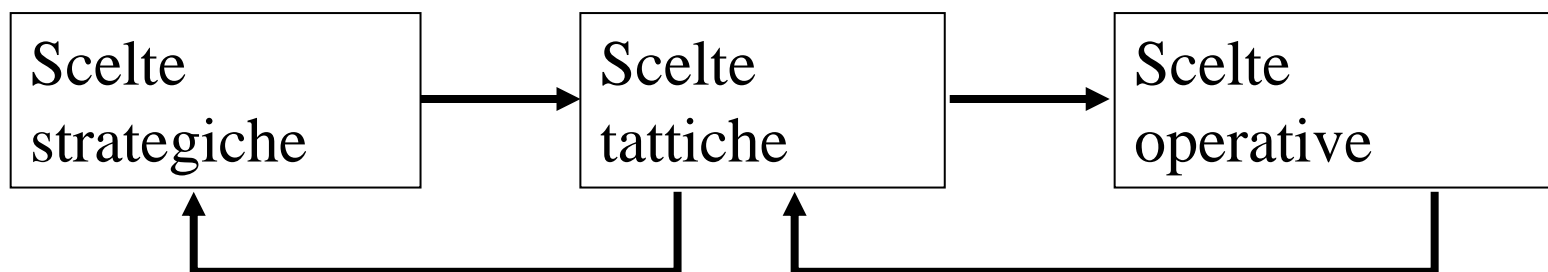
2. *valutando ciascuna delle alternative rispetto a vincoli e obiettivi*

richiede di applicare un **algoritmo**, in quanto nei problemi decisionali non banali il numero di alternative è enorme e la valutazione di vincoli e obiettivi può essere di per sé complessa.

- La Ricerca Operativa favorisce l'**approccio algoritmico alle decisioni**.

Problemi decisionali (2)

- Livello **Strategico** (Pianificazione/Planning)
 - Definizione e valutazione delle alternative
 - Es. layout impianto, scelta delle macchine, ...
- Livello **Tattico** (Pianificazione/Planning)
 - Definizione e valutazione delle alternative
 - Es. configurazione macchine, numero di turni di lavoro, ...
- Livello **Operativo** (Programmazione/Management)
 - Definizione della prassi operativa nell'ambito delle scelte tattiche fatte





Tipo di decisioni

- a **valori continui** (frazionari)
 - consumo di gas per una certa quantità di calore
 - percentuale di prodotti di un certo tipo da produrre
 - posizione nel piano di un punto
 - traiettoria di un drone nello spazio
- a **valori discreti** (interi)
 - numero di depositi da utilizzare in una rete
 - posizione di un cliente in un viaggio
 - acquisto o meno di un bene (si/no)



Difficoltà di un problema

- = **tempo necessario** a risolverlo ... al crescere della sua dimensione
 $1s+2s, 23s+55s, \dots, 12332345342s + 2331123423s$
- I problemi di decisione sono facili o difficili?
- In generale hanno **molte soluzioni** possibili



•Assegnamento di incarichi

- n incarichi, n persone
- tempo che ogni persona impiega per incarico
- assegnare gli incarichi (uno per ogni persona)
- Si desidera minimizzare il tempo complessivo necessario per svolgere tutti gli incarichi.
- Esempio: $n = 2$

		Incarichi	
		C_1	C_2
Persone	I_1	20	40
	I_2	30	25

Soluzione immediata:
 $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$, tempo = 45

Enumerare o ottimizzare?

- Esempio : $n = 3$,

Incarichi

	C_1	C_2	C_3
I_1	20	60	30
I_2	80	40	90
I_3	50	70	90

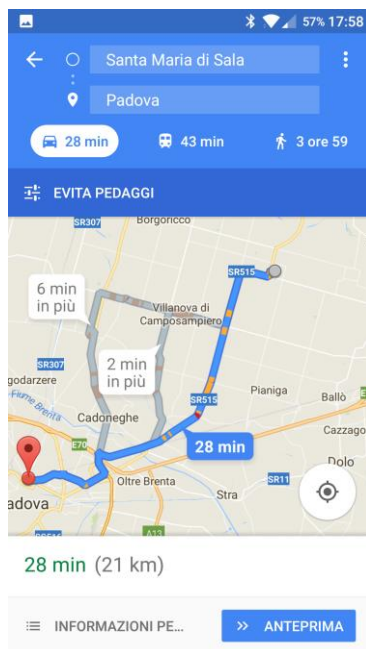
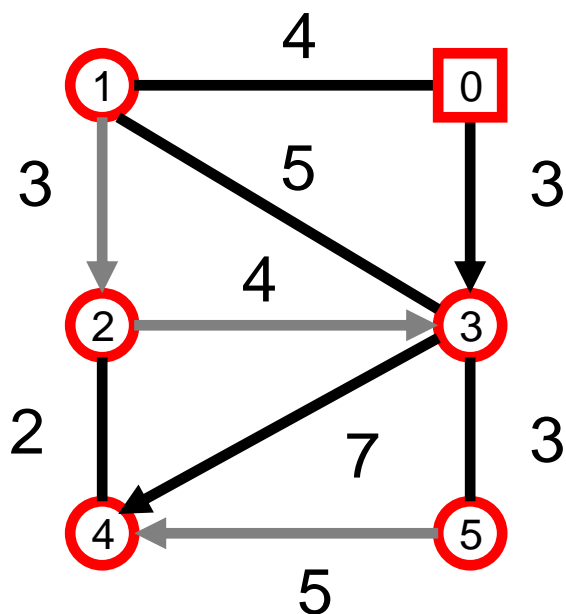
Persone

Strategia alternativa?

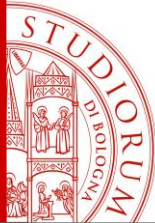
- Per enumerazione (6 soluzioni possibili, tutte le permutazioni di 3 elementi): $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, t = 120$.
- Ma se $n = 20 \Rightarrow$ Numero di soluzioni = $20! \approx 2.4 \cdot 10^{18}$
- Un PC a 3GHz impiega circa 2 secoli per esaminarle tutte.

Percorso stradale minimo

- Rete stradale
 - Incroci, punti di interesse
 - tratti stradali (lunghezza, durata)



I percorsi in una rete “densa” con n tratti possono essere fino a $n!$.



Problemi ed Algoritmi

- La ricerca operativa mette a disposizione metodi (algoritmi) efficienti per risolvere molti problemi decisionali
 - Assegnamento: Alg. Ungherese (Kuhn, 1955)
 - Percorsi minimi: Alg. di Dijkstra (1959)
 - ...

.. e il progresso tecnologico ?

- Negli ultimi 30-40 anni la potenza dei calcolatori è cresciuta vorticosamente...

1960-80



1980-90



1990-2000



Il Teorema della Spiaggia

- ... Se hai un problema computazionale che richiede molto tempo ...
- ... rilassati, vai in spiaggia per un paio d'anni



- ... quando torni acquista un pc appena uscito e sarà sufficientemente potente per risolvere il tuo problema !

Enumerare o ottimizzare?



- Un **supercomputer come IBM Blue Gene**:
 - Velocità: ~ 1 Petaflop (10^{15} operazioni al secondo);
 - Processori: 182,000 Opterons, 2.3 GHz;
 - Memoria: 362 TB (Tera byte, 1 TB = 10^{12} bytes)
- può esaminare tutte le soluzioni per **$n = 20$ in circa 10 ore**, ma ...
- se **$n = 24$ a Blue Gene servono 200 anni** per esaminare tutte le soluzioni.
- se **$n = 30$** servono 84 miliardi di anni, 6 volte l'età dell'Universo

Tempo e tecnologia

funzione	computer attuale	computer 100 volte più veloce	computer 1000 volte più veloce
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n^2	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n^3	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$
n^5	N_4	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
3^n	N_6	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

PC 486/33 1.3 Mflop/s Cray C90 (16 proc) 479 Mflop/s
Blue Gene 1 Petaflop/s

Algoritmi e “business”

- Gli algoritmi e gli approcci quantitativi servono veramente o sono roba da nerd?
- Può un algoritmo ben fatto fare la differenza e “creare valore” in un prodotto?



Chi riconosce questi due?



E questo?



La differenza tra chi ha avuto «l'idea originale» e chi l'ha realizzata è che il secondo era in grado di realizzarla con una soluzione informatica eccellente, robusta, stabile e performante !!

Motori di ricerca anni 90









Yahoo! Message
new! create your own webmail


Know when friends are online!
Click to download Yahoo! Messenger

Yahoo! Mail
free from anywhere

[advanced search](#)

Y! Shopping
Depts: [Books](#), [CDs](#), [Computers](#), [DVDs](#)
Stores: [Gap](#), [Clingee](#), [Coach](#) and more

[Shoe Auctions](#)
[Auto Classifieds](#)
[Shipping](#)
[Travel](#)
[Yahoo! Pets](#)
[Maps](#)
[Money](#)
[Finance](#)
[Cruises](#)
[News](#)
[Sports](#)
[Weather](#)

[Connect](#)
[Gaming](#)
[Star Charts](#)
[Go-Girls](#)
[Gossiping](#)
[Mail](#)
[Motors](#)
[Motorsport](#)
[Movies](#)
[Famous](#)
[Famous](#)
[People Search](#)
[Photos](#)

[Personal](#)
[Adult Books](#)
[Auctions](#)
[Calendar](#)
[Email](#)
[Feedback](#)
[Fun Games](#)
[Links](#)
[Movies](#)
[Music](#)
[TV](#)
[More...](#)

Yahoo! Auctions
[Bid, buy, or sell anything](#)

Categories	Items
Computers	Jewelry
Electronics	Male Embroidery
Guns	Seafish, Seafood
Home	Video
Sports/Books	Toys/Games
Stamps	Ice.com

[Baseball Cards](#)
[CDs](#)
[Computers](#)
[DVDs](#)
[Jewelry](#)
[Male Embroidery](#)
[Seafish, Seafood](#)
[Video](#)
[Toys/Games](#)

Arts & Humanities
[Literature](#)
[Photography](#)

Business & Economy
[B2B Finance](#)
[Shopping](#)
[Jobs](#)

Computers & Internet
[Internet](#)
[WWW](#)
[Software](#)
[Games](#)

Education
[College and University](#)
[K-12](#)

Entertainment
[Comics/Books](#)
[Movies](#)
[Music](#)
[TV](#)

Government
[Economic](#)
[Industry](#)
[Law](#)
[Taxes](#)

Health
[Medicine](#)
[Diet](#)
[Drugs](#)
[Fitness](#)



Local Yahoo's
[Africa](#)
[Australia](#)
[Brazil](#)
[Canada](#)
[China](#)
[France](#)
[Germany](#)
[India](#)
[Japan](#)
[Korea](#)
[Mexico](#)
[New Zealand](#)
[UK](#)
[United States](#)

More Yahoo's
[Albania](#)
[Algeria](#)
[Argentina](#)
[Armenia](#)
[Austria](#)
[Belarus](#)
[Belgium](#)
[Bolivia](#)
[Bosnia](#)
[Brazil](#)
[Bulgaria](#)
[Canada](#)
[Chad](#)
[China](#)
[Colombia](#)
[Croatia](#)
[Czech Republic](#)
[Denmark](#)
[Dominican Republic](#)
[Ecuador](#)
[Egypt](#)
[Finland](#)
[France](#)
[Germany](#)
[Ghana](#)
[Greece](#)
[Guatemala](#)
[Honduras](#)
[Hungary](#)
[India](#)
[Indonesia](#)
[Iran](#)
[Iraq](#)
[Israel](#)
[Italy](#)
[Japan](#)
[Kazakhstan](#)
[Korea](#)
[Latvia](#)
[Lithuania](#)
[Luxembourg](#)
[Malaysia](#)
[Maldives](#)
[Mali](#)
[Mexico](#)
[Morocco](#)
[Myanmar](#)
[Netherlands](#)
[New Zealand](#)
[Nicaragua](#)
[Norway](#)
[Oman](#)
[Pakistan](#)
[Panama](#)
[Paraguay](#)
[Peru](#)
[Philippines](#)
[Poland](#)
[Portugal](#)
[Romania](#)
[Russia](#)
[Saudi Arabia](#)
[Serbia](#)
[Singapore](#)
[Slovakia](#)
[Slovenia](#)
[South Africa](#)
[Spain](#)
[Sri Lanka](#)
[Sweden](#)
[Switzerland](#)
[Taiwan](#)
[Tanzania](#)
[Thailand](#)
[Turkey](#)
[Ukraine](#)
[United Kingdom](#)
[United States](#)
[Uruguay](#)
[USA](#)
[Venezuela](#)

[Home Page](#)

[How to Suggest a Site](#)
[Company Info](#)
[Copyright Policy](#)
[Terms of Service](#)
[Contributors](#)
[Jobs](#)
[Advertising](#)

Copyright © 2001 Yahoo! Inc. All rights reserved.
[Privacy Policy](#)








[people finder](#)
[maps](#)
[yellow pages](#)
[news](#)



"Turbo Search!"
[Download](#)
[Excite Direct](#)

Take an
[ExciteSeeing Tour](#)

[Excite on TV](#)





Make your website
[searchable. FREE!](#)

Excite Search: twice the power of the competition.

What:

Where:

[\[Help\]](#)
[\[Advanced Search\]](#)

INTEGRATED BROWSING, EMAIL, NEWSGROUPS AND PAGE CREATION.



Excite Reviews: site reviews by the web's best editorial team.

- Arts
- Business
- Computing
- Education
- Entertainment
- Health
- Hobbies
- Life & Style
- Money
- News & Reference
- Personal Pages
- Politics & Law
- Regional
- Science
- Shopping
- Sports

Excite City.Net
Plan your weekend, your travels.
Find A Destination

[Take me there!](#)

[Maps](#) [Top Cities](#) [Concierge](#)

Excite Seeing Tours
Choose from hundreds.

- X-Files. The truth is out there!
- Dr. Ruth's guide to safer sex
- Windows 95 shareware and freeware
- Celebrating Thanksgiving
- Investing in high-tech stocks
- New to the Net?

Excite Live!
Your news, your way.

- Latest news
- Sports scores
- Local weather
- Movie reviews
- Stock quotes
- TV listings
- Horoscopes
- Site reviews

Excite Reference
Just the facts, ma'am.

- Yellow Pages
- People Finder
- Email Lookup
- Maps
- Shareware
- Dictionary








[people finder](#)
[maps](#)
[yellow pages](#)
[news](#)



infoseek™
 Once you know, you know.™



Type a specific question, phrase or Name.

the Web [Tips](#)

To explore the Web's largest directory, click a topic below.

- [Arts](#) - books, photography, fashion, museums ...
- [Business](#) - business tools, find a job, small business ...
- [Computers](#) - desktop computers, hardware, software ...
- [Education](#) - colleges, teaching, adult education ...
- [Entertainment](#) - music, games, TV, movies ...
- [Health](#) - drugs, disease, fitness, women's health ...
- [Hobbies & Interests](#) - buy a car, shopping, buy a home, food & drink ...
- [Internet](#) - intranet, HTML, web publishing ...
- [Politics](#) - elections, government, taxes, law ...
- [Science](#) - space, dinosaurs, environment, engineering ...
- [Sports](#) - football, golf, basketball, hockey ...
- [Travel](#) - airlines, destinations, lodging, cruises ...

 [get PowerCentral!](#)

Visit our [Holiday Ultrashop!](#)

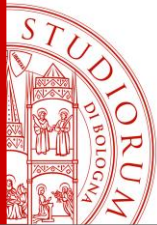
Make advertising \$\$\$ with the [Infoseek Network!](#)

Download [free software](#) from Infoseek, now featuring the NEW [Quickseek 2.0](#) for Windows!

Family PC Magazine rates [Infoseek #1!](#)

[Ultrashop](#) | [News Center](#) | [Smart Info](#)

[[Basic Tips](#) | [Feedback](#) | [Add Site](#) | [About Infoseek](#)]



... and the winner is...



Cerca con Google

Mi sento fortunato



Google algorithm, Wikipedia

- Google was founded by Larry Page and Sergey Brin while they were Ph.D. students (of Computer Science) at Stanford University.
- While conventional search engines ranked results by counting how many times the search terms appeared on the page, **the two theorized about a better system that analyzed the relationships between websites.**
- di nuovo il successo è legato ad un metodo migliore !
- Per un approfondimento sull'algoritmo pagerank
- <https://www.youtube.com/watch?v=ZIOayEGku0U>



Origini della Ricerca Operativa

- Seconda Guerra Mondiale in Inghilterra
- Battaglia di Inghilterra:
 - prevenzione degli attacchi di bombardieri tedeschi:
 - radar (risorsa scarsa)
 - raggio d'azione, definizione ...
- Dove localizzare i radar per massimizzare la probabilità di intercettazione ?
- Come coordinare le operazioni (radar, radio, pattuglie aeree ...) per facilitare l'identificazione dei nemici e degli amici ?



Origini della Ricerca Operativa (2)

- Gruppi di lavoro misti
(matematici, fisici, ingegneri, militari ...)
- **Research** on military **Operations**
- messa a punto di
 - metodi quantitativi di analisi
 - metodologie di soluzione (algoritmi)
- notevole contributo nel miglioramento dell'efficacia dell'avvistamento radar
- numerose applicazioni in altri settori (logistica ...)



Evoluzione

- Dopo la guerra: diffusione della disciplina in
 - Industria
 - Pubblica amministrazione
 - Università
- 1940-60: Sviluppo di modelli ed algoritmi di R.O.
 - programmazione lineare
 - teoria dei grafi
 - simulazione numerica ...
- 1960-70: Diffusione degli elaboratori
 - grande impulso alla R.O.
 - teoria della complessità



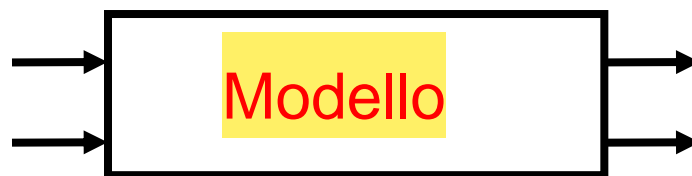
Problemi decisionali e modelli

- La Ricerca Operativa fornisce metodi per rappresentare (modelli) e risolvere (algoritmi) problemi decisionali.
- In generale i modelli usano una rappresentazione logico-matematica del problema decisionale
 - Astratta e precisa
 - Permette di evidenziare e sfruttare le proprietà del problema da risolvere

Sistemi e Modelli

- **Modello:**
 - rappresentazione semplificata di un sistema reale,
 - progettata per rispondere, mediante analisi sperimentali, a domande specifiche
 - (risposta agli ingressi/decisioni).

Ingressi
(Decisioni/
Controlli)



Uscite
(Prestazioni)

Classificazione

1. **Modello Fisico:**
riproduzione in scala (similitudine o analogia)
2. **Modello Matematico:**
insieme di relazioni logico/matematiche che descrivono il comportamento del sistema
 - **Statico:** sistema in equilibrio
 - **Dinamico:** sistema in evoluzione (nel tempo)
 - **Analitico:** descritto mediante equazioni/disuguaglianze
 - **Numerico:** descritto mediante algoritmi di calcolo

Modello Matematico

insieme di relazioni logico/matematiche che descrivono il comportamento del sistema

$$\text{spazio} = \text{velocità} * \text{tempo}$$

Variabile
dipendente

parametro

Variabile
indipendente

- Assunzione: Assenza di attrito (friction) ...
 - accuratezza sufficiente ?
 - se no modello più complesso (non lineare)



Modello Matematico

$$z = f(x_1, x_2, \dots)$$

- z valore delle “prestazioni” (v. **dipendente**)
- x_1, x_2, \dots variabili decisionali (v. **indipendenti**)
- spesso (x_1, x_2, \dots) devono assumere valori entro un insieme specifico (**regione ammissibile**)
- Es. $z = \max \{f(x), x \in F\}$

Modello Matematico

- **Modelli Prescrittivi:**

- forma di $f(\bullet)$ nota
- valori delle x noti e controllabili dal decisore
- normalmente usati a livello Operativo per la determinazione dei valori di x che “massimizzano” z

- **Modelli Descrittivi:**

- forma di $f(\bullet)$ nota
- valori delle x non noti e/o non controllabili dal decisore
- normalmente usati a livello Strategico per la determinazione/stima dei valori di alcune x in funzione di altre

Modelli e Realtà

- Proprietà di un modello:
 - astrazione (scalabilità, generalità)
 - sintesi (solo le caratteristiche rilevanti)
 - economicità (costa meno analizzare il modello)
 - rapidità (si ottengono risposte più rapidamente)
 - fattibilità (si possono analizzare sistemi inesistenti)
 - Un modello può migliorare il grado di comprensione della realtà:
 - individuazione delle componenti importanti
 - relazioni di causa effetto
- ⇒ Può migliorare le decisioni



Buone Decisioni vs. Buoni Risultati

- Le buone decisioni non fanno sempre arrivare a buoni risultati...
 - Se è previsto tempo soleggiato puoi (giustamente) decidere di lasciare l'ombrello a casa.
 - Se inaspettatamente piove puoi bagnarti (un cattivo esito), il che non significa che tu abbia preso una decisione sbagliata (**incertezza/rischio**).
- Una approccio modellistico strutturato per il supporto alle decisioni (decision making) aiuta a prendere buone decisioni, ma non può ovviamente garantire di ottenere buoni risultati.

Modelli di ottimizzazione **lineare**

- Variabili decisionali: $x_1, x_2 \dots$
 - livelli di produzione, somme da investire ...
 - Fare o non fare ? (binarie: 0/1) ...
- Funzione obiettivo: $z = c_1x_1 + c_2x_2 \dots$
 - Costo o profitto della soluzione
- Regione ammissibile:
 - Insieme dei valori delle x compatibili con le “regole”
 - Definita elencando le regole (vincoli) espresse matematicamente $a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots \leq b$

Mix Produzione di vasche

- Una fabbrica produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

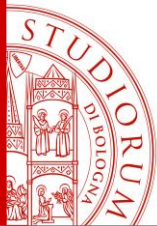
	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	350€	300€

- Per un turno (shift) di lavoro sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione



Formulazione del problema

1. Capire il problema
2. Individuare le **variabili** decisionali
3. Definire la **funzione obiettivo** come combinazione delle variabili decisionali
4. Definire i **vincoli** come combinazione delle variabili decisionali



1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:

- Consumi di risorse (ore, motori, tubi per pezzo)
- Disponibilità reparti (ore, motori, tubi per periodo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)

Quante vasche di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?

- Variabili decisionali:

- x_1 = n. di BT prodotte in un periodo
- x_2 = n. di HS prodotte in un periodo
- x_1 ed x_2 possono essere frazionarie (un periodo)



3. Funzione Obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

BT	HS
350	300

$$\max z = 350 x_1 + 300 x_2$$



4. Vincoli

- Consumo risorse per unità di prodotto:

<i>Risorsa</i>	BT	HS	Disp.
Lavoro	9	6	1566
Motori	1	1	200
Tubi	12	16	2880

$$\max z = 350 \text{ } x_1 + 300 \text{ } x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{L)} & 9 \text{ } x_1 + 6 \text{ } x_2 & \leq 1566 & \text{(Ore)} \\ \text{M)} & 1 \text{ } x_1 + 1 \text{ } x_2 & \leq 200 & \text{(Motori)} \\ \text{T)} & 12 \text{ } x_1 + 16 \text{ } x_2 & \leq 2880 & \text{(Tubazione)} \\ & \underline{x_1, x_2} & \geq 0 & \end{array}$$



Modello Produzione di Vasche

MAX: $350X_1 + 300X_2$ } profitto

S.A.: $1X_1 + 1X_2 \leq 200$ } motori

$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$ } lavoro

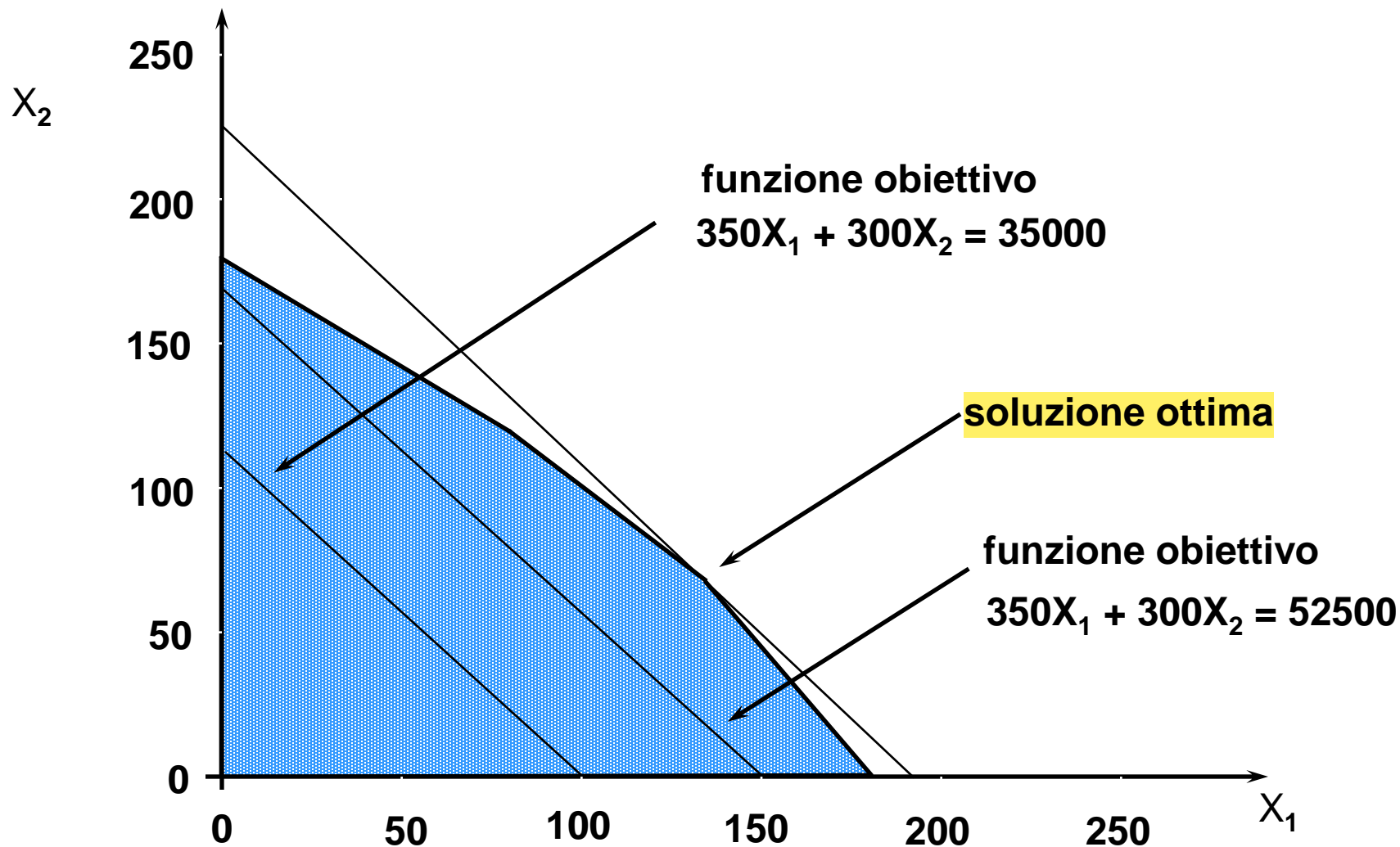
$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ } tubazione

$X_1, X_2 \geq 0$ } non negatività

Soluzione: Approccio intuitivo

- BT (x_1) ha un profitto unitario più alto
 - conviene produrne il maggior numero possibile
 - Ponendo $x_2 = 0$
 - Vincolo 1: $x_1 \leq 200$
 - Vincolo 2: $9 x_1 \leq 1566$ o $x_1 \leq 174$
 - Vincolo 3: $12 x_1 \leq 2880$ o $x_1 \leq 240$
- Il massimo valore di x_1 è 174 e il profitto totale è $350 \cdot 174 + 300 \cdot 0 = 60,900$
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- **No!** ($x_1 = 122$, $x_2 = 78$, è amm. e vale 66,100)

Soluzione Grafica

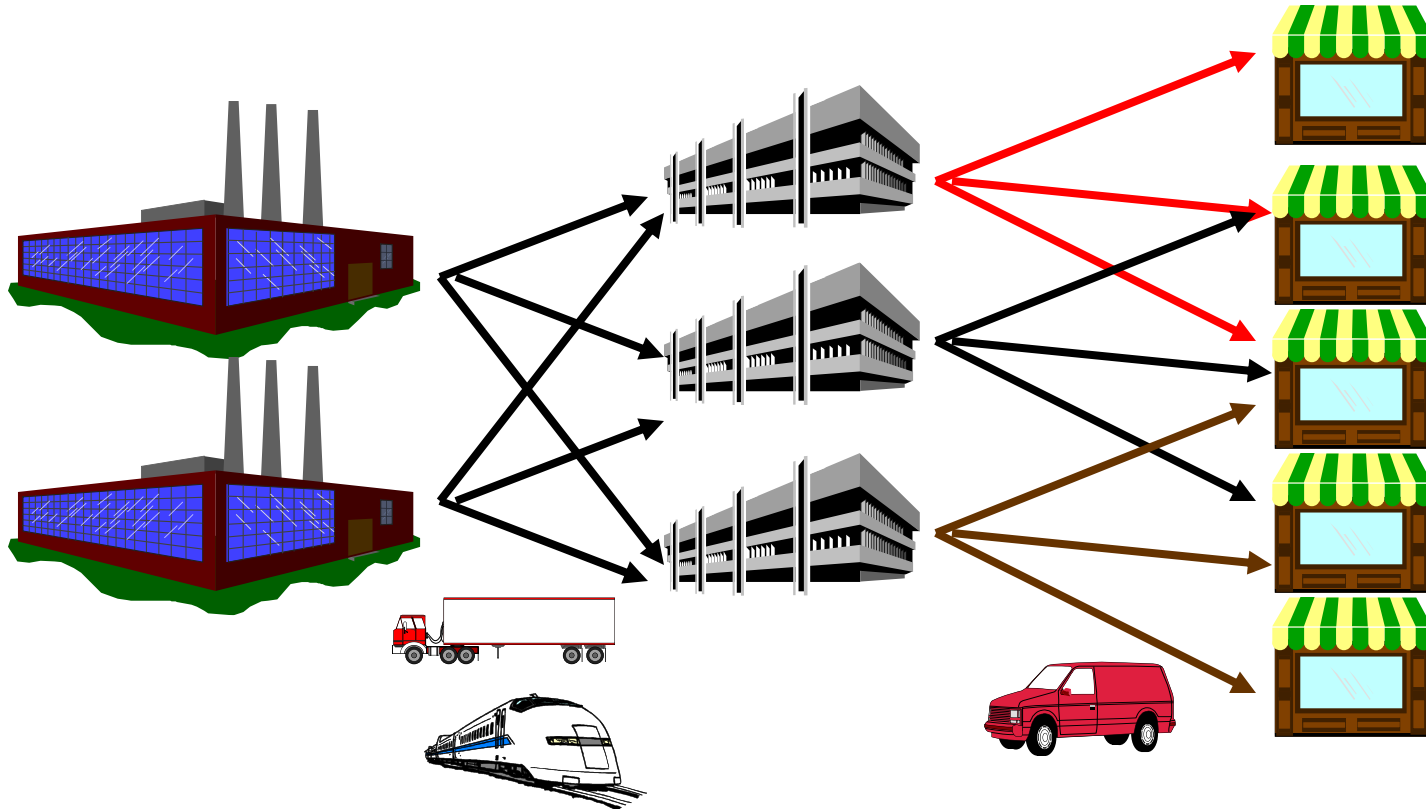


Risolutori e modelli LP

- La risoluzione grafica di problemi LP è possibile solamente quando ci sono due o tre variabili decisionali
- La risoluzione di problemi LP reali (con molte variabili) può essere ottenuta mediante metodi numerici (Es. Algoritmo del Simplexso)
- Disponibili in solver software (CPLEX, LINDO ...)
- Come insiemi di funzioni in fogli elettronici (Excel)

Modelli e Ricerca Operativa (1)

- Sistema “reale” di distribuzione merci



Modelli e Ricerca Operativa (2)

- Problemi di livello **Strategico**:
 - dimensionamento di fabbriche, magazzini, flotte ...
 - assegnazione dei clienti ai magazzini
- Problemi di livello **Tattico-Operativo**:
 - definizione dei flussi “ottimi” di merce
- Definizione del problema e degli obiettivi:
 - a) contenimento dei **costi**
(n. di magazzini, costi di trasporto ...)
 - b) buon **livello di servizio** (tempi di servizio, bilanciamento del carico di lavoro tra i magazzini)

⇒ obiettivi a) e b) in contrasto tra loro !
- ... formulazione vaga

I. Formulazione del Problema (1)

- Definizione degli obiettivi e dei vincoli:
- i) minimizzare il costo totale (fisso+trasporto) con ...
 - tempo medio di servizio non superi K giorni
 - non più del $p\%$ dei clienti aspetti oltre K giorni
 - \Rightarrow a) obiettivo, b) vincolo
- ii) minimizzare il tempo di servizio con ...
 - costo annuo non superiore a Q milioni
 - \Rightarrow b) obiettivo, a) vincolo



I. Formulazione del Problema (2)

- Raccolta di informazioni e dati sul sistema:
 - a) domanda dei clienti,
 - tasso di ordinazione, quantità medie, stagionalità ...?
 - b) Tempi e costi di trasporto (primario e locale)
 - funzione della quantità di merce trasportata e del mezzo,
 - costi di stoccaggio,
 - c) Regole operative e livello di servizio
 - organizzazione dei magazzini e delle fabbriche
 - modalità di carico/scarico e di trasporto
- Indagini statistiche o analogie rispetto ad altri sistemi

II. Definizione del modello (1)

- Scelta del paradigma di rappresentazione del problema, in base a:
 - natura del sistema (statico, dinamico, ...)
 - obiettivo/i e vincoli
 - tipo e qualità dei dati disponibili

Es. Dati domanda d , costi γ , n. di magazzini n , calcolare:

x = distribuzione dei flussi di merce

C = costo complessivo del servizio

P = probabilità che un cliente attenda più di K giorni



II. Definizione del modello (2)

- Definizione del problema di ottimizzazione si esprimono **obiettivo** e **vincoli** mediante **funzioni** di:
 - $n, x \dots$ (variabili decisionali)
 - d, γ, \dots (parametri)
 - C, P, \dots (prestazioni)

$$\min f(n, x, d, \gamma, C, P, \dots)$$

con $x \in X$, tale che:

$$g_1(n, x, d, \gamma, C, P, \dots) \geq a_1$$

$$g_2(n, x, d, \gamma, C, P, \dots) \geq a_2$$

...

II. Definizione del modello (2)

- **Modello Analitico**

se è possibile esprimere C, P, \dots mediante **funzioni** di n, x, γ, \dots (casi semplici)

Es. assunzioni di linearità, staticità, ...

- **Modello di Simulazione Numerica (normalmente)**

se **non** è possibile esprimere C, P, \dots mediante **funzioni** di n, x, γ, \dots

(sistema complesso, fenomeni di saturazione, code ...)

- **Programma** che riproduce il funzionam. del sistema
- dati n, x, γ, \dots si “misurano” C, P, \dots

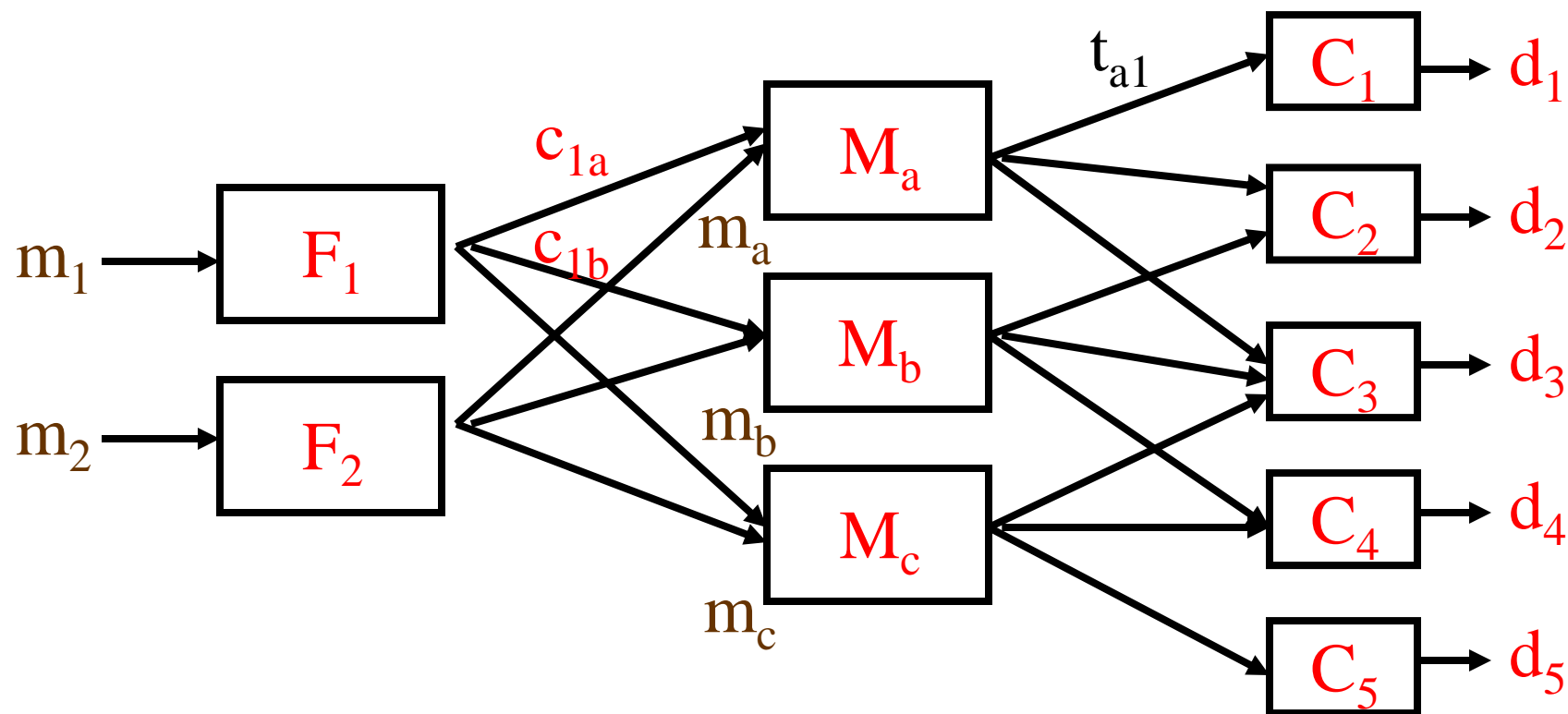
Assunzioni ed ipotesi

Problema tattico di determinazione dei flussi:

- staticità (Es. problema “giornaliero”):
 - domanda media
 - non si considerano i tempi di servizio
- costi di trasporto “lineari” = $c_{ij} x_{ij}$
- solo vincoli di capacità:
 - fabbriche (produzione massima nel periodo)
 - magazzini (massima q.tà di merce “trattabile”)

⇒ modello di **programmazione lineare**

Modello schematico (astratto)



Capacità

Costi

Capacità

Costi

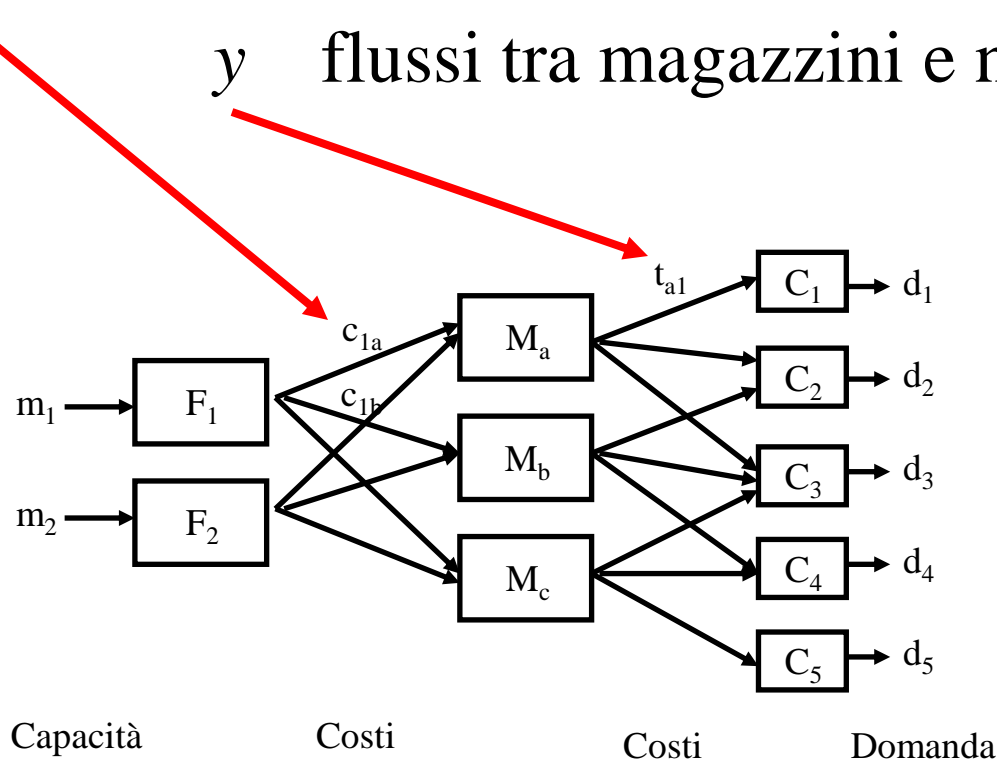
Domanda

Modello Matematico

- Variabili decisionali:

x flussi tra fabbriche e magazzini

y flussi tra magazzini e negozi



Modello matematico (2)

(obiettivo)

$$\min \quad c_{1a} x_{1a} + c_{1b} x_{1b} + \dots \quad t_{a1} y_{a1} + t_{a2} y_{a2} + \dots$$

(vincoli di capacità)

$$\forall f: \quad x_{1a} + x_{1b} + \dots \leq m_1$$

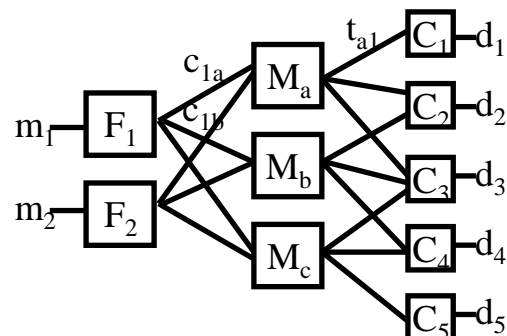
$$\forall m: \quad x_{1a} + x_{2a} + \dots \leq m_a$$

(vincoli sulla domanda)

$$y_{a1} + y_{b1} + \dots = d_1$$

(bilanciamento dei flussi)

$$x_{1a} + x_{2a} \dots = y_{a1} + y_{a2} \dots$$

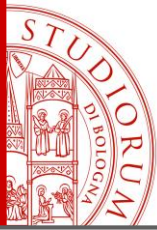


III. Verifica del modello

- Calibrazione dei parametri del modello:
 - si determinano i valori dei parametri caratteristici in modo che il modello fornisca risposte (valori misurati) aderenti alla realtà

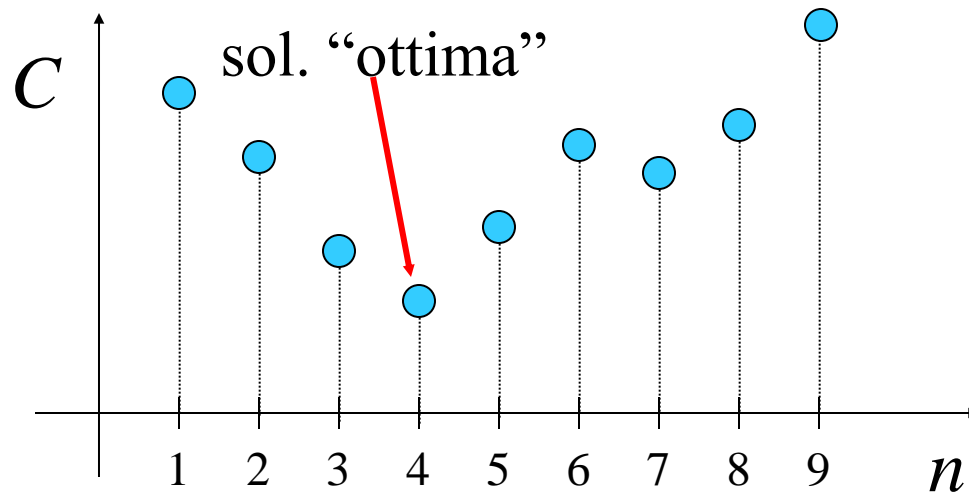


- Esperimenti sul modello e confronto dei risultati con valori osservati nella realtà
- Eventuale revisione del modello



IV. Determinazione delle soluzioni

- Mediante un “algoritmo” si generano soluzioni alternative (Es. diversi n) e si sceglie la “migliore” (minor costo)
- Es. pochi valori di n da “tentare”: enumerazione

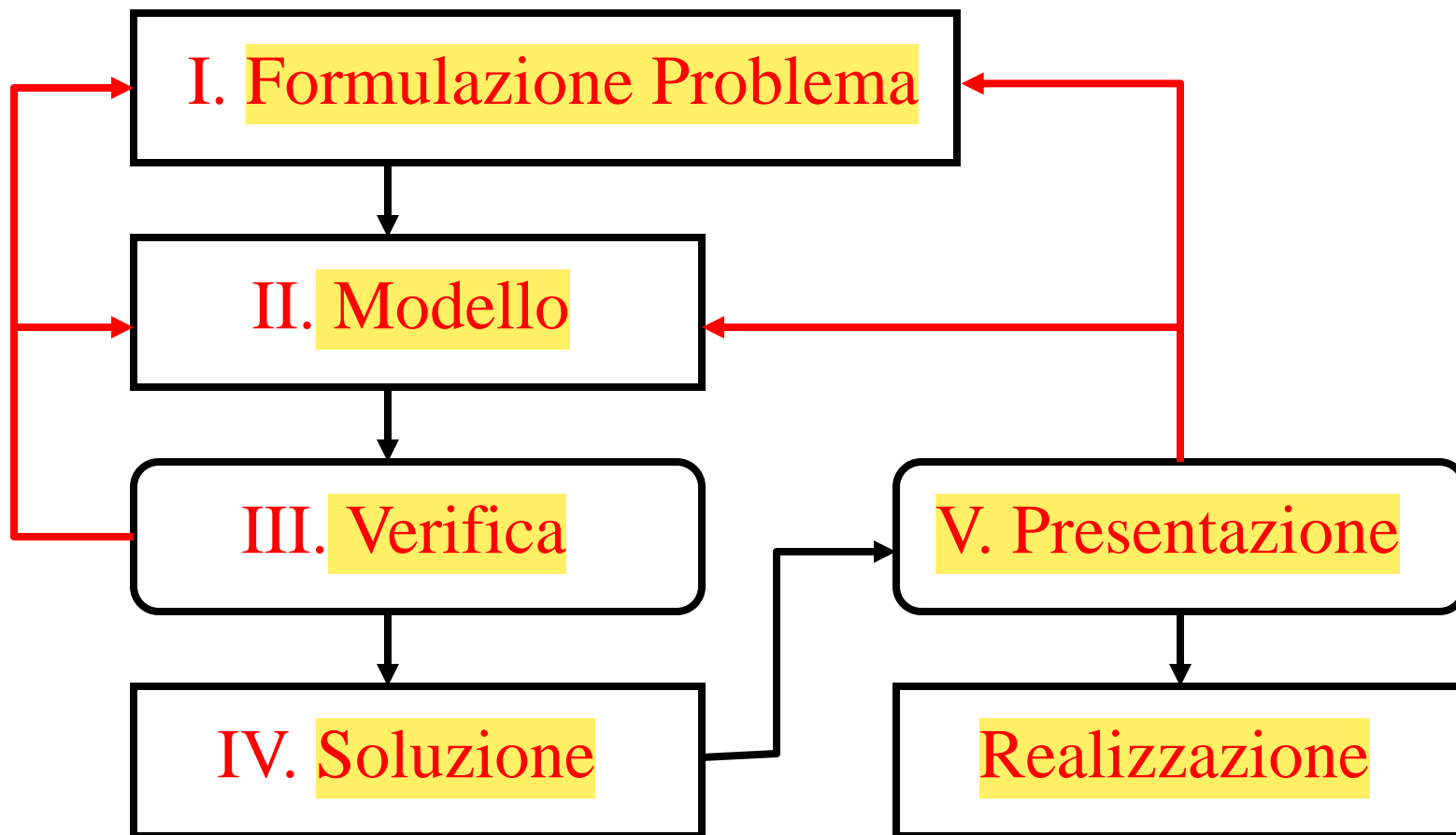




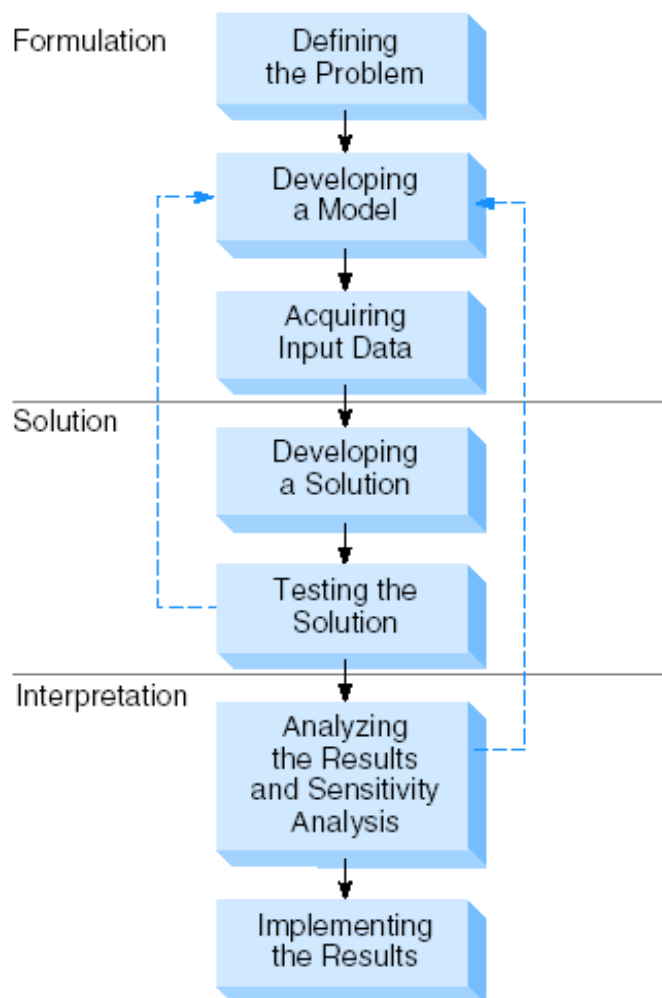
V. Presentazione dei risultati

- Modello e risultati vengono sottoposti ai decisori:
 - verifica delle ipotesi sul modello
 - esame dell'obiettivo e delle soluzioni
 - se insoddisfacente: revisione del modello e nuove soluzioni
- Implementazione della soluzione
- Monitoraggio del sistema nel tempo

Metodologia della R.O.

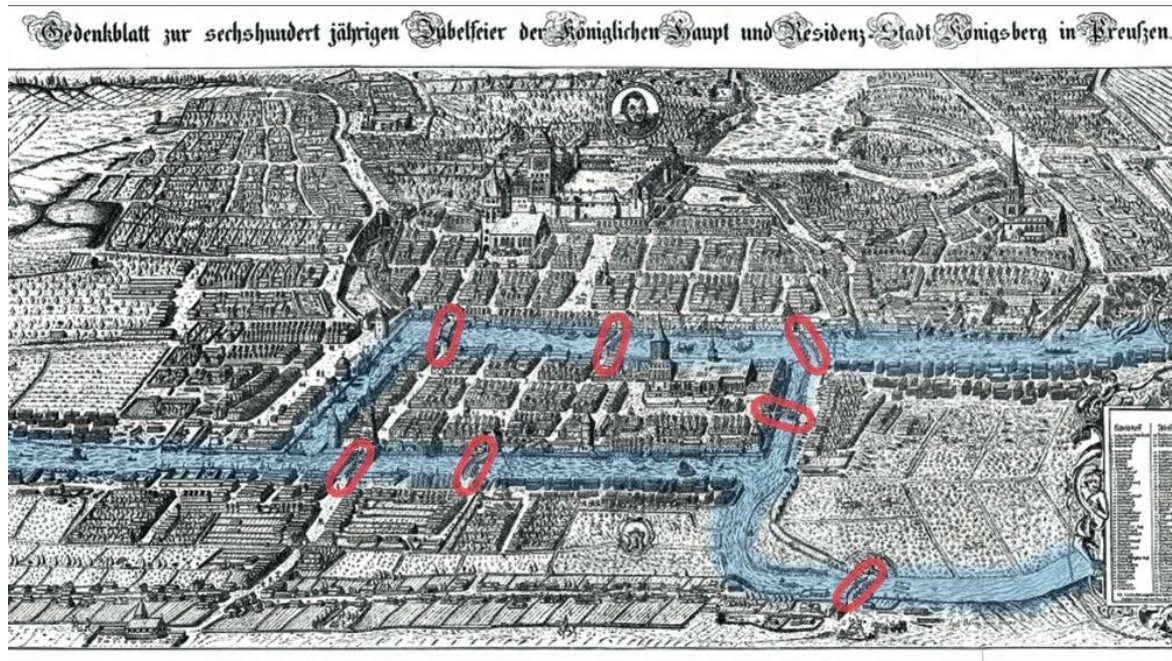


Metodologia della R.O.



I sette ponti di Königsberg

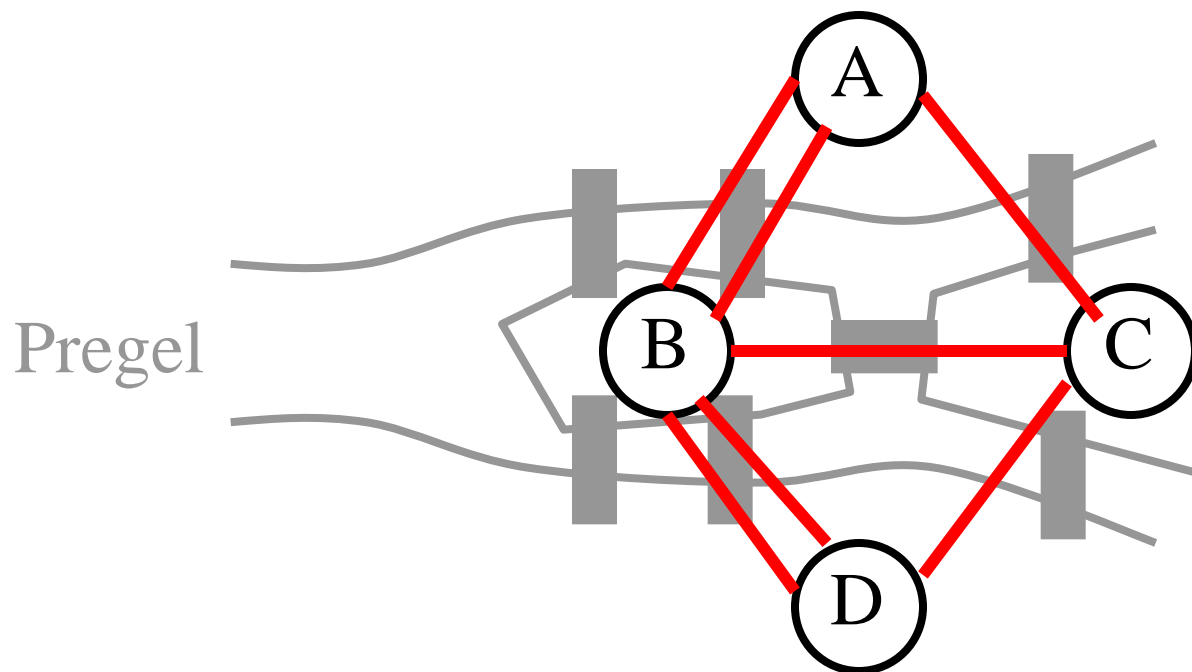
- Problema di Eulero (1707-1783)



È possibile effettuare una passeggiata, ritornando al punto di partenza, dopo aver attraversato tutti i ponti una sola volta ?

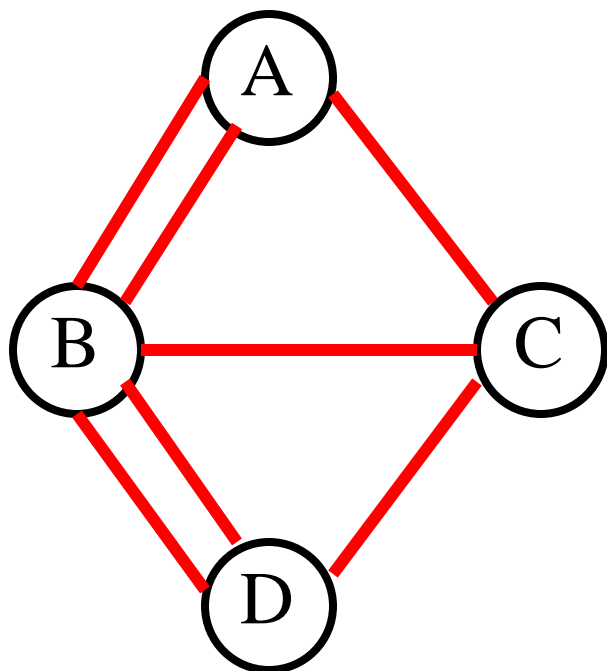
Modello del problema dei ponti

- Rappresentazione astratta del problema:
nascita della **Teoria dei Grafi**
- Grafo equivalente alla mappa:



Soluzione del problema

- Esiste un percorso chiuso che attraversa tutti gli archi del grafo una ed una sola volta ?
(Circuito Euleriano)



Cond. necessaria e sufficiente
(Eulero, 1736):

*Il circuito esiste se e solo se in ogni nodo ha un numero **pari** di lati **incidenti**.*

⇒ Il problema di Königsberg non ha soluzione !!



Applicazioni della R.O.

- Problemi **decisionali**
 - Scelta di investimenti
 - Localizzazione sul territorio (impianti, servizi...)
 - Dimensionamento (impianti, personale ...)
 - Attivazione di rotte aeree (linee di autobus)
 - Attribuzione di compiti al personale
 - ...



Applicazioni della R.O. (2)

- Problemi **Gestionali**
 - organizzazione della produzione
 - sequenziamento di lavori
 - pianificazione dei lavori
 - instradamento di veicoli
 - turnazione del personale
 - controllo del traffico aereo
 - caricamento di containers, pallets
 - taglio ed impaccamento di oggetti
 - ...



Associazioni Professionali R.O.

- AIRO – Associazione Italiana:
<https://www.airo.org>
- EURO – Associazione Europea:
<https://www.euro-online.org>
- INFORMS – Associazione Statunitense:
<https://www.informs.org>
- ALIO – Associazione Latino-Ibero-Americana:
<https://www.alio-online.com>