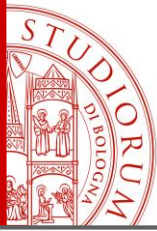


Alberi Ricoprenti (Spanning Trees)

Alessandro Hill

rev. 1.0(AH) – 2024

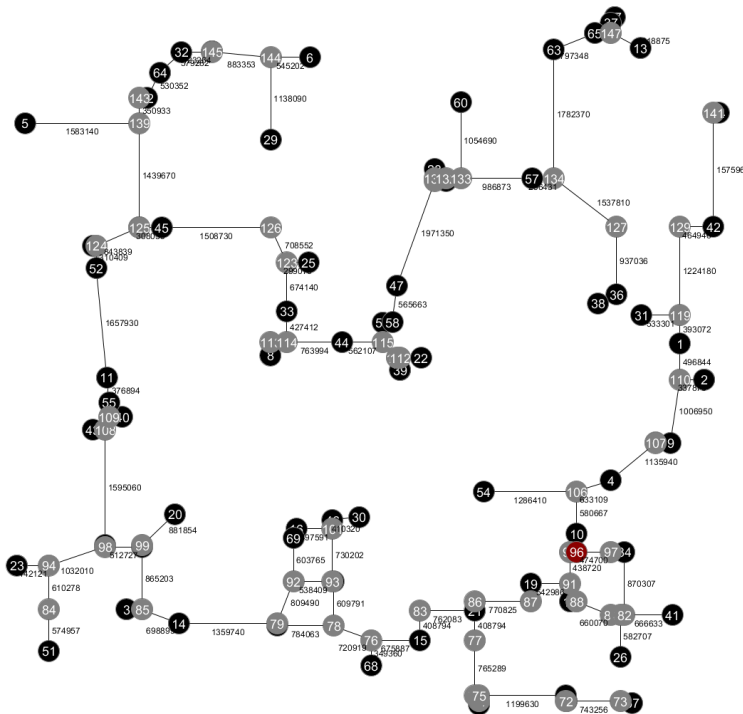


The Minimum Spanning Tree

Risolvibile sia su Grafi non orientati sia in Grafi Orientati (dove però ho più difficoltà, perché solo da un verso posso ricoprire i nodi)

Problem (MST)

A **tree** is a graph such that each pair of nodes is connected by exactly one path.



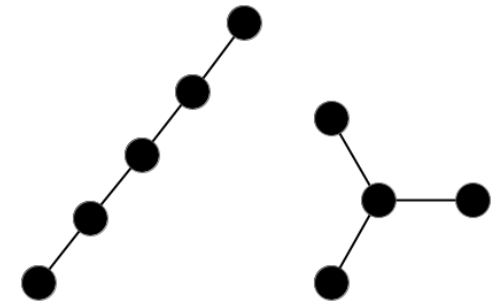
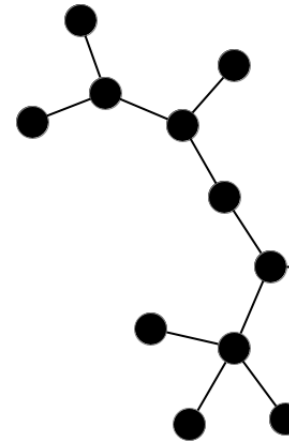
A tree-shaped telecommunication network.

Un albero in teoria dei grafi è un tipo particolare di grafo non orientato che possiede due proprietà fondamentali:

A tree has no cycles!

Connessione: Esiste un percorso unico tra ogni coppia di nodi. Questo significa che ogni nodo è raggiungibile da qualsiasi altro nodo del grafo.

Assenza di cicli: Non ci sono cicli, cioè non esistono percorsi chiusi all'interno dell'albero.



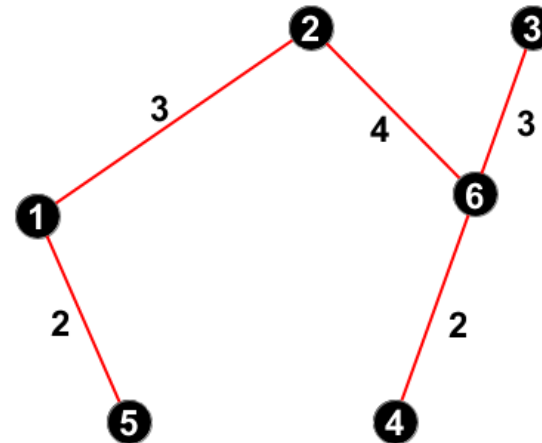
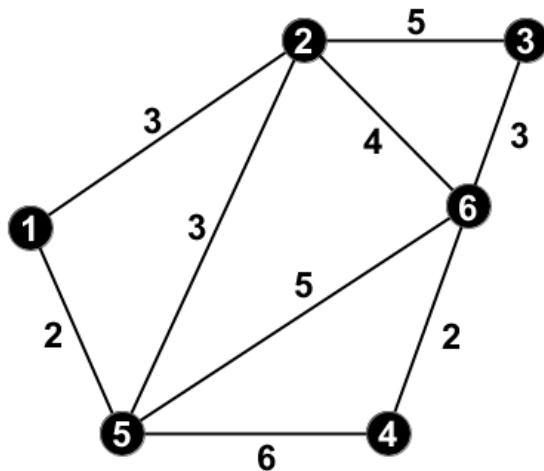


The Minimum Spanning Tree Problem

Richiede di trovare un sottoinsieme di archi (o connessioni) in un grafo connesso e pesato, tale che:

- Tutti i nodi del grafo siano connessi.
- La somma totale dei pesi degli archi selezionati sia la minima possibile.

The **minimum spanning tree problem** asks for a tree subgraph that spans all given nodes such that the total cost of tree edges is minimized.



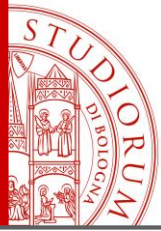
Non trova l'unico albero minimo: ce ne sono altri, se cambio nodo di partenza

Prim's algorithm (exact; Vojtěch Jarník, 1930):

1. **Select network node.** Selezione del nodo iniziale: Si inizia da un nodo qualsiasi del grafo.
2. **Connect current partial tree to "cheapest tree neighbor".**
3. **Repeat 2. until all nodes are connected.**

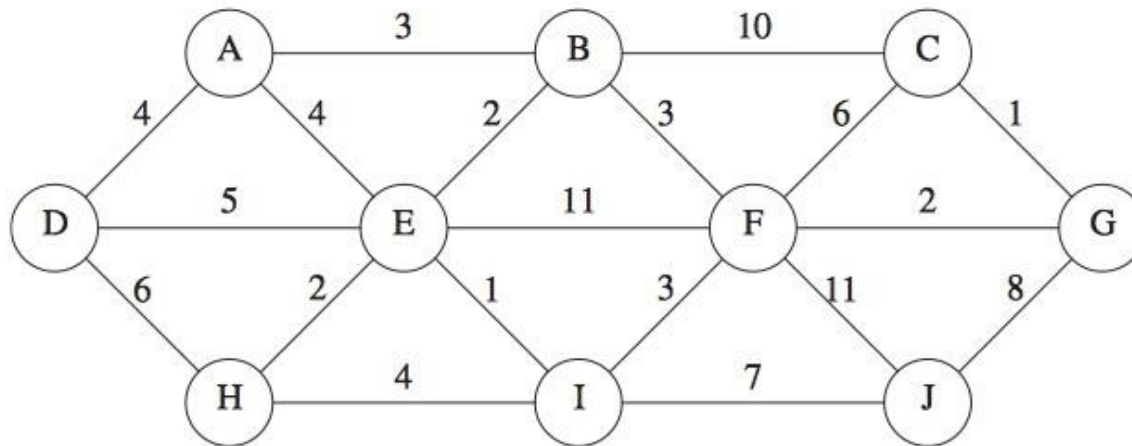
Da ogni nodo già connesso, si cerca l'arco di costo minore che connette a un nuovo nodo non ancora incluso nell'albero.

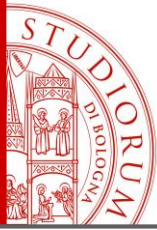
Questo processo si ripete finché tutti i nodi del grafo non sono stati inclusi nell'albero ricoprente.



The Minimum Spanning Tree Problem

Find the minimum spanning tree for the following given network.





The Minimum Spanning Tree Problem

IP Model (non-compact)

Binary edge variable for each edge that could be part of the tree:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if edge } \{i,j\} \text{ will be used in the tree,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Objective:

$$\text{Minimize } \sum_{\{i,j\} \in E} w_{i,j} x_{i,j}$$

Number of overall edges:

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{i,j} = |N| - 1$$

Questo vincolo assicura che il numero di archi selezionati sia esattamente quello necessario per connettere tutti i nodi senza ridondanza, cioè senza cicli.

No cycles allowed:

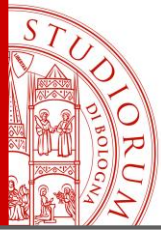
$$\sum_{\{i,j\} \in E(S)} x_{i,j} \leq |S| - 1 \quad \text{for each subset } S \subset N.$$

Questo vincolo assicura che non si possano formare cicli prendendo sottoinsiemi di nodi del grafo, rispettando la struttura dell'albero.

Per diminuire il numero di vincoli (di no cycle) presenti nel modello, aggiungo vincoli mano a mano che vengono violati i vincoli mancanti (se trovo un ciclo costruito da un sottoinsieme di nodi, esplicito il vincolo nel modello). Applicato nuovi vincoli, ricalcolo e riverifico l'albero di copertura

Numero di archi: Deve essere uguale a $n-1$.

Assenza di cicli: La somma degli archi in ogni sottoinsieme non può superare il numero di nodi nel sottoinsieme meno uno.



The Minimum Spanning Tree Problem

Find a minimum spanning tree for the following given network.

