Cliques & Independent Sets

Alessandro Hill

rev. 1.0(AH) – 2024

The Maximum Clique Problem

Problema della cricca

Un sottoinsieme di nodi in V è chiamato "cricca" se tutti i nodi all'interno di questo sottoinsieme sono collegati tra loro.

Grafo non orientato

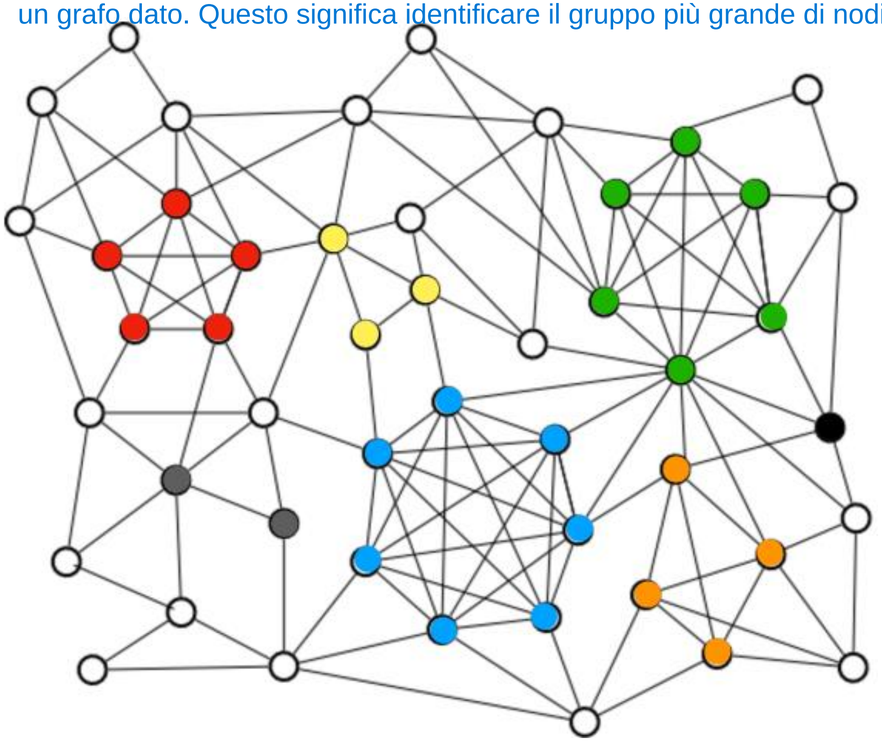
We are given an undirected base graph **G** with node set **V** and edge set **E**.

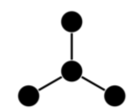
A subset of nodes in **V** is called a clique if all nodes are connected in **G**.

The Maximum Clique Problem asks for a clique of maximum cardinality in **G**.*

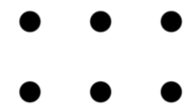
Trovare una cricca con il massimo numero di nodi (cardinalità massima) all'interno di un grafo dato. Questo significa identificare il gruppo più grande di nodi collegati tra loro.

*NP-hard (extremely difficult to optimize)

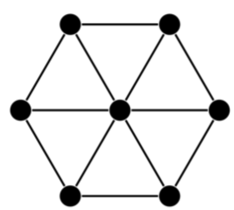




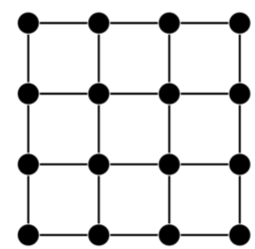
Claw



Empty graph



Wheel



Grid

Applications: Biology, social network analysis, telecommunications, computer science, etc.

The Maximum Clique Problem

IP Model*

Binary node variable for each node that could be part of a clique:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{if node } \cancel{i}^{\,v} \text{ will be used in the clique,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Maximize $\sum_{v \in V} x_v$

Massimizzare questa somma permette di trovare il sottoinsieme più grande di nodi che possono essere inclusi in una cricca.

non impostare il vincolo sulla diagonale della matrice di adiacenza dei nodi (perché auto legame con se stesso non può esistere)

Idea: Two unconnected nodes cannot be both part of a clique.

$$x_u + x_v \leq 1 \qquad \forall \{u, v\} \in \overline{E}$$

Questo vincolo garantisce che solo nodi connessi tra loro possano appartenere simultaneamente alla cricca, mantenendo la definizione di "cricca" (ossia, un sottoinsieme di nodi completamente connesso).

Vado a prendere quei nodi con maggior vicini e collegati con quelli già scelti (perché vado a prendere quelli che hanno maggior vicini insieme a quelli già scelti, cioè già presenti in Q)

The Maximum Clique Problem

Max-Degree Heuristic (Greedy)

Grafo non orientato

Degree = Grado

Input: Undirected graph G=(V,E).

1. Initialize clique Q = {}.

2. Pick a node v in V of highest degree. Add v to Q.

Scegli un nodo v in V che abbia il grado massimo (ossia che sia connesso al maggior numero di altri nodi nel grafo). Aggiungilo a Q

3. Pick the node v in V\Q that
   - is connected to all nodes in Q and
   - has the highest number of neighbors in common with nodes in Q.

   Add v to Q.

4. If no node v was found, return Q, else go to 3.

A questo punto, cerchiamo di aggiungere nuovi nodi a Q seguendo i criteri specificati:
Scegli un nodo v in V\Q (cioè un nodo che non è ancora stato aggiunto a Q) che:
1) Sia connesso a tutti i nodi già presenti in Q.
2) Abbia il massimo numero di vicini in comune con i nodi in Q.
Aggiungi questo nodo v a Q.

L'euristica tenta di costruire la cricca massima aggiungendo, a ogni passo, il nodo più connesso che è compatibile con la struttura della cricca formata fino a quel momento. Anche se questa tecnica non garantisce sempre la soluzione ottimale (poiché è un metodo greedy), è spesso efficace e veloce per trovare una soluzione approssimata, specialmente per grafi di grandi dimensioni.

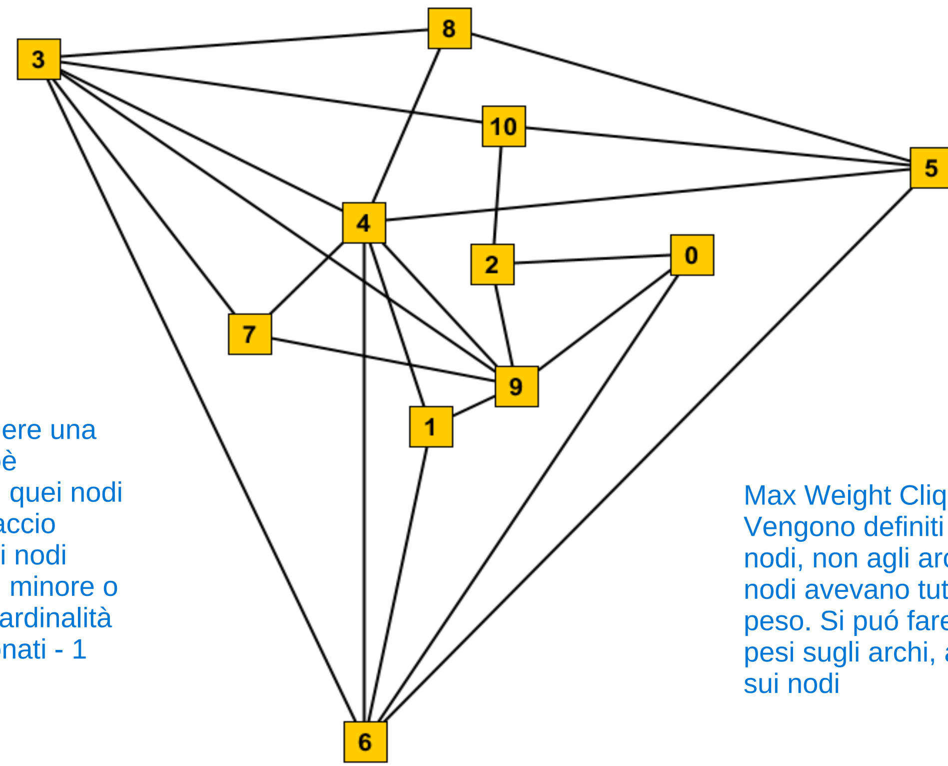
The Maximum Clique Problem

What is the largest clique the social network given below?

Example:

ID	Name	Friends With
0	[Toi]()	2,9,6
1	[Brain]()	4,6,9
2	[Annamaria]()	0,9,10
3	[Nina]()	4,6,7,8,9,10
4	[Walton]()	1,3,5,6,7,8,9
5	[Virgilio]()	4,6,8,10
6	[Teena]()	0,1,3,4,5
7	[Darrin]()	3,4,9
8	[Alessandra]()	3,4,5
9	[Harry]()	0,1,2,3,4,7
10	[Simona]()	2,3,5

http://listofrandomnames.com



Per escludere una Clique (cioè selezionati quei nodi insieme) faccio somma dei nodi selezionati minore o uguale a cardinalità dei selezionati - 1

Max Weight Clique: Vengono definiti dei pesi ai nodi, non agli archi. Prima i nodi avevano tutti stesso peso. Si puó fare anche con i pesi sugli archi, al posto che sui nodi

a) Find **a** maximum clique using **IP**.

b) Find **ALL** maximum cliques using **IP**.

c) Find a clique using the maximum-degree heuristic.

d) Find a maximum weight clique using node weight ‘**nodeIndex**’ (**IP**).

Un epsilon-quasi-clique è un clique (cioè un sottoinsieme completo di nodi in un grafo dove ogni coppia è connessa) che può mancare di epsilon archi. Questo significa che alcuni nodi di un clique potrebbero non essere direttamente connessi tra loro, fino a un massimo di epsilon eccezioni.

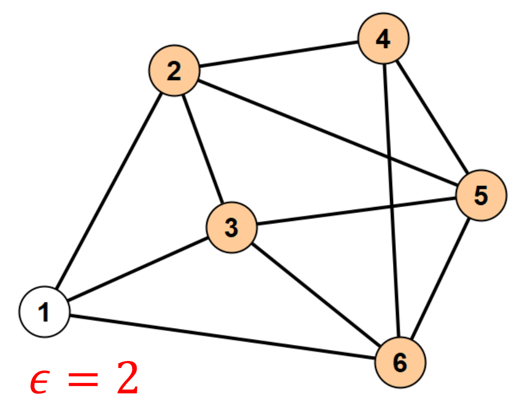
The Maximum Quasi-Clique Problem

An ϵ-quasi-clique, is a clique that is missing ϵ edges.

Binary "exception variable" for unconnected nodes $\{u, v\} \in \overline{E}$:

$$z_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{if unconnected nodes } u \text{ and } v \text{ are part of the quasi-clique,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

se due nodi non connessi (u e v) sono comunque considerati parte del quasi-clique.



Maximize $\sum_{v \in V} x_v$

xv è una variabile che indica se il nodo v appartiene al quasi-clique

Idea: Two unconnected nodes cannot be both part of a clique unless they form an exception.

$$x_u + x_v \leq 1 + z_{u,v} \qquad \forall \{u, v\} \in \overline{E}$$

Due nodi non connessi (u e v) possono essere inclusi nella stessa quasi-clique solo se accettiamo questa come un'eccezione.

Limit the number of exceptions to ϵ:

$$\sum_{\{u,v\} \in \overline{E}} z_{u,v} \leq \epsilon$$

Per garantire che il quasi-clique rispetti la definizione di epsilon-quasi-clique, il numero totale di eccezioni non deve superare epsilon

The Maximum Independent Set Problem

Problema del massimo insieme indipendente

We are given an undirected base graph **G** with node set **V** and edge set **E**.

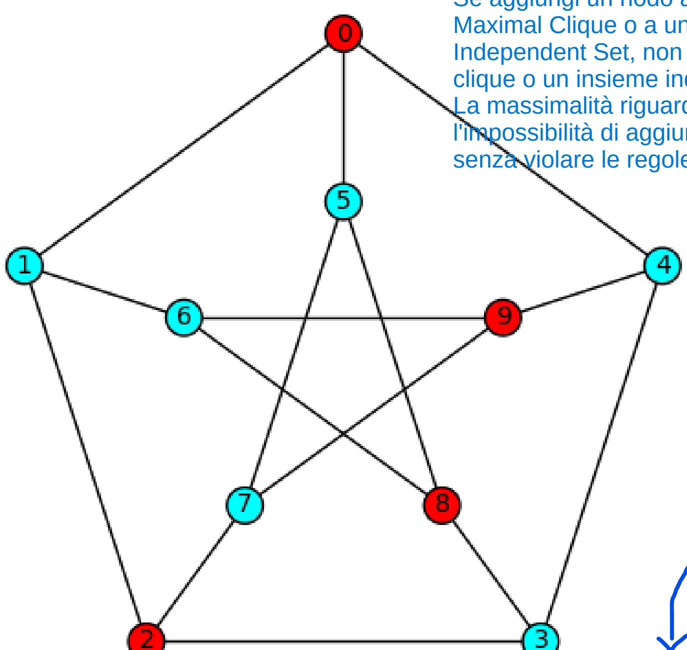
A subset of nodes in **V** is called an independent set if all nodes are disconnected.

Tutti i nodi del sottoinsieme sono non connessi tra loro

The Maximum Independent Set Problem asks for an independent set of maximum cardinality in **G**. *

*NP-hard (extremely difficult to optimize)

Se aggiungi un nodo a un Maximal Clique o a un Maximal Independent Set, non sarà più un clique o un insieme indipendente. La massimalità riguarda l'impossibilità di aggiungere nodi senza violare le regole



Questa relazione consente di risolvere il problema sfruttando algoritmi per il problema dei clique.

Observation: An independent set of $\mathbf{G}$ is a clique in its complement graph $\bar{\mathbf{G}}$.

Consequence: A maximum clique in $\bar{\mathbf{G}}$ is a maximum independent set in $\mathbf{G}$.

Definition: A clique (independent set) is called maximal if it cannot be extended by any node.

Un insieme indipendente è detto massimale se non è possibile aggiungere altri nodi senza violare la proprietà di indipendenza. Un clique è massimale se non è possibile aggiungere altri nodi senza perdere la proprietà di connessione.

The Maximum Independent Set Problem

IP Model*

Binary node variables for nodes that could be part of an independent set:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{if node } i \text{ will be used in the clique,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Maximize $\sum_{v \in V} x_v$

Idea: Two connected nodes cannot be both part of an independent set.

$$x_u + x_v \leq 1 \qquad \forall \{u, v\} \in E$$

Cliques & Independent Sets

1) Exercises:

1. **Consider the graph with 8 nodes.**

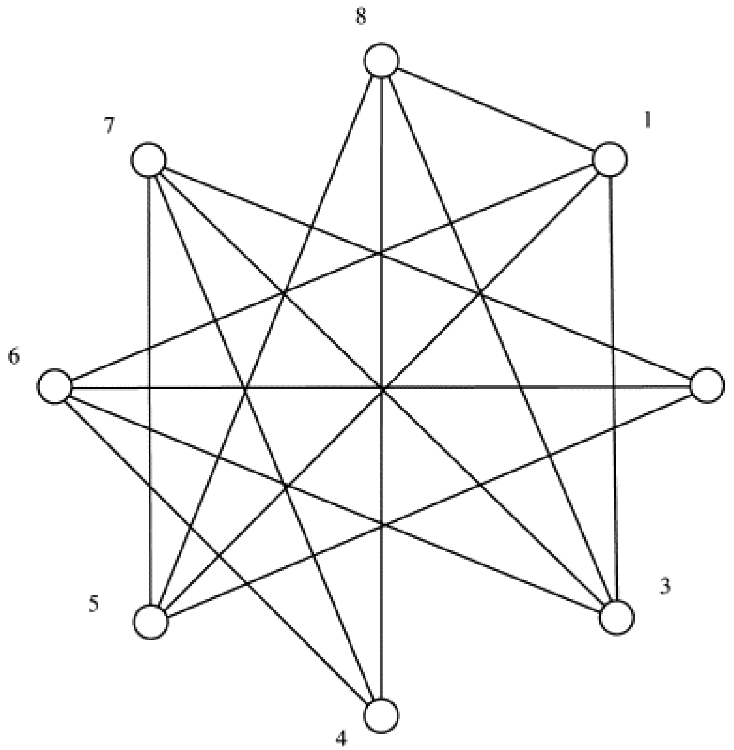
2. **Find a maximum clique using IP.**
   Verify your results visually.

3. **Find a maximum clique using the max-degree heuristic.**
   Verify your results visually.

4. **Find all maximum cliques using IP.**
   Verify your results visually.

5. **Find a maximum quasi-clique using IP.**
   Use $\epsilon \in \{1,2,3,4\}$.
   Verify your results visually.

6. **Find a maximum independent set using IP.**
   Verify your results visually.



Cliques & Independent Sets

2) Exercises:

1. Create a random graph with 20 nodes and 80 edges in yEd.

Use a convenient layout for your visualization.
Format as necessary.
You can export the edge list using the TGF format.

2. Find a maximum clique using IP.

Verify your results visually.

3. Find a maximum quasi-clique using IP.

Use $\epsilon \in \{1,5,10\}$.
Verify your results visually.

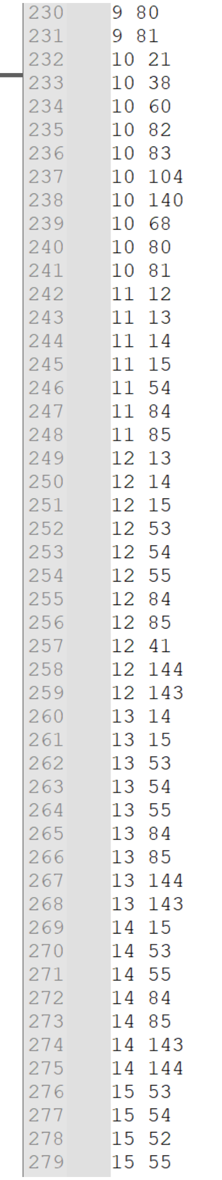
4. Find a maximum independent set using IP.

Verify your results visually.

5. Can you find two disjoint cliques such that the overall number of selected clique nodes is maximized?

Use IP.

6. For what larger graph sizes/desities can you still answer the questions above?



```
9 80
9 81
10 21
10 38
10 60
10 82
10 83
10 104
10 140
10 68
10 80
10 81
11 12
11 13
11 14
11 15
11 54
11 84
11 85
12 13
12 14
12 15
12 53
12 54
12 55
12 84
12 85
12 41
12 144
12 143
13 14
13 15
13 53
13 54
13 55
13 84
13 85
13 144
13 143
14 15
14 53
14 55
14 84
14 85
14 143
14 144
15 53
15 54
15 52
15 55
```

Cliques & Independent Sets

3) Exercises:

1. Use the class social network data (Virtuale).

2. Find a maximum clique using IP that includes <u>yourself</u>.
Use arbitrary node number if you cannot remember yours.
Verify your results visually.

3. Find a maximum independent set using IP that includes you.
Use arbitrary node number if you cannot remember yours.
Verify your results visually.