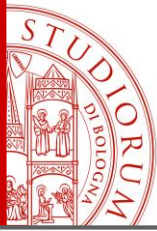


Alberi Ricoprenti (Spanning Trees)

Alessandro Hill

rev. 1.0(AH) – 2024



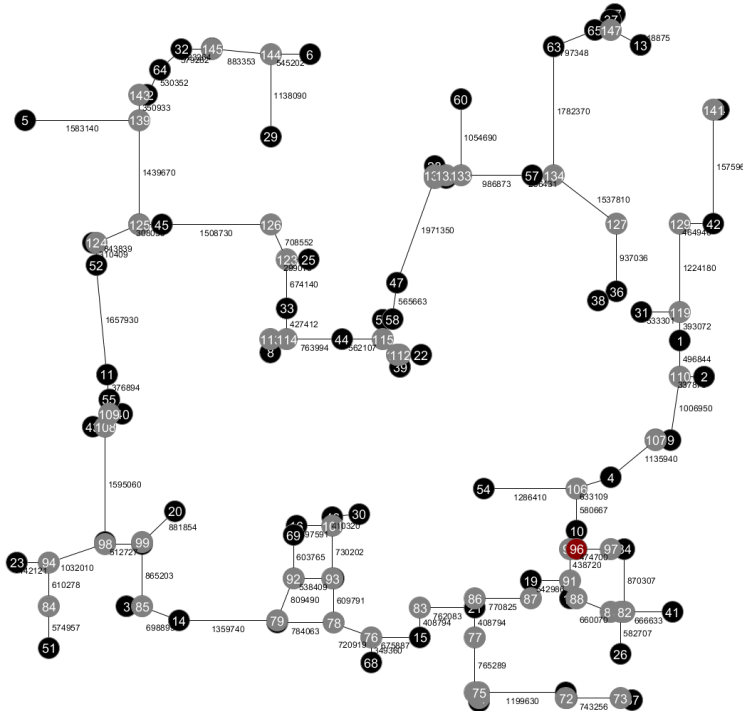
The Minimum Spanning Tree

Risolvibile sia su Grafi non orientati sia in Grafi Orientati (dove però ho più difficoltà, perché solo da un verso posso coprire i nodi)

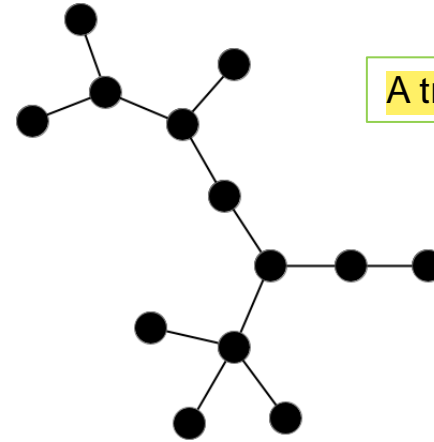
Problem (MST)

A **tree** is a graph such that each pair of nodes is connected by exactly one path.

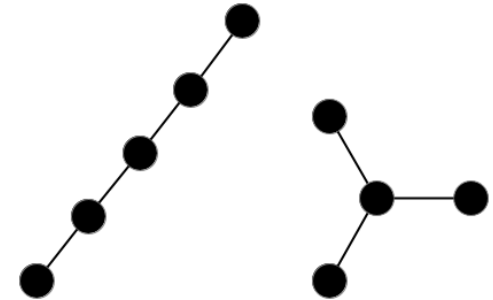
Un albero é un Grafo connesso ed aciclico



A tree-shaped telecommunication network.



A tree has no cycles!





The Minimum Spanning Tree Problem

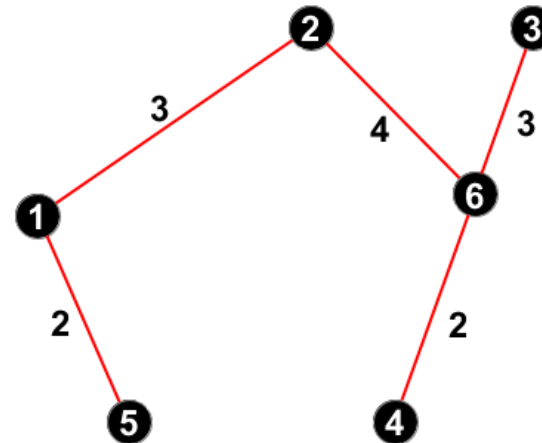
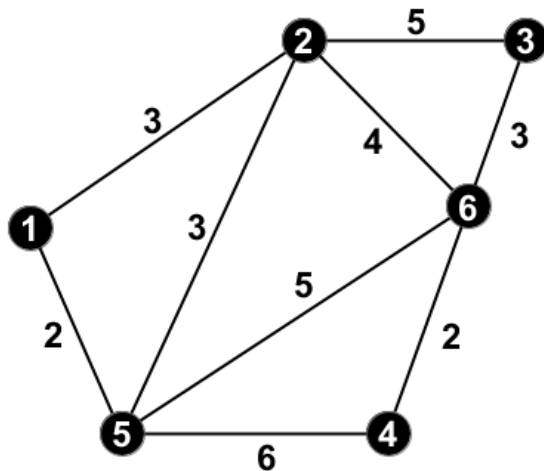
Richiede di trovare un sottoinsieme di archi (o connessioni) in un grafo connesso e pesato, tale che:

- Tutti i nodi del grafo siano connessi.
- La somma totale dei pesi degli archi selezionati sia la minima possibile.

Problem

Grafo parziale con minimo costo

The **minimum spanning tree problem** asks for a tree subgraph that spans all given nodes such that the total cost of tree edges is minimized.



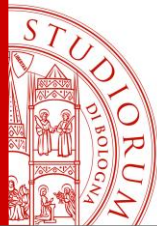
Non trova l'unico albero minimo: ce ne sono altri, se cambio nodo di partenza

Prim's algorithm (exact: Vojtěch Jarník, 1930):

1. **Select network node.** Selezione del nodo iniziale: Si inizia da un nodo qualsiasi del grafo.
2. **Connect current partial tree to "cheapest tree neighbor".**
3. **Repeat 2. until all nodes are connected.**

Da ogni nodo già connesso, si cerca l'arco di costo minore che connette a un nuovo nodo non ancora incluso nell'albero.

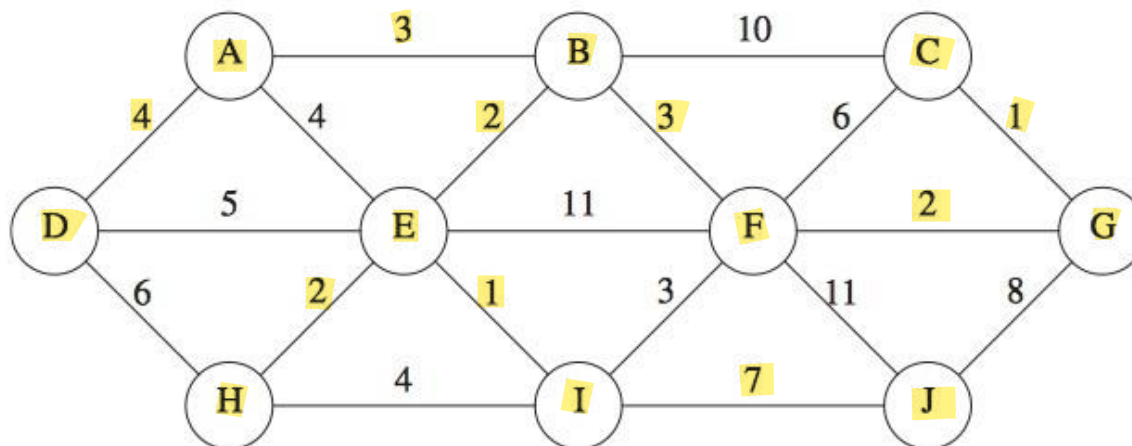
Questo processo si ripete finché tutti i nodi del grafo non sono stati inclusi nell'albero ricoprente.



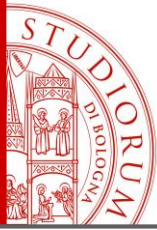
The Minimum Spanning Tree Problem

Find the minimum spanning tree for the following given network.

Parto da D



Non per forza, devo scegliere l'arco vicino al nodo appena scelto (del vecchio arco scelto come ultimo)



The Minimum Spanning Tree Problem

IP Model (non-compact)

Binary edge variable for each edge that could be part of the tree:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if edge } \{i,j\} \text{ will be used in the tree,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Objective:

$$\text{Minimize } \sum_{\{i,j\} \in E} w_{i,j} x_{i,j}$$

Number of overall edges:

$$\sum_{\{i,j\} \in E} x_{i,j} = |N| - 1$$

Questo vincolo assicura che il numero di archi selezionati sia esattamente quello necessario per connettere tutti i nodi senza ridondanza, cioè senza cicli.

No cycles allowed:

$$\sum_{\{i,j\} \in E(S)} x_{i,j} \leq |S| - 1 \quad \text{for each subset } S \subset N.$$

Questo vincolo assicura che non si possano formare cicli prendendo sottoinsiemi di nodi del grafo, rispettando la struttura dell'albero.

Per diminuire il numero di vincoli (di no cycle) presenti nel modello, aggiungo vincoli mano mano che vengono violati i vincoli mancanti (se trovo un ciclo costruito da un sottoinsieme di nodi, esplicito il vincolo nel modello). Applicato nuovi vincoli, ricalcolo e riverifico l'albero di copertura

Numero di archi: Deve essere uguale a $n-1$.

Assenza di cicli: La somma degli archi in ogni sottoinsieme non può superare il numero di nodi nel sottoinsieme meno uno.

