Programmazione Lineare Intera: Algoritmo Branch and Bound

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.)

rev. 2.2(AH) – 2024

Algoritmi generali per PLI

- Metodi esatti tradizionali (anni 60-oggi):
  - Metodo dei piani di taglio (cutting planes)
  - Branch-and-Bound
  - Programmazione Dinamica
- …
- Metodi esatti più avanzati (anni 90-oggi):
  - Branch-and-Bound + Cutting planes = Branch-and-Cut
  - Branch-and-Price/Column generation

Branch and Bound

- Tecnica generale per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria (F finito) La regione ammissibile è finita
- Si basa sulla scomposizione del problema in sottoproblemi ("Divide and Conquer") (Divide et Impera)
- Problema da risolvere: $P^0 = (z(\cdot), F(P^0))$
  - Funzione obiettivo: $z(\cdot)$
  - Regione ammissibile: $F(P^0)$
- Soluzione ottima: $z^* = z(P^0) = \min\{z(x) : x \in F(P^0)\}$
- Miglior soluzione ammissibile nota: z^{Best} (alla fine $z^* = z^{Best}$)

Branch and Bound (2)

- Suddivisione di P^0 in K sottoproblemi: $P^1, P^2, \ldots, P^K$ la cui totalità rappresenti P^0

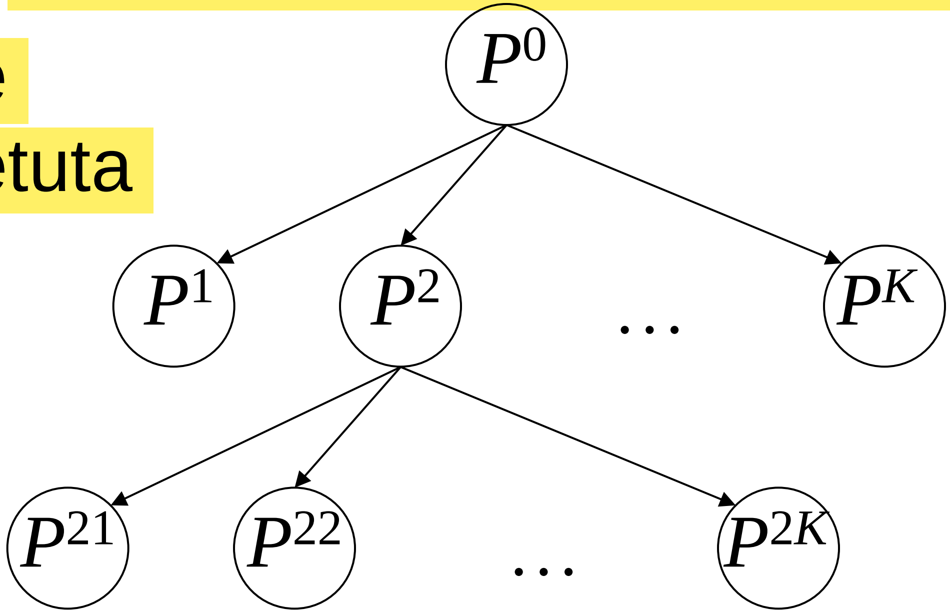
- Ad esempio si ottiene suddividendo $F(P^0)$ in sottoinsiemi $F(P^1), F(P^2), \ldots, F(P^K)$ tali che

$$\bigcup_{k=1}^{K} F\left(P^k\right) = F\left(P^0\right)$$

- preferibilmente la regione ammissibile va partizionata: $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset \quad \forall\ P^i, P^j : i \neq j$

Rappresentazione

- Il processo di suddivisione (ramificazione, Branching) si può rappresentare mediante un albero decisionale (Branch Decision Tree)
  - Nodi: problemi, Archi: relazione di discendenza
  - La suddivisione può essere ripetuta ricorsivamente



Branch and Bound (3)

- La soluzione ottima del sottoproblema P^k è:
  $z^k = z(P^k) = \min\{z(x) : x \in F(P^k)\}$
- risolvere P^0 equivale a risolvere tutti i P^k generati:
  $z^* = z(P^0) = \min\{z(P^1), z(P^2), \ldots, z(P^K), \ldots\}$
- Un sottoproblema P^k è risolto se: soddisfa una delle seguenti condizioni:
  1. Si determina la soluzione ottima di P^k
     (Es. PLI: $P^k \rightarrow C(P^k)$ con soluzione x^{Ck} intera);
  2. Si dimostra che $F(P^k) = \emptyset$ (P^k impossibile); (Regione Ammissibile Vuota)
  3. Si dimostra che $z(P^k) \geq z^{Best}$
     (Es. PLI : se $z^{Ck} \geq z^{Best}$ allora anche $z^k \geq z^{Best}$)
- I sottoproblemi non risolti vanno suddivisi

Non ha senso continuare a esaminare quel sottoproblema. Questo perché, anche se si trovasse la soluzione ottima di Pk, non sarebbe migliore della soluzione già conosciuta z Best (miglior soluzione attualmente conosciuta).

Branch and Bound per PLI

- (P^0) min $z^0 = c^T x$ Funzione Obiettivo (dove X variabili decisionali)

  $Ax = d$ Matrice dei Vincoli

  $x \geq 0$, intero X devono essere interi e non negativi

Notazione:

- x^k soluzione ottima di P^k (intera), di valore z^k $(z^0 \equiv z^*)$
- x^{Ck} soluzione ottima di $C(P^k)$, di valore z^{Ck} (X^Ck soluzione di Problema rilassato, cioè senza vincoli di interezza)

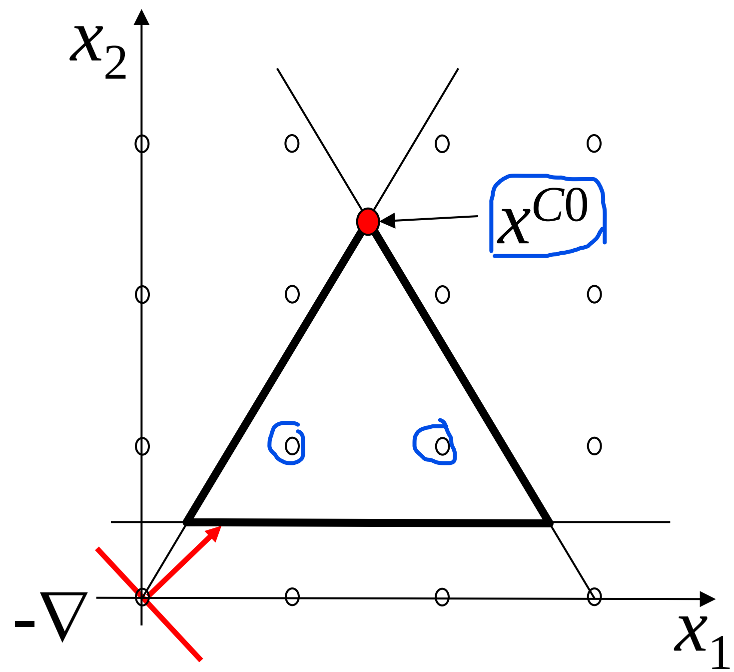
- Si noti che: $z^{Ck} = c^T x^{Ck} \leq z^k = c^T x^k$
- Se x^{C0} è intera $\Rightarrow x^* = x^0 = x^{C0}$ (soluzione ottima);
- Altrimenti …

Esempio di problema PLI:

$$
\begin{array}{llll}
\max z & x_1 & +x_2 & \\
s.t. & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\
 & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \\
 & & x_2 & \geq 1/2 \\
 & x_1 & , \; x_2 & \geq 0 \\
 & & & \text{intere}
\end{array}
$$

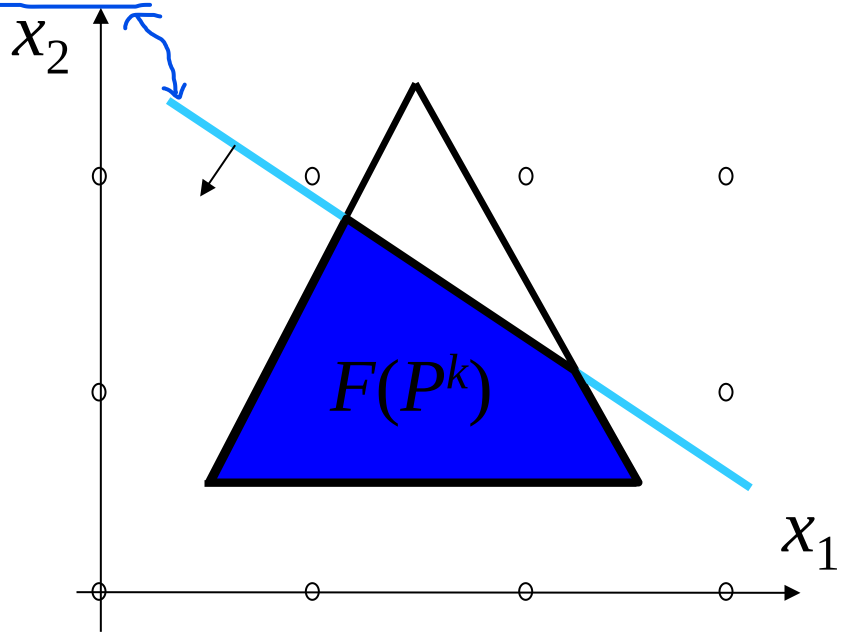
$\nabla = (1,1)$

- $\boxed{x^{C0} = (3/2, 5/2)}$



Branching

- La soluzione di $C(P^0)$ è frazionaria:
  ➔ suddividi $F(P^0)$ in K parti (Es. K=2)
- $F(P^k)$ si può ottenere aggiungendo a $F(P^0)$ un vincolo $\alpha^k x \leq \beta^k$



Branching (2)

- Due o più eventi sono mutuamente esclusivi se non possono verificarsi contemporaneamente.
- Un insieme di eventi è esaustivo se copre tutte le possibili outcomes. Significa che almeno uno degli eventi deve verificarsi in ogni esperimento.

- Scelta una componente x^{C0}_j frazionaria, imponiamo due condizioni mutuamente esclusive ed esaustive, valide per ogni soluzione intera di P^0:

$$x_j \le \lfloor x^{C0}_j \rfloor \quad \text{or} \quad x_j \ge \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

Aggiungo Vincolo

Branch 1

Branch 2

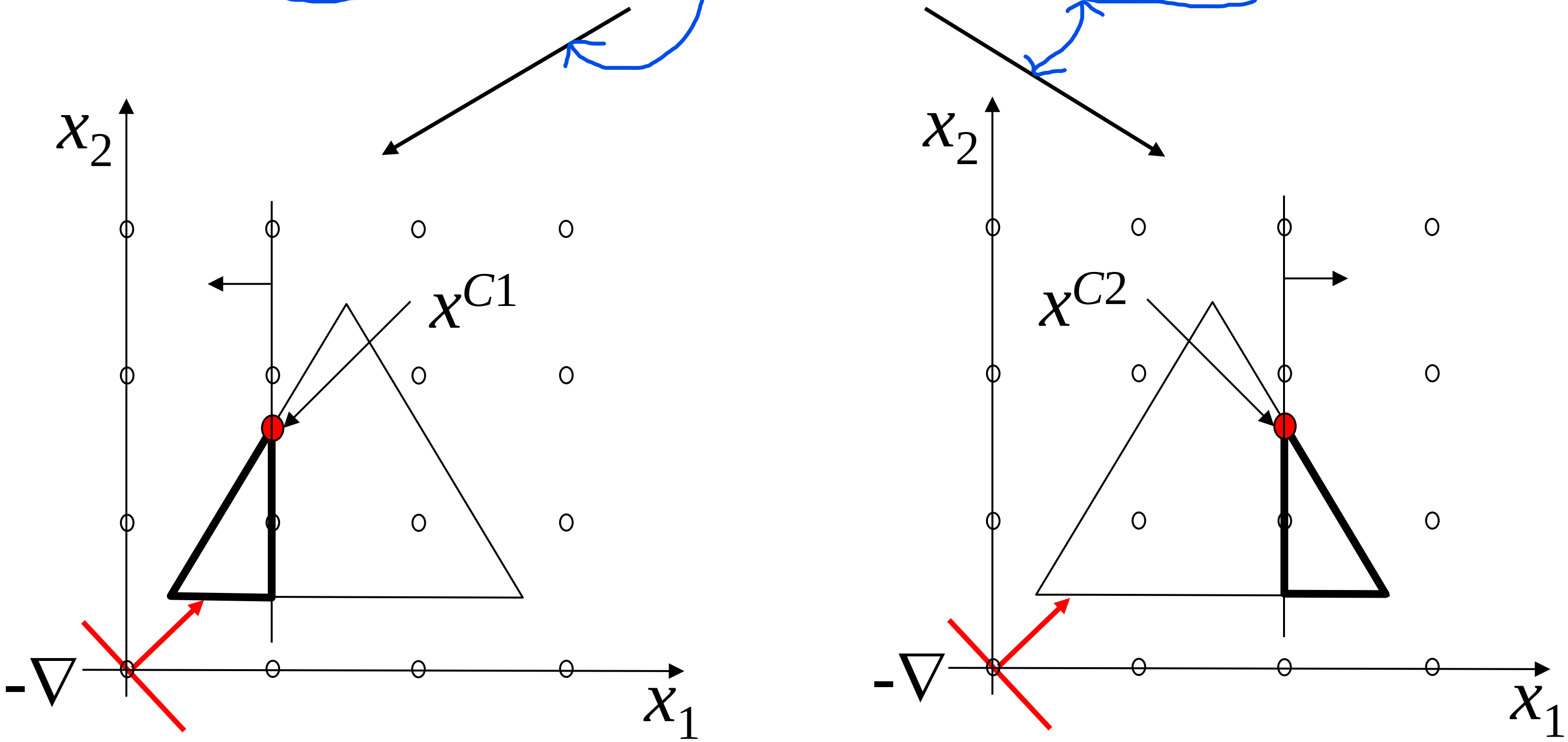
$$(P^1)\ \min z^1 = c^T x \qquad Ax = d \qquad x \ge 0 \text{ ,intero} \qquad x_j \le \lfloor x^{C0}_j \rfloor$$

$$(P^2)\ \min z^2 = c^T x \qquad Ax = d \qquad x \ge 0 \text{ ,intero} \qquad x_j \ge \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

$$\boxed{z^0 = \min(z^1, z^2)}$$

Prima ramificazione

- Es : $x^{C0}_1 = 3/2 \Rightarrow \boxed{x_1 \leq 1}$ or $\boxed{x_1 \geq 2}$:



$x^{C1}=(1, 5/3)$ $x^{C2}=(2, 5/3)$

Branching (3)

- Normalmente x^{C1} e /o x^{C2} non sono interi
  $\Rightarrow$ si continua a ramificare, cioè :
- Da ogni problema P^i si creano due nuovi problemi P^j e P^k a meno che :
  - x^{Ci} sia intero, oppure
  - il rilassamento continuo di P^i sia impossibile
- Quale variabile si sceglie per il Branching ?
  - la prima frazionaria Si seleziona la prima variabile che presenta una parte frazionaria.
  - quella con parte frazionaria maggiore In alternativa, si può scegliere la variabile con la parte frazionaria maggiore.
  - …

Strategia di esplorazione

In un problema di Massimo/Minimo, mano mano che scendo dalla radice, ho una soluzione intera sempre piú lontana dalla soluzione continua ottima.

- Se esiste più di un sottoproblema "in sospeso", qual è il prossimo da esaminare ?
- $z^{C1} = 8/3 \geq z^1$; $z^{C2} = 11/3 \geq z^2$ (problema di max)
- se c^T è intero, allora $z^* = c^T x$ è intera con x intera da cui $z^C \geq \lfloor z^C \rfloor \geq z^*$ (upper bound migliore) (se problema di minimo: $z^C \leq \lceil z^C \rceil \leq z^*$)
- Prossimo sottoproblema da esaminare:
  - $z^1 \leq \lfloor 8/3 \rfloor = 2$, mentre $z^2 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$

  ➔ meglio P^2!

Se Problema di Massimo, scelgo il Sottoproblema con Upper Bound Maggiore.
Se Problema di Minimo, scelgo il Sottoproblema con Lower Bound Minore.

Scegliere un sottoproblema con un lower/upper bound maggiore/minore significa che si sta esplorando una soluzione che ha il potenziale di essere migliore (ovvero, più vicina all'ottimo) rispetto agli altri sottoproblemi. Questo approccio mira a minimizzare il numero di sottoproblemi che devono essere risolti, aumentando l'efficienza complessiva della ricerca.

Seconda ramificazione

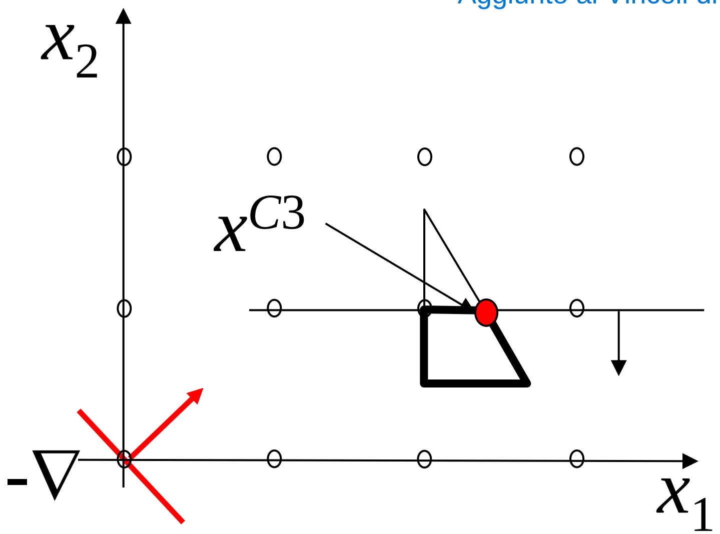
- Es: da P^2 : $x^{C2}{}_2 = 5/3$

$(P^3)\ P^2 + x_2 \le 1$

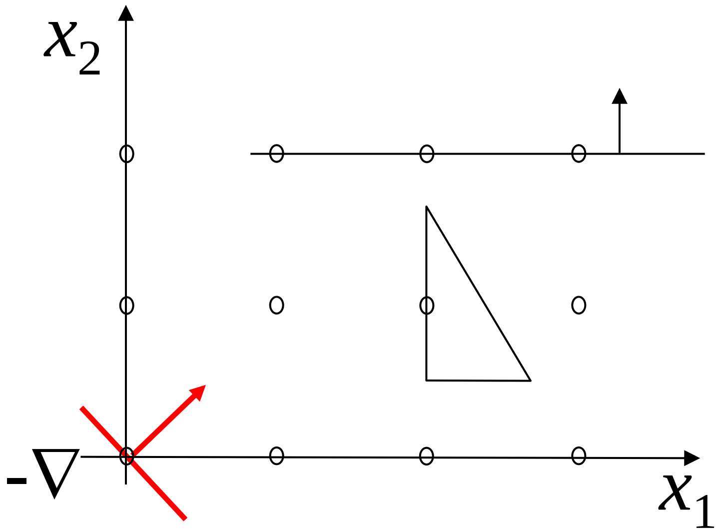
Aggiunto ai Vincoli di P2

$(P^4)\ P^2 + x_2 \ge 2$

Aggiunto ai Vincoli di P2



$x^{C3}=(12/5,\ 1)$



impossibile

Vincolo va fuori dalla
Regione Ammissibile

Terza ramificazione

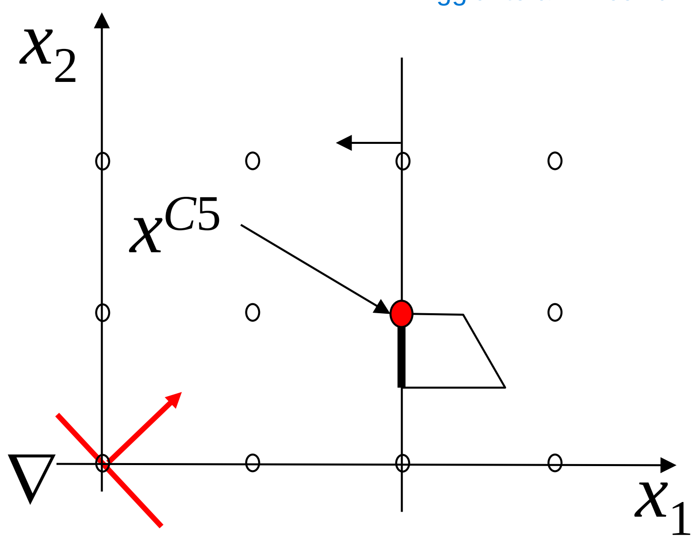
- Es: da P^3 : $x^{C3}{}_1 = 12/5$

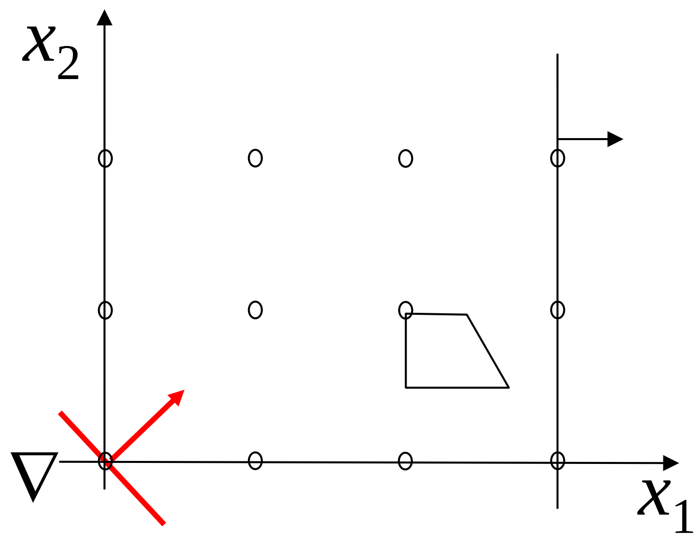
$$(P^5)\ P^3 + x_1 \le 2$$

Aggiunto ai Vincoli di P3

$$(P^6)\ P^3 + x_1 \ge 3$$

Aggiunto ai Vincoli di P3



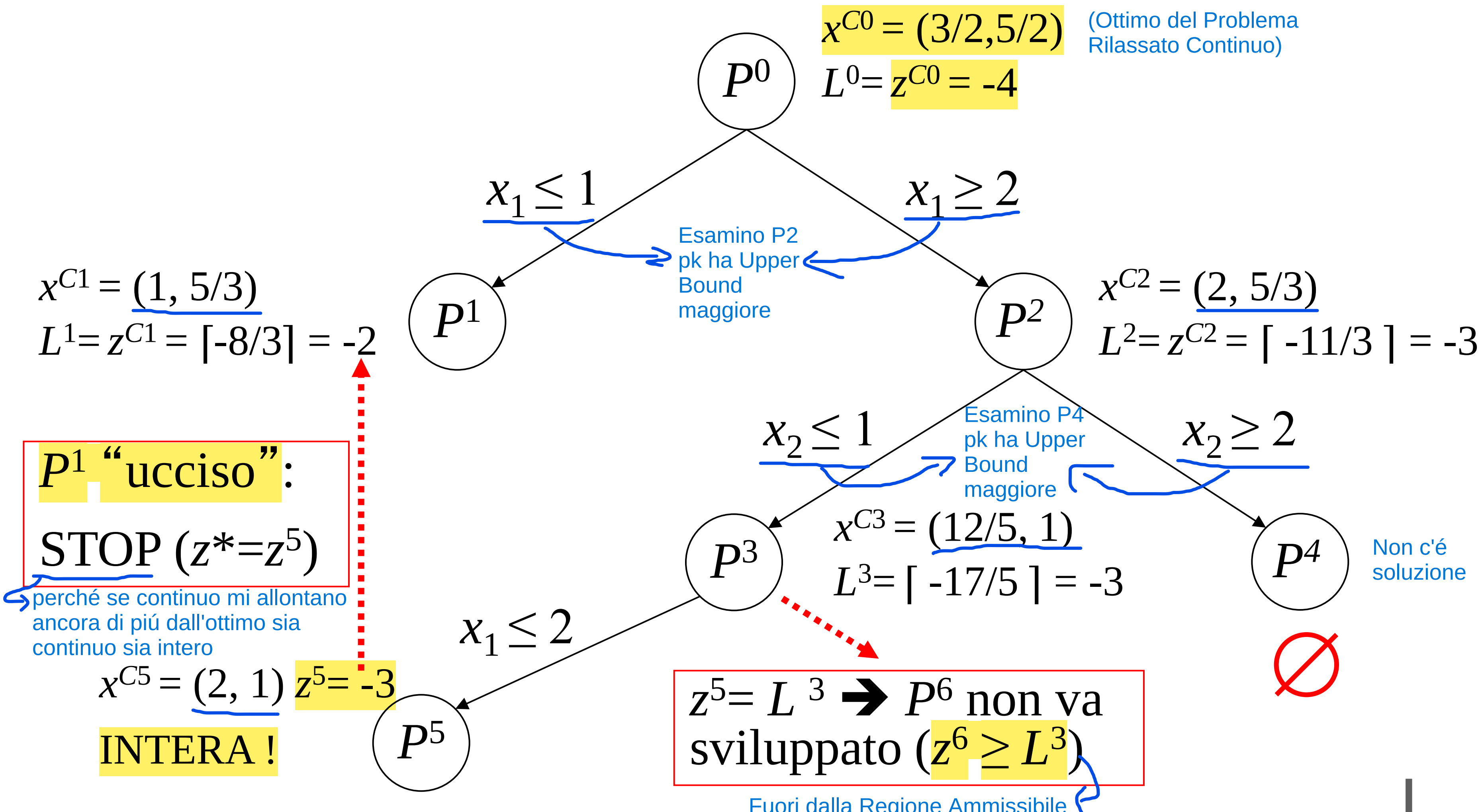


$x^{C5}=(2, 1)$ INTERA !

impossibile

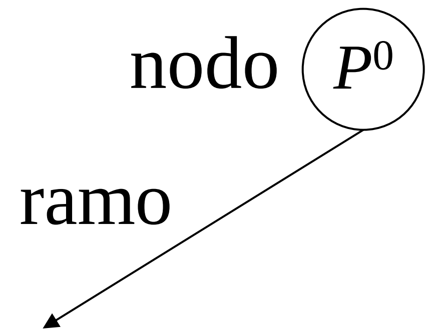
Vincolo va fuori dalla
Regione Ammissibile

Albero decisionale



Terminologia

P indica Problema



- 0 (o P^0) nodo radice
- 4, 5, … nodi “foglia” P4 e P5 nodi foglia
- 2 “padre” di 3 e 4 P2 padre di 3 e 4
- 3 e 4 “figli” di 2 P3 e P4 figli di P2
- 2 “progenitore” di 3, 4 e 5 P2 progenitore di P3, P4 e P5 ("progenitore"si riferisce al nodo da cui derivano altri nodi figli.)
- 3, 4, 5 “discendenti” di 0 e 2 P3, P4, P5 discendenti di P0 e P2

- Si continua il branching finché esistono nodi attivi
- Soluzione di P^0 = sol. della foglia di costo massimo