

# Programmazione Lineare Intera: Algoritmo Branch and Bound

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.)

rev. 2.2(AH) – 2024



# Algoritmi generali per PLI

- Metodi **esatti** tradizionali (anni 60-oggi):
  - Metodo dei piani di taglio (cutting planes)
  - **Branch-and-Bound**
  - Programmazione Dinamica
- ...
- Metodi esatti più avanzati (anni 90-oggi):
  - Branch-and-Bound + **Cutting planes** = Branch-and-**Cut**
  - Branch-and-Price/Column generation

# Branch and Bound

- Tecnica generale per la risoluzione di problemi di **ottimizzazione combinatoria** ( $F$  finito) → La regione ammissibile è finita
- Si basa sulla scomposizione del problema in sottoproblemi (“Divide and Conquer”) (Divide et Impera)
- Problema da risolvere:  $P^0 = (z(\cdot), F(P^0))$ 
  - Funzione obiettivo:  $z(\cdot)$
  - Regione ammissibile:  $F(P^0)$
- Soluzione ottima:  $z^* = z(P^0) = \min\{z(x) : x \in F(P^0)\}$
- Miglior soluzione ammissibile nota:  $z^{Best}$   
(alla fine  $z^* = z^{Best}$ )

# Branch and Bound (2)

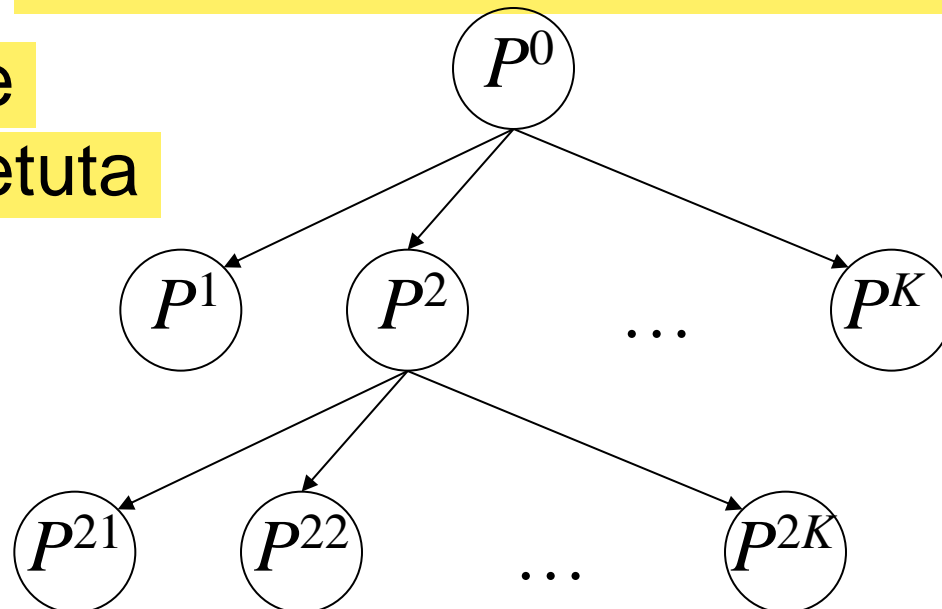
- Suddivisione di  $P^0$  in  $K$  sottoproblemi:  $P^1, P^2, \dots, P^K$  la cui totalità rappresenti  $P^0$
- Ad esempio si ottiene suddividendo  $F(P^0)$  in sottoinsiemi  $F(P^1), F(P^2), \dots, F(P^K)$  tali che

$$\bigcup_{k=1}^K F(P^k) = F(P^0)$$

- preferibilmente la regione ammissibile va partizionata:  $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset \quad \forall P^i, P^j: i \neq j$

# Rappresentazione

- Il processo di suddivisione (**ramificazione, Branching**) si può rappresentare mediante un albero decisionale (**Branch Decision Tree**)
  - Nodi: problemi, Archi: relazione di discendenza
  - La suddivisione può essere ripetuta ricorsivamente



# Branch and Bound (3)

- La soluzione ottima del sottoproblema  $P^k$  è:  

$$z^k = z(P^k) = \min \{ z(x) : x \in F(P^k) \}$$
- risolvere  $P^0$  equivale a risolvere tutti i  $P^k$  generati:  

$$z^* = z(P^0) = \min \{ z(P^1), z(P^2), \dots, z(P^K), \dots \}$$
- Un sottoproblema  $P^k$  è risolto se: soddisfa una delle seguenti condizioni:
  - Si determina la soluzione ottima di  $P^k$   
(Es. PLI:  $P^k \rightarrow C(P^k)$  con soluzione  $x^{Ck}$  intera);
  - Si dimostra che  $F(P^k) = \emptyset$  ( $P^k$  impossibile); (Regione Ammissibile Vuota)
  - Si dimostra che  $z(P^k) \geq z^{Best}$   
(Es. PLI : se  $z^{Ck} \geq z^{Best}$  allora anche  $z^k \geq z^{Best}$ )
- I sottoproblemi non risolti vanno suddivisi

Non ha senso continuare a esaminare quel sottoproblema. Questo perché, anche se si trovasse la soluzione ottima di  $P^k$ , non sarebbe migliore della soluzione già conosciuta  $z^{Best}$  (miglior soluzione attualmente conosciuta).



# Branch and Bound per PLI

- $(P^0) \min z^0 = c^T x$  Funzione Obiettivo (dove X variabili decisionali)
- $Ax = d$  Matrice dei Vincoli
- $x \geq 0$ , intero X devono essere interi e non negativi

Notazione:

- $x^k$  soluzione ottima di  $P^k$  (intera), di valore  $z^k$  ( $z^0 \equiv z^*$ )
- $x^{Ck}$  soluzione ottima di  $C(P^k)$ , di valore  $z^{Ck}$  ( $x^{Ck}$  soluzione di Problema rilassato, cioè senza vincoli di interezza)
- Si noti che:  $z^{Ck} = c^T x^{Ck} \leq z^k = c^T x^k$
- Se  $x^{C0}$  è intera  $\Rightarrow x^* = x^0 = x^{C0}$  (soluzione ottima);
- Altrimenti ...

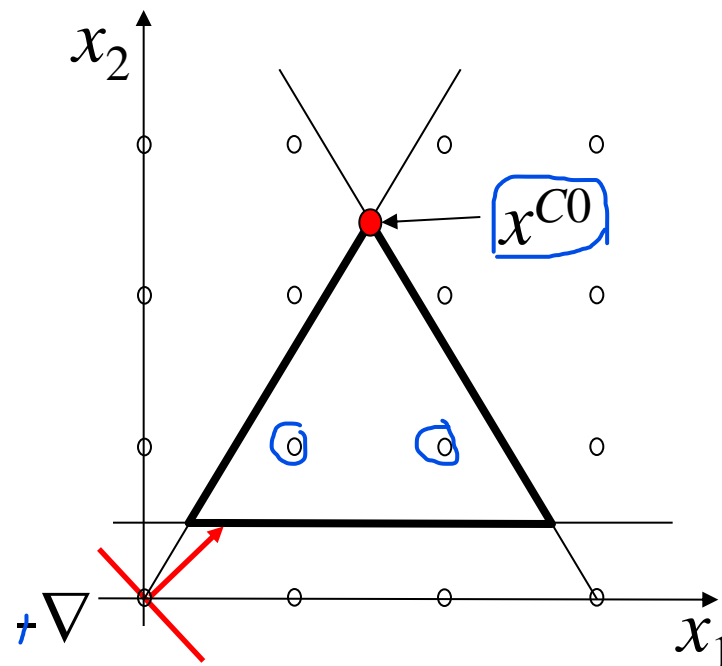
# Branch and-Bound per PLI (2)

Esempio di problema PLI:

$$\begin{array}{llll}
 \max z & x_1 & +x_2 & \\
 s.t. & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\
 & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \\
 & & x_2 & \geq 1/2 \\
 & x_1 & , & x_2 \\
 & & & \text{intere}
 \end{array}$$

$$\nabla = (1, 1)$$

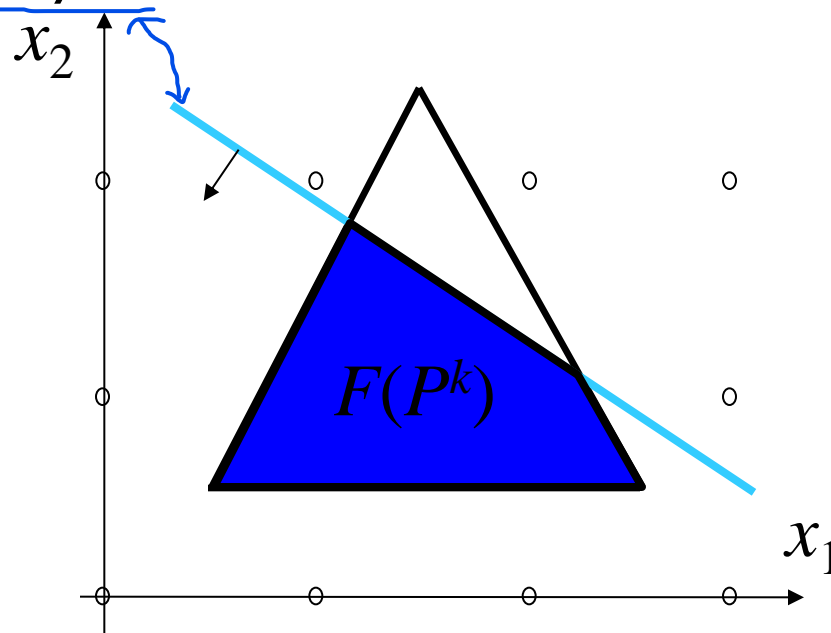
- $x^{C0} = (3/2, 5/2)$





# Branching

- La soluzione di  $C(P^0)$  è frazionaria:  
 → suddividi  $F(P^0)$  in  $K$  parti (Es.  $K=2$ )
- $F(P^k)$  si può ottenere aggiungendo a  $F(P^0)$  un vincolo  $\alpha^k x \leq \beta^k$



# Branching (2)

- Due o più eventi sono mutuamente esclusivi se non possono verificarsi contemporaneamente.
- Un insieme di eventi è esaustivo se copre tutte le possibili outcomes. Significa che almeno uno degli eventi deve verificarsi in ogni esperimento.

- Scelta una componente  $x^{C0}_j$  frazionaria, imponiamo due condizioni **mutuamente esclusive** ed **esaustive**, valide per ogni soluzione intera di  $P^0$ :

$$x_j \leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor \quad \text{or} \quad x_j \geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1 \quad \leftrightarrow \text{Aggiungo Vincolo}$$

Branch 1

Branch 2

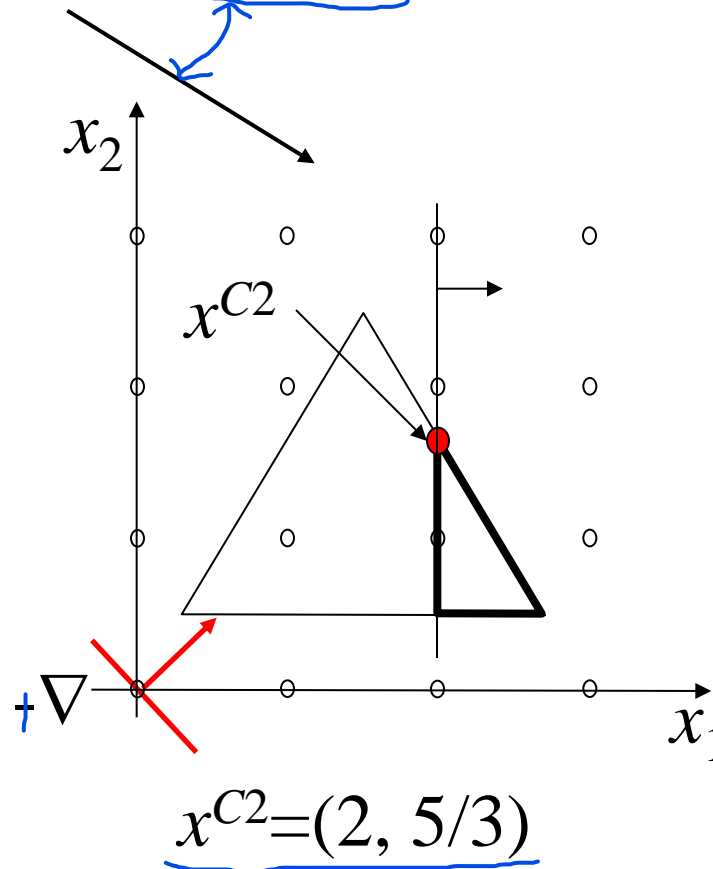
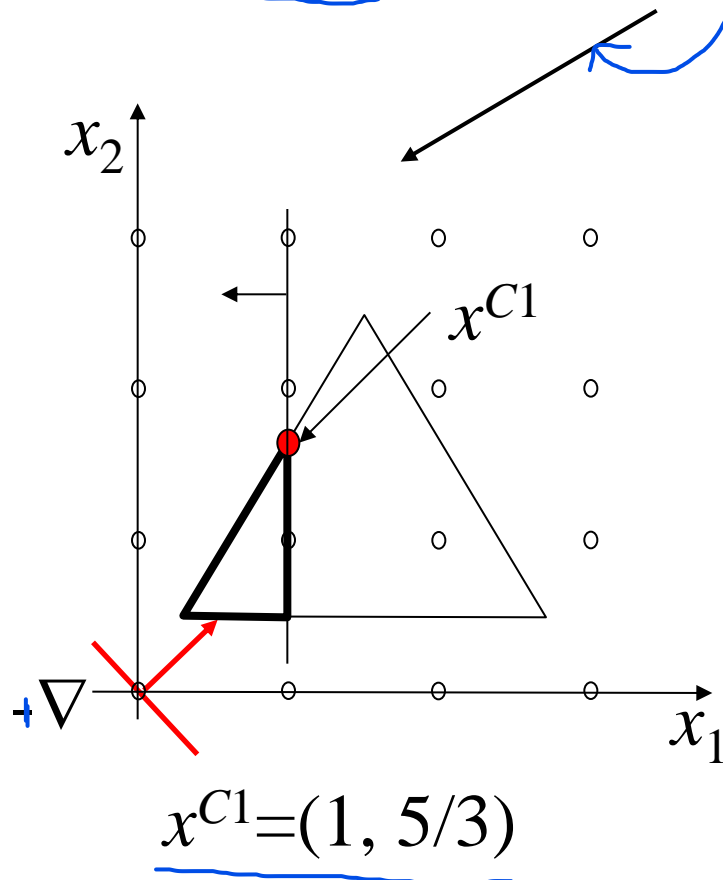
$$\begin{aligned} (P^1) \min z^1 &= c^T x \\ Ax &= d \\ x &\geq 0, \text{intero} \\ x_j &\leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P^2) \min z^2 &= c^T x \\ Ax &= d \\ x &\geq 0, \text{intero} \\ x_j &\geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$z^0 = \min ( z^1, z^2 )$$

# Prima ramificazione

- Es :  $x_1^{C0} = 3/2 \Rightarrow x_1 \leq 1$  or  $x_1 \geq 2$  :



# Branching (3)

- Normalmente  $x^{C1}$  e /o  $x^{C2}$  non sono interi  
 $\Rightarrow$  si continua a ramificare, cioè :
- Da ogni problema  $P^i$  si creano due nuovi problemi  $P^j$  e  $P^k$  a meno che :
  - $x^{Ci}$  sia intero, oppure
  - il rilassamento continuo di  $P^i$  sia impossibile
- Quale variabile si sceglie per il Branching ?
  - la prima frazionaria Si seleziona la prima variabile che presenta una parte frazionaria.
  - quella con parte frazionaria maggiore In alternativa, si può scegliere la variabile con la parte frazionaria maggiore.
  - ...

# Strategia di esplorazione

In un problema di Massimo/Minimo, mano a mano che scendo dalla radice, ho una soluzione intera sempre più lontana dalla soluzione continua ottima.

- Se esiste più di un sottoproblema “in sospeso”, qual è il prossimo da esaminare ?
- $\underline{z}^{C1} = 8/3 \geq \underline{z}^1$ ;  $\underline{z}^{C2} = 11/3 \geq \underline{z}^2$  (problema di max)
- se  $c^T$  è intero, allora  $z^* = c^T x$  è intera con  $x$  intera da cui  $z^C \geq \lfloor z^C \rfloor \geq z^*$  (upper bound migliore)  
(se problema di minimo:  $z^C \leq \lceil z^C \rceil \leq z^*$ )
- Prossimo sottoproblema da esaminare:
  - $\underline{z}^1 \leq \lfloor 8/3 \rfloor = 2$ , mentre  $\underline{z}^2 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$
  - ➔ meglio  $P^2$ !

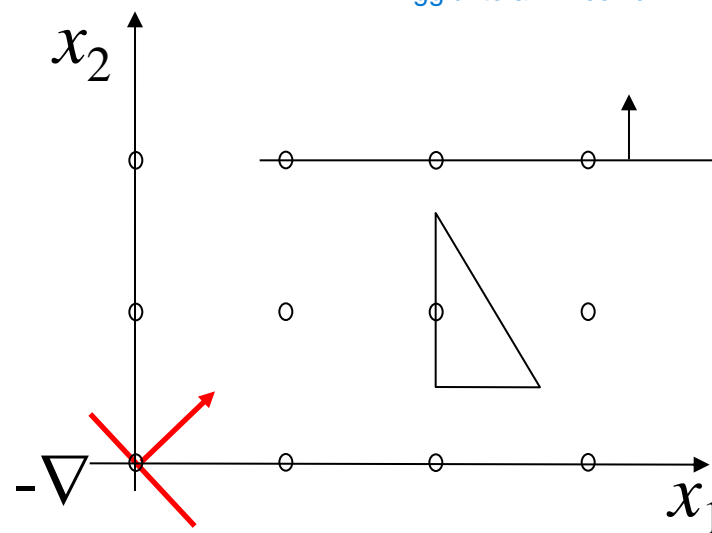
Se Problema di Massimo, scelgo il Sottoproblema con Upper Bound Maggiore.  
Se Problema di Minimo, scelgo il Sottoproblema con Lower Bound Minore.

Scegliere un sottoproblema con un lower/upper bound maggiore/minore significa che si sta esplorando una soluzione che ha il potenziale di essere migliore (ovvero, più vicina all'ottimo) rispetto agli altri sottoproblemi. Questo approccio mira a minimizzare il numero di sottoproblemi che devono essere risolti, aumentando l'efficienza complessiva della ricerca.

- $$x^{C2}_2 = 5/3$$

$$(P^4) \quad P^2 + x_2 \geq 2$$

Aggiunto ai Vincoli di P2



impossibile

Vincolo va fuori dalla  
Regione Ammissibile

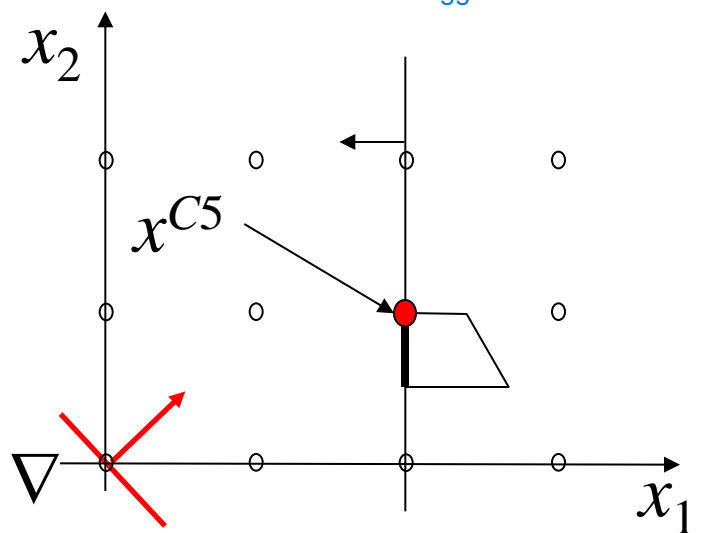
# Terza ramificazione

- Es: da  $P^3$  :

$$x^{C3}_1 = 12/5$$

$$(P^5) P^3 + x_1 \leq 2$$

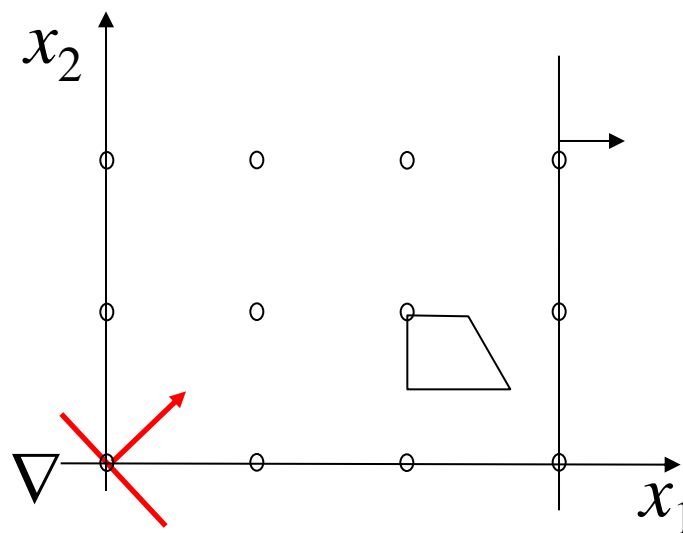
Aggiunto ai Vincoli di  $P^3$



$$x^{C5} = (2, 1) \text{ INTERA !}$$

$$(P^6) P^3 + x_1 \geq 3$$

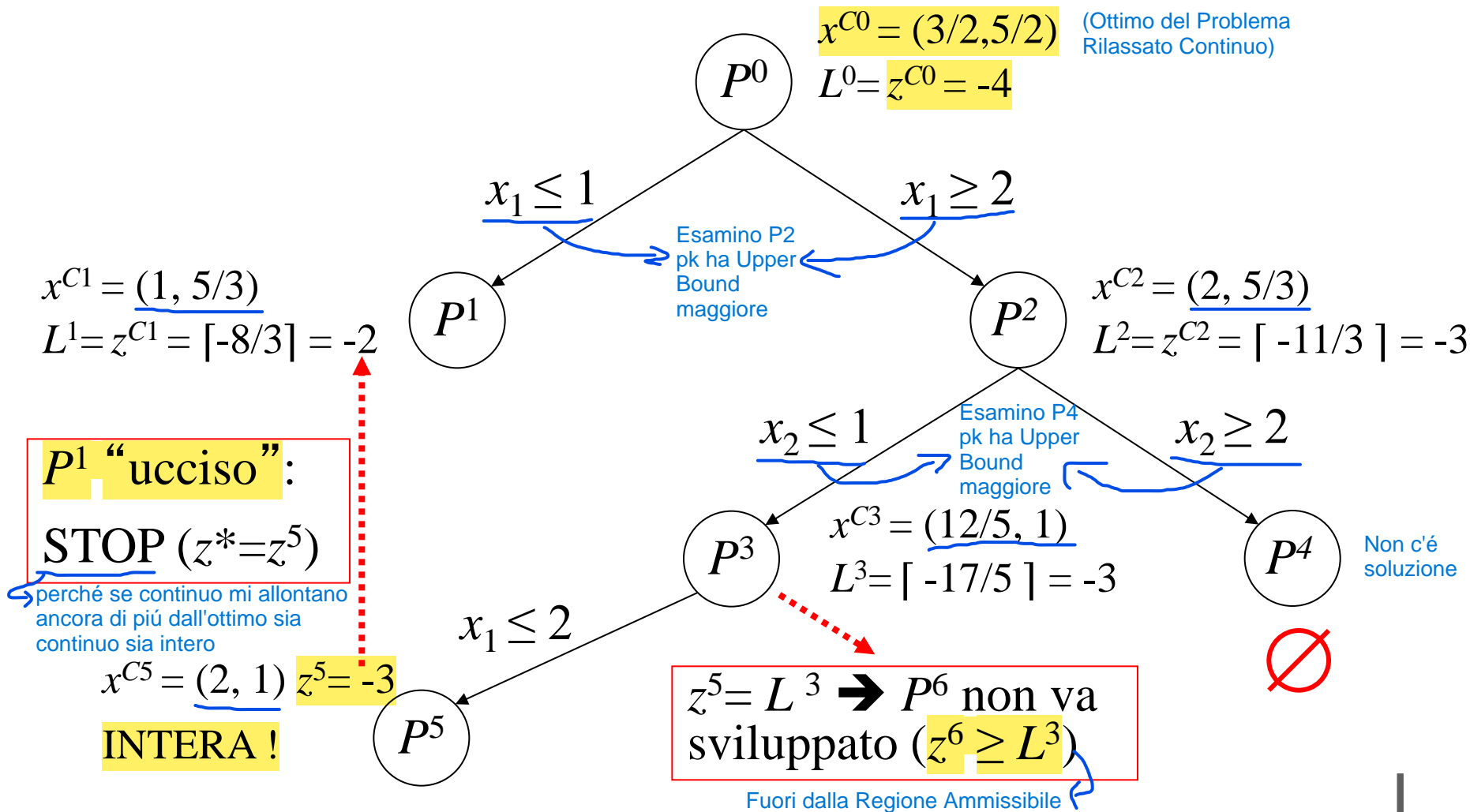
Aggiunto ai Vincoli di  $P^3$



impossibile

Vincolo va fuori dalla  
Regione Ammissibile

# Albero decisionale

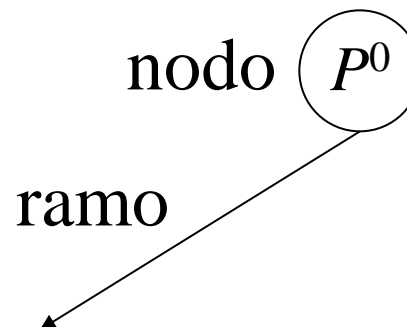




# Terminologia

P indica Problema

- 0 (o  $P^0$ ) nodo radice
- 4, 5, ... nodi “foglia” P4 e P5 nodi foglia
- 2 “padre” di 3 e 4 P2 padre di 3 e 4
- 3 e 4 “figli” di 2 P3 e P4 figli di P2
- 2 “progenitore” di 3, 4 e 5 P2 progenitore di P3, P4 e P5  
("progenitore" si riferisce al nodo da cui derivano altri nodi figli.)
- 3, 4, 5 “discendenti” di 0 e 2 P3, P4, P5 discendenti di P0 e P2



- Si continua il branching finché esistono nodi attivi
- Soluzione di  $P^0$  = sol. della foglia di costo massimo