Programmazione Lineare: Introduzione

Alessandro Hill

Basato sul materiale di

Daniele Vigo (D.E.I.) & Marco Boschetti (D.M.).

rev. 2.1(AH) – 2024

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq \mathrm{R}^n$ è definita da

$$g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$$

con $g_i, h_j : \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

Es. $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq d_i$

Forma matriciale

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

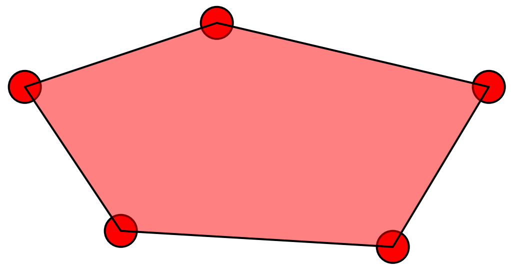
$$x \geq 0$$

Nella programmazione lineare, l'ottimizzazione si riduce a trovare il miglior punto tra un insieme finito di vertici del poliedro che rappresenta la regione ammissibile, rendendo il problema un tipo di problema combinatorio.

Regione ammissibile di PL

- *F* è un insieme convesso (poliedro)

Questo insieme convesso è rappresentato graficamente come un poliedro (una figura geometrica tridimensionale o più generica, un politopo in più dimensioni).



Anche se la regione ammissibile può contenere infiniti punti, per determinare la soluzione ottimale x* (massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo lineare), è sufficiente esaminare un numero finito di punti. Questi punti sono i vertici del poliedro. La teoria della programmazione lineare afferma che la soluzione ottimale si trova sempre in uno dei vertici della regione ammissibile.

- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito (≡ vertici del poliedro)

  $\Rightarrow$ problema combinatorio

Il fatto che bisogna esaminare i vertici del poliedro per trovare la soluzione ottimale implica che il problema ha una natura combinatoria. Questo perché i vertici rappresentano combinazioni specifiche delle soluzioni dove alcuni vincoli diventano equazioni di uguaglianza. La ricerca della soluzione ottimale consiste, quindi, nel valutare queste combinazioni di vertici.

Esempio

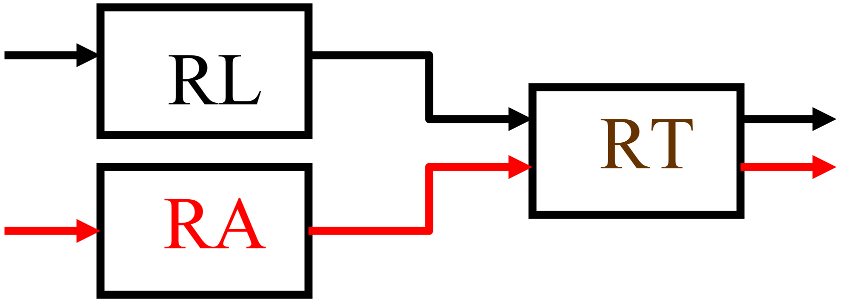
$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ {-2}\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

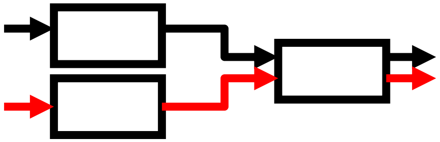
Es. 1: Produzione di sedie (1)

- 2 prodotti:
  - Sedia in Legno (SL)
  - Sedia in Alluminio (SA)
- 3 reparti:
  - Lavorazione parti in Legno (RL)
  - Lavorazione parti in Alluminio (RA)
  - Lavorazione parti in Tessuto (RT)



Produzione di sedie (2)

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)



	RL	RA	RT	Ricavo
SL	10	-	30	30
SA	-	20	20	50
D.	40	120	180	

Formulazione del problema LP (1)

0. Capire il problema.

1. Individuare le variabili decisionali.

2. Definire la funzione obiettivo come combinazione delle variabili decisionali.

3. Definire i vincoli come combinazione delle variabili.

1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:
  - Tempi di Produzione (min. per pezzo)
  - Disponibilità reparti (min. per periodo)
  - Ricavo netto (Euro per pezzo)

Supponendo di poter vendere tutta la produzione quante sedie di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?

- Variabili decisionali:
  - x_1 = n. di sedie di legno prodotte in un periodo
  - x_2 = n. di sedie di alluminio prodotte in un periodo
  - x_1 ed x_2 possono essere frazionarie

3. Funzione obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

SL	SA
30	50

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

4. Vincoli

- Consumo tempo per unità di prodotto:

Reparto	SL	SA	Disp.
RL	10	–	40
RA	–	20	120
RT	30	20	180

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

$$\begin{array}{lrrl}
(RL) & 10\, x_1 & & \leq 40 \\
(RA) & & 20\, x_2 & \leq 120 \\
(RT) & 30\, x_1 & + 20\, x_2 & \leq 180
\end{array}$$

5. Upper e lower bound

- valori negativi delle *x* privi di senso
- vincoli di non negatività delle variabili:

$$
\begin{array}{llcccl}
 & \max z = & 30\,x_1 & + 50\,x_2 & & \\
\text{RL)} & & 10\,x_1 & & \leq & 40 \\
\text{RA)} & & & 20\,x_2 & \leq & 120 \\
\text{RT)} & & 30\,x_1 & + \; 20\,x_2 & \leq & 180 \\
 & & x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Modello LP completo

- stabilità numerica degli algoritmi:
- coefficienti interi e piccoli in valore assoluto

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{RL)} & x_1 & & & \leq & 4 \\
\text{RA)} & & & 2\,x_2 & \leq & 12 \\
\text{RT)} & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. 2: Produzione di vasche (1)

- Un'azienza produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	€350	€300

- sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione

Modello LP

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 350\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & \le & 200 \\
 & 9\,x_1 & + & 6\,x_2 & \le & 1566 \\
 & 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & \le & 2880 \\
 & & & x_1 & \ge & 0 \\
 & & & x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Problemi di Mix di Produzione

- n prodotti, m risorse (materie prime, macchine …)
- a_{ij} quantità della risorsa i necessaria per produrre 1 unità del prodotto j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i quantitativo di risorsa i (i=1,…,m) disponibile
- r_j ricavo per 1 unità del prodotto j (j=1,…,n)
- x_j quantità del prodotto j da produrre (j=1,…,n)

$$\max r^T x$$

$$Ax \leq d$$

$$x \geq 0$$

Es. 3: Problema della dieta

… per cani e gatti

Sostanze	Alimenti (contenuto g/Kg)			Contenuto minimo (g)
	A1	A2	A3	
Proteine	500	300	300	800
Grassi	300	300	100	400
Carboidrati	0	100	200	2000

Costo (€/Kg)	5	2	1
Variabili (Kg)	x_1	x_2	x_3

Modello LP

$x_1, \; x_2, \; x_3$: Kg di A2, A2, A3 da acquistare

$$
\begin{array}{llcl}
\min & z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 & \geq & 8 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq & 4 \\
 & x_2 + 2x_3 & \geq & 20 \\
 & x_1, \; x_2, \; x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema della dieta (generale)

- n alimenti, m sostanze nutritive
- a_{ij} quantità della sostanza i in 1 unità dell'alimento j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i fabbisogno della sostanza i (i=1,…,m)
- c_j costo 1 unità dell' alimento j (j=1,…,n)
- x_j quantità dell'alimento j da acquistare (j=1,…,n)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Soluzione LP: Approccio intuitivo

- Blue Tornado (x_1) ha un profitto unitario più alto
  - conviene produrne il maggior numero possibile
  - Ponendo $x_2 = 0$
    - Vincolo 1: $x_1 \le 200$
    - Vincolo 2: $9\,x_1 \le 1566$ o $x_1 \le 174$
    - Vincolo 3: $12\,x_1 \le 2880$ o $x_1 \le 240$

$$
\begin{array}{llcrcrl}
\max & 350\,x_1 & + & 300\,x_2 & & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & \le & 200 \\
 & 9\,x_1 & + & 6\,x_2 & \le & 1566 \\
 & 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & \le & 2880 \\
 & & & x_1 & \ge & 0 \\
 & & & x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

- Il massimo valore di x_1 è 174 e il profitto totale è €350*174 + €300*0 = €60900
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- No! ($x_1 = 122$, $x_2 = 78$, è amm. e vale €66100)

Soluzione LP: Approccio Grafico

- I vincoli di un problema LP definiscono la sua regione ammissibile.

- Il punto migliore nella regione ammissibile è la soluzione ottima per il problema.

- Per problemi LP con 2 (o 3) variabili, è possibile disegnare la regione ammissibile e trovare la soluzione ottima.

Interpretazione geometrica di LP

- *F* è l'intersezione di insiemi convessi associati ai vincoli

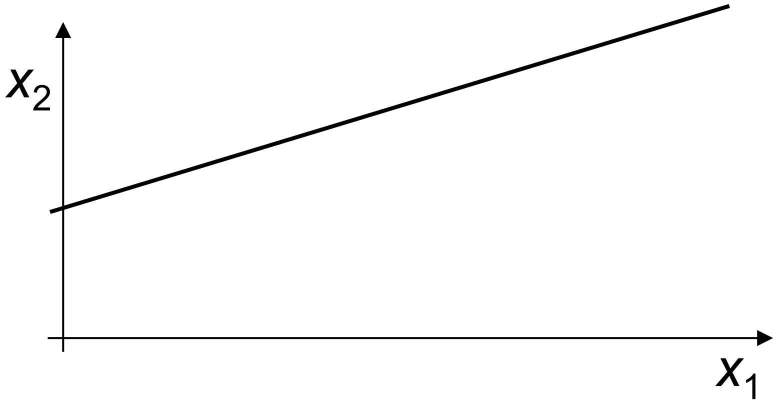
$$H = \{ x \in R^n : a^T x = d \}$$

$$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$$

- *F* è un insieme convesso intersezione di un numero finito di insiemi convessi definiti dalle relazioni lineari: poliedro convesso (se limitato: politopo)

Equazioni Lineari

$H = \{\, x \in R^n : a^T x = d \,\}$ è un iperpiano

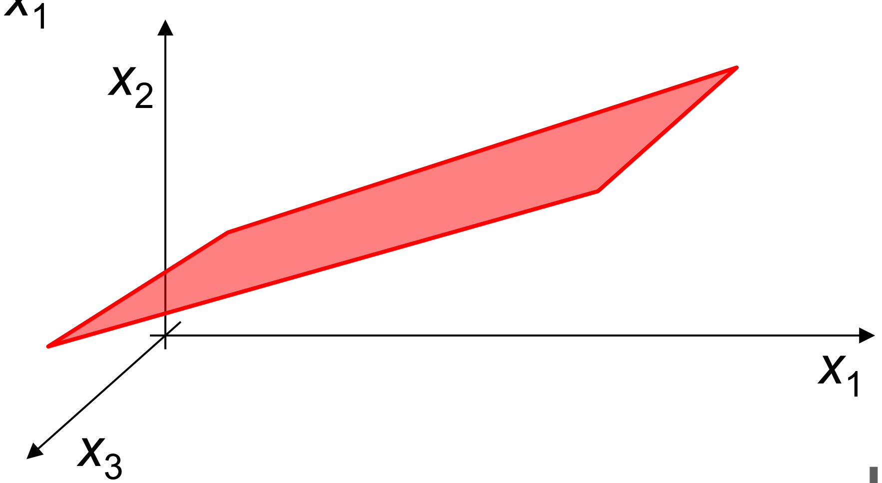


$a_1x_1 + a_2x_2 = d$

in R^2 *è una retta*

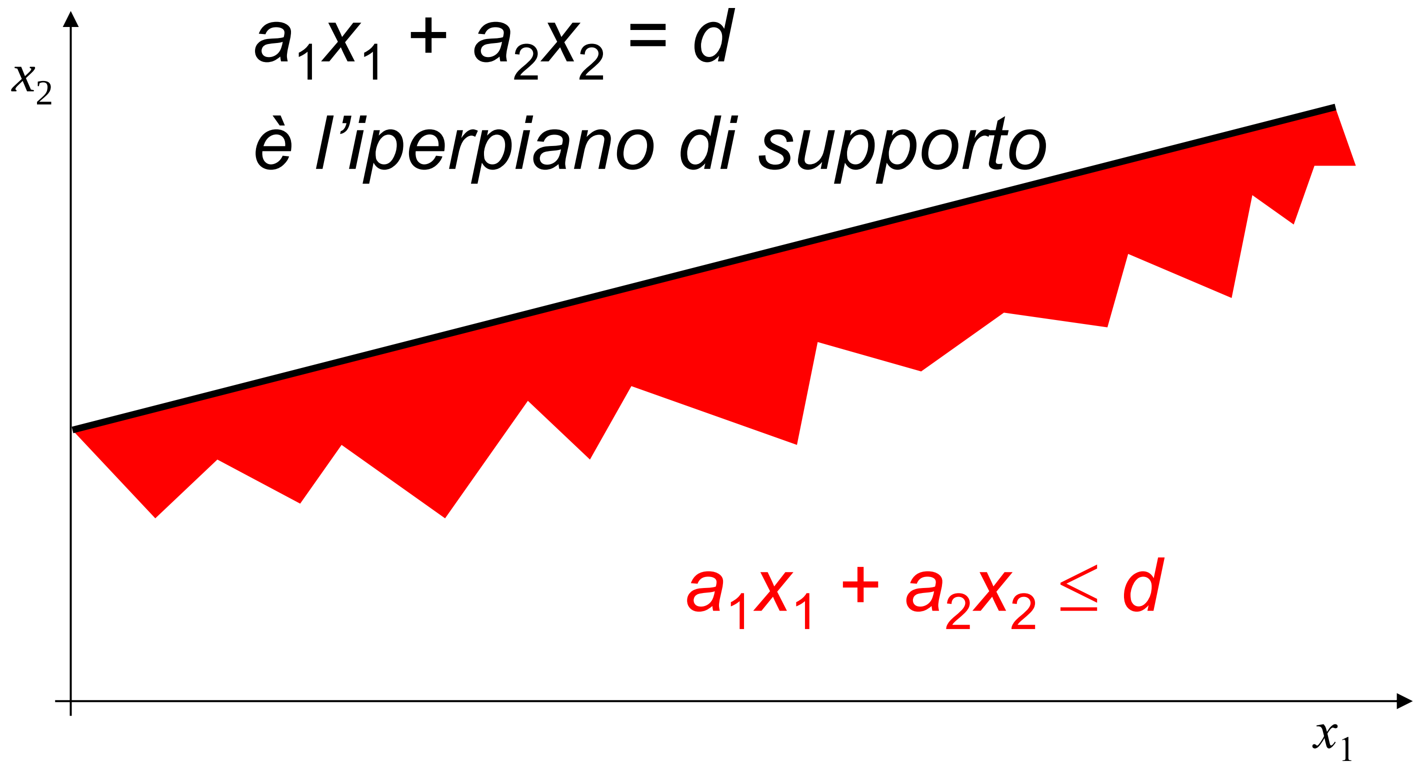
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$

in R^3 *è un piano*



Disequazioni Lineari

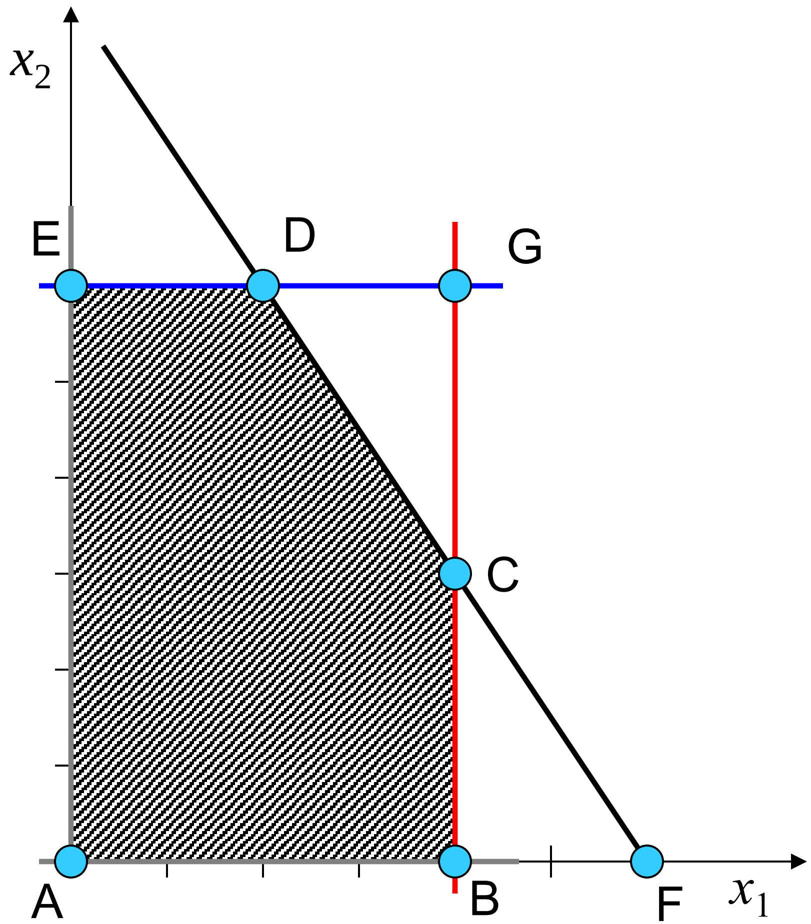
$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$ è un semispazio



Regione ammissibile

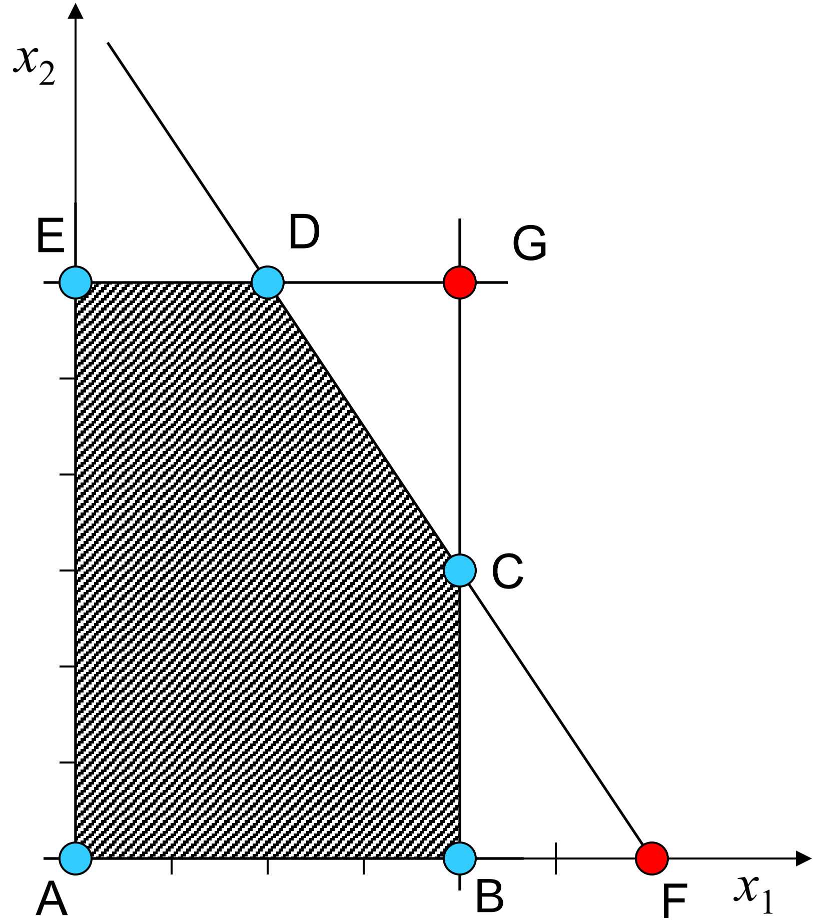
$$
\begin{array}{llll}
\max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\
s.t. & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Vertici: intersezione di vincoli o di iperpiani di supporto



Vincoli ridondanti

$$\begin{array}{llrrl}
\max z = & 3x_1 & +5x_2 & & \\
s.t. & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{array}$$

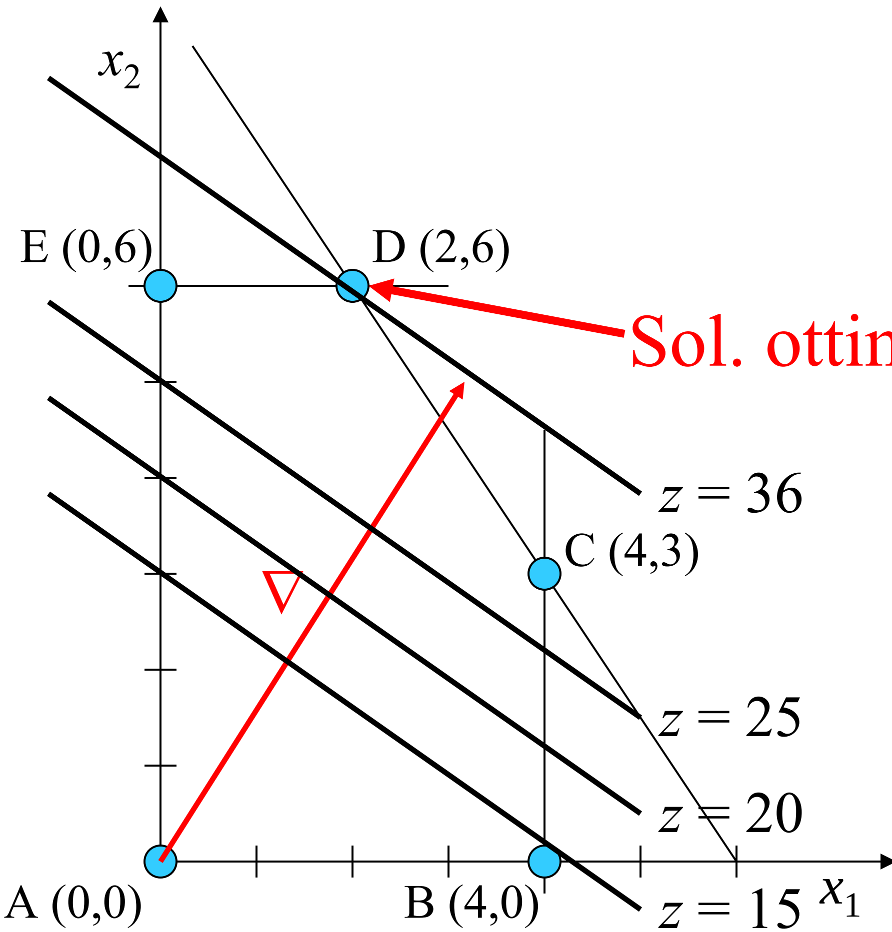


Soluzione grafica (1)

- si disegnano le rette
  $z = c^T x = costante$
  (perpendicolari al gradiente)
- si cerca l'intersezione tra *F* e la retta con *z* massimo (minimo)

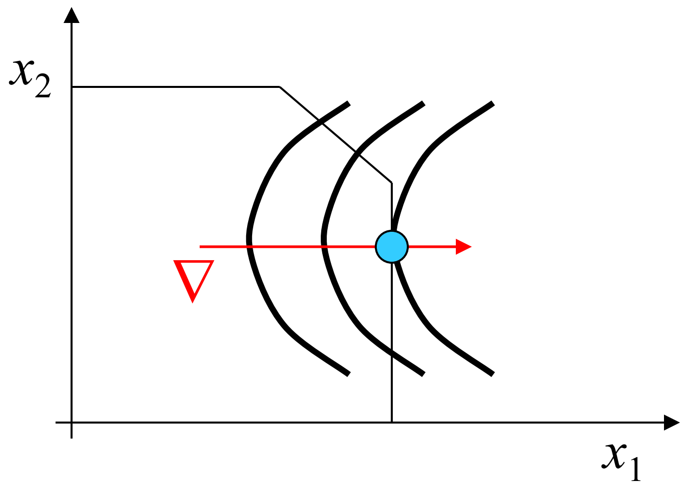
max $z = 3x_1 + 5x_2$

$\nabla = (3,5)$

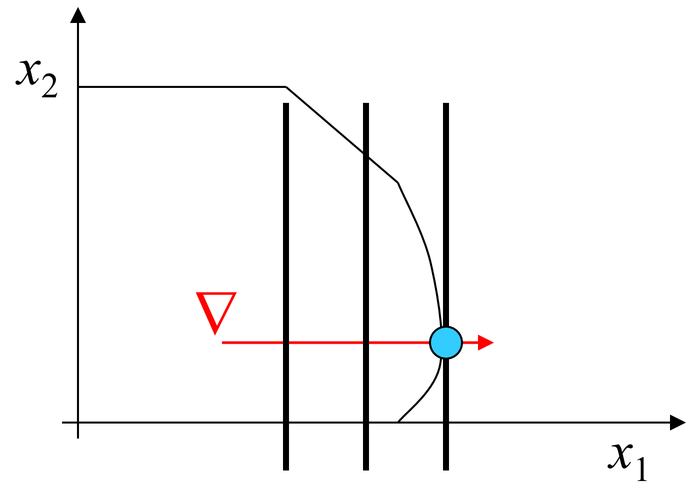


Soluzione grafica (2)

- L'intersezione ottima avviene sempre in corrispondenza di almeno un vertice di *F*
- vero solo per LP



φ non lineare



vincoli non lineari

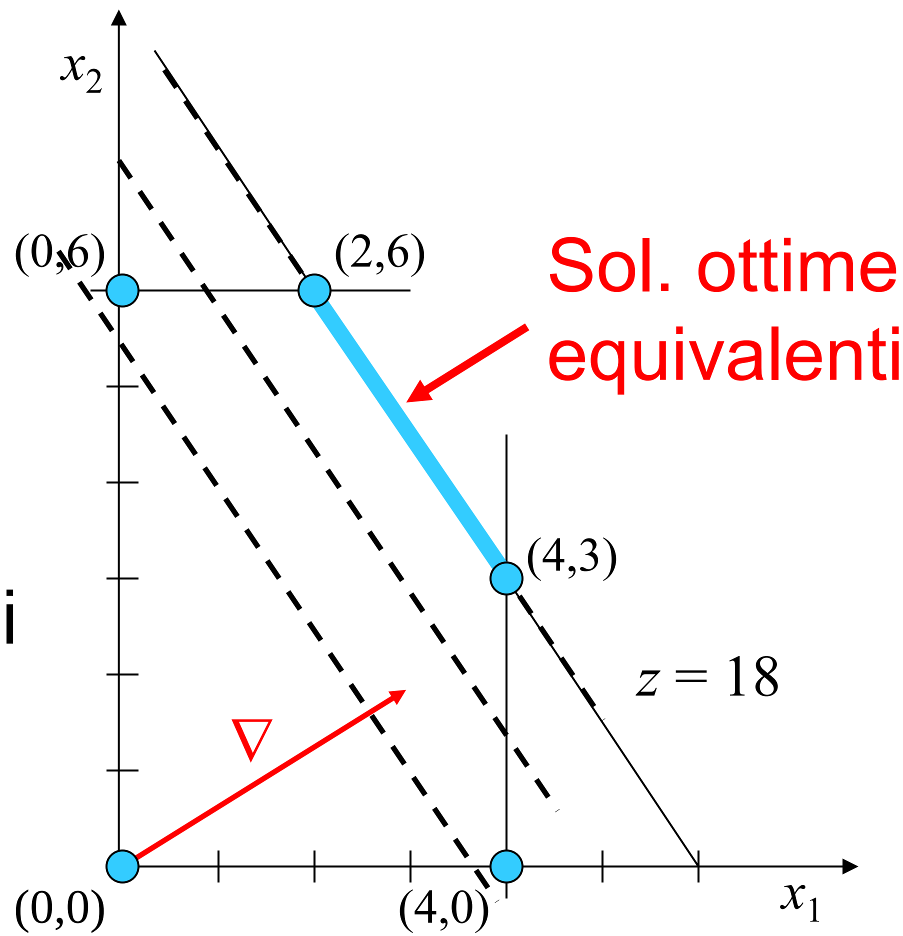
Soluzioni ottime alternative

- Esempio di soluzioni ottime alternative

  max $z = 3x_1 + 2\,x_2$

  $\nabla = (3,2)$

- tra le infinite soluzioni ottime ci sono anche dei vertici



Esercizio

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{Max } Z = & 150\,X_1 + 100\,X_2 & & \\
\textbf{Subject to:} & X_1 + X_2 & \le & 600 \\
 & 2\,X_1 + X_2 & \le & 1000 \\
 & X_1,\ X_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

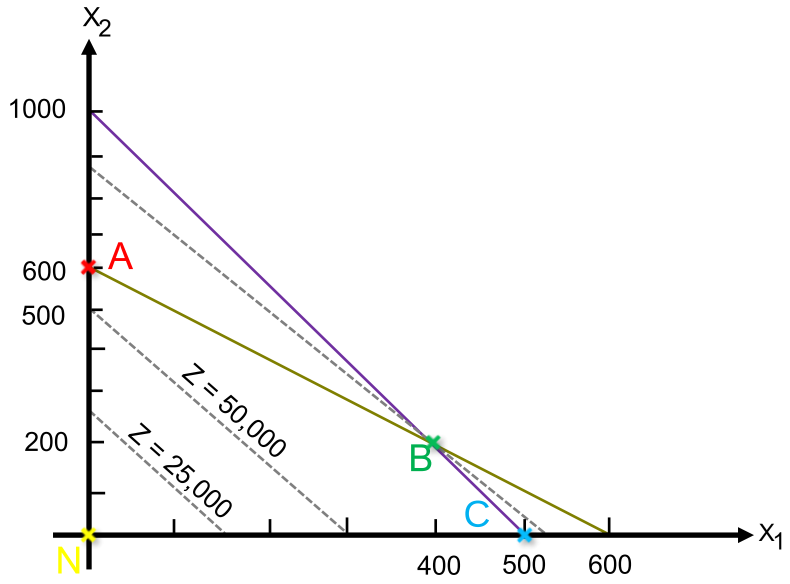
Graphical Solution

$$\text{Max } Z = 150\,X_1 + 100\,X_2$$

$$\text{Subject to: } \quad X_1 + X_2 \le 600$$

$$2\,X_1 + X_2 \le 1000$$

$$X_1,\ X_2 \ge 0$$



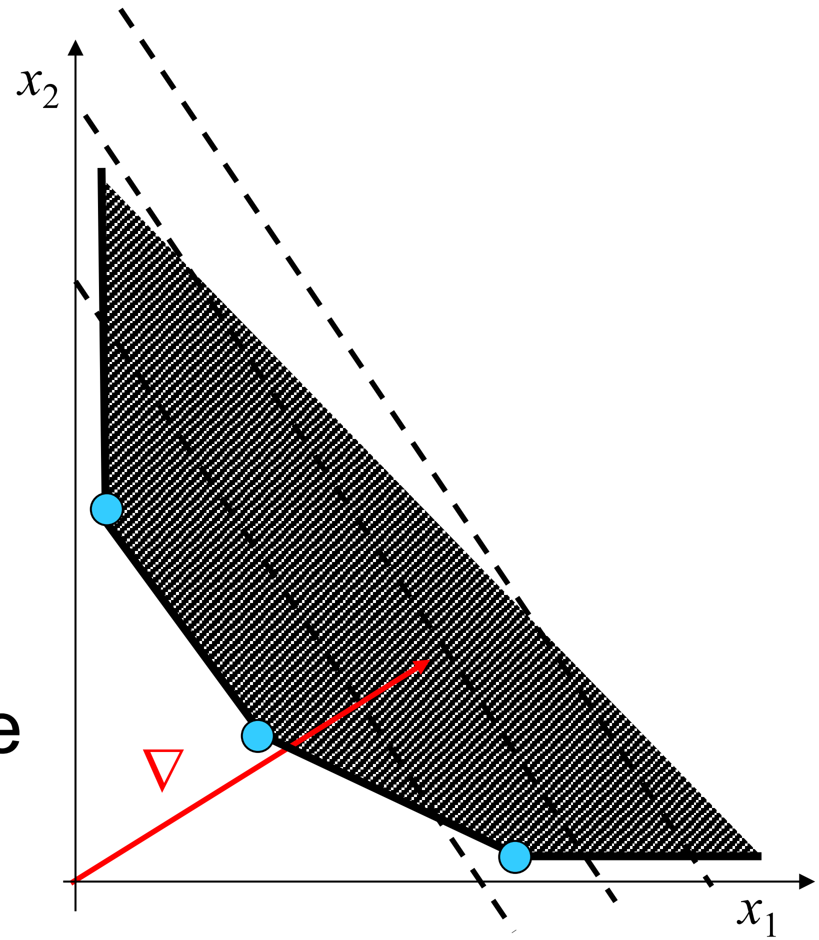
Corner Points	X_1	X_2	Z
N	0	0	0
A	0	600	60,000
B	400	200	80,000*
C	500	0	75,000

Corner point B is the (unique) optimal solution with objective value Z = 80,000.

Notes:
- *Active* or *binding* constraints intersect with solution point.
- *Redundant* constraints have no effect on the feasible region.

Soluzione ottima illimitata

- La regione ammissibile può essere illimitata
- La soluzione può a sua volta essere illimitata
- Normalmente significa che il modello è "sbagliato"



Limiti di LP

- Assunzioni implicite nella formulazione di un modello LP:

1) Proporzionalità

2) Additività

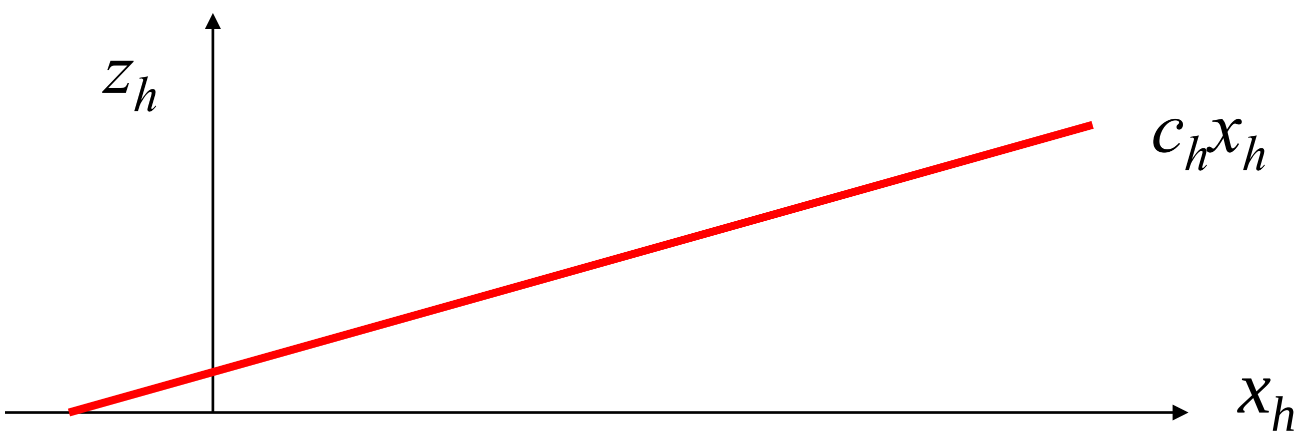
3) Divisibilità

4) Certezza

Proporzionalità

$$z = \ldots + \; c_h x_h \qquad \ldots$$
$$\ldots + \; a_{ih} x_h + \qquad \ldots \leq \; d_i$$

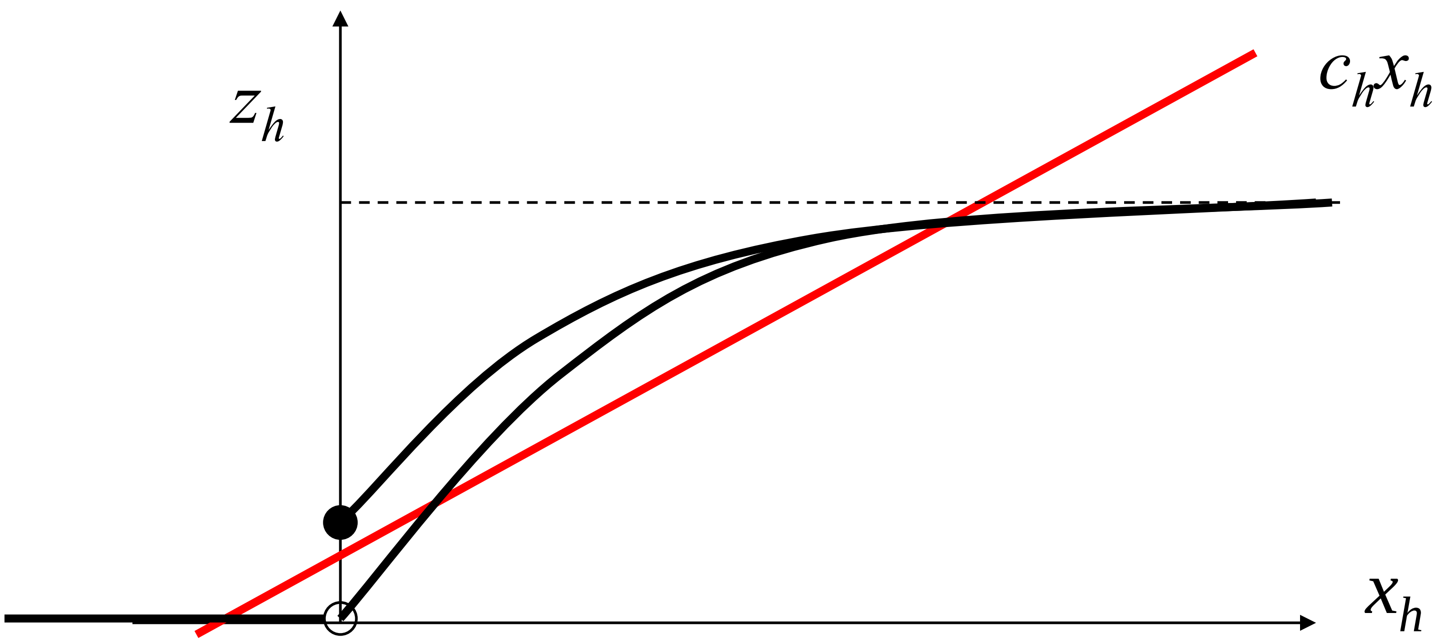
- l'effetto dell'uso della risorsa h (f.o., vincoli) è proporzionale al livello x_h impiegato
- la proporzionalità si mantiene in tutto l'intervallo di ammissibilità per x_h



Proporzionalità (2)

- fenomeni di saturazione (costo marginale decrescente)

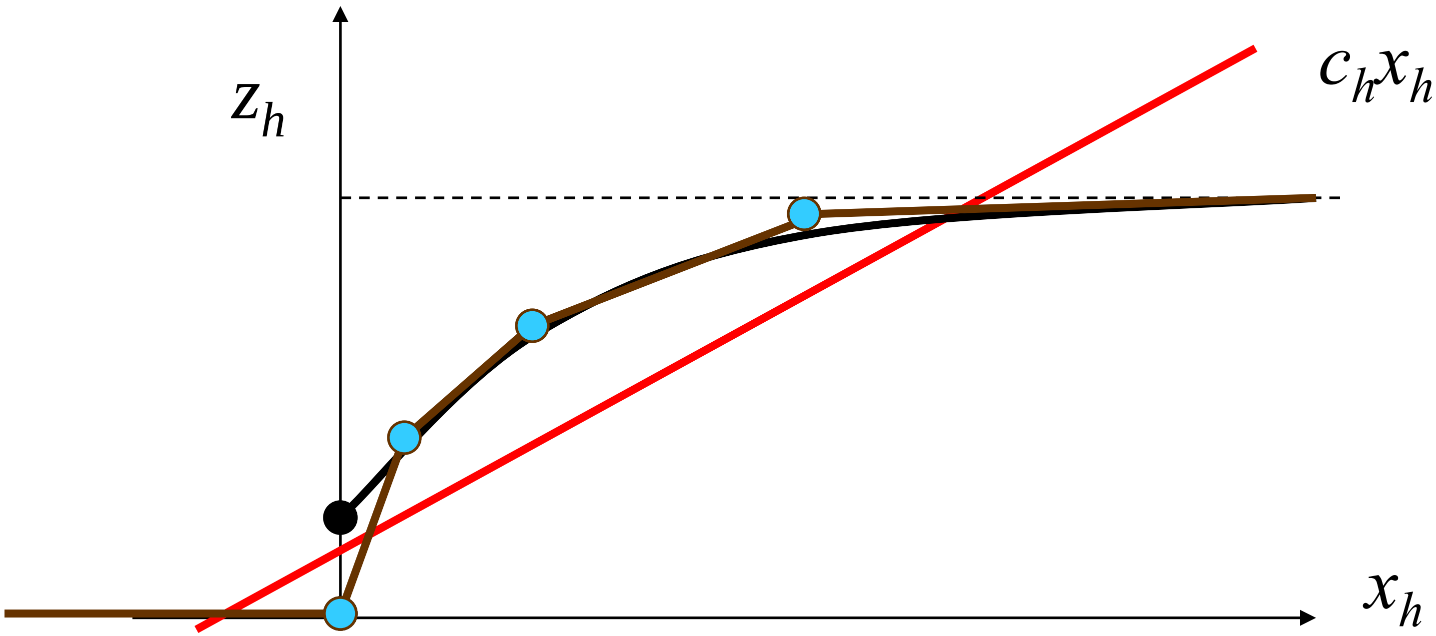
situazioni di start–up (avviamento)



Proporzionalità (3)

- Migliore approssimazione con funzione lineare a tratti

  modello MILP (es. fixed–charge problem)



Additività

- costo soluzione e consumo delle risorse nei vincoli

$$z = \ldots + c_h x_h + c_k x_k \ldots$$

$$\ldots + a_{ih} x_h + a_{ik} x_k \ldots \leq d_i$$

- somma dei termini indipendenti legati alle attività

$\Rightarrow$ Non vi sono interazioni tra le diverse attività che influenzano il costo o i vincoli

$\Rightarrow$ L'effetto dovuto ad una attività non dipende dal livello di produzione delle altre

Divisibilità

- Le variabili decisionali possono essere suddivise ed assumere anche valori non interi
  (Es. tasso di produzione….)
- Spesso solo i valori interi hanno significato
  (Es. n. addetti, n. di pezzi prodotti…):
  - riformulazione con variabili che rappresentano percentuali sul numero totale
    (Es. tasso di produzione….)
  - formulazione con modelli ILP e MILP
  - alcuni LP hanno soluzione ottima sempre intera

Certezza

- Tutti i parametri del modello sono costanti note
- Spesso i parametri sono frutto di stime, previsioni o sono affetti da errori di misura
- se si modifica un costo o un coefficiente la soluzione resta ottima?
- analisi di sensitività della soluzione alla variazione dei parametri

Forme di PL

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

  $g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$

  con $g_i, h_j : R^n \rightarrow R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

  Es. $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq d_i$

Regione ammissibile di PL

- F è un insieme convesso (poliedro)

- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro)
  $\Rightarrow$ problema combinatorio

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Esempio

$$\min\ 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 &\geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ {-2}\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (1)

- Forma generale

  A = matrice intera m x n

  d = vettore intero di m elementi

  c = vettore intero di n elementi

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^T x & & \\
 & a_i^T x = d_i & & i \in M \\
 & a_i^T x \geq d_i & & i \in M' \\
 & x_j \geq 0 & & j \in N \\
 & x_j \text{ libera} & & j \in N'
\end{array}
$$

Esempio

$$
\begin{array}{lllll}
\min & x_1 & & +x_3 & \\
 & & x_2 & -2x_3 & = 4 \\
 & x_1 & +x_2 & & \geq 3 \\
 & x_1 & , x_2 & & \geq 0 \\
 & & & x_3 & \text{libera}
\end{array}
$$

$M = \{1\}$

$M' = \{2\}$

$N = \{1,2\}$ $\quad N' = \{3\}$

$m = 2$

$n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (2)

- Forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

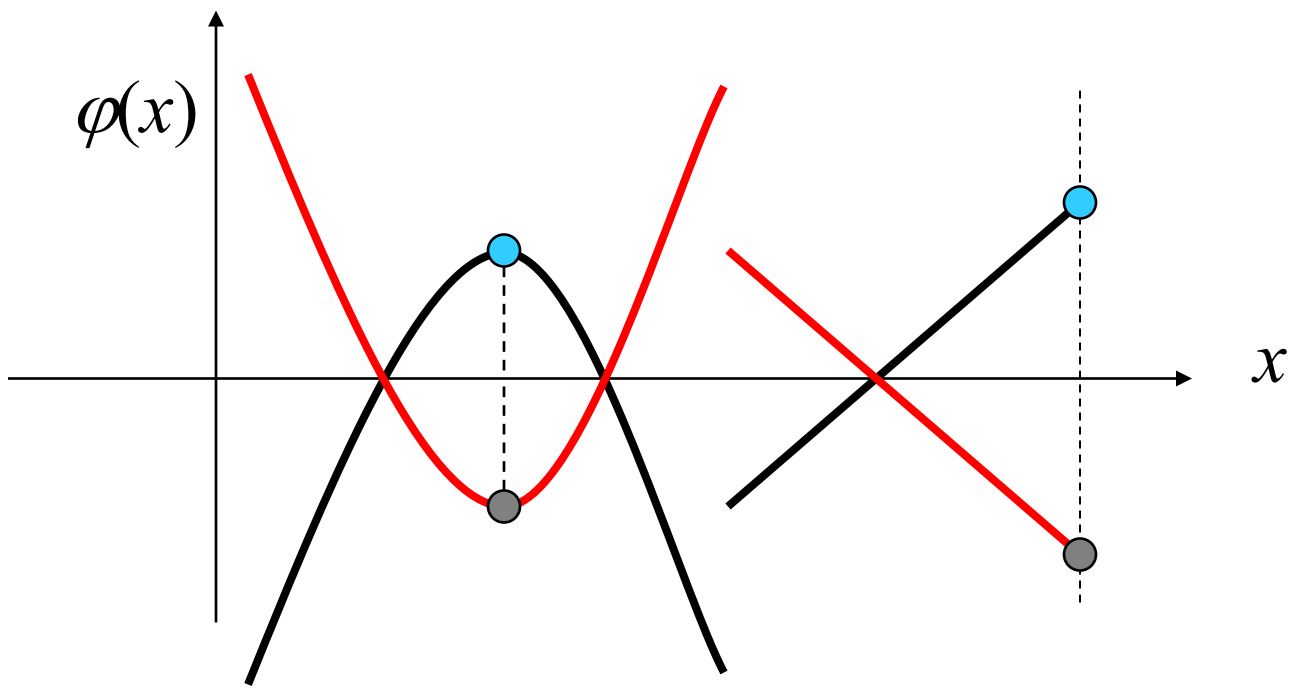
- Forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le 3 forme sono equivalenti (1)

a) Funzione obiettivo:

$$\max c^T x = -\min(-c^T x)$$



Le 3 forme sono equivalenti (2)

b) Trasformazione di disequazioni in equazioni:

b1) $x_1 \le d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_s = d_1$

$x_s \ge 0$ variabile slack

In ogni soluzione ammissibile (x_1, x_s):

se $x_s = 0 \ \Rightarrow x_1 = d_1$;   se $x_s > 0 \ \Rightarrow x_1 < d_1$

b2) $x_1 \ge d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_s = d_1$

$x_s \ge 0$ variabile surplus

Le 3 forme sono equivalenti (3)

c) Trasformazione di equazioni in disequazioni:

$$a_i^T x = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x & \geq & d_i \\ -a_i^T x & \geq & -d_i \end{cases}$$

d) Variabili libere

x_i libera $\Rightarrow$ $x_i = x_i^+ - x_i^-$ con $x_i^+, x_i^- \geq 0$

b), d) *aumentano* *n*

c) *aumenta* *m*

Esempio

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = -2x_1 + 3x_2 & & \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
2x_1 \quad - x_2 & = & 2 \\
& & \\
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = -2x_1 + 3x_2 & & \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
2x_1 - x_2 & = & \cancel{2} \quad \geq 2 \\
-2x_1 + x_2 & \geq & -2 \\
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (2)

$$
\begin{array}{rrrl}
\max z = -2x_1 & +\cancel{3x_2} & +3x_2^+ - 3x_2^- & \\
x_1 & +\cancel{2x_2} & +2x_2^+ - 2x_2^- & \le 4 \\
2x_1 & \cancel{-x_2} & -x_2^+ + x_2^- & \ge 2 \\
-2x_1 & \cancel{+x_2} & +x_2^+ - x_2^- & \ge -2 \\
x_1 & & , x_2^+, x_2^- & \ge 0 \\
 & \cancel{x_2} & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (3)

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = -2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- & & \\
\overset{-}{} x_1 \overset{-}{\cancel{+}} 2x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}} 2x_2^- & \cancel{\le 4} & \ge -4 \\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \ge & 2 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \ge & -2 \\
x_1 \; , \; x_2^+ \; , \; x_2^- & \ge & 0
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (4)

$$\cancel{\max} z = \overset{+}{\cancel{-}}\, 2x_1 \overset{-}{\cancel{+}}\, 3x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}}\, 3x_2^-$$

$$-\min -z =$$

$$\begin{array}{rcl}
-x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq & -4 \\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 ,\ x_2^+ ,\ x_2^- & \geq & 0
\end{array}$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (5)

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-\min -z = & 2x_1 & -3x_2^+ & +3x_2^- & & \\
 & -x_1 & -2x_2^+ & +2x_2^- & \geq & -4 \\
 & 2x_1 & -x_2^+ & +x_2^- & \geq & 2 \\
 & -2x_1 & +x_2^+ & -x_2^- & \geq & -2 \\
 & x_1 & ,\ x_2^+ & ,\ x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ Forma standard

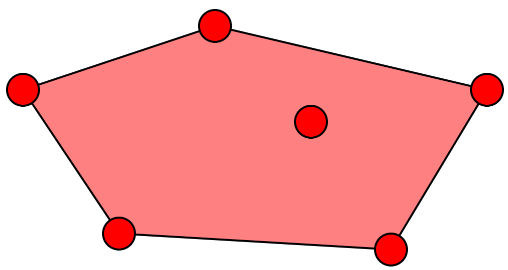
$$
\begin{array}{rl}
- \min -z = & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
& x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \quad {\color{red}+\, x_3} \quad = 4 \\
& 2x_1 \ - x_2^+ \ + x_2^- \qquad\qquad = 2 \\
& \\
& x_1 \ , x_2^+ \ , x_2^- \ , x_3 \ \geq \ 0
\end{array}
$$

Vertici ed Insiemi Convessi

Def.: z è vertice di un insieme convesso S

$\Leftrightarrow$ non è esprimibile come combinazione convessa di altri punti di S

Def.: Dato un insieme di punti $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_K\} \subset R^n$ si dice chiusura convessa di P, $conv$(P) il più piccolo insieme convesso che contiene P.



Teoremi

Th. 1:

Ogni punto di un politopo (poliedro limitato) è combinazione convessa dei vertici del politopo

Th. 2:

In un problema PL con *F* non vuoto e limitato esiste sempre almeno un vertice ottimo

Dimostrazione (probl. di minimo)

c = vettore costo;

$x^{(0)}$ = soluzione ottima (non vertice)

$x^{(1)},\dots,x^{(p)}$ = vertici di F

$x^{(0)} \in F \;\Rightarrow\; x^{(0)} = \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)}$ con $\sum_{i=1,p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i$

sia $x^{(j)}$ il vert. di costo min.: $c^T x^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq p} \{c^T x^{(i)}\}$

$$c^T x^{(0)} = c^T \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)} \geq c^T x^{(j)} \sum_{i=1,p} \lambda_i = c^T x^{(j)}$$

$$\Rightarrow c^T x^{(0)} \geq c^T x^{(j)}$$

Esiste un vertice $x^{(j)}$ cui corrisponde una soluzione non peggiore di $x^{(0)}$!!!

Esercizi su modelli PL