1). $(n+a)^b \in \Theta((n+b)^a)$.

~~…~~. $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid c_1 \cdot (n+b)^a \leq (n+a)^b \leq (n+b)^a \quad \forall n \geq n_0$.

Si tomo $c_1, c_2 = 1$ ~~…~~

$$(n+b)^a \leq (n+a)^b \leq (n+b)^a$$

Luego

- $(n+b)^a \leq (n+a)^b$
- $(n+b)^b \leq (n+b)^a$

Si tomo un $b = 1$ tengo

- $(n+1)^a \leq (n+a)$
- $(n+b) \leq (n+1)^a$

Con $a = 2$

- $(n+1)^2 \leq n+2 \;)\; \Omega$
- $(n+2) \leq (n+1)^2 \;)\; O$.

(*) Luego, $n^2 \leq n$ Abs!

y $n \leq n^2$.

Entonces, es falso por contraejemplo pues ~~$n \notin \Theta$~~

$n^2 \notin \Omega(n)$ y $n \in O(n^2)$.

$\Rightarrow n^2 \leq n \leq n^2$.

Falso

2). $(n+a)! \in \Omega((n+b)!)$.

$\exists c_1 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid \underbrace{(n+a)!}_{f(n)} \geq c_1 \underbrace{(n+b)!}_{g(n)}$

$\Rightarrow$ Como a y b son constantes enteros positivos, y $n > 0$.

$\dfrac{(n+a)!}{(n+b)!} \geq c_1$. Luego, se que $a > b$.

Si veo el Limite, tengo.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+a)!}{(n+b)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+a-1)(n+a-2)\ldots(n)!}{(n+b-1)(n+b-2)\ldots(n)!}$$ hasta que $a-a$. hasta que $b-b$.

Como $a > b$ se que $(n+b)!$ será $n!$ en algun punto antes que $(n+a)!$ sea $n!$

Luego, $(n+a)! \geq (n+b)!$ y por lo tanto.

$(n+a)! \in \Omega(n+b)!$

3) $f(n)^a \in O(n^a)$

Es **Falso**. Podemos tomar un contraejemplo para demostrarlo.

Tomo $f(n) = n^2$ ya que $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

Luego tengo $\exists c_1 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N} \mid f(n)^a \leq c_1 n^a$

$\Rightarrow f(n)^a \leq c_1 n^a$

Viendo esto tambien puedo tomar $c_1 = \sqrt[a]{c_1'}$ pero $c_1 > 0$.

$\Rightarrow \cancel{f(n)^a \leq \sqrt[a]{c_1'}}$

Si tomo raiz cuadrada de a tengo

$f(n) \leq \sqrt[a]{c_1}\, n$

Y ahora, como tomé $f(n) = n^2$

$n^2 \leq \sqrt[a]{c_1}\, n$. Si tomo $c_1 = 1$

$n^2 \leq n$

$n^2 - n \leq 0$ Falso. n crece constantemente y no puedo acotarlo.

$n(n-1) \leq 0$

4) $f(n)^b \in O(f(n)^a)$.

$\Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid f(n)^b \leq c_1 f(n)^a$.

Lo pruebo por el limite.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)^b}{f(n)^a} = \lim_{n\to\infty} f(n)^{b-a}$. Pero $a > b$, por lo cual $b-a$ da negativo. $b - a < 0$

entonces me queda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)^{a-b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)^{|b-a|}} = 0$.

Entonces $f(n)^b \in O(f(n)^a)$. pues $f(n)^{|b-a|}$ crece muy rapido. o mejor dicho $f(n)^a$ crece más rapido que $f(n)^b$.

Scanned with CamScanner

5) Si $f(n) \in \Theta(n^a) \Rightarrow f(n) \in \Omega(n^b)$.

~~$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} / c_1 n^b \leq f(n)$~~

(A) Se que $f(n) \in \Theta(n^a)$
por ende $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid c_1 n^a \leq f(n) \leq c_2 n^a \ \forall n \geq n_0$

Luego, quiero ver que $f(n) \in \Omega(n^b)$
$\exists c_3 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_1 \in \mathbb{N} \mid f(n) \geq c_3 n^b \ \forall n \geq n_1$

Tomo $c_1, c_2, c_3 = 1$. Luego

$$f(n) \geq n^b.$$

Pero yo se por (A) que $f(n) \geq n^a$, y $a > b$.

$\Rightarrow f(n) \geq n^a \geq n^b$. Por transitividad, $f(n) \geq n^b$

Luego es Verdadero.

6) Si $f(n) \in O(n^a)$ entonces $f(n)^2 \in O(n^{2a})$.
Como $f(n) \in O(n^a)$ entonces $\exists c_1 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq c_1 n^a$
quiero ver que $f(n)^2 \in O(n^{2a})$

Tengo que ver. $\forall a \in \mathbb{N}$ $f(n) \leq n^a$ con $c_1 = 1$.

Tomo $a = 2$. $\Rightarrow f(n) \leq n^2$

Luego. $f(n^2) \in O(n^{2 \cdot 8})$

$\Rightarrow$ Si tomo $f(n) = n$ tengo $n^2 \in O(n^4)$ y $n^2 \in O(n^2)$

Luego, ~~por~~ $\exists c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} / f(n)^2 \leq c_2 n^4$.

En general $f(n)^2 \leq c_2 n^a$

Luego, si $f(n) \in O(n^a)$ en especial $f(n) \in O(n^{2a})$

Por Limite $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)^2}{n^{2a}} = \frac{n^{2a}}{n^{2a}} = 1$. Y es válido. Luego, es verdadero

si $f(n) = n^a$

Scanned with CamScanner

4) Es Falso.

Sea $f(n)^b \in O(f(n)^a)$. Por contraejemplo.

Sea $f(n) = \frac{1}{n}$ y sea $b = 2$ y $a = 4$.

$\Rightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R}_{>0} \wedge n_0 \in \mathbb{N} \mid f(n)^b \leq C_1 f(n)^a$.

Con $C_1 = 1$ tengo

$f(n)^b \leq f(n)^a$

$f(n)^2 \leq f(n)^4$

Pero $f(n) = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^4}$. ~~F~~ Flojo

Como $n > 0$.

$\frac{n^4}{n^2} \leq 1$

$n^2 \leq 1$. Abs! Pues n crece ~~infin~~ indeterminadamente.

Falso.