

## Ejercicio 12

1. Se define  $\forall e :: Expr$  el predicado unario  $P(e)$  tal que

$$P(e) = cantLit\ e = S(cantOp\ e)$$

2. Esquema de inducción estructural. Se definen los casos base y los casos inductivos.

- Casos base:
  - Sea  $e = Const\ x\ \forall x : Int$ , queremos ver que se cumple el predicado  $P(Const\ x) = cantLit\ (Const\ x) = S(cantOp\ (Const\ x))$ .
  - Sea  $e = Rango\ a1\ a2\ \forall a1, a2 :: Int$ , queremos ver que se cumple el predicado  $P(Rango\ a1\ a2) = cantLit\ (Rango\ a1\ a2) = S(cantOp\ (Rango\ a1\ a2))$ .
- Casos Inductivos
  - Sea  $e1, e2 :: Expr$ . El predicado es verdadero para  $e1, e2$  y queremos ver que vale para  $Suma\ e1\ e2$ . Esto equivale a decir  $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Suma\ e1\ e2)$ .
  - Sea  $e1, e2 :: Expr$ . El predicado es verdadero para  $e1, e2$  y queremos ver que vale para  $Resta\ e1\ e2$ . Esto equivale a decir  $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Resta\ e1\ e2)$ .
  - Sea  $e1, e2 :: Expr$ . El predicado es verdadero para  $e1, e2$  y queremos ver que vale para  $Multa\ e1\ e2$ . Esto equivale a decir  $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Multa\ e1\ e2)$ .
  - Sea  $e1, e2 :: Expr$ . El predicado es verdadero para  $e1, e2$  y queremos ver que vale para  $Divide\ e1\ e2$ . Esto equivale a decir  $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Divide\ e1\ e2)$ .

3. Demostración

- Para los caso base:
  - Caso  $e = Const\ x\ \forall x : Int$ .

$$cantLit\ (Const\ x) = S(cantOp\ (Const\ x))$$

$$\stackrel{L1}{=} S\ Z = S(cantOp\ (Const\ x))$$

$$\stackrel{O1}{=} S\ Z = S\ Z$$

Queda demostrada la igualdad.

- Caso  $e = Rango\ a1\ a2$

$$cantLit\ (Rango\ a1\ a2) = S(cantOp\ (Rango\ a1\ a2))$$

$$\stackrel{L2}{=} S\ Z = S(cantOp\ (Rango\ a1\ a2))$$

$$\stackrel{O2}{=} S\ Z = S\ Z$$

Queda demostrada la igualdad

- Caso recursivo  $e = Suma(e1\ e2)$   
 Hipótesis Inductiva:  $P(e1) \wedge P(e2)$ .  
 Es decir,  $(\forall e1, e2 :: Expr\ (cantLit\ Suma(e1, e2) = S\ (cantOp\ (Suma\ e1\ e2))))$ .  
 A izquierda:

$$cantLit(Suma\ e1\ e2) \stackrel{L3}{=} suma\ (cantLit\ e1)(cantLit\ e2)$$

A derecha:

$$\begin{aligned} S(cantOp\ (Suma\ e1\ e2)) &\stackrel{O3}{=} S(S(suma(cantOp\ e1)(cantOp\ e2))) \\ &\stackrel{S2}{=} S(suma(S(cantOp\ e1))(cantOp\ e2)) \\ &\stackrel{CONMUT}{=} S(suma(cantOp\ e2)(S(cantOp\ e1))) \\ &\stackrel{S2}{=} suma(S(cantOp\ e1))(S(cantOp\ e2)) \end{aligned}$$

Por HI

$$=suma(cantLit\ e1)(cantLit\ e2)$$

Unificando a izquierda y derecha:

$$suma\ (cantLit\ e1)(cantLit\ e2) = suma(cantLit\ e1)(cantLit\ e2)$$

Los dos terminos son iguales. Queda demostrado el caso inductivo.