

Ejercicio 12

- Se define $\forall e :: Expr$ el predicado unario $P(e)$ tal que

$$P(e) = \text{cantLit } e = S(\text{cantOp } e)$$

- Esquema de inducción estructural. Se definen los casos base y los casos inductivos.

- Casos base:

- Sea $e = Const x \forall x : Int$, queremos ver que se cumple el predicado $P(Const x) = \text{cantLit}(Const x) = S(\text{cantOp}(Const x))$.
- Sea $e = Rango a1 a2 \forall a1, a2 :: Int$, queremos ver que se cumple el predicado $P(Rango a1 a2) = \text{cantLit}(Rango a1 a2) = S(\text{cantOp}(Rango a1 a2))$.

- Casos Inductivos

- Sea $e1, e2 :: Expr$. El predicado es verdadero para $e1, e2$ y queremos ver que vale para $Sumae1e2$. Esto equivale a decir $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Suma e1 e2)$.
- Sea $e1, e2 :: Expr$. El predicado es verdadero para $e1, e2$ y queremos ver que vale para $Restae1e2$. Esto equivale a decir $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Resta e1 e2)$.
- Sea $e1, e2 :: Expr$. El predicado es verdadero para $e1, e2$ y queremos ver que vale para $Multe1e2$. Esto equivale a decir $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Mult e1 e2)$.
- Sea $e1, e2 :: Expr$. El predicado es verdadero para $e1, e2$ y queremos ver que vale para $Dive1e2$. Esto equivale a decir $P(e1) \wedge P(e2) \implies P(Div e1 e2)$.

- Demostración

- Para los caso base:

- Caso $e = Const x \forall x : Int$.

$$\text{cantLit}(Const x) = S(\text{cantOp}(Const x))$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{L1}{=} S Z = S(\text{cantOp}(Const x)) \\ &\stackrel{O1}{=} S Z = S Z \end{aligned}$$

Queda demostrada la igualdad.

- Caso $e = Rango a1 a2$

$$\text{cantLit}(Rango a1 a2) = S(\text{cantOp}(Rango a1 a2))$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{L2}{=} S Z = S(\text{cantOp}(Rango a1 a2)) \\ &\stackrel{O2}{=} S Z = S Z \end{aligned}$$

Queda demostrada la igualdad

- Caso recursivo $e = Suma(e1 e2)$

Hipótesis Inductiva: $P(e1) \wedge P(e2)$.

Es decir, $(\forall e1, e2 :: Expr (\text{cantLit}(Suma(e1, e2)) = S(\text{cantOp}(Suma e1 e2))))$.

A izquierda:

$$\text{cantLit}(Suma e1 e2) \stackrel{L3}{=} \text{suma}(\text{cantLit } e1)(\text{cantLit } e2)$$

A derecha:

$$\begin{aligned} S(\text{cantOp}(Suma e1 e2)) &\stackrel{O3}{=} S(S(\text{suma}(\text{cantOp } e1)(\text{cantOp } e2))) \\ &\stackrel{S2}{=} S(\text{suma}(S(\text{cantOp } e1))(\text{cantOp } e2)) \\ &\stackrel{CONMUT}{=} S(\text{suma}(\text{cantOp } e2)(S(\text{cantOp } e1))) \\ &\stackrel{S2}{=} \text{suma}(S(\text{cantOp } e1))(S(\text{cantOp } e2)) \end{aligned}$$

Por HI

$$= \text{suma}(\text{cantLit } e1)(\text{cantLit } e2)$$

Unificando a izquierda y derecha:

$$\text{suma}(\text{cantLit } e1)(\text{cantLit } e2) = \text{suma}(\text{cantLit } e1)(\text{cantLit } e2)$$

Los dos terminos son iguales. Queda demostrado el caso inductivo.