1. Ejemplos de estimacion puntual

1.1. Ejercicio 1 - Distribucion Normal

Se quiere conocer el peso medio de los paquetes de arroz producido por una fábrica. Para ello se toman 30 cajas de arroz al azar y se las pesa. Se obtiene

0,96	0,97	1,12	1,16	1,03	0,95	0,91	0,87	0,96	1,04
0,77	0,99	0,84	1,08	1,12	0,78	0,95	0,93	1,09	0,92
1,00	0,92	1,02	0,90	0,87	0,85	1,03	1,04	0,92	1,07

Supongamos que el peso de un paquete elegido al azar es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Al elegir n paquetes tenemos: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Estimador de los momentos de μ de orden 1:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu}}(X) = \widehat{\mu}$$

Con estos datos la estimacion que se obtiene es $\widehat{\mu}_{obs} = 0{,}97$

1.2. Ejercicio 2 - Distribucion Exponencial

Una fabrica de lamparas sabe que el tiempo de vida, en dias, de las lamparas que fabrica, sigue una distribucion $Exp(\theta)$. Obtener una formula para estimar θ a partir de una muestra aleatoria $X_1 \ldots X_n$

Antes de probar las lamparas no sabemos cuanto durara cada una. Asi la duracion de la primera puede ser considerada una v.a X_1. la segunda una v.a X_2, etc.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$$

Para hallar el estimador de momentos de θ, hay que despejar $\widehat{\theta}$ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\widehat{X}}$$

1.3. Ejercicio 3 - Distribucion uniforme

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}0, \theta$$

Hay que despejar θ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\widehat{\theta}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1.4. Ejercicio 4 - Estimacion de ambos parametros de la normal

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Se tiene que $E_{\mu,\sigma^2}(X) = \mu$ y $E_{\mu,\sigma^2}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$ Para encontrar el estimador de momentos de μ y σ hay que resolver el sistema

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1) = \widehat{\mu}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1^2) = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \widehat{\mu} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2 \end{cases}$$

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

2. Ejemplos de estimacion puntual - Verosimilitud

2.1. Ejercicio 1 - $\mathcal{E}(\lambda) : f(x,\lambda) = \lambda e^{-x\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-x_i\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

Si $x_i \geq 0 \forall i$

$$L(\lambda; x) = \lambda e^{-x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Si consideramos $\log L$ resulta

$$l(\lambda; x) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando e igualando a 0 queda
$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow$ punto critico es $\frac{1}{\bar{x}_n}$, ver que maximiza
$\Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}$

2.2. Ejercicio 2 - $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$, $f(x, \mu, 9) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{9}}$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, 9) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{9}}$$

$$L(\mu, 9; x) = (\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}})^n(\frac{1}{3})^n e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}}$$

Tomemos logatirmo

$$l(\mu, 9; x) = cte - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}$$

Maximizar a $l(\mu, 9; x)$ como funcion de μ equivale a minimizar

$$h(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Un par de clases aatras vimos que $h(\mu)$ se minimiza en $\bar{x}_n$

$$EMV de\ \mu : \widehat{\mu} = \bar{X}_n$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Tomando logatirmo y resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \mu} = 0 \ y \ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \sigma^2} = 0$$

se obtiene que los EMV de μ y σ^2 section

$$\widehat{\mu} = \bar{X}_n \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}((X_i - \bar{X}_n))^2}{n}$$

Los estimadores de μ y σ coinciden con los estimadores de momentos

2.3. Ejercicio 2 - $\mathcal{U}(0, \theta) : f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\mathcal{I}_{(0,\theta)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$$

La indicadora vale 1 cuando todas las indicadoras valgan 1, de lo contrario, es 0 Por ende, la conjunta puede tomar 2 valores:

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ 0 < x_i < \theta \ \forall i \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ \theta > \max(x_i) \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$