Variables aleatorias discretas

Ximena Fernández

Probabilidades y Estadística (Computació n)

10 se septiembre de 2020

Experimento

Ω espacio muestral

$E \subseteq \Omega$ evento

$P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ proba

Variables aleatorias

Dado un experimento aleatorio, una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$

X se dice discreta si toma un número finito o infinito numerable de valores.

Tiro dos dados $\leftrightsquigarrow$ experimento

$E_1 = \{$ salen 1 número 4 $\} = \{X = 1\}$

$E_2 = \{$ salen 2 números 4 $\} = \{X = 2\}$

$E_0 = \{$ no sale ningún 4 $\} = \{X = 0\}$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X =$ 'cantidad de 4's'

Variables aleatorias discretas

Ejemplo: Tengo una caja con 3 bolitas azules y 5 rojas. El experimento es sacar 3 bolitas sin reposición. X v.a. mide la cantidad de bolitas azules que sacamos.

AAA
RRRRR

experimento: saco 3 bolitas sin reposición

$\#\Omega = \binom{8}{3}$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

rango = imagen

$r_X = \{0,1,2,3\}$

$\underbrace{P(X=0)}_{p_X(0)} = \binom{5}{3} \Big/ \binom{8}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} \Big/ \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{\cancel{3!}} \Big/ \frac{8\cdot 7\cdot 6}{\cancel{3!}}$

$\underbrace{P(X=2)}_{p_X(2)} = \binom{3}{2}\binom{5}{1} \Big/ \binom{8}{3}$

Variables aleatorias discretas

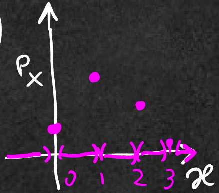
Ejemplo: Tengo una caja con 3 bolitas azules y 5 rojas. El experimento es sacar 3 bolitas sin reposición. X mide la cantidad de bolitas azules que sacamos.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$p_X(x) = P(X = x)$$

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = p_X(0) = \frac{10}{56}$$
$$P(X = 1) = p_X(1) = \frac{30}{56}$$
$$P(X = 2) = p_X(2) = \frac{15}{56}$$
$$P(X = 3) = p_X(3) = \frac{1}{56}$$



$$p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \longmapsto P(X = x)$$

ojo! vale 0 si $x \notin R_X$

es la función de probabilidad puntual

Variables aleatorias discretas

La función de distribución acumulada

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

se define como

$$p_X(x) = P(X = x)$$

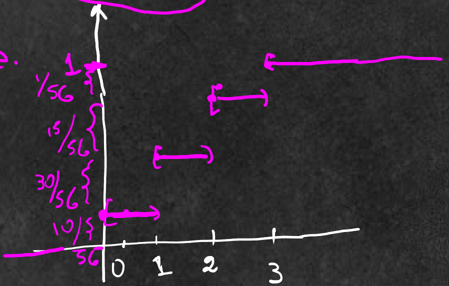
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

v.a.

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X \leq -1) = 0$

$F_X(-1)$



En el ejemplo:

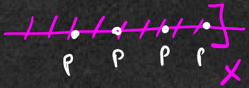
x	0	1	2	3
p_X	10/56	30/56	15/56	1/56

Variables aleatorias discretas

De función de probabilidad puntual a función de distribución acumulada:

TRUCO:

$$F(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in R_x \\ x_i \leq x}} p_X(x_i)$$



Hay un salto en cada $x_i \in R_X$ de altura $p_X(x_i)$.

Variables aleatorias discretas

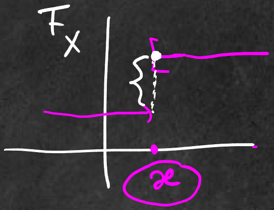
De funció n de distribució n acumulada a funció n de probabilidad puntual:

límite por izq.

TRUCO

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

La funció n de probabilidad puntual vale cero salvo en los saltos, donde vale el tamaño del salto.



Esperanza o valor esperado

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_x} p_X(x_i) x_i$$

Ojo que no necesariamente será un valor de R_X.

En el ejemplo: $X =$ 'cantidad de azules'

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(X) = 0 \cdot 10/56 + 1 \cdot 30/56 + 2 \cdot 15/56 + 3 \cdot 1/56 = \frac{63}{56}$$

$$\neq$$

$$\text{Prom} = (0 + 1 + 2 + 3)/4 = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Ejercicio 1: Cajas en bolas (cont)

Supongamos que hay una urna con 3 bolitas blancas, 3 rojas y 5 negras. Metemos la mano y sacamos dos bolitas (sin reposició n). Supongamos que cada vez que sale una negra ganamos \$1 y cada vez que sale roja perdemos \$1. Las blancas no tienen valor. Sea X = ganancia obtenida.

a) Calcular la probabilidad puntual de X, la funció n de distribució n acumulada y su gráfico.

b) Cuál es la probabilidad de tener ganancia en este juego?

a) X = ganancia obtenida

$R_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

RRR	NNN
BBB	NN

a) $P_X(-2) = P(\{RR\}) = \binom{3}{2} \Big/ \binom{11}{2} = \boxed{\frac{3}{55}}$

$P_X(-1) = P(\{RN\}) = \binom{3}{1}\binom{5}{1} \Big/ \binom{11}{2} = \boxed{\frac{3}{11}}$

$P_X(0) = P(\{NN\}) + P(\{RB\}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{11}{2}} = \boxed{\frac{19}{55}}$

$P_X(1) = P(\{RN\}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \boxed{\frac{3}{11}}$

$P_X(2) = P(\{BB\}) = \binom{3}{2} \Big/ \binom{11}{2} = \boxed{\frac{3}{55}}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 3/55 & -2 \leq t < -1 \\ 18/55 & -1 \leq t < 0 \\ 37/55 & 0 \leq t < 1 \\ 52/55 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}$$

b) P('tener ganancia')

$= P(X>0) = 1 - P(X \leq 0)$

$= 1 - F_X(0) = 1 - 37/55$

$= \boxed{18/55}$

Ejercicio: Cuarentena

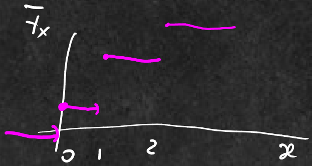
Ximena está cumpliendo la cuarentena. Si X es a variable aleatoria que cuenta la cantidad de días que sale Ximena por semana, su funció n de distribució n está dada por:

$P(X \leq x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.94 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0.97 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0.99 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

X = 'cantidad de días que sale Ximena por semana'

$R_X = \{0, 1, 2, . \; 7\}$



(a) Calcular la funció n de probabilidad puntual.

$$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) \rightarrow \text{salto}$$

$$P(X=0) = F_X(0^+) - F_X(0^-) = 0.1$$

$$P(X=1) = 0.5 - 0.1 = 0.4$$

$$P(X=2) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

$$P(X=3) = 0.9 - 0.8 = 0.1$$

sumen 1

$$P(X=4) = 0.94 - 0.9 = 0.04$$

$$P(X=5) = 0.03$$

$$P(X=6) = 0.02$$

$$P(X=7) = 0.01$$

(B) Por cada vez que sale, la probabilidad de contagiarse Covid19 es de 0.2. Asumimos que puede las probabilidades de contagiarse cada día son independientes.

i) Cuál es la probabilidad de que Ximena se contagie si sale 7 veces?

ii) En general, cuál es la probabilidad de que Ximena se contagie.

iii) Si no se contagió en esta semana, cuál es la probabilidad de que haya salido 7 veces?

i) $C = \{0, 1\}$ $\quad$ C = 'Ximena se contagió'

$$P(C=1 \mid X=7) = \frac{P(X=7 \mid C=1) \cdot P(C=1)}{P(X=7)}$$

C_i = 'Ximena se contagia la vez i-ésima que sale

??)

i) $P(C=1 \mid X=7) = P(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_7) =$

$= 1 - P(C=0 \mid X=7) =$

$= 1 - P(C_1^c \cap C_2^c \cap C_3^c \ldots \cap C_7^c)$

$= 1 - \underbrace{P(C_1^c)}_{0.8} \cdot P(C_2^c) \ldots P(C_7^c)$

$= 1 - 0.8^7 = \boxed{0.79}$

ii) $P(C=1) \underset{\text{Proba Total}}{=} P(C=1 \mid X=0)P(X=0) +$

$P(C=1 \mid X=1)P(X=1) +$

$\ldots$

$\overbrace{P(C=1 \mid X=7)}^{i)}P(X=7)$

Usando la fórmula de probabilidad total:

$P(\text{'se contagia'}) =$
$P(\text{'se contagia'}|X = 0).P(X = 0) + P(\text{'se contagia'}|X = 1).P(X = 1) +$
$P(\text{'se contagia'}|X = 2).P(X = 2) + P(\text{'se contagia'}|X = 3).P(X = 3) +$
$P(\text{'se contagia'}|X = 4).P(X = 4) + P(\text{'se contagia'}|X = 5).P(X = 5) +$
$P(\text{'se contagia'}|X = 6).P(X = 6) + P(\text{'se contagia'}|X = 7).P(X = 7)$

Las probabilidades $P(X = i)$ con $1 \leq i \leq 7$ están dadas por la función de probabilidad puntual.

Ahora, $P(\text{'se contagia'}|X = i)$ se resuelve similar al item anterior. Usando el complemento,
$P(\text{'se contagia'}|X = i) = 1 - P(\text{'no se contagia'}|X = i) = 1 - P(C_1^c \wedge C_2^c \wedge \ldots \wedge C_i^c) = 1 - 0.8^i$

Luego, $P(\text{'se contagia'}) = \sum_{i=0}^{7} P(\text{'se contagia'}|X = i)P(X = i) =$
$0 \cdot 0.1 + (1 - 0.8) \cdot 0.4 + (1 - 0.8^2) \cdot 0.3 + (1 - 0.8^3) \cdot 0.1 + (1 - 0.8^4) \cdot 0.04 +$
$(1 - 0.8^5) \cdot 0.03 + (1 - 0.8^6) \cdot 0.02 + (1 - 0.8^7) \cdot 0.01 \simeq 0.289$

iii) $$P(X=7 \mid \underbrace{C=0}_{\text{dato}}) = \frac{P(C=0 \mid X=7)\cdot P(X=7)}{P(C=0)}$$

- $P(C=0 \mid X=7) = 1 - P(C=1 \mid X=7) = 0.21$

- $P(X=7) = 0.01$

- $P(C=0) = 1 - P(C=1) = 0.711$

Luego $$P(X=7 \mid C=0) = \frac{0.21 * 0.01}{0.711} \cong 0.0029$$