1. Ejemplos de estimacion puntual

1.1. Ejercicio 1 - Distribucion Normal

Se quiere conocer el peso medio de los paquetes de arroz producido por una fábrica. Para ello se toman 30 cajas de arroz al azar y se las pesa. Se obtiene

0,96	0,97	1,12	1,16	1,03	0,95	0,91	0,87	0,96	1,04
0,77	0,99	0,84	1,08	1,12	0,78	0,95	0,93	1,09	0,92
1,00	0,92	1,02	0,90	0,87	0,85	1,03	1,04	0,92	1,07

Supongamos que el peso de un paquete elegido al azar es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Al elegir n paquetes tenemos: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Estimador de los momentos de μ de orden 1:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu}}(X) = \widehat{\mu}$$

Con estos datos la estimacion que se obtiene es $\widehat{\mu}_{obs} = 0{,}97$

1.2. Ejercicio 2 - Distribucion Exponencial

Una fabrica de lamparas sabe que el tiempo de vida, en dias, de las lamparas que fabrica, sigue una distribucion $Exp(\theta)$. Obtener una formula para estimar θ a partir de una muestra aleatoria $X_1 \ldots X_n$

Antes de probar las lamparas no sabemos cuanto durara cada una. Asi la duracion de la primera puede ser considerada una v.a X_1. la segunda una v.a X_2, etc.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$$

Para hallar el estimador de momentos de θ, hay que despejar $\widehat{\theta}$ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\widehat{X}}$$

1.3. Ejercicio 3 - Distribucion uniforme

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}0, \theta$$

Hay que despejar θ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\widehat{\theta}}{2} \Rightarrow \theta = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1.4. Ejercicio 4 - Estimacion de ambos parametros de la normal

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Se tiene que $E_{\mu,\sigma^2}(X) = \mu$ y $E_{\mu,\sigma^2}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$ Para encontrar el estimador de momentos de μ y σ hay que resolver el sistema

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1) = \widehat{\mu}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1^2) = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \widehat{\mu} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2 \end{cases}$$

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

2. Ejemplos de estimacion puntual - Verosimilitud

2.1. Ejercicio 1 - $\mathcal{E}(\lambda) : f(x,\lambda) = \lambda e^{-x\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-x_i\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

Si $x_i \geq 0 \forall i$

$$L(\lambda; x) = \lambda e^{-x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Si consideramos $\log L$ resulta

$$l(\lambda; x) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando e igualando a 0 queda
$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow$ punto critico es $\frac{1}{\bar{x}_n}$, ver que maximiza
$\Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}$

2.2. Ejercicio 2 - $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$, $f(x, \mu, 9) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{9}}$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, 9) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{9}}$$

$$L(\mu, 9; x) = (\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}})^n(\frac{1}{3})^n e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}}$$

Tomemos logatirmo

$$l(\mu, 9; x) = cte - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}$$

Maximizar a $l(\mu, 9; x)$ como funcion de μ equivale a minimizar

$$h(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Un par de clases aatras vimos que $h(\mu)$ se minimiza en $\bar{x}_n$

$$EMV de\ \mu : \widehat{\mu} = \bar{X}_n$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Tomando logatirmo y resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \mu} = 0 \ y \ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \sigma^2} = 0$$

se obtiene que los EMV de μ y σ^2 section

$$\widehat{\mu} = \bar{X}_n \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}((X_i - \bar{X}_n))^2}{n}$$

Los estimadores de μ y σ coinciden con los estimadores de momentos

2.3. Ejercicio 2 - $\mathcal{U}(0, \theta) : f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\mathcal{I}_{(0,\theta)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$$

La indicadora vale 1 cuando todas las indicadoras valgan 1, de lo contrario, es 0 Por ende, la conjunta puede tomar 2 valores:

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ 0 < x_i < \theta \ \forall i \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ \theta > \text{máx}(x_i) \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$

3. Propiedades de estimacion

3.1. Ejercicio 1 - Distribucion Uniforme

- $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$
- $\widehat{\theta} = 2\bar{X}_n$ (Estimador de momentos)
- $\widehat{\theta} = maxX_1, \ldots, X_n$ (Estimador de maxima Verosimilitud)
- Calcule la esperanza y varianza de cada estimador

Esperanza del estimador de momentos Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$. El estimador de momentos de θ es $\widehat{\theta} = 2\bar{X}$

$$E_\theta(\widehat{\theta}) = 2E_\theta \bar{X} = 2\frac{\theta}{2} = \theta \ \ \forall \theta$$

Recordar

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$

- El EMV de $\theta = max_{1 \leq i \leq n}(X_i)$
- La fda es $\widehat{\theta}$ es

$$F_{\widehat{\theta}}(u) = (F_{X_i}(u))^n = \begin{cases} 0 \ si \ u \leq \theta \\ (\frac{u}{\theta})^n \ si \ 0 < u < \theta \\ 1 \ si \ u \geq \theta \end{cases}$$

- La densidad de $\widehat{\theta}$ es

$$f_{\widehat{\theta}}(u) = n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(u)$$

$$E_\theta(\widehat{\theta}) = \int_0^\theta un(\frac{u}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}du = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta u^n du = \frac{n}{\theta^n}\frac{u^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

Varianza del estimador de momentos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$ y $\widehat{\theta} = 2\bar{X}$ el estimador de momentos de θ

$$V_\theta(\widehat{\theta}) = 4V_\theta(\bar{X}) = 4\frac{\theta^2/12}{n}$$

Varianza del estimador de maxima Verosimilitud Recordar la densidad del EMV

$$f_\theta(u) = n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(u)$$
$$E_\theta(\widehat{\theta}^2) = \int_0^\theta u^2 n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}du = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta u^{n+1}du$$
$$\frac{n}{\theta^n}\frac{u^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

Entonces,

$$V_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1})^2\theta^2 = (\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2})\theta^2$$
$$\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

3.2. Ejercicio 2 - Sesgo de los EMV de μ y σ^2 en el caso normal

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Los EMV de μ y σ^2 section

$$\widehat{\mu} = \bar{X} \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

- El estimador de μ es insesgado pues $E_{\mu,\sigma^2}(\widehat{\mu}) = \mu \forall \mu$,
- El estimador de σ^2 es sesgado pero es asintoticamente insesgado pues:

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\sigma^2}(\widehat{\sigma}^2) &= E_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n}E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}^2) \\
&= \frac{n}{n}E_{\mu,\sigma^2}(X_1^2) - E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}^2) \\
&= [V_{\mu,\sigma^2}(X_1) + (E_{\mu,\sigma^2}(X_1))^2] - [V_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}) + (E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}_1))^2] \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

3.3. Ejemplo - Consistencia de la media muestral

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ Sea $\widehat{\mu} = \bar{X}$

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Entonces $\widehat{\mu}$ es un estimador consistente de μ

3.4. Ejemplo - Consistencia de los estimadores de θ en la $\mathcal{U}[0, \theta]$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$. Vimos que el EMV de $\theta, \widehat{\theta} = max_{1 \leq i \leq n}(X_i)$ y

- $E_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow \widehat{\theta}$ es asintóticamente insesgado
- $V_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$

Entonces el $\widehat{\theta}$ es consistente

3.5. Ejemplo - Consistencia de la varianza muestral

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ entonces la varianza muestral S^2 es un estimador consistente de la varianza poblacional

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2)$$
$$= \frac{n}{n-1}(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2)$$

Por la Ley de los Grandes Numeros $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$, entonces por la propiedad 4,

$$\bar{X}^2 \underset{p}{\rightarrow} \mu^2$$

Por otra parte, aplicando nuevamente la Ley de los grandes Numeros

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow{p} E_{\mu,\sigma^2}(X^2) = V_{\mu,\sigma^2}(X) + [E_{\mu,\sigma^2}(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Como ademas $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, se obtiene

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1}(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2) \xrightarrow{p} \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

y por lo tanto la varianza muestral es un estimador consistente de σ^2