# 1. Ejemplos de estimacion puntual

## 1.1. Ejercicio 1 - Distribucion Normal

Se quiere conocer el peso medio de los paquetes de arroz producido por una fábrica. Para ello se toman 30 cajas de arroz al azar y se las pesa. Se obtiene

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,96 | 0,97 | 1,12 | 1,16 | 1,03 | 0,95 | 0,91 | 0,87 | 0,96 | 1,04 |
| 0,77 | 0,99 | 0,84 | 1,08 | 1,12 | 0,78 | 0,95 | 0,93 | 1,09 | 0,92 |
| 1,00 | 0,92 | 1,02 | 0,90 | 0,87 | 0,85 | 1,03 | 1,04 | 0,92 | 1,07 |

Supongamos que el peso de un paquete elegido al azar es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Al elegir $n$ paquetes tenemos: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$ Estimador de los momentos de $\mu$ de orden 1:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu}}(X) = \widehat{\mu}$$

Con estos datos la estimacion que se obtiene es $\widehat{\mu}_{obs} = 0{,}97$

## 1.2. Ejercicio 2 - Distribucion Exponencial

Una fabrica de lamparas sabe que el tiempo de vida, en dias, de las lamparas que fabrica, sigue una distribucion $Exp(\theta)$. Obtener una formula para estimar $\theta$ a partir de una muestra aleatoria $X_1 \ldots X_n$

Antes de probar las lamparas no sabemos cuanto durara cada una. Asi la duracion de la primera puede ser considerada una v.a $X_1$. la segunda una v.a $X_2$, etc.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$$

Para hallar el estimador de momentos de $\theta$, hay que despejar $\widehat{\theta}$ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\widehat{X}}$$

## 1.3. Ejercicio 3 - Distribucion uniforme

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}0, \theta$$

Hay que despejar $\theta$ de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\theta}}(X_1)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\widehat{\theta}}{2} \Rightarrow \theta = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

## 1.4. Ejercicio 4 - Estimacion de ambos parametros de la normal

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Se tiene que $E_{\mu,\sigma^2}(X) = \mu$ y $E_{\mu,\sigma^2}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$ Para encontrar el estimador de momentos de $\mu$ y $\sigma$ hay que resolver el sistema

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1) = \widehat{\mu}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E_{\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2}(X_1^2) = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \widehat{\mu} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \widehat{\mu}^2 + \widehat{\sigma}^2 \end{cases}$$

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

# 2. Ejemplos de estimacion puntual - Verosimilitud

## 2.1. Ejercicio 1 - $\mathcal{E}(\lambda) : f(x,\lambda) = \lambda e^{-x\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$

$$L(\lambda; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-x_i\lambda}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

Si $x_i \geq 0 \forall i$

$$L(\lambda; x) = \lambda e^{-x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Si consideramos $\log L$ resulta

$$l(\lambda; x) = n\log(\lambda) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando e igualando a 0 queda
$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow$ punto critico es $\frac{1}{\bar{x}_n}$, ver que maximiza
$\Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}$

## 2.2. Ejercicio 2 - $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 9)$, $f(x,\mu,9) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{9}}$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, 9) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{9}}$$

$$L(\mu, 9; x) = (\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}})^n(\frac{1}{3})^n e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}}$$

Tomemos logatirmo

$$l(\mu, 9; x) = cte - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{9}$$

Maximizar a $l(\mu, 9; x)$ como funcion de $\mu$ equivale a minimizar

$$h(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Un par de clases aatras vimos que $h(\mu)$ se minimiza en $\bar{x}_n$

$$EMV de\ \mu : \widehat{\mu} = \bar{X}_n$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu, 9; x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Tomando logatirmo y resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \mu} = 0 \ y \ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2; x)}{\partial \sigma^2} = 0$$

se obtiene que los EMV de $\mu$ y $\sigma^2$ section

$$\widehat{\mu} = \bar{X}_n \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}((X_i - \bar{X}_n))^2}{n}$$

Los estimadores de $\mu$ y $\sigma$ coinciden con los estimadores de momentos

## 2.3. Ejercicio 2 - $\mathcal{U}(0, \theta) : f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\mathcal{I}_{(0,\theta)}(x)$

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$$

La indicadora vale 1 cuando todas las indicadoras valgan 1, de lo contrario, es 0 Por ende, la conjunta puede tomar 2 valores:

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ 0 < x_i < \theta \ \forall i \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \ si \ \theta > \max(x_i) \\ 0 \ en \ otro \ caso \end{cases}$$

# 3. Propiedades de estimacion

## 3.1. Ejercicio 1 - Distribucion Uniforme

- $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$
- $\widehat{\theta} = 2\bar{X}_n$ (Estimador de momentos)
- $\widehat{\theta} = max X_1, \ldots, X_n$ (Estimador de maxima Verosimilitud)
- Calcule la esperanza y varianza de cada estimador

Esperanza del estimador de momentos Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$. El estimador de momentos de $\theta$ es $\widehat{\theta} = 2\bar{X}$

$$E_\theta(\widehat{\theta}) = 2E_\theta\bar{X} = 2\frac{\theta}{2} = \theta \ \ \forall\theta$$

Recordar

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$

- El EMV de $\theta = max_{1\leq i\leq n}(X_i)$
- La fda es $\widehat{\theta}$ es

$$F_{\widehat{\theta}}(u) = (F_{X_i}(u))^n = \begin{cases} 0 \ si \ u \leq \theta \\ (\frac{u}{\theta})^n \ si \ 0 < u < \theta \\ 1 \ si \ u \geq \theta \end{cases}$$

- La densidad de $\widehat{\theta}$ es

$$f_{\widehat{\theta}}(u) = n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(u)$$

$$E_\theta(\widehat{\theta}) = \int_0^\theta un(\frac{u}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}du = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta u^n du = \frac{n}{\theta^n}\frac{u^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$$

Varianza del estimador de momentos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$ y $\widehat{\theta} = 2\bar{X}$ el estimador de momentos de $\theta$

$$V_\theta(\widehat{\theta}) = 4V_\theta(\bar{X}) = 4\frac{\theta^2/12}{n}$$

Varianza del estimador de maxima Verosimilitud Recordar la densidad del EMV

$$f_\theta(u) = n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(u)$$

$$E_\theta(\widehat{\theta}^2) = \int_0^\theta u^2 n\frac{u}{\theta}^{n-1}\frac{1}{\theta}du = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta u^{n+1}du$$

$$\frac{n}{\theta^n}\frac{u^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

Entonces,

$$V_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - (\frac{n}{n+1})^2\theta^2 = (\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2})\theta^2$$

$$\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$$

## 3.2. Ejercicio 2 - Sesgo de los EMV de $\mu$ y $\sigma^2$ en el caso normal

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Los EMV de $\mu$ y $\sigma^2$ section

$$\widehat{\mu} = \bar{X} \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

- El estimador de $\mu$ es insesgado pues $E_{\mu,\sigma^2}(\widehat{\mu}) = \mu \forall \mu$,
- El estimador de $\sigma^2$ es sesgado pero es asintoticamente insesgado pues:

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\sigma^2}(\widehat{\sigma}^2) &= E_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n} E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n} E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n} E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n} E_{\mu,\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}^2) \\
&= \frac{n}{n} E_{\mu,\sigma^2}(X_1^2) - E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}^2) \\
&= [V_{\mu,\sigma^2}(X_1) + (E_{\mu,\sigma^2}(X_1))^2] - [V_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}) + (E_{\mu,\sigma^2}(\bar{X}_1))^2] \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

## 3.3. Ejemplo - Consistencia de la media muestral

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ Sea $\widehat{\mu} = \bar{X}$

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Entonces $\widehat{\mu}$ es un estimador consistente de $\mu$

## 3.4. Ejemplo - Consistencia de los estimadores de $\theta$ en la $\mathcal{U}[0, \theta]$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una distribucion $\mathcal{U}(0, \theta)$. Vimos que el EMV de $\theta, \widehat{\theta} = max_{1 \leq i \leq n}(X_i)$ y

- $E_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow \widehat{\theta}$ es asintóticamente insesgado
- $V_\theta(\widehat{\theta}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$

Entonces el $\widehat{\theta}$ es consistente

## 3.5. Ejemplo - Consistencia de la varianza muestral

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a de una con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ entonces la varianza muestral $S^2$ es un estimador consistente de la varianza poblacional

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$$
$$= \frac{n}{n-1}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2)$$

Por la Ley de los Grandes Numeros $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$, entonces por la propiedad 4,

$$\bar{X}^2 \underset{p}{\rightarrow} \mu^2$$

Por otra parte, aplicando nuevamente la Ley de los grandes Numeros

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{p} E_{\mu,\sigma^2}(X^2) = V_{\mu,\sigma^2}(X) + [E_{\mu,\sigma^2}(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Como ademas $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, se obtiene

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2) \xrightarrow{p} \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

y por lo tanto la varianza muestral es un estimador consistente de $\sigma^2$

# 4. Intervalos de confianza

## 4.1. Ejemplo - Intervalo de confianza para el parametro de la exponencial

- Si $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d., $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, llamamos chi cuadrado con $n$ grados de libertad a la distribucion de

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

- la suma de $n$ v.a. $\chi_1^2$ tiene distribucion $\chi_n^2$
- **Ejercicio 23 de la practica 3**. Sea $Z$ una v.a. con una distribucion normal standar. Pruebe que $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ (Esta variable aleatoria recibe el nombre de $\chi^2$ con un grado de libertad)
- Una suma de n v.a. $\chi_1^2$ es $\Gamma(n/2, 1/2)$. Por lo tanto,

$$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi_n^2$$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribucion $E(\lambda)$ Recordar:

- La distribucion de la suma de exponenciales es Gamma, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- Una constante por una Gamma es Gamma:
- $$V \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \ y \ a > 0 \Rightarrow aV \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{\alpha})$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1)$$

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi_{2n}^2$$

Pivot para la exponencial:

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda) = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P\left(\chi_{2n,1-\alpha/2}^2 \le 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \le \chi_{2n,a/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\chi_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \le \lambda \le \frac{\chi_{2n,\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = 1 - \alpha$$

Entonces el intervalo de confianza para $\lambda$

$$\left[\frac{\chi_{2n,1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}, \frac{\chi_{2n,\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

## 4.2. Ejemplo - Invervalo de confianza para $\theta$ en la $\mathcal{U}[0, \theta]$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribucion $U(0, \theta)$

- el EMV de $\theta$ es $\hat{\theta} = max(X_1, \ldots, X_n)$

- la distribucion de $max(X_1, \dots, X_n)$ es $(F_{x_1}(u))^n$
- La fda de $\hat{\theta}$ esperanza

$$F_{\hat{\theta}}(u) = (F_{x_1}(u))^n = \begin{cases} 0 \ si \ u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^n \ si \ 0 < u < \theta \\ 1 \ si \ u \geq \theta \end{cases}$$

- la densidad de $\hat{\theta}$ es

$$f_{\hat{\theta}}(u) = n \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(u)$$

Veamos que la distribucion de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de $\theta$

Queremos demostrar que la distribucion de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de $\theta$

$$F_{\hat{\theta}/\theta}(u) = P\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \leq u\right) = P(\hat{\theta} \leq \theta u) = F_{\hat{\theta}}(\theta u) = (F_{x_1}(\theta u))^n$$

Como $X_i \sim U(0, \theta)$

$$F_{\hat{\theta}}(u) = (F_{x_1}(u))^n = \begin{cases} 0 \ si \ u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^n \ si \ 0 < u < \theta \\ 1 \ si \ u \geq \theta \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \ si \ u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^n \ si \ 0 < u < \theta \\ 1 \ si \ u \geq \theta \end{cases}$$

Por lo tanto, la distribucion de $\hat{\theta}/\theta$ no depende de $\theta$. Derivando, se obtiene la densidad de $\hat{\theta}/\theta$

$$f_{\hat{\theta}/\theta}(u) = nu^{n-1} I_{(0,1)}(u)$$

Pivot:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \frac{max(X_1, \dots, X_n)}{\theta}$$

Buscamos $a$ y $b$ tales que

$$P\left(a \leq \frac{max(X_1, \dots, X_n)}{\theta} \leq b\right) = 1 - \alpha$$

y, obtenemos el siguiente intervalo

$$\left[\frac{max(X_1, \dots, X_n)}{b}, \frac{max(X_1, \dots, X_n)}{a}\right]$$

¿Y como elegimos $a$ y $b$? Debemos hallar $a$ y $b, 0 < a < b < 1$, tales que

$$\int_a^b nw^{n-1} dw = w^n|_a^b = b^n - a^n = 1 - \alpha \tag{1}$$

Conviene elegir la solucion que produce el intervalo de menor longitud esperada, es decir, buscar $a$ y $b$ que minimicen $E(L)$ siendo

$$L = max(X_1, \dots, X_n)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

sujeto a la condicion $b^n - a^n = 1 - \alpha$ Como ya hemos demostrado que $E(max(X_1, \dots, X_n)) = \frac{n}{n+1}\theta$, debemos minimizar

$$\frac{n}{n+1}\theta\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

sujeto a la condicion $b^n - a^n = 1 - \alpha$ El intervalo de minima longitud esperada es

$$\left(\frac{max X_1, \dots, X_n}{1}, \frac{max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)$$

## 4.3. Intervalo de confianza asintotico para el parametro $p$ de la distribucion binomial

### 4.3.1. Aproximacion normal a la binomial

Sea $X \sim Bi(n, p)$, entonces $X$ es el nuumero de exitos en n repeticiones de un experimento binomial con probabilidad de exito igual a p Sea, para $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si se obtuvo exito en la } i\text{-esima repeticiones} \\ 0 & \text{si se obtuvo fracaso en la } i\text{-esima repeticion} \end{cases}$$

Estas v.a. son indepentientes, $X_i \sim Bi(1, p) \forall i$ y

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

A demas $E(X_i) = p$ y $V(X_i) = p(1-p)$. Entonces, por TCL

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \text{ y } \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribucion B(1,p)

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Implica que

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \overset{n \to \infty}{\to} 1 - \alpha$$

¿Como despejamos $p$? Mejor dicho, ¿despejamos $p$? Recordar que en este contexto $\bar{X}$ tambien se nota $\widehat{p}$

Como, por la Ley de los Grandes Numeros

$$\widehat{p} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{p}{\to} p$$

podemos aplicar el teorema de Slutzky y reemplazar en el denominador el pivote $p$ por su estimador. Entonces se tiene que

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \overset{d}{\to} N(0,1)$$

y por lo tanto

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha$$

Por lo tanto, un intervalo para $p$ de nivel asintotico $1 - \alpha$ esperanza

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

o, lo que es lo mismo

$$\left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$