Redes Neurais Artificiais

Multi-layer Perceptron

INFORMAÇÃO,

TECNOLOGIA

& INOVAÇÃO

Multi-layer Perceptron

Supera as limitações práticas do Perceptron

- O modelo de cada neurônio inclui uma função de ativação não linear e diferenciável
- Contém uma ou mais camadas escondidas entre a camada de entrada e a camada de saída
- A rede possui alto grau de conectividade

Multi-layer Perceptron

Como aprender? Back-propagation

- **Forward phase**: pesos fixos e o sinal é propagado através da rede, camada por camada, até a saída

- Mudanças só ocorrem nos potenciais de ativação e nas saídas dos neurônios da rede

Multi-layer Perceptron

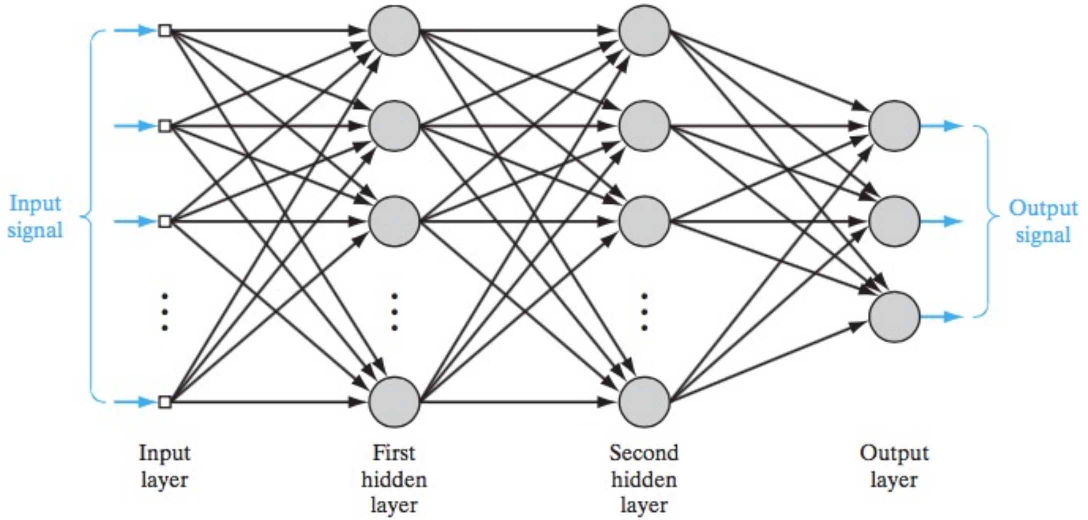
Como aprender? Back-propagation

- **Backward phase**: um sinal de erro é produzido comparando a saída desejada com a obtida

- O erro é retropropagado através da rede, camada por camada

- Ajustes são realizados nos pesos sinápticos da rede

Multi-layer Perceptron



Multi-layer Perceptron

Sinais de função e sinais de erro

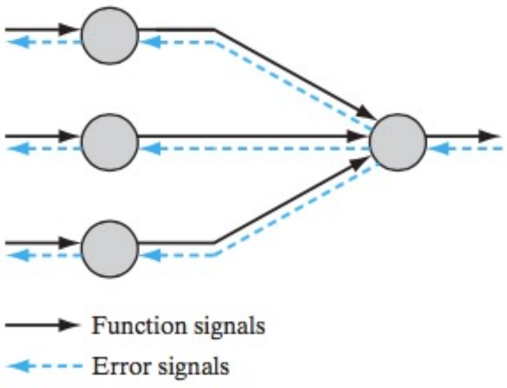


FIGURE 4.2 Illustration of the directions of two basic signal flows in a multilayer perceptron: forward propagation of function signals and back propagation of error signals.

Multi-layer Perceptron

Função dos neurônios escondidos

- Agem como detectores de atributos. Conforme o aprendizado progride, esses neurônios começam a descobrir os atributos que caracterizam os dados de treinamento

- Isso é feito por meio da transformação não linear dos dados de entrada em um novo espaço chamado de espaço de características

- Nesse novo espaço, classes (por exemplo em um problema de classificação) podem ser mais facilmente separadas umas das outras do que no espaço de entrada original

Multi-layer Perceptron

Camadas intermediárias

- Primeira camada: linhas retas no espaço de decisão
- Segunda camada: combina as linhas da camada anterior para formar regiões convexas
- Terceira camada: combina figuras convexas produzindo formatos abstratos

Multi-layer Perceptron

- Considere $\tau = \{\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n)\}_{n=1}^{N}$ um exemplo de treinamento. Seja $y_j(n)$ o sinal produzido na saída do neurônio j na camada de saída, estimulado por $\mathbf{x}(n)$ aplicado na camada de entrada

- O sinal de erro produzido na saída do neurônio j é dado por $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$

Multi-layer Perceptron

- O sinal de erro produzido na saída do neurônio j é dado por. $e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$, em que $d_j(n)$ é o j–ésimo elemento do vetor de respostas desejadas $\mathbf{d}(n)$

- O erro instantâneo do neurônio j é dado por:

$$\varepsilon_j(n) = \frac{1}{2} e_j^2(n)$$

Multi-layer Perceptron

- Somando os erros de todos os neurônios da camada de saída, o erro total de toda a rede é dado por

$$\varepsilon(n) = \sum_{j \in C} \varepsilon_j(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n)$$

- C é o conjunto de todos os neurônios de saída. Em um conjunto de treinamento com N exemplos, o erro médio sobre todos os exemplos (risco empírico) é dado por

$$\varepsilon_{av}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon(n) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j \in C} e_j^2(n)$$

Multi-layer Perceptron

Modo de treinamento batch: o ajuste dos pesos ocorre após a apresentação de todos os exemplos de treinamento a rede (uma época completa)

- De uma perspectiva prática, a busca deixa de ser estocástica por natureza, podendo ficar preso em mínimos locais

- Mais difícil detectar mudanças pequenas nos dados

- Quando há exemplos redundantes, não consegue tirar vantagem disso, pois ajusta pesos apenas após ver todos os exemplos

Multi-layer Perceptron

Modo de treinamento online: o ajuste dos pesos ocorre após a apresentação de cada exemplo. Pretende-se então minimizar o erro instantâneo de toda a rede $\varepsilon(n)$

- A busca no espaço de pesos multidimensional torna-se estocástica por natureza. Por isso também chamado método estocástico

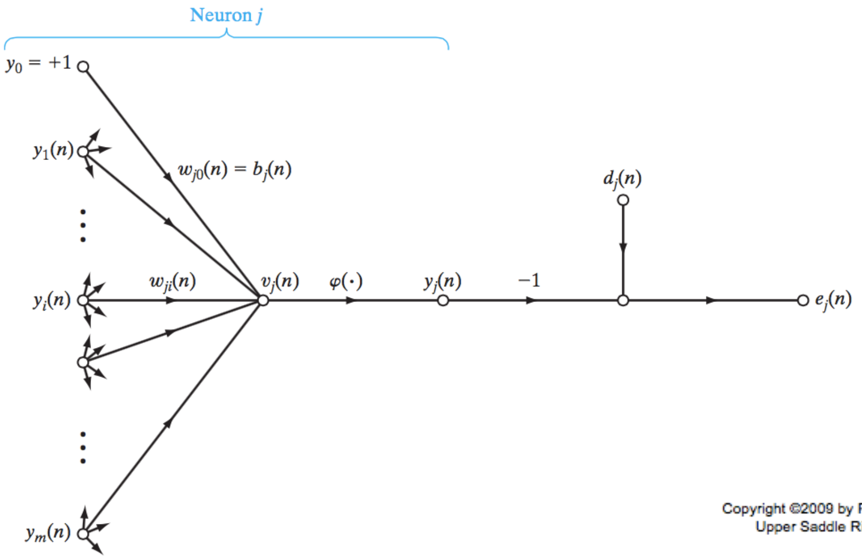
- Menos susceptível a ficar preso em mínimos locais

- Quando há redundância, tira melhor vantagem disso ao ajustar os pesos após a apresentação de cada exemplo

- Detecta melhor pequenas mudanças nos dados de treinamento

O Algoritmo Back-propagation

Neurônio j sendo alimentado por um conjunto de sinais



O Algoritmo Back-propagation

O potencial de ativação $v_j(n)$ produzido na entrada da função de ativação associada é dado por

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^{m} w_{ji}(n) y_i(n)$$

- m : número total de entradas (excluindo o bias)
- w_{j0} : peso aplicado a entrada fixa $y_0 = +1$ (bias)

O Algoritmo Back-propagation

O sinal $y_j(n)$ na saída do neurônio j na iteração n é:

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n))$$

- O algoritmo aplica um correção $\Delta w_{ji}(n)$ no peso sináptico $w_{ji}(n)$, proporcional a derivada parcial:

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

O Algoritmo Back-propagation

- A derivada parcial $\partial \varepsilon(n) / \partial w_{ji}(n)$ determina a direção da busca por w_{ji} no espaço de pesos

- Após a aplicação da regra da cadeia e corretas substituições, temos que

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))y_i(n)$$

O Algoritmo Back-propagation

A correção $\Delta w_{ji}(n)$ aplicada a $w_{ji}(n)$ é definida pela regra delta:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

- η : taxa de aprendizado do algoritmo
- O sinal negativo refere-se ao gradiente descendente no espaço de pesos
- Podemos ainda reescrever a equação da correção como $\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_i(n)$

O Algoritmo Back-propagation

- O gradiente local $\delta_j(n)$ é definido por

$$\delta_j(n) = -\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial v_j(n)}$$

$$= -\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)}$$

$$= e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))$$

- O gradiente local define a mudança necessária nos pesos. Ele é dados pelo produto do erro e da derivada da função de ativação do neurônio

O Algoritmo Back-propagation

O sinal de erro do neurônio de saída é o fator chave no cálculo do ajuste dos pesos. Assim, dois casos para o cálculo do erro podem ser identificados:

- O neurônio está localizado na última camada (saída)
- O neurônio está localizado em uma camada escondida

O Algoritmo Back-propagation

Neurônio j é um neurônio de saída

- Nesse caso, o neurônio está diretamente associado com a saída desejada. Assim, calcula-se o erro diretamente:

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n)$$

- Tendo calculado o erro, o gradiente local é calculado de maneira direta:

$$\delta_j(n) = e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))$$

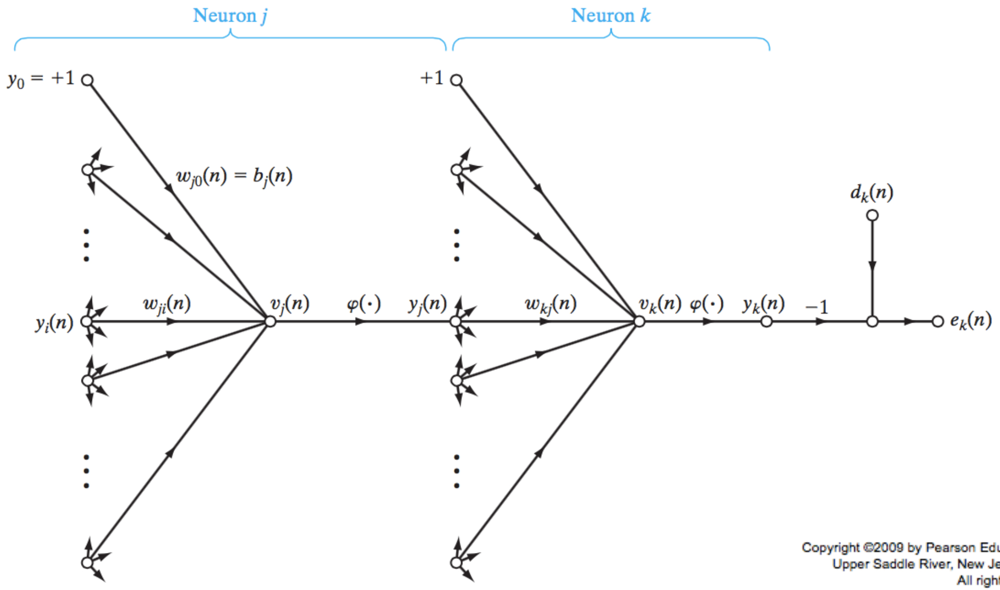
O Algoritmo Back-propagation

Neurônio j é um neurônio escondido

- Nesse caso, não há saída desejada específica associada ao neurônio
- O sinal de erro deve ser calculado recursivamente, em termos dos sinais de erro de todos os neurônios os quais o neurônio j está diretamente conectado

O Algoritmo Back-propagation

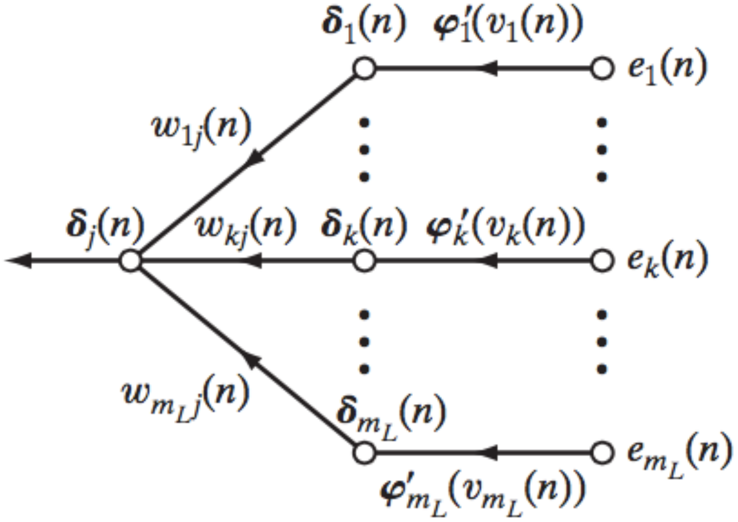
Neurônio j é um neurônio escondido



O Algoritmo Back-propagation

Neurônio j é um neurônio escondido

$$\delta_j(n) = \varphi_j'(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n)$$



O Algoritmo Back-propagation

Resumindo: a correção aplicada nos pesos conectando um neurônio i com um neurônio j é dada pela regra delta

$$\begin{pmatrix} Correção \\ pesos \\ \Delta w_{ji}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Taxa \\ aprendizado \\ \eta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Gradiente \\ local \\ \partial_j(n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Sinal\ entrada \\ neurônio\ j \\ y_i(n) \end{pmatrix}$$

- **Saída**: $\delta_j(n)$ é igual ao produto da derivada $\varphi_j'(v_j(n))$ e do sinal de erro $e_j(n)$, ambos associados ao neurônio j

- **Escondido**: $\delta_j(n)$ é igual ao produto da derivada associada $\varphi_j'(v_j(n))$ e da soma ponderada dos δs calculados para os neurônios da próxima camada, ou da camada de saída, conectados ao neurônio j

Funções de Ativação

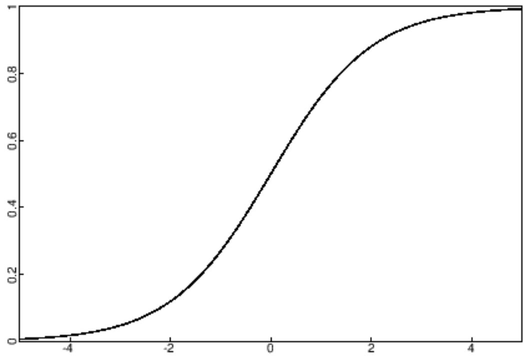
Para calcular o δ para cada neurônio, precisamos conhecer a derivada da função de ativação $\varphi(\cdot)$ associada ao neurônio

- Para existir a derivada, $\varphi(\cdot)$ deve ser contínua
- Assim, ser **diferenciável** é o único requisito para a função de ativação
- Função contínua diferenciável comumente utilizada: **sigmoidal**

Funções de Ativação

- **Função logística:** $\varphi_j(v_j(n)) = \dfrac{1}{1 + exp(-av_j(n))}, \qquad a > 0$

- Amplitude do sinal de saída: $0 \leq y_j \leq 1$



Funções de Ativação

- **Função logística:** $\varphi_j(v_j(n)) = \dfrac{1}{1 + exp(-av_j(n))}, \qquad a > 0$

- Amplitude do sinal de saída: $0 \leq y_j \leq 1$

- A derivada da função com relação a $v_j(n)$ fornece: $\varphi_j'(v_j(n)) = \dfrac{a\ \ exp(-av_j(n))}{\left[1 + exp(-av_j(n))\right]^2}$

- Com $y_j(n) = \varphi_j(v_j(n))$, podemos reescrever a derivada:

$$\varphi_j'(v_j(n)) = ay_j(n)\left[1 - y_j(n)\right]$$

Funções de Ativação

$$\varphi_j'(v_j(n)) = a y_j(n)\left[1 - y_j(n)\right]$$

- Para um neurônio j da camada de saída, $y_j(n) = o_j(n)$. O gradiente local do neurônio j é dado por:

$$\begin{aligned}\delta_j(n) &= e_j(n)\varphi_j'(v_j(n)) \\ &= a\left[d_j(n) - o_j(n)\right]o_j(n)\left[1 - o_j(n)\right]\end{aligned}$$

Funções de Ativação

$$\varphi_j'(v_j(n)) = ay_j(n)\left[1 - y_j(n)\right]$$

- Para um neurônio j de uma camada escondida, o gradiente local do neurônio j é dado por:

$$\delta_j(n) = \varphi_j'(v_j(n))\sum_k \delta_k(n)w_{kj}(n)$$

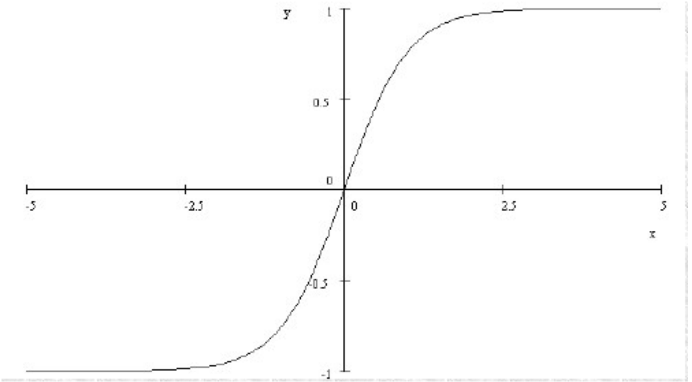
$$= ay_j(n)\left[1 - y_j(n)\right]\sum_k \delta_k(n)w_{kj}(n)$$

Funções de Ativação

Função tangente hiperbólica: $\varphi_j(v_j(n)) = a\tanh(bv_j(n))$

- a e b são constantes positivas

- Amplitude do sinal de saída: $-a \leq y_j \leq a$



Funções de Ativação

Função tangente hiperbólica: $\varphi_j(v_j(n)) = a\,tanh(bv_j(n))$

- a e b são constantes positivas
- Amplitude do sinal de saída: $-1 \leq y_j \leq 1$
- A derivada da função com relação a $v_j(n)$ fornece:

$$\begin{aligned} \varphi_j'(v_j(n)) &= ab\ sech^2(bv_j(n)) \\ &= ab\left(1 - tanh^2(bv_j(n))\right) \\ &= \frac{b}{a}\left[a - y_j(n)\right]\left[a + y_j(n)\right] \end{aligned}$$

Funções de Ativação

$$\varphi_j'(v_j(n)) = \frac{b}{a}\left[a - y_j(n)\right]\left[a + y_j(n)\right]$$

- Para um neurônio j da camada de saída, o gradiente local do neurônio j é dado por:

$$\begin{aligned}\delta_j(n) &= e_j(n)\varphi_j'(v_j(n)) \\ &= \frac{b}{a}\left[d_j(n) - o_j(n)\right]\left[a - o_j(n)\right]\left[a + o_j(n)\right]\end{aligned}$$

Funções de Ativação

$$\varphi_j'(v_j(n)) = \frac{b}{a}\left[a - y_j(n)\right]\left[a + y_j(n)\right]$$

- Para um neurônio j de uma camada escondida, o gradiente local do neurônio j é dado por:

$$\delta_j(n) = \varphi_j'(v_j(n))\sum_k \delta_k(n)w_{kj}(n)$$

$$= \frac{b}{a}\left[a - y_j(n)\right]\left[a + y_j(n)\right]\sum_k \delta_k(n)w_{kj}(n)$$

Taxa de Aprendizado

Quanto menor a taxa de aprendizado, menor a mudança nos pesos sinápticos da rede e mais suave será a trajetória no espaço de busca

- O aprendizado será mais lento

Aumentando a taxa de aprendizado, temos um aprendizado mais rápido, com grandes mudanças nos pesos sinápticos

- A rede pode se tornar instável

Taxa de Aprendizado

Como aumentar a taxa de aprendizado sem perder estabilidade?

- Constante de momentum α : número positivo

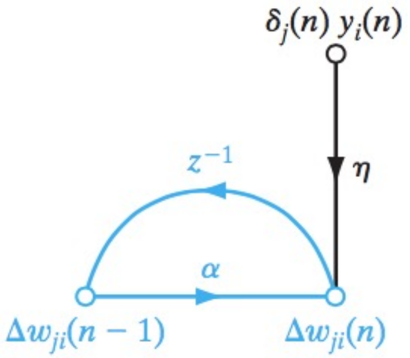
$$\Delta w_{ji}(n) = \alpha \Delta w_{ji}(n-1) + \eta \delta_j(n) y_i(n)$$

- Controla o ajuste $\Delta w_{ji}(n)$

$$\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))y_i(n)$$

$$\delta_j(n) = e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))$$

$$-\frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \delta_j(n) y_i(n)$$



Taxa de Aprendizado

- Quando a derivada parcial $\partial\varepsilon(n)/\partial w_{ji}(n)$ tem o mesmo sinal em iterações consecutivas, $\Delta w_{ji}(n)$ cresce, e $w_{ji}(n)$ é ajustado de uma quantidade grande. Assim, a constante de momentum acelera o algoritmo em regiões de descida constante na superfície de erro.

- Se a derivada parcial $\partial\varepsilon(n)/\partial w_{ji}(n)$ tem sinais opostos em iterações consecutivas, $\Delta w_{ji}(n)$ encolhe, e $w_{ji}(n)$ é ajustado em quantidade pequena. Assim a constante de momentum tem defeito estabilizador em direções nas quais o sinal oscila.

Critérios de Parada

Em geral é difícil mostrar que o Back-propagation convergiu, e não há critérios de parada bem definidos

- Usar a função de custo $\mathcal{E}_{AV}$: é considerada convergência quando a diminuição no erro quadrático médio, for suficientemente pequena

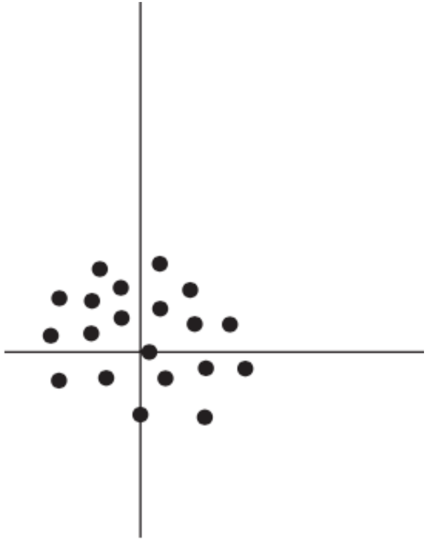
- Testar generalização da rede a cada iteração

Heurísticas para Melhor Desempenho

Maximização da informação: apresentar à rede, consecutivamente, exemplos bem diferentes (randomização dos exemplos)

Normalização: os atributos podem ser pré-processados para possuírem média próxima de 0

- Melhora a convergência
- Importante considerando os parâmetros (bias e pesos)
- Bias: distância do hiperplano à origem
- Pesos: orientação do hiperplano



Perguntas?