

Localização de um recetor de GPS

Equipa 29 - Versão A

Adriano Maior (A89483) - Bruno Jácome (A89515) - Miguel Solino (A86435)

Paulo Lima (A89983) - Pedro Peixoto (A89602)

1 Contextualização

1.1 Introdução

Este relatório foi realizado no âmbito da Unidade Curricular de Métodos Numéricos e Otimização Não Linear do 1º semestre do 3º ano do curso de Mestrado Integrado em Engenharia Informática da Universidade do Minho. O relatório tem como objetivo principal, abordar e resolver um problema, associado a um sistema de equações não lineares, sobre a localização de um recetor de GPS na Terra. Para isso, utilizou-se a rotina **fsolve** no *software* Matlab®.

Inspirado em: <http://mason.gmu.edu/~treid5/Math447/GPSEquations/>.

1.2 GPS

Global Positioning System ou **GPS** é um dos *global navigation satellite systems* (GNSS) que fornece informação sobre a geolocalização e tempo a um recetor de GPS em qualquer parte da Terra, desde que nada obstrua a linha de transmissão a 4 ou mais satélites GPS.

Essa informação é transmitida, ininterruptamente, por cada um dos satélites via sinais de ondas rádio. Uma vez que, a velocidade de ondas rádio é constante e independente da velocidade do satélite então, o atrasado entre a transmissão do satélite e a receção no recetor é proporcional à distância do satélite ao recetor. Este recetor GPS monitoriza os múltiplos satélites e resolve equações que determinam a sua posição precisa e o seu desvio ao verdadeiro tempo. Para isto, devem estar no alcance do recetor no mínimo 4 satélites para permitir calcular as 4 incógnitas (três coordenadas cartesianas e o desvio temporal).

2 Formulação do problema

2.1 Sistema de equações não lineares

$$\begin{aligned}(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - (c(t_1 - d))^2 &= 0 \\(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - (c(t_2 - d))^2 &= 0 \\(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 - (c(t_3 - d))^2 &= 0 \\(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 - (c(t_4 - d))^2 &= 0\end{aligned}$$

Onde,

- x, y e z são coordenadas cartesianas do recetor;
- a_i, b_i e c_i são coordenadas cartesianas do satélite i ;
- d é a diferença de tempo entre os relógios do recetor e do satélite;
- t_i é o tempo de transmissão do sinal do satélite i ao recetor;
- c é a velocidade da luz, $299792.458 \text{ Kms}^{-1}$.

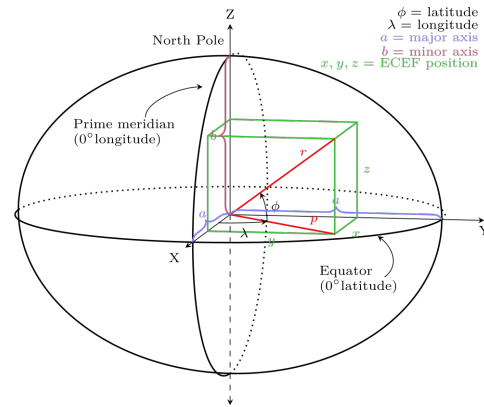
2.2 Problema: Encontrar a posição do recetor

Dados iniciais

Consideremos as seguintes coordenadas cartesianas para os satélites:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, t_1) &= (15600, 7540, 20140, 0.07074) \\ (a_2, b_2, c_2, t_2) &= (18760, 12750, 18610, 0.07220) \\ (a_3, b_3, c_3, t_3) &= (17610, 14630, 13480, 0.07690) \\ (a_4, b_4, c_4, t_4) &= (19170, 610, 18390, 0.07242)\end{aligned}$$

E como ponto inicial $X^{(1)} = (-6381, 0, 0, 0)$.



2.3 Implementação em MATLAB®

```
function [F] = gps_function(X)

A = [15600 18760 17610 19170]; B = [7540 12750 14630 610];
C = [20140 18610 13480 18390]; T = [0.07074 0.07220 0.07690 0.07242];
c = 299792.458;

F(1) = (X(1) - A(1))^2 + (X(2) - B(1))^2 + (X(3) - C(1))^2 - (c*(T(1) - X(4)))^2;
F(2) = (X(1) - A(2))^2 + (X(2) - B(2))^2 + (X(3) - C(2))^2 - (c*(T(2) - X(4)))^2;
F(3) = (X(1) - A(3))^2 + (X(2) - B(3))^2 + (X(3) - C(3))^2 - (c*(T(3) - X(4)))^2;
F(4) = (X(1) - A(4))^2 + (X(2) - B(4))^2 + (X(3) - C(4))^2 - (c*(T(4) - X(4)))^2;
end

C = [-6381 0 0 0];
Cg = ecef2lla(C(1:3).*10^-3) % Cartesianas a Geográficas
% Mudança de Pontos Iniciais
X = fsolve('gps_function',C);
Xg = ecef2lla(X(1:3).*10^-3);
geoplot([Cg(1) Xg(1)], [Cg(2) Xg(2)], 'ro-');
hold on;
%{
F = (rand(15));
F = (F(:,1:4)-0.5)*6381;

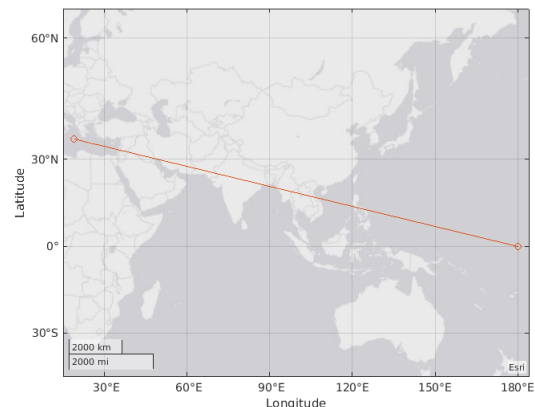
for ROW = 1 : size(F)
    Aux = F(ROW,:);
    Xaux = fsolve('gps_function',Aux);
    Auxg = ecef2lla(Aux(1:3).*10^-3);
    Xauxg = ecef2lla(Xaux(1:3).*10^-3);
    geoplot([Auxg(1) Xauxg(1)], [Auxg(2) Xauxg(2)], '*-');
    hold on;
end
%}
% Mudança de Critério de Paragem
options = optimset('tolfun',0.05);
Xalt = fsolve('gps_function',C,options);
Xaltg = ecef2lla(Xalt(1:3).*10^-3);
geoplot([Cg(1) Xaltg(1)], [Cg(2) Xaltg(2)], 'b*-');
%{
% Iterações
for ITER = 1 : 11
    op = optimoptions("fsolve","MaxIterations",ITER);
    X = fsolve('gps_function',C,op);
    Xg = ecef2lla(X(1:3).*10^-3);
    hold on;
    geoplot(Xg(1), Xg(2), '*');
end
geoplot([Cg(1) Xg(1)], [Cg(2) Xg(2)], 'r:o');
text(Cg(1),Cg(2),'Início','Color','r','HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','top');
text(Xg(1),Xg(2),'Fim','Color','r','HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','top');
%}
```

3 Resultados

Todos os valores numéricos podem ser transformados em coordenadas geográficas, contudo há valores que têm um sentido físico mais correto. Isto é, uma vez que a origem do referencial cartesiano é o centro da Terra, então só fará sentido valores (x,y,z) que representem pontos na superfície terrestre.

Sendo assim, será necessário ter atenção aos resultados obtidos com a rotina `fsolve`, uma vez que esta não tem em consideração o sentido físico destes pontos e pode, assim, dar origem a pontos não viáveis.

Obteve-se $(x, y, z, d)^* \approx (19769, 6804, 15255, 0.0000)$.



Solução final

4 Variações dos Pontos Iniciais

Repare-se que a solução não é única e, por isso, é preciso cautela na escolha do ponto inicial. Avisa-se ainda que alguns dos pontos representados não se localizam verdadeiramente na superfície terrestre.

5 Alteração do Critério de Paragem

As diferenças entre a localização verdadeira e a estimada devem poder ser desprezadas. No entanto, até que valores poderemos nós variar o 2º critério de paragem (TolFun) até haver diferenças grandes?

Como podemos ver, quando **tolfun = 0.05**, o ponto final é bastante próximo do inicial e as diferenças são catastróficas.

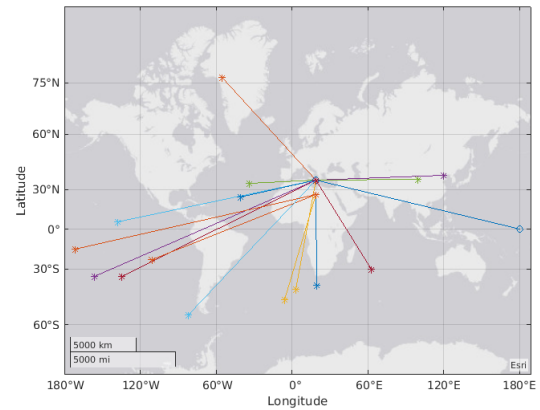
5.1 Representação Gráfica das Iterações

Se representarmos todos os pontos de cada iteração (até se obter a solução), concluímos o quão importante é ter uma localização precisa do recetor.

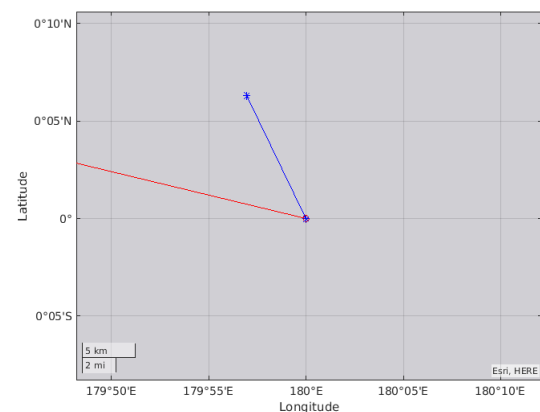
Como podemos compreender, qualquer desvio da verdadeira localização do recetor é significativa, seja este recetor um utilizador do dia a dia, como um aparelho de uso profissional ou científico.

6 Conclusões

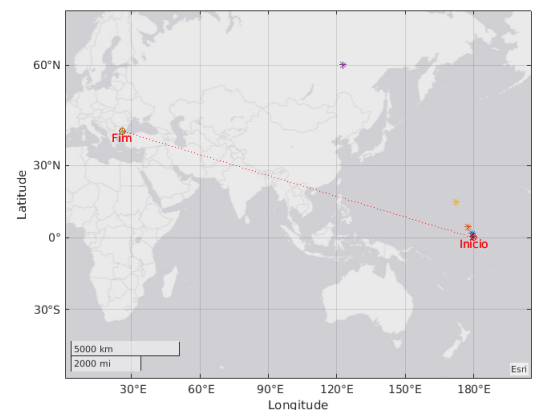
Em aparelhos eletrónicos que necessitem de informação precisa, como GPS, o erro da aproximação deve ser o mais baixo possível. Durante os vários testes computacionais compreendeu-se que, em certos casos, este erro pode não ser desprezado e, portanto, é necessário ter precaução extra ou analisar os algoritmos de forma a aumentar a sua eficácia. Isto é, deve-se ter atenção aos pontos iniciais, tolerâncias dos critérios de paragem e no número de iterações.



Variações dos Pontos Iniciais



Alteração do Critério de Paragem



Representação Gráfica das Iterações