

Universidade do Minho

12 de dezembro de 2020

Relatório do trabalho prático 2

Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

Mestrado Integrado em Engenharia Informática - 3º ano



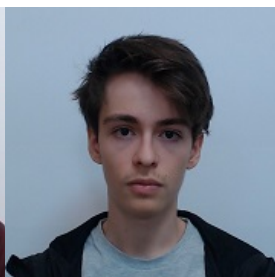
Adriano Novo
Soto Maior
A89483



Bruno Pinto
Jácome
A89515



José Pedro
Ribeiro Peixoto
A89602



Afonso Trindade
Araújo de Pascoal Faria
A83920

Índice

1	Introdução	3
2	Resolução das questões	4
2.1	Indique o valor de ABCDE, e apresente a grelha com o valor estimado do inventário de minério	4
2.1.1	Valor de ABCDE	4
2.1.2	Grelha resultante	4
2.2	Apresente a formulação deste problema	5
2.2.1	Contextualização	5
2.2.2	Regras	5
2.2.3	Objetivo	5
2.2.4	Considerações	6
2.3	Apresente a rede do problema de fluxo máximo	7
2.3.1	Rede inicial	7
2.3.2	Simplificação: passo 1	8
2.3.3	Rede final	9
2.4	Apresente o ficheiro de input submetido ao software de optimização em rede .	10
2.4.1	extracao.txt	10
2.5	Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa	11
2.5.1	solucao.txt	11
2.6	Interprete a solução ótima dada pelo software, e apresente o plano de escavação da mina, pintando os blocos do quadriculado a extrair; indique o lucro, proveito e custo de operação.	12
2.6.1	Solução ótima	12
2.6.2	Grafo de Fecho Máximo	13
2.6.3	Proveito, Lucro e Custo da operação	14
2.7	Descreva os procedimentos usados para validar o modelo	15
2.7.1	Recurso ao LPSolve	15
2.7.2	Ficheiro Input	16
2.7.3	Ficheiro Output	17
2.7.4	Conclusões	17

1 | Introdução

Este relatório foi realizado no âmbito da Unidade Curricular de Métodos Determinísticos em Investigação Operacional, envolvendo o conceito de otimização de redes, com auxílio do *software relax4*. Tem como objetivos principais, abordar o raciocínio e mostrar uma solução para um problema de fluxo máximo, sobre extração de minérios numa mina bidimensional com regras de contorno de escavação.

Este relatório divide-se essencialmente em 4 partes, todas relacionadas com a resolução do enunciado do trabalho prático:

Na primeira parte, identifica-se a grelha obtido pelo grupo de acordo com os requisitos do enunciado.

Já na segunda parte, formula-se o problema e apresenta-se, justificando, a rede associada ao problema de fluxo máximo, que passou por duas fases de simplificação.

Depois, analisa-se os resultados obtidos pela aplicação do *relax4* e apresenta-se a solução ótima, isto é, o plano ótimo de extração dos minérios.

Em último lugar, valida-se a solução ótima, por exemplo, com auxílio ao *lpsolve* para confrontar o resultado obtido.

2 | Resolução das questões

2.1 Indique o valor de ABCDE, e apresente a grelha com o valor estimado do inventário de minério

2.1.1 Valor de ABCDE

Comparando todos os números de aluno do grupo de trabalho (89483, 89515, 89602, 83920), verifica-se que o número maior é o 89602. Portanto, **A = 8, B = 9, C = 6, D = 0 e E = 2**.

2.1.2 Grelha resultante

A partir da grelha original:

Nível	Valor do minério											
-1						10	8					
-2					12	14	15	40				
-3				16				20				
-4			3	18	B			C				
-5				20	D		E					

Obtém-se:

Nível	Valor do minério											
-1						10	8					
-2					12	14	15	40				
-3				16				20				
-4			3	18	9			6				
-5				20	0		2					

2.2 Apresente a formulação deste problema

2.2.1 Contextualização

O problema de otimização consiste em maximizar o lucro associado a minérios numa mina bidimensional. Cada bloco na mina é representado por um só identificador numérico, conforme o seguinte:

Nível	Número do vértice											
-1	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-2		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
-3			11	12	13	14	15	16	17	18		
-4				5	6	7	8	9	10			
-5					1	2	3	4				

Como ilustrado anteriormente, nem todas as posições na mina podem ser escavados e relembra-se, ainda, que nem todos os blocos dão lucro. Uma vez que, **o custo para extrair um bloco do nível $-i$ é i** então, o lucro associado à extração de cada bloco é:

Nível	Lucro = Valor do minério - Custo											
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
-2		-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	
-3			-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3		
-4				-1	14	5	-4	-4	2			
-5					15	-5	-5	-3				

2.2.2 Regras

1. Não há restrições nos blocos do nível -1
2. A extração de um bloco depende, obrigatoriamente, da extração dos blocos do nível superior: acima e nas diagonais esquerda e direita. Por exemplo, a extração do bloco 1 obriga a extração dos blocos 5, 6 e 7 (esta regra é aplicada recursivamente a cada um destes).
3. Apenas se podem extrair blocos entre os níveis -5 e -1.

2.2.3 Objetivo

Minimizar o custo da extração de blocos.

Para isto, utilizou-se a ferramenta de otimização *relax4* e enunciou-se o problema no ficheiro **extracao.txt** ilustrado em 2.4.1, gerando-se o ficheiro **output solucao.txt** apresentado em 2.5.1.

2.2.4 Considerações

Decidiu-se **omitir o símbolo da capacidade nos arcos de capacidade** ∞ para reduzir redundância e diminuir a verbosidade. Isto acontece em todas os arcos associados às dependências das extrações de cada bloco.

Além disso, decidiu-se **omitir todos os arcos de capacidade 0**, uma vez que o fluxo neles será sempre 0 (não há fluxo), ou seja, nunca serão usados. Se analisarmos a tabela dos lucros em 2.2.1 e, conforme as considerações anteriores, tem-se que relativamente às:

arestas com **origem** em S (ou 41)

Como o lucro é positivo somente nos blocos com IDs iguais a 1, 6, 7, 10, 13, 17, 23, 24, 25, 26, 35 e 36 então, nas arestas com origem em S e destino a cada um desses vértices, a **capacidade é o lucro**. Em todos os outros, como o valor é 0, então a capacidade é 0 e, portanto, o arco é omitido. Por exemplo, o lucro de 1 é 15 e, então, a capacidade do arco $41 \rightarrow 1$ é 15:



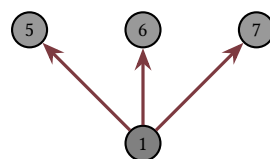
arestas com **destino** em T (42)

A **capacidade é o custo da extração do bloco associado a essa aresta**. Isto é, nos blocos do nível -5, estas capacidades são 5, nos blocos do nível -4, estas capacidades são 4, nos blocos do nível -3, estas capacidades são 3, nos blocos do nível -2, estas capacidades são 2 e nos blocos do nível -1, estas capacidades são 1. Por exemplo, o custo da extração do minério 1 é 5 e, então, a capacidade do arco $1 \rightarrow 42$ é 5:



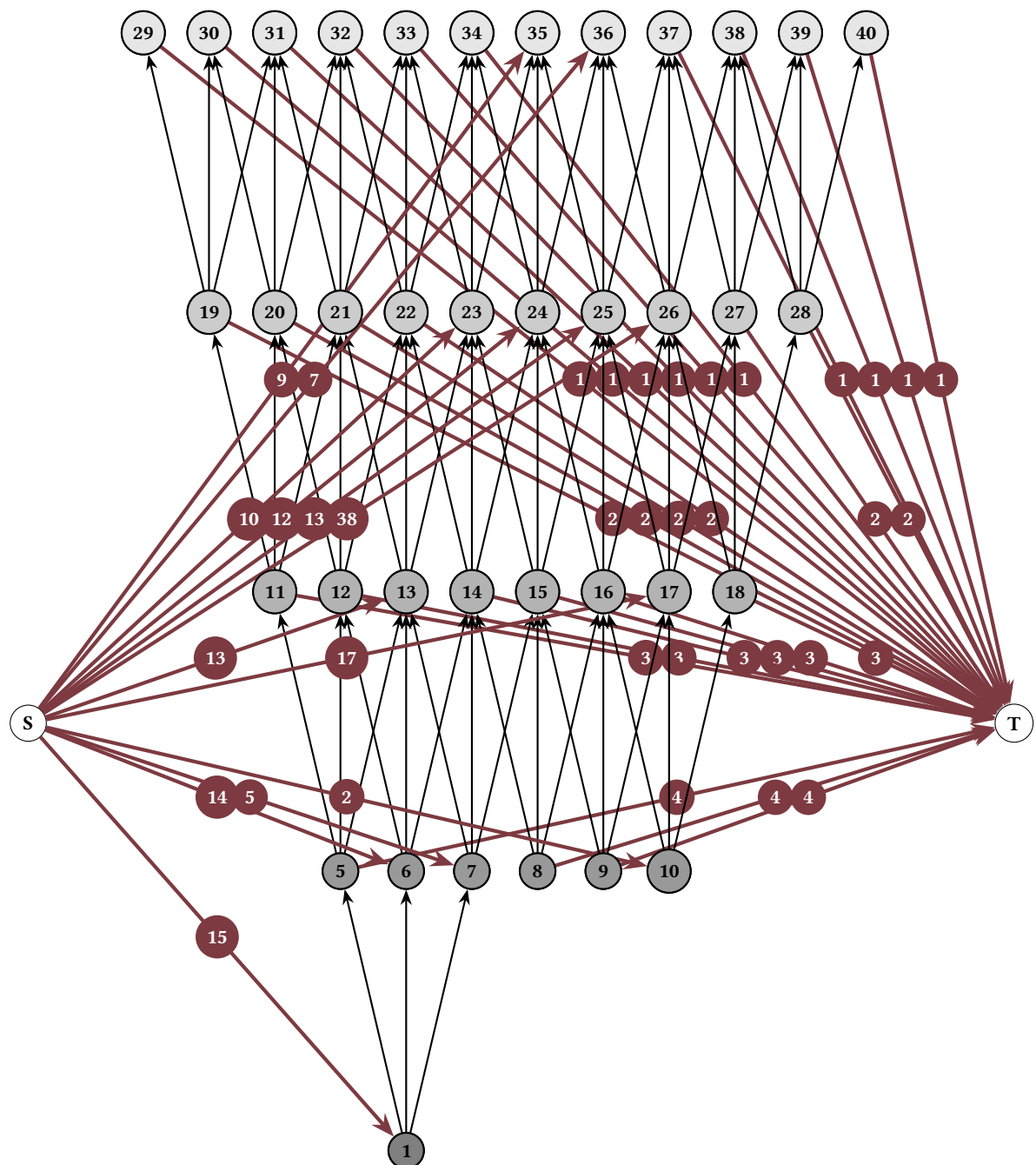
arestas entre vértices de 1 a 40

Como se trata de um problema de fecho máximo, **os arcos têm capacidade infinita** e, por isso, omite-se a notação. Estas representam que a extração depende de outras extrações e, por isso, uma aresta que parta de um certo vértice tem, obrigatoriamente, destino nos vértices do nível superior: acima e nas diagonais esquerda e direita. Por exemplo, 1 depende de 5, 6 e 7, então existem os arcos com capacidade infinita $1 \rightarrow 5$, $1 \rightarrow 6$ e $1 \rightarrow 7$:



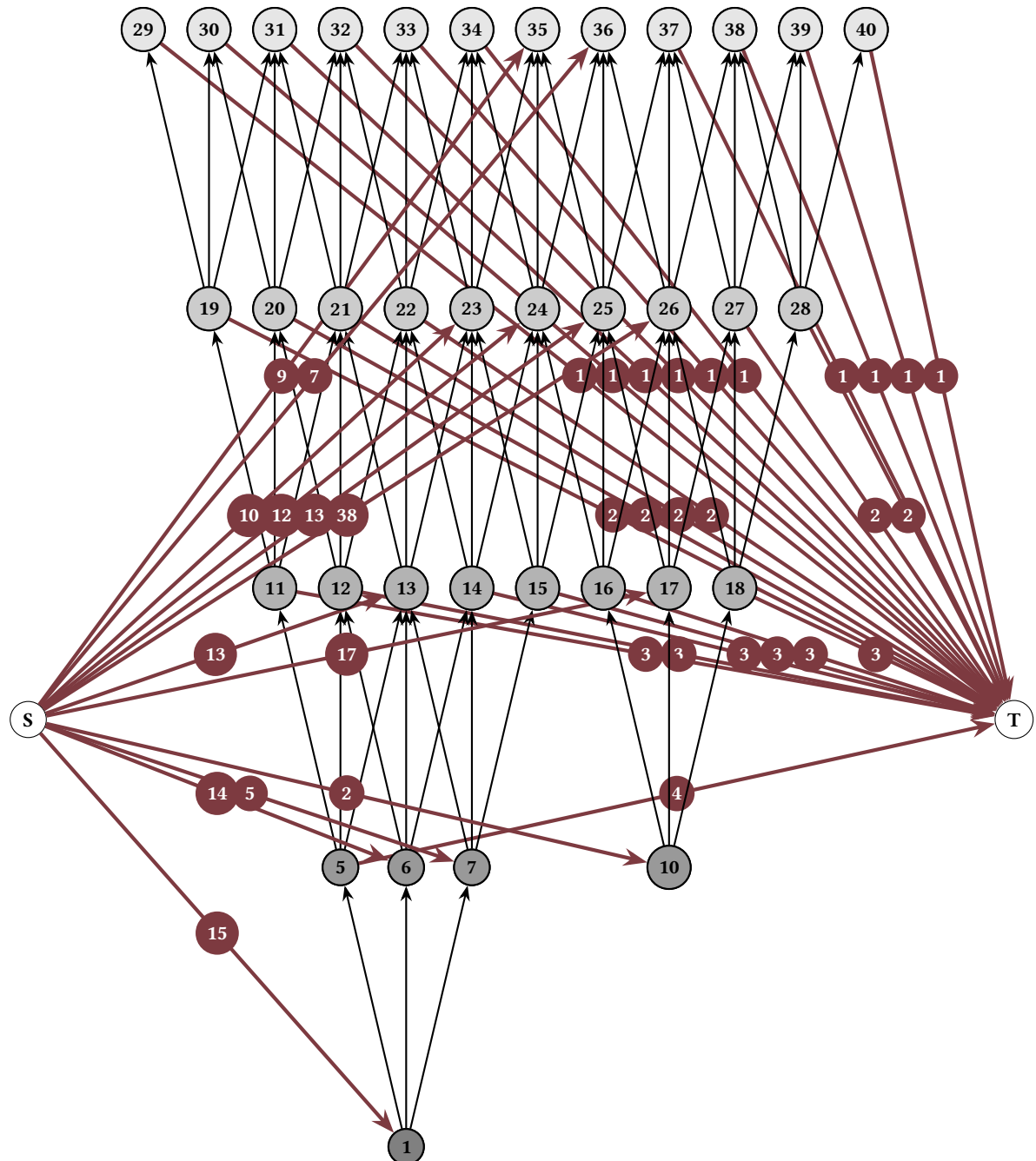
2.3.2 Simplificação: passo 1

Notemos que, **não há nenhum arco com destino nos vértices 2, 3 e 4** e uma vez que a origem do grafo é o vértice S (41), então **estes vértices serão omitidos**.



2.3.3 Rede final

Notemos que, agora **acontece o mesmo que em 2.3.2 nos vértices 8 e 9. Então, estes vértices são omitidos.** Com isto, dá-se fim às simplificações e apresenta-se a seguir o grafo simplificado associado ao problema de fluxo máximo.



2.4.1 extracao.txt

Linhas 1 - 50

Linha 51 - 100

Linha 101 - 150

2.5 Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa

2.5.1 solucao.txt

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS
= 105
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE
PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
41 1 7.
41 6 7.
41 7 5.
41 10 2.
41 13 6.
41 17 3.
41 23 1.
41 24 1.
41 25 1.
41 26 1.
5 42 1.
11 42 3.
12 42 3.
14 42 3.
15 42 3.
19 42 2.
20 42 2.
21 42 2.
22 42 2.
27 42 2.
28 42 2.
29 42 1.
30 42 1.
31 42 1.
32 42 1.
33 42 1.
34 42 1.
```

Linhas 1 - 34

```
37 42 1.
38 42 1.
39 42 1.
42 41 34.
1 5 7.
5 11 6.
6 12 6.
6 14 1.
7 14 2.
7 15 3.
10 18 2.
11 19 3.
12 20 3.
13 21 4.
13 22 2.
17 27 3.
18 28 2.
19 29 1.
20 30 1.
21 31 1.
21 32 1.
23 33 1.
24 34 1.
25 37 1.
26 38 1.
27 39 1.
OPTIMAL COST = -34.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH
ITERATIONS = 61
NUMBER OF ITERATIONS = 84
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 20
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =
4
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =
17
```

Linhas 35 - 66

2.6 Interprete a solução ótima dada pelo software, e apresente o plano de escavação da mina, pintando os blocos do quadriculado a extrair; indique o lucro, proveito e custo de operação.

2.6.1 Solução ótima

Análise do ficheiro output

Notemos que, no ficheiro output, a aresta $S(41) \rightarrow 10$ está saturada, então **não se extrai o bloco 10**. No entanto, uma vez que nenhum bloco admitido - isto é, ignorando os blocos 2, 3, 4, 8 e 9 que não foram admitidos à priori para a solução do problema - depende da extração do bloco 10, então a sua invalidação não afeta mais nenhum vértice.

41 10 2.

Além disso, notemos ainda que, não existe nenhuma linha no ficheiro output que indique as unidades passadas na aresta $40 \rightarrow T(42)$, o que significa que passaram 0 unidades e, por isso, não está saturada. Então **não se extrai o bloco 40**. Consequentemente, **não se extrai o bloco 28** porque o bloco 28 depende da extração do bloco 40. Consequentemente, **não se extrai o bloco 18** porque o bloco 18 depende da extração do bloco 28. Consequentemente, como o bloco 18 depende da extração do bloco 10, então também não é extraído, mas isto já foi afirmado anteriormente e, por isso, nada acontece.

Adiante, o mesmo acontece com a aresta $18 \rightarrow T(42)$, mas uma vez que este vértice foi removido da solução, então nada acontece.

Mais, o mesmo acontece com a aresta $16 \rightarrow T(42)$ e, por isso, **não se extrai o bloco 16**. Como apenas o bloco 10 depende da extração do 16, mas o bloco 10 já não está incluído na solução, então nada mais acontece.

Por último, notemos que a aresta $S(41) \rightarrow 7$ está saturada e, à partida, o bloco 7 não estaria no plano de extração. No entanto, a aresta $S(41) \rightarrow 1$ não está saturada e, por isso, inclui-se na solução ao problema. Então, visto que a extração do bloco 1 depende da extração do bloco 7, então o bloco 7 também pertence à solução.

41 1 7.

41 7 5.

Representação em tabelas

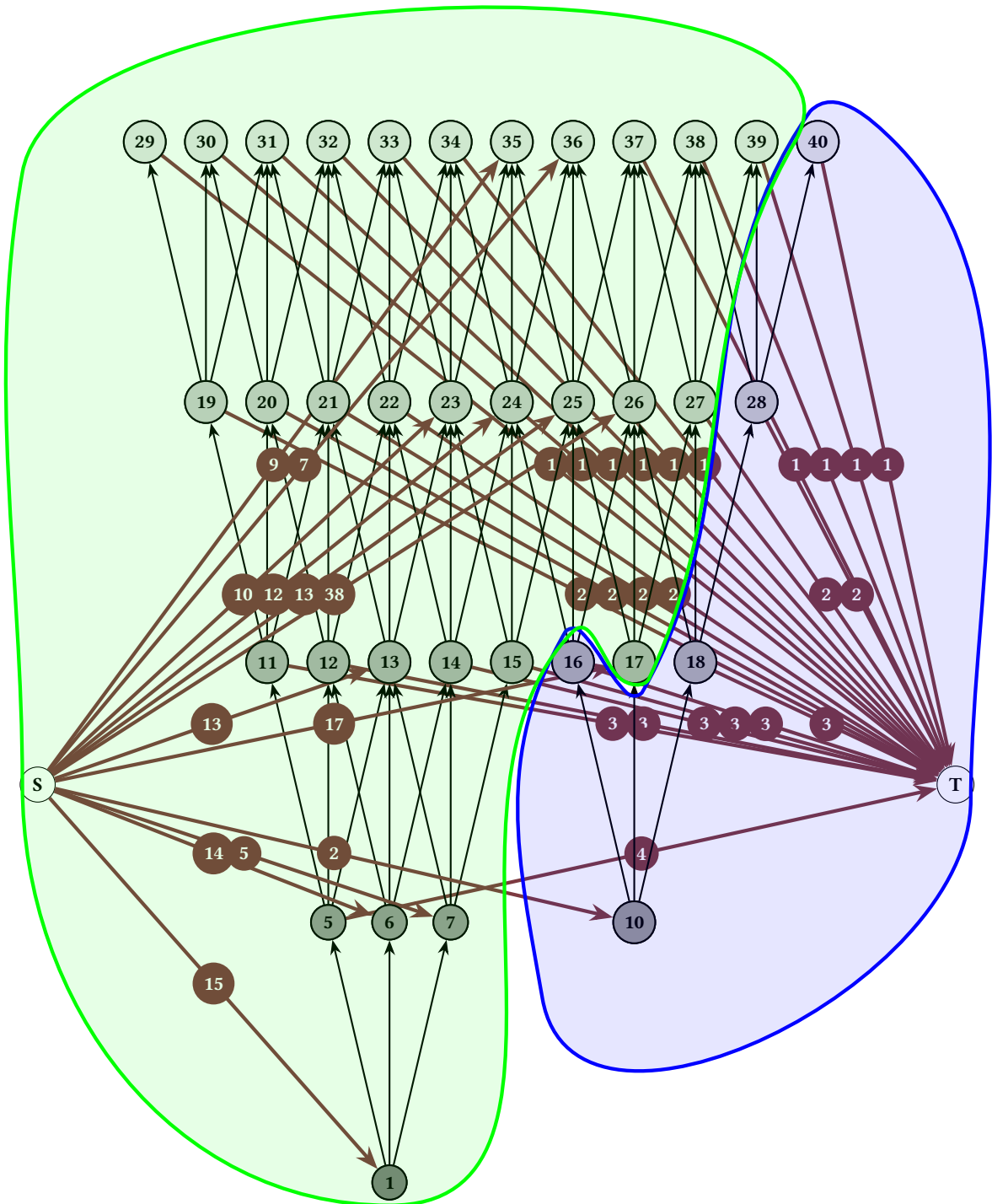
Para evidenciar as análises anteriores, criou-se tabelas:

Na tabela de **Fluxo de entrada/Capacidade Máxima**, marcaram-se a verde os vértices com arestas (com origem em $S(41)$) não saturadas (a saturação do verde era maior quanto maior fosse o lucro) e a amarelo os vértices com arestas (com origem em $S(41)$) saturadas.

Na tabela de **Fluxo de saída/Capacidade Máxima**, marcaram-se a verde os vértices com arestas (com destino em $T(42)$) saturadas e a vermelho os vértices com arestas (com destino em $T(42)$) não saturadas.

Nível	Fluxo de Entrada/Capacidade Máxima										Fluxo de Saída/Capacidade Máxima											
-1					0/9	0/7					1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1			1/1	1/1	1/1	0/1
-2					1/10	1/12	1/13	1/38				2/2	2/2	2/2	2/2					2/2	2/2	
-3				6/13				3/17				3/3	3/3		3/3	3/3	0/3			0/3		
-4				7/14	5/5			2/2				1/1										
-5				7/15																		

2.6.2 Grafo de Fecho Máximo



Representação do extração ótima

Na tabela seguinte, representou-se a verde os números dos blocos da mina que foram extraídos na solução ótima.

Nível	Número do vértice											
-1	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-2		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
-3			11	12	13	14	15	16	17	18		
-4				5	6	7	8	9	10			
-5					1	2	3	4				

2.6.3 Proveito, Lucro e Custo da operação

Proveito

O proveito é o sumatório das capacidades nas arestas com origem em S (41), da solução do problema. Cruzando as tabelas Fluxo de Entrada/Capacidade em 2.6.1 e da Extração ótima:

Nível	Fluxo de Entrada/Capacidade Máxima											
-1						0/9	0/7					
-2					1/10	1/12	1/13	1/38				
-3				6/13				3/17				
-4				7/14	5/5							
-5				7/15								

O proveito é: $15 + 14 + 5 + 13 + 10 + 12 + 13 + 9 + 7 + 38 + 17 = 153$.

Lucro

O lucro é o sumatório da diferença entre a capacidade e fluxo de entrada nas arestas com origem em S (41), da solução do problema. Logo, o **lucro é** $(15 - 7) + (14 - 7) + (5 - 5) + (13 - 6) + (17 - 3) + (10 - 1) + (12 - 1) + (13 - 1) + (38 - 1) + (9 - 0) + (7 - 0) = 121$.

Custo

O custo é a diferença entre o lucro e o proveito. Logo, o **custo é** $153 - 121 = 32$.

Porque é que o custo é diferente do custo obtido no ficheiro output?

Notemos que, o *relax4* considera os vértices que só foram removidos após a análise ao ficheiro output. Ou seja, ainda considera os vértices 10, 18, 28, 40 e 16. As arestas com destino em T (42) e com origem nos pontos mencionados são: $18 \rightarrow T(42)$, $28 \rightarrow T(42)$, $40 \rightarrow T(42)$ e $16 \rightarrow T(42)$. Ora, o sumatório dos fluxos de entradas nestas arestas é $0 + 2 + 0 + 0 = 2$. Agora, basta adicionar estes 2 extra aos 32 do custo obtido no parágrafo anterior e tem-se 34, que é o custo ótimo obtido no ficheiro output da aplicação do *relax4*.

2.7 Descreva os procedimentos usados para validar o modelo

2.7.1 Recurso ao LPSolve

Variáveis de Decisão

$x_i = 1$, se o bloco i é extraído

$x_i = 0$, senão

$i = 1..40$

Função Objetivo: maximizar o lucro total

Seja, c_i o lucro do bloco i , então **lucro total da extração de minérios** é: $\sum_{i=1}^{40} c_i x_i$.
Portanto, **maximizar o lucro total** é:

$$\max : \sum_{i=1}^{40} c_i x_i$$

A partir da tabela de lucros, enunciou-se a seguinte função objetivo:

max : -x29 -x30 -x31 -x32 -x33 -x34 +9x35 +7x36 -x37 -x38 -x39 -x40
 -2x19 -2x20 -2x21 -2x22 +10x23 +12x24 +13x25 +38x26 -2x27 -2x28
 -3x11 -3x12 +13x13 -3x14 -3x15 -3x16 +17x17 -3x18
 -x05 +14x06 +5x07 -4x08 -4x09 +2x10
 +15x01 -5x02 -5x03 -3x04 ;

Restrições

Notemos que, os blocos só podem ser extraídos uma vez, obviamente. No entanto, no *LPSolve* serão declaradas como **int** (\mathbb{N}_0), mas a sua condição binária será restringida enunciando que $x_i \leq 1$.

Além disso, assim como foi explicado anteriormente, há dependências de extrações de blocos. Por exemplo, a extração do bloco 1 depende da extração do bloco acima à esquerda (5), acima (6) e acima à direita (7). Esta dependência propaga-se ao longo de toda a mina, isto é, também os blocos 5, 6 e 7 dependem, analogamente, de outros blocos. Ora, então caso 1 seja extraído ($x_1 = 1$), então também 5, 6 e 7 são extraídos ($x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 1$). Caso contrário ($x_1 = 0$), 5, 6 e 7 podem ser ou não extraídos ($x_5 = 0 \vee 1, x_6 = 0 \vee 1, x_7 = 0 \vee 1$):

x_1	x_5	x_6	x_7	$3 * x_1 \leq x_5 + x_6 + x_7$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0

x_1	x_5	x_6	x_7	$3 * x_1 \leq x_5 + x_6 + x_7$
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

Resumidamente, $3 * x_1 \leq x_5 + x_6 + x_7$ e analogamente para todos os vértices sujeitos à dependência de extração.

2.7.2 Ficheiro Input

```
max:      -x29  -x30  -x31  -x32  -x33  -x34  +9x35  +7x36  -x37  -x38  -x39  -x40
          -2x19 -2x20 -2x21 -2x22 +10x23 +12x24 +13x25 +38x26 -2x27 -2x28
          -3x11 -3x12 +13x13 -3x14  -3x15  -3x16 +17x17  -3x18
          -x05 +14x06  +5x07  -4x08  -4x09  +2x10
          +15x01  -5x02  -5x03  -3x04;

x01 <= 1;      3 * x01 <= x05 + x06 + x07;
x02 <= 1;      3 * x02 <= x06 + x07 + x08;
x03 <= 1;      3 * x03 <= x07 + x08 + x09;
x04 <= 1;      3 * x04 <= x08 + x09 + x10;
x05 <= 1;      3 * x05 <= x11 + x12 + x13;
x06 <= 1;      3 * x06 <= x12 + x13 + x14;
x07 <= 1;      3 * x07 <= x13 + x14 + x15;
x08 <= 1;      3 * x08 <= x14 + x15 + x16;
x09 <= 1;      3 * x09 <= x15 + x16 + x17;
x10 <= 1;      3 * x10 <= x16 + x17 + x18;
x11 <= 1;      3 * x11 <= x19 + x20 + x21;
x12 <= 1;      3 * x12 <= x20 + x21 + x22;
x13 <= 1;      3 * x13 <= x21 + x22 + x23;
x14 <= 1;      3 * x14 <= x22 + x23 + x24;
x15 <= 1;      3 * x15 <= x23 + x24 + x25;
x16 <= 1;      3 * x16 <= x24 + x25 + x26;
x17 <= 1;      3 * x17 <= x25 + x26 + x27;
x18 <= 1;      3 * x18 <= x26 + x27 + x28;
x19 <= 1;      3 * x19 <= x29 + x30 + x31;
x20 <= 1;      3 * x20 <= x30 + x31 + x32;
x21 <= 1;      3 * x21 <= x31 + x32 + x33;
x22 <= 1;      3 * x22 <= x32 + x33 + x34;
x23 <= 1;      3 * x23 <= x33 + x34 + x35;
x24 <= 1;      3 * x24 <= x34 + x35 + x36;
x25 <= 1;      3 * x25 <= x35 + x36 + x37;
x26 <= 1;      3 * x26 <= x36 + x37 + x38;
x27 <= 1;      3 * x27 <= x37 + x38 + x39;
x28 <= 1;      3 * x28 <= x38 + x39 + x40;
x29 <= 1;
x30 <= 1;
x31 <= 1;
x32 <= 1;
x33 <= 1;
x34 <= 1;
x35 <= 1;
x36 <= 1;
x37 <= 1;
x38 <= 1;
x39 <= 1;
x40 <= 1;

int x29, x30, x31, x32, x33, x34, x35, x36, x37, x38, x39, x40,
    x19, x20, x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28,
    x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18,
    x05, x06, x07, x08, x09, x10,
    x01, x02, x03, x04;
```


2.7.3 Ficheiro Output

Value of objective function: 121.00000000

Actual values of the variables:

x29	1
x30	1
x31	1
x32	1
x33	1
x34	1
x35	1
x36	1
x37	1
x38	1
x39	1
x40	0
x19	1
x20	1
x21	1
x22	1
x23	1
x24	1
x25	1
x26	1
x27	1
x28	0
x11	1
x12	1
x13	1
x14	1
x15	1
x16	0
x17	1
x18	0
x05	1
x06	1
x07	1
x08	0
x09	0
x10	0
x01	1
x02	0
x03	0
x04	0

2.7.4 Conclusões

Assim como concluído através da análise ao ficheiro output produzido pelo *relax4*, o **lucro ótimo** é 121 e o plano de mineração é exatamente o mesmo.

Nível	Número do vértice											
-1	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-2		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
-3			11	12	13	14	15	16	17	18		
-4				5	6	7	8	9	10			
-5					1	2	3	4				