Otimização na Indústria Automobilística
Equipa 29

Adriano Maior (A89483) - Bruno Jácome (A89515) - Miguel Solino (A86435)

Paulo Lima (A89983) - Pedro Peixoto (A89602)

1 Contextualização

1.1 Introdução

Este relatório foi realizado no âmbito da Unidade Curricular de Métodos Numéricos e Otimização Não Linear do 1º semestre do 3º ano do curso de Mestrado Integrado em Engenharia Informática da Universidade do Minho. O relatório, deste mini-projeto 2, tem como objetivo principal, abordar e resolver um problema, associado à minimização de uma função, sem restrições. Neste caso de estudo, pretende-se maximizar o dinheiro total ganho da venda de *automóveis*. Para isso, utilizou-se a rotina **fminunc** e **fminsearch** no *software* Matlab®.

Inspirado em: `http://newb.kettering.edu/wp/experientialcalculus/wp-content/uploads/sites/15/2017/05/Module_II.pdf`.

1.2 Procura de Automóveis

Nas últimas décadas, os automóveis tornaram-se gradualmente, num bem pessoal e necessário para deslocação por razões não só profissionais e educativas, mas também turísticas com que atualmente parte da sociedade dos países desenvolvidos tem acesso. De acordo com a **Eurostat**[1], no período de 2014 a 2018, Portugal registou um aumento (17%) no número de carros (de transporte de passageiros). Mais[2], em 2017 e 2016, apenas cerca de 7% da população portuguesa não tem disponibilidade financeira para poder comprar um automóvel pessoal. Assim sendo, a procura dos automóveis caracteriza a potência de algumas das empresas mais ricas no mercado. Entre estas, nomes como Volkswagen, Fiat, Mercedes, ... são reconhecidos mundialmente pela vasta gama automóveis. Desta forma, há empresas que investem fortemente no estudo estatístico da procura e oferta - para compreender, por exemplo, as tendências flutuantes dos consumidores - na esperança de assegurar ou aumentar as receitas da empresa.

1.3 Caso de estudo

Neste caso, resolver-se-á um problema de otimização que visa maximizar os lucros totais ganhos pela venda de de dois tipos de automóveis: camiões e os carros. Imagine-se que, neste caso, as procuras pelos camiões e pelos carros são da seguinte forma:

$$\text{Procura mensal por camiões: } \mathrm{t}(x_1, x_2) = 10000 - 2x_1 + 2.5x_2 \ \text{ (Número de Camiões)}$$
$$\text{Procura mensal por carros: } \mathrm{s}(x_1, x_2) = 6000 + 1.5x_1 3x_2 \ \text{ (Número de Carros)}$$

Onde, x_1 e x_2 são os preços dos camiões e dos carros, respetivamente. Estas equações representam que o preço dos camiões aumenta quando os consumidores comprar menos camiões ou mais carros, e quando o preço dos carros aumenta, os consumidores compram mais camiões e menos carros. O objetivo é encontrar os preços ótimos que maximizam o dinheiro ganho, e que correspondem a uma procura ótima de ambos os veículos.

2 Formulação do problema

Seja f o ganho da venda de cada um dos veículos, então f é **igual ao número de camiões vendidos t vezes o preço de um camião x_1 mais o número de carros vendidos s vezes o preço de um carro x_2**:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{f}(x_1, x_2) = \mathrm{t} \times x_1 + \mathrm{s} \times x_2 \\
\iff\ &\mathrm{f}(x_1, x_2) = (10000 - 2x_1 + 2.5x_2)x_1 + (6000 + 1.5x_1 3x_2)x_2 \\
\iff\ &\mathrm{f}(x_1, x_2) = (-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10000x_1 + 16000x_2)
\end{aligned}$$

[1] `https://ec.europa.eu/eurostat/en/web/products-eurostat-news/-/ddn-20200611-2`

[2] `https://ec.europa.eu/eurostat/en/web/products-eurostat-news/-/ddn-20181125-1`

Onde, x_1 e x_2 são os preços dos camiões e dos carros, respetivamente.

2.1 Objetivo

$$\max\left(-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10000x_1 + 16000x_2\right) \tag{0.1}$$

Uma vez que as rotinas utilizadas minimizam a função, e que:

$$\max \mathrm{f}(x) = \min(-\mathrm{f}(x))$$

Então, 0.1 é equivalente a:

$$\min\left(-(-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10000x_1 + 16000x_2)\right)$$

Onde, x_1 e x_2 são os preços dos camiões e dos carros, respetivamente.

2.2 Implementação em MATLAB®

Função Objetivo

```
function [f] = myfun(x)
f(1:height(x)) = 0;
for i=1:height(x)
    f(i) = -(- 2*x(i,1).^2 - 3*x(i,2).^2 + 4.*x(i,1)*x(i,2) + 10000*x(i,1) + 16000*x(i,2));
end
end
```

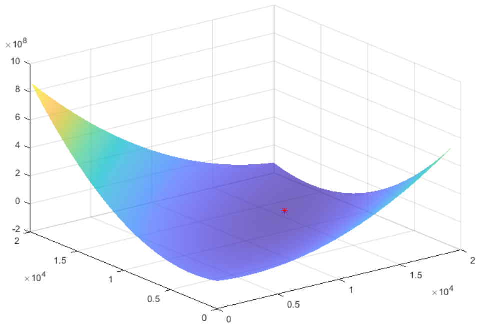
Script

```
%% fminunc
[x, y, z , p] = fminunc('myfun',[-100000 -100000])

%% fminunc com dfp
options = optimset('HessUpdate','dfp');
[x, y, z , p] = fminunc('myfun',[-100000 -100000],options)

%% mudar a tolerância para 10^-7 para obter valor exato
options = optimset('TolFun',10^-7);
[x, y, z , p] = fminunc('myfun',[-100000 -100000],options)

%% fminsearch
[x, y, z , p] = fminsearch('myfun',[-10000 -10000])

%% surf
[x,y] = meshgrid(1:100:20000);

a = reshape(x,1,[]);
b = reshape(y,1,[]);
c = [a;b]';
z = myfun(c);
z = reshape(z,200,200);
s = surf(x,y,z,'FaceAlpha',0.7);
s.EdgeColor = 'none';
hold on
plot3(15500,13000,myfun([15500 13000]),'r*')
%surf(x,y,f(c));
```

3 Resultados

Como os valores de x_1 e x_2 representam preços, então soluções com valores negativos nas variáveis não são admissíveis para o problema em questão. Além disso, realça-se que, como a função objetivo foi invertida verticalmente, os valores da função objetivo negativos correspondem na verdade a ganhos positivos. Assim, após executar as rotinas **fminunc** e **fminsearch** foram obtidos os seguintes resultados: (A partir do ponto inicial $(-10000, -10000)$)

fminunc	**fminunc**	**fminsearch**
9 iterações com BFGS	16 iterações com DFP	75 iterações
$x_1 = 15500.0038145902$	$x_1 = 15499.9876895423$	$x_1 = 15500.0000232274$
$x_2 = 12999.9869703622$	$x_2 = 13000.0149455621$	$x_2 = 12999.9999982516$
$\mathrm{f}(x_1, x_2) = -181499999.999263$	$\mathrm{f}(x_1, x_2) = -181499999.998291$	$\mathrm{f}(x_1, x_2) = -181500000$



4 Análise dos Resultados

4.1 Número de iterações com fminunc e fminsearch

Tal como é descrito[3] pelo MATLAB®, a rotina fminsearch não recorre ao uso de derivadas, ao contrário da fminunc. Com efeito, é natural que tenha um número de iterações consideravelmente maior, já que a convergência para a solução ótima é mais gradual. Neste caso de estudo, a função objetivo é diferenciável e, por isso, houve oportunidade de comparar a notável diferença que a presença das derivadas têm na velocidade de convergência para a solução ótima.

4.2 Número de iterações com BFGS e DFP (fminunc)

Além da diferença no número de iterações entre fminunc e fminsearch, mesmo dentro da fminunc há duas diferenças consideráveis quando se muda o método de *HessUpdate* de BFGS (default) para DFP.

4.3 Valor da Função Objetivo

Já em relação aos valores da função objetivo, podemos dizer que o resultado obtido é o mesmo, uma vez que todos os valores estão muito próximos uns dos outros. Sendo assim, podemos dizer que o valor da função objetivo é aproximadamente -181500000 U.M.. No entanto, não esqueçamos que o seu verdadeiro valor físico é o inverso deste valor, ou seja, o **o ganho máximo da venda de carros e automóveis é de 181500000 U.M.**.

4.4 Admissibilidade

Em todos os casos verificamos que as variáveis x_1 e x_2 são positivas e idênticas e ,por isso, as soluções são todas admissíveis. Sendo assim, **o preço ótimo para os camiões é** $x_1^* \approx 15500$ **U.M. e o preço ótimo para os carros** $x_2^* \approx 13000$ **U.M..**

5 Conclusões

Em 1950, Alan Turing previa e corretamente que no fim do século teríamos computadores com memória na casa de 1 GB. Mais tarde, em 1965, Gordon Moore afirmou na revista Eletronic Magazine que "A complexidade para componentes com custos mínimos tem aumentado numa taxa de aproximadamente um fator de dois por ano". Contudo, segundo Carl Anderson, pesquisador da área de concepção de computadores da IBM, a Lei de Moore está perto do fim, devido a limitações físicas dos transistores. Será que o mesmo poderá ser aplicado a algoritmos? Neste caso de estudo analisou-se 3 métodos diferentes de convergência para a solução ótima com um número de iterações substancialmente diferente. Estes algoritmos passaram por mentes brilhantes que viram neles o potencial de aumentar eficiência e eficácia. Contudo, será possível que no futuro estes algoritmos ou outros possam ficar obsoletos devido a possíveis limitações matemáticas?

Este é apenas um caso de estudo académico, mas na atualidade os problemas de otimização estão cada vez mais exigentes. Com efeito, é necessário escolher os algoritmos adequados para os resolver. De facto, com os testes que foram executados compreendeu-se que, ambos os métodos apresentam vantagens e desvantagens, pelo que apenas a comparação do número de iterações não é um método viável de avaliar um algoritmo. Por exemplo, podemos convergir mais rapidamente para as soluções ótimas recorrendo a derivadas, mas é apenas limitado a funções diferenciáveis.

[3] `https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html`