Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

Pedro Peixoto

Apontamentos e resumos

Unidade Curricular : Métodos Numéricos e Otimização Não Linear
3º ano - Mestrado Integrado em Engenharia Informática (MIEI)
Universidade do Minho
Ano Letivo 2020/2021 Portugal

Capítulo 1

Métodos Numéricos

1.1 Tipos de Erros

1.1.1 Incerteza nos dados

Os dados de entrada contêm um imprecisão inerent, isto é, não há como os evitar, uma vez que representam medidas obtidas usando equipamentos específicos (balanças, voltímetros, amperímetros, termómetros, ...).

Não existe nenhum equipamento de medição com uma precisão 100%.

Como se poderá pesar átomos com uma balança de supermercado?

1.1.2 Erro de arredondamento

Surge na representação dos dados no computador - o tamanho da palavra no computador/calculadora tem tamanho limitado.

Como se poderá representar sem erro o valor $\frac{1}{3} = 0.(3)$?

E o valor de π ? 3.14 ou 3.14159265358979 ???

Os erros de arrendondamento vão-se acumulando à medida que se vão realizando operações aritméticas e, a sua influência no resultado pode ser muito ampliada. Muitas vezes, o resultado final de um conjunto de operações é diferente do resultado exato.

1.1.3 Erro de truncatura

Na substituição de um problema contínuo por um discreto (diferenciação numérica e integração numérica).

Na substituição de um processo de cálculo infinito por um finito (métodos iterativos).

Exemplo :
Pretende-se calcular e^x usando a expressão em série de Taylor da função:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$$

Se se usar apenas os n termos da série (se a "truncarmos"no enésimo termo) obtém-se uma aproximação a e^x:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

1.1.4 Formato Vírgula Flutuante

$$fl(x) = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times b^e$$

A mantissa $d_1 d_2 ... d_k$ é um número finito de digítos que define o comprimento da palavra (k) - a precisão aumenta com o aumento de k.

b é a base de representação.

e é a expoente.

Se $d_1 \neq 0$ o formato diz-se normalizado, por exemplo,

$$fl(x) = \pm 0.d0045 \times 10^0, fl_{norm}(x) = 0.45 \times 10^{-2}$$

.

1.1.5 Erro Absoluto

Considere-se: $\overline{x} \in IR$ - o valor exato de um número.
$x \in IR$ - o valor aproximado (o que vai ser utilizado nos cálculos).

$d_x = |\overline{x} - x|$ - o erro absoluto (desconhecido).

$|\overline{x} - x| \leq \delta_x$ - o limite superior do erro absoluto.

$\overline{x} \in [x - \delta_x, x + \delta_x]$ - o intervalo de incerteza.

1.1.6 Erro relativo

$r_x = \frac{|\overline{x} - x|}{|\overline{x}|}, \overline{x} \neq 0$, o erro relativo (desconhecido).

$r_x \approx \frac{|\overline{x}-x|}{|\overline{x}|} \leq \frac{\delta_x}{|x|}$ - 100% r_x - percentagem do erro.

Nota: o erro absoluto não permite avaliar a importância do erro cometido.

1.1.7 Majorante do erro

Associado a um número x está o limite superior do erro absoluto δ_x:
- δ_x é metade da última casa decimal de x.
Por exemplo, se δ_x for 15.23 (a última casa decimal é a das centésimas), logo:

$$\delta_x = 0.5 \times 0.01 = 0.005, \overline{x} \in [15.23 - 0.005, 15.23 + 0.005]$$

1.1.8 Fórmula Fundamental do Erro

Teorema
Seja $\overline{x} \in I_x = [x - \delta_x, x + \delta_x]$ e
$\overline{y} \in I_y = [y - \delta_y, y + \delta_y]$
(x e y representam valores aproximados dos valores exatos x e y)