CSI – Recurso 20/21

Questão 1

(o enunciado tem gralhas a partir do passo 2 }

$$\phi_p = \phi_p^\circ$$

$\equiv$ { II }

$$X \subseteq \phi_p^\circ$$

$\equiv$ { (5.13) }

$$X \subseteq id \cdot \phi_p^\circ \cdot id$$

$\Leftarrow$ { lowering upper side: ϕ_p é coreflexiva, ie., $\phi_p \subseteq id$ }

$$X \subseteq \phi_p \cdot \phi_p^\circ \cdot \phi_p$$

$\equiv$ { ϕ_p é coreflexiva $\Rightarrow$ ϕ_p é difuncional }

$$X \subseteq \phi_p$$

$\equiv$ { II }

true

$$\boxed{\begin{array}{c} \phi_p = \phi_p^\circ \\ \equiv \{ \text{Ping-pong} \} \\ \phi_p \subseteq \phi_p^\circ \\ \equiv \{ \text{universal-}^\circ \} \\ \phi_p^\circ \subseteq \phi_p \end{array}}$$

Questão 2

$$(R \times S) \cdot \langle id, id \rangle = \langle R, S \rangle$$

$=$ { Pointwise }

$$\langle \exists c,d : (a,b)(R \times S)(c,d) : (c,d) \langle id, id \rangle e \rangle$$

$\equiv$ { (5.101) }

$$\langle \exists \ d : (a,b)(R \times S)(c,d) : c = e \wedge d = e \rangle$$

$\equiv$ { one Point }

$$\langle (a,b)(R \times S)(e,e)$$

$\equiv$ { Def $\times$ }

$$a R e \wedge b S e$$

$\equiv$ { (5.101) }

$$(a,b) \langle R,S \rangle e$$

$\equiv$ { Pointfree }

$$\langle R, S \rangle$$

Questão 3

S é simples

$\equiv \{ (5.36); (5.85); (5.33) \}$

$S \cdot S^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ \text{def } S \}$

$R \cdot \langle id, \underline{t_0} \rangle^\circ \cdot (R \cdot \langle id, \underline{t_0} \rangle^\circ)^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ (5.16); (5.15) \}$

$R \cdot \langle id, \underline{t_0} \rangle^\circ \cdot \langle id, \underline{t_0} \rangle \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ 5.108 \}$

$R \cdot (id^\circ \cdot id \cap \underline{t_0}^\circ \cdot \underline{t_0}) \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ (5.49); (5.13); id = id^\circ \}$

$R \cdot (id \cap \frac{\underline{t_0}}{\underline{t_0}}) \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ \frac{\underline{k}}{\underline{k}} = T; (5.67); (5.13) \}$

$R \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv \{ (5.36); (5.85); (5.33) \}$

R é simples

S é simples

$\equiv$ {(5.36); (5.85); (5.33)}

$S \cdot S^\circ \subseteq id$

$\equiv$ { def S }

$R \cdot \langle id, T\rangle^\circ \cdot (R \cdot \langle id, T\rangle)^\circ \subseteq id$

$\equiv$ {(5.16); (5.15)}

$R \cdot \langle id, T\rangle^\circ \cdot \langle id, T\rangle \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv$ { 5.108 }

$R \cdot (id^\circ \cdot id \cap T^\circ \cdot T) \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv$ {(5.13); $id^\circ = id$; $T^\circ \cdot T = T$; (5.67); (5.13)}

$R \cdot R^\circ \subseteq id$

$\equiv$ {(5.36); (5.85); (5.33)}

R é simples

Questão 4

1.

R é localmente reflexivo

$\equiv$ { def. local... refle.. }

$R \subseteq (R \cap id) \cdot T \cdot (id \cap R)$

$\equiv$ { 5.13 }

$id \cdot R \cdot id \subseteq (R \cap id) \cdot T \cdot (id \cap R)$

$\Leftarrow \{ 5.78 ; A \wedge A = A \}$

$$\begin{cases} id \subseteq R \cap id \\ R \subseteq T \equiv True \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.58) \}$

$id \subseteq R \wedge id \subseteq id$

$\equiv \{ (5.84) ; (5.21) \}$

R é reflexivo

2.

Ker R é localmente reflexivo

$\equiv \{ (5.32) ;$ def local... refle... $\}$

$R^\circ . R \subseteq (R^\circ . R \cap id) . T . (id \cap R^\circ . R)$

$\equiv \{ 5.13 \}$

$id . (R^\circ . R) . id \subseteq (R^\circ . R \cap id) . T . (id \cap R^\circ . R)$

$\Leftarrow \{ 5.78 ; A \wedge A = A \}$

$$\begin{cases} id \subseteq R^\circ . R \cap id \\ R^\circ . R \subseteq T \equiv True \end{cases}$$

$\equiv \{ 5.58 \}$

$id \subseteq R^\circ . R \wedge id \subseteq id$

$\equiv \{ (5.21) ; (5.32) ; (5.84) ; (5.36) \}$

R é inteiro

Ou seja, Ker R é localmente reflexivo se R é inteiro.

Parte B

Questão 5.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\pi_1^\circ"] \arrow[d, "res"] \arrow[dd, bend left, "R"] & C \times T \arrow[dd, "M"] & T \arrow[l, "\pi_2^\circ"'] \\
A & & \\
L \arrow[u, "ag"] \arrow[uu, bend left, "S"] & L + V \arrow[l, "i_1^\circ"] \arrow[r, "i_2^\circ"] & V
\end{tikzcd}
$$

$\Phi_p = b(id \cap R \backslash S)\, a$

$\equiv$ $b = a \wedge \langle \forall c : c R b : c S a \rangle$

$\equiv \langle \forall c : c R a : c S a \rangle$

$\equiv \langle \forall c : \langle \exists i : i = i_1 c : \langle \exists j : i M j : a = \pi_1 j \rangle \rangle : ag\ c = res\ a \rangle$

$\equiv \langle \forall l, t, c :: (i_1 l) M (c, t) \Rightarrow ag\ l = res\ c \rangle$

Questão 6

$t = ((b \leftarrow Maybe\ a) \leftarrow (b \leftarrow a)) \leftarrow b$

$R_t = R_{((b \leftarrow Maybe\ a)) \leftarrow (b \leftarrow a)) \leftarrow b}$

$\equiv$

$R_t = ((R_b \leftarrow R_{Maybe\ a}) \leftarrow (R_b \leftarrow R_a)) \leftarrow R_b$

$\equiv$ $R_t = ((R_b \leftarrow (id + R_a)) \leftarrow (R_b \leftarrow R_a)) \leftarrow R_b$

$\equiv \{ R_a := R \ ; \ R_b := S \}$

$R_t = ((S \leftarrow (id + R)) \leftarrow (S \leftarrow R)) \leftarrow S$

FT

$\text{maybe}\ (R_t)\ \text{maybe}$

$\equiv \{ R_t \text{ calculado} \}$

$\text{maybe}\ (((S \leftarrow (id + R)) \leftarrow (S \leftarrow R)) \leftarrow S)\ \text{maybe}$

$\equiv \{ \text{Reynolds arrow} \}$

$\text{maybe} \cdot S \subseteq ((S \leftarrow (id + R)) \leftarrow (S \leftarrow R)) \cdot \text{maybe}$

$\equiv \{ \text{shunting} \}$

$S \subseteq \text{maybe}^\circ \cdot ((S \leftarrow (id + R)) \leftarrow (S \leftarrow R)) \cdot \text{maybe}$

$\equiv \{ \text{Pointwise} ; \text{"guardanapo"} \}$

$a\, S\, b \Rightarrow (\text{maybe } a)((S \leftarrow (id + R)) \leftarrow (S \leftarrow R))(\text{maybe } b)$

$\equiv \{ \text{Reynolds arrow} \}$

$a\, S\, b \Rightarrow (\text{maybe } a) \cdot (S \leftarrow R) \subseteq (S \leftarrow (id + R)) \cdot (\text{maybe } b)$

$\equiv \{ \text{shunting} \}$

$a\, S\, b \Rightarrow S \leftarrow R \subseteq (\text{maybe } a)^\circ \cdot (S \leftarrow (id + R)) \cdot (\text{maybe } b)$

$\equiv \{ \text{Pointwise} ; A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv A \wedge B \Rightarrow C \}$

$a\, S\, b \wedge (f \cdot R \subseteq S \cdot g) \Rightarrow (\text{maybe } a\ f)(S \leftarrow (id + R))(\text{maybe } b\ g)$

$\equiv \{ \text{Reynolds arrow} \}$

$a\, S\, b \wedge (f \cdot R \subseteq S \cdot g) \Rightarrow (\text{maybe } a\ f) \cdot (id + R) \subseteq S \cdot (\text{maybe } b\ g)$

$\equiv$

Corolário

$S := s$

$R := id$

$a = s\, b \wedge f = s \cdot g \Rightarrow (\text{maybe } a\ f) \cdot (id + id) = s \cdot (\text{maybe } b\ g)$

$\equiv \{ id + id = id \}$

$\text{maybe } (s\, b)(s \cdot g) = s \cdot (\text{maybe } b\ g)$

(nota: neste caso, $f := g$ se comparado com o do enunciado)

Questão 7.

Questão 8

$$\epsilon \cdot \Lambda R$$

$= \{ (F9) \}$

$$\epsilon \cdot f$$

$= \{ (F9) \}$

$$R$$

—— // ——

$$\Lambda R \cdot f = \Lambda (R \cdot f)$$

$\equiv \{ (F9) \}$

$$\epsilon \cdot (\Lambda R \cdot f) = R \cdot f$$

$\equiv \{ (F\ 10) \}$

$$R \cdot f = R \cdot f$$

$\equiv \{$ reflexividade $\}$

True