CSI - Exame de recurso 21/22

Questão 1

P

	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	0	1	1	0
A_1	0	0	0	1
A_2	0	1	1	1
A_3	1	0	0	0

enganei-me aqui

S

	A_0	A_1	A_2	A_3
B_0	0	1	1	0
B_1	1	1	0	1

R

	B_0	B_1
A_0	1	0
A_1	0	1
A_2	1	0
A_3	0	1

1.
uma relação é injetiva se no máximo tiver um "1" por linha

Logo, apenas R é injetivo.

2.
Para uma relação X ser difuncional, então

$$X = X \cdot X^{\circ} \cdot X.$$

$P \cdot P^{\circ} \cdot P$

	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	0	1	1	1
A_1	0	1	1	1
A_2	0	1	1	1
A_3	1	0	0	0

$S \cdot S^{\circ} \cdot S$

	A_0	A_1	A_2	A_3
B_0	1	1	1	1
B_1	1	1	1	1

$R \cdot R^{\circ} \cdot R$

	B_0	B_1
A_0	1	0
A_1	0	1
A_2	1	0
A_3	0	1

Logo, apenas R é difuncional.

$$R \cdot in = [\bot, \pi_1 \cup R \cdot \pi_2]$$

$\equiv \{ (F1) \}$

$$R \cdot [nil, cons] = [\bot, \pi_1 \cup R \cdot \pi_2]$$

$\equiv \{ (5.114) \}$

$$\begin{cases} R \cdot [nil, cons] \cdot i_1 = \bot \\ R \cdot [nil, cons] \cdot i_2 = \pi_1 \cup R \cdot \pi_2 \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.114) \}$

$$\begin{cases} R \cdot nil = \bot \\ R \cdot cons = \pi_1 \cup R \cdot \pi_2 \end{cases}$$

$\equiv \{$ Pointwise $; (F2); (F3) \}$

$$\begin{cases} a \; R \; [] = a \perp l \\ a \; R \; (h:t) = a \; (\pi_1 \cup R \cdot \pi_2) \; (h,t) \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.57) ; \pi_1 (a,b) = a \; ; \; \pi_2 (a,b) = b \}$

$$\begin{cases} a \; R \; [] = False \\ a \; R \; (h:t) = (a = h) \vee (a \; R \; t) \end{cases}$$

Ou seja, $a R x$ se $\underline{a}$ está presente na lista $\underline{x}$

3.

$$((R - S) \cup S) - S = R - S$$

$:: \{ I \sqsupset \}$

$$((R - S) \cup S) - S \subseteq X$$

$\equiv \{ (5.138) \}$

$$(R - S) \cup S \subseteq X \cup S$$

$\Leftarrow \{ (5.81) \}$

$$\begin{cases} R - S \subseteq X \\ S \subseteq S \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.21) \}$

$$R - S \subseteq X$$

4.

Provar que Q é simples (assumindo que R e S também são)

Q é simples

$\equiv \{ \text{def } Q \}$

$R \cdot f^\circ \cup S \cdot g^\circ$ é simples

$\equiv \{ (5.70) \}$

$$\begin{cases} R \cdot f^\circ \text{ é simples} \\ S \cdot g^\circ \text{ é simples} \\ R \cdot f^\circ \cdot (S \cdot g^\circ)^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.36); (5.33); (5.85); (5.16); (5.15) \}$

$$\begin{cases} R \cdot f^\circ \cdot f \cdot R^\circ \subseteq id \\ S \cdot g^\circ \cdot g \cdot S^\circ \subseteq id \\ R \cdot f^\circ \cdot g \cdot S^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ f^\circ \cdot g = \perp$, porque não existem duas chaves K e K' : $f\,K = g\,K'$ $\}$

↳ tinha dito que f, g eram injetivas

$$\begin{cases} R \cdot f^\circ \cdot f \cdot R^\circ \subseteq id \\ S \cdot g^\circ \cdot g \cdot S^\circ \subseteq id \\ R \cdot \perp \cdot S^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.26); (5.25); (5.32) \}$

$$\begin{cases} R \cdot \ker f \cdot R^\circ \subseteq id \\ S \cdot \ker g \cdot S^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\Leftarrow \{$ f e g são injetivas: raising lower side $\}$

$$\begin{cases} R \cdot id \cdot R^\circ \subseteq id \\ S \cdot id \cdot S^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.13); (5.33); (5.36) \}$

$$\begin{cases} R \text{ é simples} \\ S \text{ é simples} \end{cases}$$

$\equiv \{$ enunciado $\}$

True

Questão 5

$(R+S)+S$

$\equiv \{ \text{def} + \}$

$S \cup (R+S) \cap \bot / S^\circ$

$\equiv \{ \text{def} + \}$

$S \cup (S \cup R \cap \bot / S^\circ) \cap \bot / S^\circ$

$\equiv \{ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) ;\ A \cap A = A \}$

$S \cup S \cap \bot / S^\circ \cup R \cap \bot / S^\circ$

$\equiv \{ A \cup (A \cap B) = A \}$

$S \cup R \cap \bot / S^\circ$

$\equiv \{ \text{def} + \}$

$R+S$

Questão 6

$P \cdot \Phi_p \subseteq \Phi_q \cdot T$

$\equiv \{ (5.157) \}$

$P \subseteq (\Phi_q \cdot T) / \Phi_p$

$\equiv \{ \text{Pointwise} ; (5.158) ; (5.11) \}$

$\langle \forall s, s' :: s P s' \Rightarrow \langle \forall t : s' \Phi_p t : \langle \exists u : s \Phi_q u : u T t \rangle \rangle \rangle$

$\equiv \{ \text{def } \Phi_p ; (A.1), (A.7) \}$

$\langle \forall s, s', t : s P s' \wedge s' = t \wedge p\, t : \langle \exists u : s = u \wedge q\, u : u T t \rangle \rangle$

$\equiv \{ (A.5), (A.6) \}$

$\langle \forall s, s' : sPs' \wedge p\,s' : q\,s \rangle$

$\equiv \{ (A.1) \}$

$\langle \forall s, s' : p\,s' : sPs' \Rightarrow q\,s \}$

Ou seja, para quaisquer dois estados s, s', se s' satisfaz a pré condição p ($p\,s'$) então, se o programa terminar (sPs'), s satisfaz a pós condição ($q\,s$).

Questão 7

$z \leq x \div y$

$\equiv \{ (F6);$ como $x \geq y$, $(F9) \}$

$z \times y \leq (x \ominus y) + y$

$\equiv \{ (F7) \}$

$(z \times y) \ominus y \leq x \ominus y$

$\equiv \{$ comutatividade do produto; $(F8) \}$

$(z \ominus 1) \times y \leq x \ominus y$

$\equiv \{ (F6); (F7);$ comutatividade da adição $\}$

$z \leq 1 + (x \ominus y) \div y$

....