Parte A

Questão 1

f é injetiva

$\equiv \{ (5.36) ; (5.32) ; (5.85) \}$

$f^\circ \cdot f \subseteq id$

$\equiv \{ \leqslant$ é antisimétrica $; (5.88) \}$

$f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant \cap \leqslant^\circ$

$\equiv \{ (5.58) \}$

$f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant \;\wedge\; f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant^\circ$

$\equiv \{ (5.136) ; (5.16) ; (5.15) ; p \wedge p = p \}$

$f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant$

$\equiv \{$ Pointwise $; (5.17) \}$

$f\, a = f\, b \Rightarrow a \leqslant b$

Questão 2

$\neg(R \cup S) = (\neg R) \cap (\neg S)$

$:: \{ II \}$

$X \subseteq (\neg R) \cap (\neg S)$

$\equiv \{ (5.59) \}$

$X \subseteq \neg R \;\wedge\; X \subseteq \neg S$

$\equiv \{$ Definition $\neg \}$

$X \subseteq R \Rightarrow \bot \;\wedge\; X \subseteq S \Rightarrow \bot$

(*)

$\equiv \{ (5.148) \}$

$R \cap X \subseteq \bot \;\wedge\; S \cap X \subseteq \bot$

$\equiv \{ A \cap B = B \cap A \}$

$X \cap R \subseteq \bot \;\wedge\; X \cap S \subseteq \bot$

$\equiv \{ (5.148) ;$ Definition $\neg \}$

$R \subseteq \neg X \;\wedge\; S \subseteq \neg X$

$\equiv \{ (5.59) \}$

$R \cup S \subseteq \neg X$

$\equiv \{$ Definition $\neg ; (5.148) \}$

$X \cap (R \cup S) \subseteq \bot$

$\equiv \{A \cap B = B \cap A;\ (5.148)\}$

$X \subseteq R \cup S \Rightarrow \bot$

$\equiv \{\text{Definition } \neg\}$

$X \subseteq \neg(R \cup S)$

Questão 3

$P = T + R =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	1	1	0	1	0
b_2	1	1	0	1	0
b_3	1	0	1	1	1
b_4	1	0	1	1	0

$Q = R + (\underline{b_4} \cdot \underline{a_2}^{\circ}) =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	0	0	0	0	0
b_2	0	0	0	0	0
b_3	0	0	1	0	1
b_4	0	1	1	0	0

(a) Ser inteira é ter pelo menos um "1" em cada coluna.
Logo, P é inteiro, mas Q não é.

(b) Ser simples é ter no máximo um "1" em cada coluna
Logo, P e Q não são simples.

(c) Ser sobrejetivo é ter pelo menos um "1" em cada linha.
Logo, P é sobrejetivo, mas Q não é.

Questão 4

não sei quais são os 3 invariantes dados

- O mesmo eleitor nunca vota duas vezes, isto é, vota num e num só instante.

$$\langle \forall x,y :: \langle \exists z :: (x V' z \vee x V z) \wedge (y V' z \vee y V z) \rangle \wedge \pi_1 x = \pi_1 y \Rightarrow \pi_2 x = \pi_2 y \rangle$$

$\equiv \{$

$$\langle \forall x,y :: \langle \exists z : x(V' \cup V) z : z (V' \cup V)^\circ y \rangle \wedge \pi_1 x = \pi_1 y \rangle \Rightarrow \pi_2 x = \pi_2 y \rangle$$

$\equiv \{$

$$\langle \forall x,y :: x(V' \cup V) \cdot (V' \cup V)^\circ y \wedge x \pi_1^\circ \cdot \pi_1 y \Rightarrow \pi_2^\circ \cdot \pi_2 \rangle$$

$\equiv$

$$((V' \cup V) \cdot (V' \cup V)^\circ) \cap \frac{\pi_1}{\pi_1} \subseteq \frac{\pi_2}{\pi_2}$$

$\equiv$

Parte B

Questão 5

$$t : ((A^*)^* \leftarrow A^*) \leftarrow \mathbb{N}_0^*$$

$$R_t = R_{((A^*)^* \leftarrow A^*) \leftarrow \mathbb{N}_0^*}$$

$$\equiv \quad R_t = ((R_A^*)^* \leftarrow R_A^*) \leftarrow id$$

$$\equiv \{ R_A := R \}$$

$$R_t = ((R^*)^* \leftarrow R^*) \leftarrow id$$

—— // ——

FT

$$splitPlaces \, (R_t) \, splitPlaces$$

$$\equiv \{ R_t \text{ calulado} \}$$

$$splitPlaces \, (((R^*)^* \leftarrow R^*) \leftarrow id) \, splitPlaces$$

$$\equiv \{ \text{Reynolds Arrow} \}$$

$$splitPlaces \cdot id \subseteq ((R^*)^* \leftarrow R^*) \cdot splitPlaces$$

$$\equiv \{ \text{shunting} \}$$

$$id \subseteq splitPlaces^\circ \cdot ((R^*)^* \leftarrow R^*) \cdot splitPlaces$$

$\equiv \{$ Pointwise; $x \, id \, y \equiv x = y \}$

$$m = n \Rightarrow (splitPlaces \; m)((R^*)^* \leftarrow R^*)(splitPlaces \; n)$$

$\equiv \{$ Reynolds arrow $\}$

$$(splitPlaces \; n) \cdot R^* \subseteq (R^*)^* \cdot splitPlaces \; n$$

$\equiv \{$ shunting $\}$

$$R^* \subseteq (splitPlaces \; n)^\circ \cdot (R^*)^* \cdot (splitPlaces \; n)$$

$\equiv \{$ Pointwise $\}$

$$y \, R^* \, x \Rightarrow (splitPlaces \; n \; y) \, (R^*)^* \, (splitPlaces \; n \; x)$$

—— // ——

$$R := f$$

$$y = map \; f \; x \Rightarrow (splitPlaces \; n \; y) = map \, (map \; f) \, (splitPlaces \; n \; x)$$

$\equiv \{ .. \}$

$$splitPlaces \; n \; (map \; f \; x) = map \, (map \; f) \, (splitPlaces \; n \; x)$$

Questão 6

$$\phi_p \subseteq R^\circ \cdot \phi_q \cdot R$$

$\equiv \{ (5.19); (5.11); (5.14) \}$

$$\langle \forall \; a, a' :: a \, \phi_p \, a' \Rightarrow \langle \exists \; b : b \, R \, a : \langle \exists \; b' : b \, \phi_q \, b' : b' \, R \, a' \rangle \rangle \rangle$$

$\equiv \{ (A.8) \}$

$$\langle \forall \; a, a' :: a \, \phi_p \, a' \Rightarrow \langle \exists \; b, b' : b \, R \, a \wedge b \, \phi_q \, b' : b' \, R \, a' \rangle \rangle$$

$\equiv \{ \text{def } \Phi \,;\, (5.56) \,;\, (5.49), (5.17) \,;\, (5.40) \}$

$$\langle \forall a, a' : a = a' \wedge pa : \langle \exists b, b' : bRa \wedge b = b' \wedge qb : b'Ra' \rangle \rangle$$

$\equiv \{ (A.1) ; (A5) ; (A.2) \times 2 ; (A6) \}$

$$\langle \forall a :: pa \Rightarrow \langle \exists b : bRa : qb \rangle \rangle$$

Isto é, para qualquer elemento $\underline{a}$ do domínio de R (A) se a pré-condição $\underline{p}$ é verdadeira para esse elemento, então existe um $\underline{b}$, no conjunto de chegada de R (B), tal que se está relacionado com $\underline{a}$ com R, então a pós-condição $\underline{q}$ é verdadeira para esse valor de $\underline{b}$.

Resumindo, objetos que respeitem a pré-condição estão relacionados por R com imagens que respeitam a pós-condição.

Questão 7

$R = i_1^\circ \cdot X$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "i_1"] & A \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "X"] \\
& B+C \arrow[ul, bend left, "i_1^\circ"]
\end{tikzcd}$$

Analogamente,

$S = i_2^\circ \cdot X$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "i_2"] & A \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "X"] \\
& B+C \arrow[ul, bend left, "i_2^\circ"]
\end{tikzcd}$$

X é simples

$\equiv \{ (5.36); (5.33); (5.85); \ p \wedge p = p \}$

$$\begin{cases} X \cdot X^\circ \subseteq id \\ X \cdot X^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$R = i_1^\circ \cdot X$

$\equiv \{ \text{shunting} \}$ (A)

$i_1 \cdot R = X$

$S = i_2^\circ \cdot X$

$\equiv \{ \text{shunting} \}$ (B)

$i_2 \cdot S = X$

$\equiv \{ (A); (B) \}$

$$\begin{cases} (i_1 \cdot R) \cdot (i_1 \cdot R)^\circ \subseteq id \\ (i_2 \cdot S) \cdot (i_2 \cdot S)^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ \text{Contravariance} \}$

$$\begin{cases} i_1 \cdot R \cdot R^\circ \cdot i_1^\circ \subseteq id \\ i_2 \cdot S \cdot S^\circ \cdot i_2^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.46); (5.47) \}$

$$\begin{cases} R \cdot R^\circ \subseteq i_1^\circ \cdot i_1 \\ S \cdot S^\circ \subseteq i_2^\circ \cdot i_2 \end{cases}$$

$\Leftarrow \{ (5.32);$ i_1 e i_2 são funções, logo são simples: lowering upper side $\}$

$$\begin{cases} R \cdot R^\circ \subseteq id \\ S \cdot S^\circ \subseteq id \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.36); (5.33); (5.85) \}$

R e S são simples