CSI - Teste 19/20

Parte A

Questão 1

1.

$$A \xleftarrow{R} A$$

$$C \xleftarrow{S} B$$

$$B \xleftarrow{Q} B$$

$$A \xleftarrow{M} A$$

$$B \xleftarrow{P} A$$

P.e. R e M

Repare-se que R é coreflexivo, i.e., $R \subseteq id$ porque $\{(A2, A2), (A0, A0)\} \subseteq id$, contudo M não o é porque $A3 \; M \; A2$, mas $A3 \neq A2$.

2.

S é uma função porque o seu domínio (B) estão todos relacionados com algum C por S. Contudo C_2 está relacionado por S tanto com B1 como com B0, logo não é injetiva

3.

R é injetiva (já que $R \subseteq id$) mas não é simples porque p.e. A1 não está relacionado com nenhum A.

4.

Uma relação de equivalência tem de ser simétrico ($X = X^\circ$), transitivo ($X \cdot X \subseteq X$) e reflexivo ($id \subseteq X$).

É o Q:

Vejamos:

Q

	B0	B1	B2
B0	1	1	0
B1	1	1	0
B2	0	0	1

Q°

	B0	B1	B2
B0	1	1	0
B1	1	1	0
B2	0	0	1

$Q \cdot Q$

	B0	B1	B2
B0	1	1	0
B1	1	1	0
B2	0	0	1

$id \subseteq Q = Q^\circ = Q \cdot Q$, Logo Q é uma equivalência

Questão 2 ?

podemos dar bind da relação genérica X se colocarmos uma implicação

$$R = R \backslash R$$

$\equiv \{ \text{II}; (5.159); p \wedge p = p \}$

$$\begin{cases} X \subseteq R \Leftrightarrow X \cdot R \subseteq R \\ X \subseteq R \Leftrightarrow X \cdot R \subseteq R \end{cases}$$

$\Rightarrow \{ X := id$ e $X := R$ na primeira e segunda equivalência $\}$

$$\begin{cases} id \subseteq R \Leftrightarrow R \subseteq R \\ R \subseteq R \Leftrightarrow R \cdot R \subseteq R \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.21)\ A \Leftrightarrow True \equiv A \}$

$$\begin{cases} id \subseteq R \\ R \cdot R \subseteq R \end{cases}$$

$\equiv \{ p \wedge True = p$, para $p = (R/R) \cdot R \subseteq R$, que se verifica por cancelamento-/ ; universal-/ $\}$

$$\begin{cases} id \subseteq R \wedge (R/R) \cdot R \subseteq R \\ R \subseteq R/R \end{cases}$$

$\Rightarrow \{$ monotonia da composição com R/R; transitividade $\}$

passo intermédio

$$\begin{cases} \underline{id \subseteq R} \wedge (R/R) \subseteq R \wedge \underline{R \subseteq id} \\ \end{cases}$$

transitividade

$$\Rightarrow \begin{cases} id \subseteq id \wedge R/R \subseteq R \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} R/R \subseteq R \\ R \subseteq R/R \end{cases}$$

$\equiv \{$ "ping-pong" $\}$

$$R = R/R$$

Questão 3

R é simétrica

$\equiv \{ (5.87) \}$

$R \subseteq R^{\circ}$

$\equiv \{ \text{def } R \}$

$$\frac{(-1) \cdot sq}{sq} \subseteq \left(\frac{(-1) \cdot sq}{sq} \right)^{\circ}$$

$\equiv \{ (5.51) ; (5.49) \}$

$sq^{\circ} \cdot (-1) \cdot sq \subseteq ((-1) \cdot sq)^{\circ} \cdot sq$

$\equiv \{ (5.16) \}$

$sq^{\circ} \cdot (-1) \cdot sq \subseteq sq^{\circ} \cdot (-1)^{\circ} \cdot sq$

$\Leftarrow \{ (5.78) \}$

$$\begin{cases} sq^{\circ} \subseteq sq^{\circ} \\ (-1) \subseteq (-1)^{\circ} \\ sq \subseteq sq \end{cases}$$

$\equiv \{ (5.21) \}$

$(-1) \subseteq (-1)^{\circ}$

$\equiv \{ y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y \}$

(-1) é simétrica

Questão 4

$$R \dagger \perp = R$$

$:: \{II\}$

$X \subseteq \perp \cup R \cap \perp / \perp^{\circ}$

$\equiv \{5.69\}$

$X \subseteq R \cap \perp / \perp^{\circ}$

$\equiv \{(5.58);\ (5.162)\}$

$X \subseteq R \ \wedge\ X \cdot \perp \subseteq \perp$

$\equiv \{(5.26);\ (5.27)\}$

$X \subseteq R$

— // —

$$R \dagger T = T$$

$:: \{II\}$

$X \subseteq T \cup R \cap \perp / T^{\circ}$

$\equiv \{(5.68)\}$

$X \subseteq T$

$\equiv$

Parte B

Questão 5

$$S \cdot R^\circ \subseteq \neg id$$

$\equiv \{(5.11); (5.19); \; b(\neg id)a \equiv b \neq a\}$

$$\langle \forall b,b' :: \langle \exists a : b'Sa : aR^\circ b \rangle \Rightarrow b' \neq b \rangle$$

$\equiv \{ p \wedge True = p ; (A.2) \times 2 ; (5.14) \}$

$$\langle \forall b,b' : \langle \exists a : bRa : b'Sa \rangle : b' \neq b \rangle$$

$\equiv \{ (A.13) \}$

$$\langle \forall a,b : bRa : \langle \forall b' : b'Sa : b' \neq b \rangle \rangle$$

Extra

$\equiv \{ A.7 \}$

$$\langle \forall a,b,b' \; bRa \wedge b'Sa : b' \neq b \rangle$$

$\equiv \{ 5.101 \}$

$$\langle \forall a,b,b' : (b,b') \langle R,S \rangle a : b' \neq b \rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{Alumo} \arrow[r, "\text{name}"] \arrow[dr, "OpI"] \arrow[d, "OpII"'] & \text{Nome} \\
\text{Perfil} & \text{Perfil}
\end{tikzcd}
$$

$$\text{Perfil} \xrightarrow{r} \text{Nome}$$

$$r = \text{name} \cdot (OpII \cup OpI)^{\circ}$$

Questão 6

$$t = ((A^* \times A^*) \leftarrow A^*) \leftarrow N_0$$

$$R_t = R_{(A^* \times A^*) \leftarrow A^* \leftarrow N_0}$$

$$\equiv$$

$$R_t = \left(R_{(A^* \times A^*)} \leftarrow R_{A^*}\right) \leftarrow id$$

$$\equiv$$

$$R_t = \left(R_A^* \times R_A^* \leftarrow R_A^*\right) \leftarrow id$$

$$\equiv \{ R_A := R \}$$

$$R_t = (R^* \times R^* \leftarrow R^*) \leftarrow id$$

FT

$$splitAt\ (R_t)\ splitAt$$

$\equiv$ { R_t calculado }

$$splitAt\ ((R^* \times R^* \leftarrow R^*) \leftarrow id)\ splitAt$$

$\equiv$ { Reynolds-arrow }

$$splitAt \cdot id \subseteq (R^* \times R^* \leftarrow R^*) \cdot splitAt$$

$\equiv$ { shunting }

$$id \subseteq splitAt^\circ \cdot (R^* \times R^* \leftarrow R^*) \cdot splitAt$$

$\equiv$ { Pointwise }

$$n = m \Rightarrow (splitAt\ n)(R^* \times R^* \leftarrow R^*)(splitAt\ m)$$

$\equiv$ { Reynolds-arrow }

$$splitAt\ n \cdot R^* \subseteq (R^* \times R^*) \cdot splitAt\ n$$

$\equiv$ { shunting }

$$R^* \subseteq (splitAt\ n)^\circ \cdot (R^* \times R^*) \cdot splitAt\ n$$

$\equiv$ { Pointwise }

$$x' R^* x \Rightarrow (splitAt\ n\ x')(R^* \times R^*)(splitAt\ n\ x)$$

— // —

$R := \phi_p$

$$x'\ \phi_p\ x \Rightarrow (splitAt\ n\ x')(\phi_p^* \times \phi_p^*)(splitAt\ n\ x)$$

tem-se que $x' \phi_p^* x \Leftrightarrow x' = x \wedge \text{all } p\, x$

$$x' \phi_p^* x \Rightarrow (\text{splitAt } n\, x')(\phi_p^* \times \phi_p^*)(\text{splitAt } n\, x)$$

$\equiv \{ \dots \}$

$$\text{all } p\, x \Rightarrow (x_1, x_2)(\phi_p^* \times \phi_p^*)(x_1, x_2) \text{ where } (x_1, x_2) = \text{splitAt } n\, x$$

$\equiv \{ \dots \}$

$$\text{all } p\, x \Rightarrow x_1\, \phi_p^* \wedge x_2\, \phi_p^*\, x_2 \text{ where } (x_1, x_2) = \text{splitAt } n\, x$$

$\equiv \{ \dots \}$

$$\text{all } p\, x \Rightarrow \text{all } p\, x_1 \wedge \text{all } p\, x_2 \text{ where } (x_1, x_2) = \text{splitAt } n\, x$$