Statistinės duomenų analizės praktinės užduotys

2017

5. **Pasikliovimo intervalai.**

```
library(knitr)
set.seed(42)
n <- 300
```

(a) Sukonstruoti 0.95 (0.90) - pasikliautinų intervalą *normalaus skirstinio* vidurkiui, naudojant imtį `norm1`

```
norm1 <- rnorm(n, mean=65, sd=11) # Dėstytojo sprendiniuose irgi imta 11, o ne srqt(11)
```

Tarkime, kad $X_1, \ldots, X_n$ yra imtis, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vidurkio lygio $1-\alpha$ pasikliovimo intervalą

$$(\underline{\mu}, \overline{\mu}) = \bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

```
mu_u95 <- mean(norm1) + qt(1 - .05/2, n - 1) * sd(norm1) / sqrt(n)
mu_l95 <- mean(norm1) - qt(1 - .05/2, n - 1) * sd(norm1) / sqrt(n)
mu_u90 <- mean(norm1) + qt(1 - 0.1/2, n - 1) * sd(norm1) / sqrt(n)
mu_l90 <- mean(norm1) - qt(1 - 0.1/2, n - 1) * sd(norm1) / sqrt(n)

CI <- rbind(c(mu_l90, mu_u90), c(mu_l95, mu_u95))
colnames(CI) <- c("$\\underline{\\mu}$","$\\overline{\\mu}$")
rownames(CI) <- c("0.90","0.95")
kable(CI)
```

	$\underline{\mu}$	$\overline{\mu}$
0.90	63.72591	65.79495
0.95	63.52655	65.99431

(b) Sukonstruoti 0.95 (0.90) - pasikliautinų intervalą *normalaus skirstinio* dispersijai, naudojant tą pačią imtį `norm1`.

$1-\alpha$ pasikliovimo intervalas *normalaus skirstinio* dispersijai yra

$$\underline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},$$

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}.$$

```
sigma_l95 <- (n - 1) * var(norm1) / qchisq(1 - .05/2, n - 1)
sigma_u95 <- (n - 1) * var(norm1) / qchisq(1 - (1 - .05/2), n - 1)
sigma_l90 <- (n - 1) * var(norm1) / qchisq(1 - .1/2, n - 1)
sigma_u90 <- (n - 1) * var(norm1) / qchisq(1 - (1 - .1/2), n - 1)

CI <- rbind(c(sigma_l90, sigma_u90), c(sigma_l95, sigma_u95))
colnames(CI) <- c("$\\underline{\\sigma^2}$","$\\overline{\\sigma^2}$")
rownames(CI) <- c("0.90","0.95")
kable(CI)
```

	$\underline{\sigma^2}$	$\overline{\sigma^2}$
0.90	103.6149	135.6556
0.95	101.0998	139.3838

(c) Bandant sportinį lėktuvą, gautos šios jo maksimalaus greičio (m/s) reikšmės:

`422.2; 418.7; 425.6; 420.3; 425.8; 423.1; 431.5; 428.2; 438.3; 434.0;    411.3; 417.2; 413.5; 441.3; 423.0.`

Tarę, kad buvo stebimas *normalus a. d.*, raskite maksimalaus greičio vidurkio ir vidutinio kvadratinio nuokrypio taškinius įvertinius ir 0.95 pasikliovimo intervalus.

```r
dat  <- c(422.2, 418.7, 425.6, 420.3, 425.8,
          423.1, 431.5, 428.2, 438.3, 434.0,
          411.3, 417.2, 413.5, 441.3, 423.0)

estimates <- c(mean(dat), var(dat))
names(estimates) <- c("$\\hat{\\mu}$", "$\\hat{\\sigma^2}$")
kable(estimates)
```

$\hat{\mu}$	424.93333
$\hat{\sigma^2}$	73.92952

```r
mu_u <- mean(dat) + qt(1 - 0.05/2, n - 1) * sd(dat) / sqrt(n)
mu_l <- mean(dat) - qt(1 - 0.05/2, n - 1) * sd(dat) / sqrt(n)
sigma_l <- (n - 1) * var(dat) / qchisq(1 - .05/2, n - 1)
sigma_u <- (n - 1) * var(dat) / qchisq(1 - (1 - .05/2), n - 1)

CI <- rbind(c(mu_l, mu_u), c(sigma_l, sigma_u))
colnames(CI) <- c("apat.","virs.")
rownames(CI) <- c("$\\mu$","$\\sigma^2$")
kable(CI)
```

	apat.	virs.
μ	423.95642	425.91025
σ^2	63.37525	87.37386

(d) Sukonstruoti 0.95 - pasikliautinų intervalą eksponentinio skirstinio vidurkiui, naudojant imtį `eksp`.

```r
eksp <- rexp(n, rate=1 / 65)
```

$1 - \alpha$ pasikliovimo intervalas *eksponentinio skirstinio* vidurkiui yra

$$\underline{\theta} = \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)},$$

$$\overline{\theta} = \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)},$$

```r
lambda_l <- 2*n * mean(eksp) / qchisq(1 - .05/2, 2*n)
# [1] 66.70573
lambda_u <- 2*n * mean(eksp) / qchisq(1 - (1 - .05/2), 2*n)
```

```r
# [1] 83.66272

CI <- c(lambda_l, lambda_u)
names(CI) <- c("$\\underline{\\lambda}$","$\\overline{\\lambda}$")
kable(CI)
```

$\underline{\lambda}$	59.86283
$\overline{\lambda}$	75.08031

(e) Laikas nuo užsakymo pateikimo iki jo gavimo (pristatymo laikas) yra pasiskirstęs pagal *eksponentinį skirstinį*. Lentelėje pateikiamos atsitiktinai parinktų užsakymų pristatymo laikas (i - eilės nr., X_i - laikas).

i	X_i	i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	10	6	7	11	10	16	7
2	10	7	11	12	6	17	6
3	6	8	12	13	13	18	16
4	11	9	12	14	8	19	9
5	8	10	6	15	12	20	5

Raskite vidutinio pristatymo laiko taškinį įvertinį ir 0.9 pasikliovimo intervalą.

```r
X <- c(10, 10, 6, 11, 8,
       7, 11, 12, 12, 6,
       10, 6, 12, 8, 12,
       7, 6,  16, 9, 5)

mean_hat <- mean(X)
names(mean_hat) <- "$\\hat{\\lambda}$"
kable(mean_hat)
```

$\hat{\lambda}$	9.2

```r
lambda_l <- 2*length(X) * mean(X) / qchisq(1 - .1/2, 2*length(X))
lambda_u <- 2*length(X) * mean(X) / qchisq(1 - (1 - .1/2), 2*length(X))

CI <- c(lambda_l, lambda_u)
names(CI) <- c("$\\underline{\\lambda}$","$\\overline{\\lambda}$")
kable(CI)
```

$\underline{\lambda}$	6.599893
$\overline{\lambda}$	13.881919

(f) Sukonstruoti 0.95 pasikliautinį intervalą Bernulio skirstinio parametrui p, naudojant imtį `ber`.

```r
ber <- rbinom(n, size=1, prob=0.4)
```

$1-\alpha$ pasikliovimo intervalas *Bernulio skirstinio parametrui* p yra $(\underline{p}, \overline{p})$, kur

$$\underline{p} = 1 - \beta_{\alpha/2}(n-T+1, T), (T = 1, ..., n),$$

$$\overline{p} = 1 - \beta_{1-\alpha/2}(n-T, T+1), (T = 0, ..., n-1),$$

čia $T = n\bar{X}$, $\beta_\alpha(a,b)$ yra *beta skirstinio* kritinės reikšmės. Jei $T = 0$, tai $\underline{p} = 0$. Jei $T = 0$, tai $\overline{p} = 1$.

```
p_l <- 1 - qbeta(1 -.05/2, n - n*mean(ber) + 1, n*mean(ber))
p_u <- 1 - qbeta(1 - (1 - .05/2), n - n*mean(ber), n*mean(ber) + 1)

CI <- c(p_l, p_u)
names(CI) <- c("$\\underline{p}$","$\\overline{p}$")
kable(CI)
```

$\underline{p}$	0.3280441
$\overline{p}$	0.4409513

(g) Bandat kiekvieną iš 10 prietaisų, nebuvo rasta nė vieno defektinio. Raskite tikimybės, kad prietaisas defektinis, pasikliovimo intervalą, kai pasikliovimo lygmenys yra 0.8, 0.9, 0.99. Išspręskite uždavinį, tarę, kad buvo rasti trys defektingi gaminiai.

```
CI <- c()

for (alpha in  c(.2, .1, .01)) {
  p_l <- 1 - qbeta(1 -alpha/2, 10 - 3 + 1, 3)
  p_u <- 1 - qbeta(1 - (1 - alpha/2), 10 - 3, 3 + 1)
  CI  <- rbind(CI, c(p_l, p_u))
}
CI <- cbind(CI, c(.8, .9, .99))
colnames(CI) <- c("$\\underline{p}$","$\\overline{p}$", "$1 - \\alpha$")
kable(CI)
```

$\underline{p}$	$\overline{p}$	$1-\alpha$
0.1158253	0.5517308	0.80
0.0872644	0.6066242	0.90
0.0370072	0.7351140	0.99

(h) Sukonstruoti 0.95 pasikliautinų intervalą Puasono skirstinio vidurkiui, naudojant imtį `puas`.

```
puas <- rpois(n, lambda=65)
```

$1-\alpha$ pasikliovimo intervalas *Puasono skirstinio* parametrui *lambda* yra $(\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, kur

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2T), (T = 1, 2, ...),$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2T+2),$$

o $T = n\bar{X}$. Jei $T = 0$, tai $\underline{\lambda} = 0$.

```
lambda_l <- 1 / (2*n) * qchisq(1 - (1 - .05/2), 2 * sum(puas))
lambda_u <- 1 / (2*n) * qchisq(1 - .05/2, 2 * sum(puas) + 2)

CI <- c(lambda_l, lambda_u)
names(CI) <- c("$\\underline{\\lambda}$", "$\\overline{\\lambda}$")
kable(CI)
```

$\underline{\lambda}$	64.97131
$\overline{\lambda}$	66.81169

(i) Lentelėje pateikti skaičiai m_i tokių vienodo ploto ($0.25\ km^2$) pietinės Londono dalies rajonų, į kuriuos Antrojo pasaulinio karo metu pataikė po i lėktuvų, sviedinių.

i	0	1	2	3	4	5	Σ
m_i	229	211	93	35	7	1	576

Tarę, kad buvo stebimas *Puasono a. d.*, raskite parametro λ taškinį įvertinį, ir 0.95 pasikliovimo intervalą.

```
m <- c(229, 211, 93, 35, 7, 1)

lambda_hat  <- mean(m)
names(lambda_hat) <- "$\\hat{\\lambda}$"
kable(lambda_hat)
```

$\hat{\lambda}$	96

```
lambda_l <- 1 / (2*length(m)) * qchisq(1 - (1 - .05/2), 2 * sum(m))
lambda_u <- 1 / (2*length(m)) * qchisq(1 - .05/2, 2 * sum(m) + 2)

CI <- c(lambda_l, lambda_u)
names(CI) <- c("$\\underline{\\lambda}$", "$\\overline{\\lambda}$")
kable(CI)
```

$\underline{\lambda}$	88.31918
$\overline{\lambda}$	104.16997

Padaryta su R version 3.4.2 (2017-09-28), x86_64-pc-linux-gnu.