Statistinės duomenų analizės praktinės užduotys

2017

9. Dispersinė analizė.

(a) Vienfaktorė dispersinė analizė: kelių normaliųjų vidurkių palyginimas. Iš darbininkų, aptarnaujančių didelės įmonės surinkimo konvejerį, buvo atrinkti 4 darbininkai ir kiekvienam iš jų buvo užfiksuotas tam tikros detalės surinkimo laikas.

Darbininkas								
1	24,2	22,2	24,5	21,1	22,0			
2	19,4	21,1	16,2	21,2	21,6	17,9	19,6	
3	19,0	23,1	23,8	22,8				
4	19,9	15,7	15,2	19,8	18,9	16,1	16,2	18,5

Ar skiriasi darbininkai pagal detalės surinkimo laiką?

```
dat.a <- matrix(</pre>
                c(24.2, 1,
                            22.2, 1, 24.5, 1,
                                                 21.1, 1,
                  19.4, 2, 21.1, 2, 16.2, 2,
                                                 21.2, 2,
                                                           21.6, 2,
                  17.8, 2, 19.6, 2, 19.0, 3, 23.1, 3,
                                                           23.8, 3,
                  22.8, 3, 19.9, 4, 15.7, 4, 15.2, 4,
                                                          19.8, 4,
                  18.9, 4, 16.1, 4, 16.2, 4, 18.5, 4),
                byrow=TRUE,
                nrow=24,
                ncol=2
dat.a <- as.data.frame(dat.a)</pre>
colnames(dat.a) <- c("sur_laik", "darb")</pre>
aov.a <- aov(darb~sur laik, data = dat.a)
summary(aov.a)
               Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## sur_laik
                          11.037
                                   11.79 0.00237 **
                1 11.04
```

```
## sur_laik    1 11.04 11.037 11.79 0.00237 **
## Residuals    22 20.59    0.936
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

 $pv = 0.00237 < \alpha = 0.05$, atmetama H_0 , grupėse vidurkiai skiriasi. Duomenys leidžia teigti, jog darbininkai nevienodai greitai surenka detales.

(b) Vienfaktorė dispersinė analizė: kelių normaliųjų vidurkių palyginimas. (ČM II.2.2) Norėdamas rasti optimalų darbo režimą, firmos prezidentas trijuose vienodo našumo padaliniuose (kiekviename dirba po 6 darbuotojus) išbandė skirtingas 48 valandų darbo savaites: 5 dienų, 4 dienų ir 3.5 dienos. Eksperimentas vyko vienus metus. Lentelėje pateikta, kiek per vieną savaitę vidutiniškai kiekvienas darbuotojas pagamino detalių.

5 dienos	4 dienos	3,5 dienos
360	340	371
302	350	365
333	306	303

5 dienos	4 dienos	3,5 dienos
351	337	300
329	371	336
340	365	365

Ar kuris nors savaitės darbo režimas davė statistiškai reikšmingai daugiau naudos nei likusieji?

```
## Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## as.factor(dienos) 2 243 121.7 0.184 0.834
## Residuals 15 9938 662.5
```

 $pv = 0.834 > \alpha = 0.05$, neatmetama H_0 , grupėse vidurkiai nesiskiria. Joks darbo režimas statistiškai reikšmingiau daugiau naudos nedavė.

(c) Vienfaktorė dispersinė analizė: kontrastai. (ČM II.2.8) Kultūros savitumų tyrinėtojas skaičiavo, kiek gestų per dviejų valandų pranešimą padarė skirtingų šalių pranešėjai. Ar galima teigti, kad vidutinis kilikiečių gestikuliavimo lygis yra lygus nubų ir ilyrų vidutinių gestikuliavimo lygių vidurkiui?

Šalis															
Nubija	41	37	40	36	28	38	44	27	28	39	41	39	42	35	44
Ilyrija	9	5	12	6	7	11	6	3	5	6	12	5	9	4	5
Kilikija	19	21	15	21	23	27	31	16	15	14	19	17	15	28	27

Šiame uždavinyje tikrinama hipotezė $H: \mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/2$, ekvivalenti hipotezei $\mu_1 = \mu_2 - \mu_3 = 0$, todėl kontrastai čia yra $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -2$.

```
Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
##
## salis
                2
                    6896
                            3448
                                   147.1 <2e-16 ***
## Residuals
               42
                     985
                              23
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
# p-value=0.834, neatmetama HO, grupese vidurkiai nesiskiria.
contrasts(dat.c$salis)<-c(1,1,-2)</pre>
summary.lm(aov(gestai ~ salis,data = dat.c))
```

```
##
## Call:
## aov(formula = gestai ~ salis, data = dat.c)
##
## Residuals:
                                    3Q
##
       Min
                  1Q
                       Median
                                            Max
                     -0.2667
                                3.7333
##
   -10.2667 -2.2667
                                        10.4667
##
## Coefficients:
##
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
##
  (Intercept)
               21.6000
                            0.7218
                                   29.925 < 2e-16 ***
                -7.8333
                            0.5104 -15.348 < 2e-16 ***
## salis1
## salis2
                 9.5695
                            1.2502
                                     7.654 1.71e-09 ***
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.842 on 42 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.8751, Adjusted R-squared: 0.8691
## F-statistic: 147.1 on 2 and 42 DF, p-value: < 2.2e-16
```

(d) Dvifaktorė dispersinė analizė: hipotezių apie dviejų faktorių įtaką bei jų sąveiką tikrinimas. (ČM II.3.1) Sąvoka "brangus" neretai asocijuojasi su sąvoka "geras". 54 tiriamieji buvo suskirstyti į tris grupes: valstiečius, verslininkus ir inteligentus. Kiekvienam tiriamajam buvo parodytas tas pats abstraktus paveikslas. Kartu buvo pasakoma viena iš trijų tariamų paveikslo kainų: maža, vidutinė arba didelė. Tiriamasis turėjo balais (iki 100) įvertinti paveikslą. Apklausos rezultatai pateikti lentelėse.

	Maža	Vidutinė	Didelė
Valstiečiai	52 50 48 51 53 52	55 63 52 64 59 62	55 55 56 55 54 54
Verslininkai	$47\ 45\ 45\ 44\ 46\ 43$	$65\ 56\ 66\ 57\ 69\ 60$	$78\ 72\ 76\ 75\ 74\ 77$
Inteligentai	56 60 58 61 57 62	70 75 71 74 72 75	73 73 69 76 72 70

Ar skirtingų profesijų atstovai vienodai vertina abstraktųjį meną? Ar paveikslo kaina turi įtakos vertinimams? Ar kainos didėjimas vienodai paveikė visų profesijų atstovų nuomonę?

```
dat.d <- data.frame(</pre>
  grupe=as.factor(
    c(
      rep("Valstietis", 18),
      rep("Verslininkas", 18),
      rep("Inteligentas", 18)
    )
  ),
  kaina=as.factor(
    rep(
      c(
        rep("Maza", 6),
        rep("Vidutine", 6),
        rep("Didele", 6)
      ),
    3)
  ),
  rezultatai=c(
    52, 50, 48, 51, 53, 52,
```

```
55, 63, 52, 64, 59, 62,
55, 55, 56, 55, 54, 54,
47, 45, 45, 44, 46, 43,
65, 56, 66, 57, 69, 60,
78, 72, 76, 75, 74, 77,
56, 60, 58, 61, 57, 62,
70, 75, 71, 74, 72, 75,
73, 73, 69, 76, 72, 70
)

aov.d <- aov(rezultatai ~ grupe * kaina, data=dat.d)
summary(aov.d)

## Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
```

```
Df Sum Sq Mean Sq F value
                                         Pr(>F)
## grupe
               2 1526.3
                          763.2
                                 88.63 2.47e-16 ***
               2 2560.8 1280.4 148.69 < 2e-16 ***
## kaina
## grupe:kaina 4 1146.2
                          286.6
                                 33.28 6.42e-13 ***
## Residuals
              45
                 387.5
                            8.6
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Faktoriai grupe, kaina, ir jų saveika grupe:kaina yra reikšmingi, vadinasi balas priklauso ir nuo grupės, ir nuo kainos. Tačiau, be to, kainų didėjimas nevienodai paveikė skirtingų profesijų atstovų nuomonę, dėl saveikos tarp faktorių.

(e) (ČM II.3.2) Chemijos laboratorija išbandė tris valiklius (I, II ir III). Kiekvienu iš jų buvo valomos keturių rūšių dėmės (purvo, riebalų, vyno, rašalo) Stebėta, per kiek sekundžių dėmė išnyksta. Bandymas buvo pakartotas keturis kartus. Duomenys pateikti lentelėje.

	Purvo	Riebalų	Vyno	Rašalo
Ι	12 10 9 11	13 13 14 14	18 18 19 17	25 26 17 25
II	12 11 10 12	$14\ 15\ 14\ 15$	$18\ 17\ 17\ 16$	$20\ 21\ 22\ 22$
III	8 9 9 10	$16\ 13\ 15\ 14$	17 18 18 19	$24\ 24\ 24\ 25$

Ką galima pasakyti apie valiklių efektyvumą?

```
dat.e <- data.frame(</pre>
  valiklis=as.factor(
    c(
      rep("I", 16),
      rep("II", 16),
      rep("III", 16)
    )
  ),
  deme=as.factor(
    rep(
      c(
        rep("Purvas", 4),
        rep("Riebalai", 4),
        rep("Vynas", 4),
        rep("Rasalas", 4)
      ),
    3)
```

```
),
laikas=c(
    12, 10, 9, 11, 13, 13, 14, 14, 18, 18, 19, 17, 25, 26, 17, 25,
    12, 11, 10, 12, 14, 15, 14, 15, 18, 17, 17, 16, 20, 21, 22, 22,
    8, 9, 9, 10, 16, 13, 15, 14, 17, 18, 18, 19, 24, 24, 24, 25
)

aov.e <- aov(laikas ~ valiklis * deme, data=dat.e)
summary(aov.e)
```

```
##
                 Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
                       1.6
                               0.8
                                     0.370 0.6932
## valiklis
## deme
                  3 1041.5
                             347.2 158.203 <2e-16 ***
                 6
                      32.9
                                     2.497 0.0401 *
## valiklis:deme
                               5.5
## Residuals
                      79.0
                               2.2
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Faktorius deme buvo reikšmingas, valiklis priešingai. Vadinasi, dėmės turėjo įtakos plovimo laikui. Tiesa, dėmės dėl sąveikos su valikliais turėjo nevienodą įtaką plovimo laikui, jis priklausė nuo naudojamo valiklio.

(f) Blokuotųjų duomenų vienfaktorė dispersinė analizė. (ČM II.4.2) Prekybos centro vadybininkas ieško tinkamos vietos indų plovikliui "Laumė". Ploviklis savaitę buvo laikomas viršutinėje, vidurinėje ir apatinėje lentynose. Užfiksuota, kiek ploviklio indelių parduota. Eksperimente dalyvavo 7 parduotuvės, kuriose lentynų keitimo tvarka buvo randomizuota. Duomenys pateikti lentelėje.

Parduotuvė	Viršutinė	Vidurinė	Apatinė
Pirma	10	12	8
Antra	5	6	4
Trečia	16	18	15
Ketvirta	30	38	25
Penkta	19	19	17
Šešta	29	30	24
Septinta	39	41	36

Ar galima teigti, kad parduodamų ploviklių skaičius priklauso nuo to, kurioje lentynoje jie laikomi?

```
dat.f <- data.frame(
    parduotuve=as.factor(
    rep(
        c("Pirma", "Antra", "Trecia", "Ketvirta", "Penkta", "Sesta", "Septinta"),
        3
    )
),
lentyna=as.factor(
    c(
        rep("virsutine", 7),
        rep("vidurine", 7),
        rep("apatine", 7)
    )
),
pardavimai=c(
    10, 5, 16, 30, 19, 29, 39,</pre>
```

```
12, 6, 18, 38, 19, 30, 41,
   8, 4, 15, 25, 17, 24, 36
)
dependant.m <- with(dat.f,</pre>
 cbind(
   pardavimai[lentyna=="virsutine"],
   pardavimai[lentyna=="vidurine"],
   pardavimai[lentyna=="apatine"]
)
model.f <- lm(dependant.m ~ 1)</pre>
rfactor <- factor(c("virsutine", "vidurine", "apatine"))</pre>
# install.packages("car")
library(car)
aov.f <- Anova(
 model.f,
 idata = data.frame(rfactor),
 idesign = ~rfactor,
 type="III"
)
summary(aov.f)
## Type III Repeated Measures MANOVA Tests:
## Term: (Intercept)
## Response transformation matrix:
      (Intercept)
## [1,]
       1
## [2,]
                1
## [3,]
                1
## Sum of squares and products for the hypothesis:
##
              (Intercept)
## (Intercept)
                   27783
##
## Multivariate Tests: (Intercept)
                 Df test stat approx F num Df den Df Pr(>F)
##
## Pillai
                  1 0.781629 21.47617 1 6 0.0035619 **
                   1 0.218371 21.47617
                                                 6 0.0035619 **
## Wilks
                                           1
                                               6 0.0035619 **
6 0.0035619 **
## Hotelling-Lawley 1 3.579361 21.47617 1
## Roy
                   1 3.579361 21.47617
                                           1
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## -----
```

```
##
## Term: rfactor
##
##
   Response transformation matrix:
##
       rfactor1 rfactor2
## [1,]
              -1
                       -1
## [2,]
               0
                        1
## [3,]
               1
                        0
##
## Sum of squares and products for the hypothesis:
            rfactor1 rfactor2
## rfactor1 51.57143 -43.42857
## rfactor2 -43.42857 36.57143
##
## Multivariate Tests: rfactor
##
                    Df test stat approx F num Df den Df
## Pillai
                                               2
                     1 0.7474161 7.397702
                                                      5 0.032064 *
## Wilks
                     1 0.2525839 7.397702
                                               2
                                                      5 0.032064 *
## Hotelling-Lawley 1 2.9590807 7.397702
                                               2
                                                      5 0.032064 *
                     1 2.9590807 7.397702
                                               2
                                                      5 0.032064 *
##
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Univariate Type III Repeated-Measures ANOVA Assuming Sphericity
##
##
                   SS num Df Error SS den Df
                                                  F
                                                      Pr(>F)
## (Intercept) 9261.0
                           1
                              2587.33
                                           6 21.476 0.003562 **
                                48.95
                                          12 10.751 0.002112 **
##
  rfactor
                 87.7
                           2
##
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
##
  Mauchly Tests for Sphericity
##
           Test statistic p-value
##
## rfactor
                  0.28361 0.042835
##
##
## Greenhouse-Geisser and Huynh-Feldt Corrections
##
   for Departure from Sphericity
##
##
            GG eps Pr(>F[GG])
## rfactor 0.58262
                      0.01188 *
##
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
              HF eps Pr(>F[HF])
## rfactor 0.6367055 0.009465692
```

Patikrinkime, ar patenkinta sferiškumo prielaida. (Ar parduotuvių blokai neįneša papildomos variacijos). Mauchly~Tests~for~Sphericity skiltyje, su p-reikšme 0.043, (nelabai reikšmingai) sferiškumo hipotezę atmetame. Sferiškumo prielaida neišpildyta \Rightarrow žiūrime į Greenhouse-Geisser kriterijų, kur p-reikšmė 0.01188 $< \alpha = 0.05$. Čia hipotezė atmetama, vadinasi teigti, jog pardavimai skirtingose lentynose skiriasi, šie duomenys leidžia.

(g) Blokuotųjų duomenų vienfaktorė dispersinė analizė. (ČM II.4.4) Eksperimento metu buvo skaičiuota,

kiek važiavimo klaidų padaro kiekvienas ką tik teises gavęs vairuotojas, važiuodamas kiekviena keturių skirtingų modelių mašina. Duomenys pateikti lentelėje.

Vairuotojas	A	В	С	D
1	13	10	15	17
2	12	11	14	15
3	13	12	15	17
4	20	20	26	28
5	13	11	16	10
6	17	22	27	26
7	21	21	25	27
8	16	12	14	16
9	19	20	25	24
10	21	21	24	26

Ar visu modelių mašinomis važiuojama vienodai sėkmingai?

```
dat.g <- data.frame(</pre>
  vairuotojas=as.factor(1:10),
  modelis=c(
    rep("A", 10),
    rep("B", 10),
    rep("C", 10),
    rep("D", 10)
  ),
  klaidos=c(
    13, 12, 13, 20, 13, 17, 21, 16, 19, 21, 10, 11, 12, 20, 11, 22, 21, 12, 20, 21,
    15, 14, 14, 26, 16, 27, 25, 14, 25, 24, 17, 15, 17, 28, 10, 26, 27, 16, 24, 26
  )
)
dependant.g <- with(dat.g,</pre>
  cbind(
    klaidos[modelis=="A"],
    klaidos [modelis=="B"],
    klaidos[modelis=="C"],
    klaidos[modelis=="D"]
  )
model.g <- lm(dependant.g ~ 1)</pre>
rfactor <- factor(c("A", "B", "C", "D"))</pre>
library(car)
aov.g <- Anova(
 model.g,
 idata = data.frame(rfactor),
  idesign = ~rfactor,
  type="III"
summary(aov.g)
```

```
##
## Type III Repeated Measures MANOVA Tests:
## -----
## Term: (Intercept)
## Response transformation matrix:
##
      (Intercept)
## [1,]
         1
## [2,]
              1
## [3,]
               1
## [4,]
               1
## Sum of squares and products for the hypothesis:
## (Intercept)
               53436.1
## (Intercept)
## Multivariate Tests: (Intercept)
   Df test stat approx F num Df den Df Pr(>F)
## Pillai
                1 0.936276 132.2348 1 9 1.1061e-06 ***
## Wilks 1 0.063724 132.2348 1 9 1.1061e-06 ***
## Hotelling-Lawley 1 14.692760 132.2348 1 9 1.1061e-06 ***
## Roy 1 14.692760 132.2348 1 9 1.1061e-06 ***
## Wilks
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Term: rfactor
##
## Response transformation matrix:
## rfactor1 rfactor2 rfactor3
## [1,]
       1 0 0
       0
           0 1
0 0
## [2,]
                           0
                           1
## [3,]
## [4,]
          -1
                  -1
                          -1
##
## Sum of squares and products for the hypothesis:
##
         rfactor1 rfactor2 rfactor3
## rfactor1 168.1 188.6 24.6
                          24.6
27.6
## rfactor2 188.6 211.6
            24.6
## rfactor3
                     27.6
## Multivariate Tests: rfactor
      Df test stat approx F num Df den Df Pr(>F)
## Pillai 1 0.933914 32.97406 3 7 0.00016825 ***
## Wilks 1 0.066086 32.97406 3 7 0.00016825 ***
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## Univariate Type III Repeated-Measures ANOVA Assuming Sphericity
```

```
##
##
                   SS num Df Error SS den Df
                                                         Pr(>F)
                                                    F
                                909.23
  (Intercept) 13359.0
                                           9 132.235 1.106e-06 ***
                 167.1
                            3
                                 99.68
                                              15.086 5.821e-06 ***
## rfactor
                                          27
##
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Mauchly Tests for Sphericity
##
##
          Test statistic p-value
                 0.29598 0.096502
##
  rfactor
##
##
  Greenhouse-Geisser and Huynh-Feldt Corrections
##
   for Departure from Sphericity
##
##
            GG eps Pr(>F[GG])
## rfactor 0.68896 0.0001145 ***
##
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
            HF eps
                     Pr(>F[HF])
## rfactor 0.897568 1.545953e-05
```

Čia Mauchly testo p-reikšmė 0.096502, hipotezės nėra pagrindo atmesti. Sferiškumo prielaida tenkinama. p-reikšmė $0.000005821 < \alpha = 0.05 \Rightarrow$ hipotezė atmetama, duomenys leidžia teigti, kad automobilių modeliai vairuotojams turėjo įtakos darant klaidas.

(h) Blokuotųjų duomenų dvifaktorė dispersinė analizė. (ČM II.4.5) Sesijos metu studentai laiko keturis egzaminus (kalbos, politologijos, matematikos ir logikos). Duomenys pateikti lentelėje.

Lytis	Kalbos	Politologijos	Matematikos	Logikos
Vyrai	9	10	9	7
•	7	8	7	5
	5	8	7	6
	7	8	6	3
	7	9	6	5
	9	8	7	6
Moterys	6	5	5	2
	8	8	7	6
	9	10	8	8
	10	10	10	9
	10	9	8	6
	8	9	5	4

Ar visi egzaminai išlaikyti vienodai gerai? Ar studentai ir studentės egzaminus išlaikė vienodai gerai? Ar kuris nors egzaminas itin patiko studentėms?

```
dat.h <- data.frame(
  lytis=as.factor(c(rep("vyras", 6), rep("moteris", 6))),
  kalbos=c(9, 7, 5, 7, 7, 9, 6, 8, 9, 10, 10, 9),
  politologija=c(10, 8, 8, 8, 9, 8, 5, 8, 10, 10, 9, 9),
  matematika=c(9, 7, 7, 6, 6, 7, 5, 7, 8, 10, 8, 5),</pre>
```

```
logika=c(7, 5, 6, 3, 5, 6, 2, 6, 8, 9, 6, 4)
```

(i) Blokuotųjų duomenų dvifaktorė dispersinė analizė. (ČM 4.5 pvz.) Tris grupes karių apmokė skirtingi seržantai. Po apmokymo visų trijų grupių kariai šaudė į taikinius naudodami indėniškąjį (I), mongoliškąjį (M) ir patobulintąjį (su optiniu taikliu, P) lankus. Surinkti taškai pateikti lentelėje.

Grupė	I	M	Р
1	33	30	35
	32	31	34
	33	32	35
	32	30	36
	33	31	36
	27	32	37
2	31	31	35
	36	32	34
	29	30	35
	31	31	34
	31	30	35
	30	29	35
3	25	24	34
	24	23	33
	26	24	36
	25	25	35
	25	23	34
	26	24	35

Ar galima teigti, kad skirtingų grupių karių taiklumas skiriasi? Ar galima teigti, kad ne iš visų lankų vienodai gerai pataikoma? Ką dar galima pasakyti apie seržantų darbą?

```
dat.i <- data.frame(
  grupe=as.factor(c(rep(1, 6), rep(2, 6), rep(3, 6))),
  lankasI=c(33, 32, 33, 32, 33, 27, 31, 36, 29, 31, 31, 30, 25, 24, 26, 25, 25, 26),
  lankasM=c(30, 31, 32, 30, 31, 32, 31, 32, 30, 31, 30, 29, 24, 23, 24, 25, 23, 24),
  lankasP=c(35, 34, 35, 36, 36, 37, 35, 34, 35, 34, 35, 35, 34, 33, 36, 35, 34, 35)
)</pre>
```

Padaryta su R version 3.4.2 (2017-09-28), x86_64-pc-linux-gnu.