

# Méthodes de Newton non-lisses pour les problèmes de contact frottant dans les systèmes de multi-corps flexibles.

V. Acary<sup>1</sup>, M. Brémond<sup>2</sup>, F. Dubois<sup>1</sup>

<sup>1</sup> INRIA, Grenoble, {vincent.acary,maurice.bremond}@inria.fr

<sup>2</sup> LMGC, Université de Montpellier, frederic.dubois@umontpellier.fr

**Résumé** — Dans cette contribution, on se propose d'évaluer la performance des méthodes de Newton non-lisses dans le contexte des systèmes multi-corps flexibles (mécanismes, milieux granulaires ou milieux divisés) avec contact et frottement. Les méthodes itératives de type projection/relaxation (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté) sont généralement utilisées pour leur propriétés de robustesse et de régularisation des systèmes fortement hyper-statiques. On montre que dans le cas des systèmes déformables, les méthodes de Newton permettent d'atteindre de grandes précisions à un coût beaucoup plus faible.

**Mots clés** — contact unilatéral, frottement de Coulomb, méthodes Newton non-lisses.

## 1 Introduction

Dans le contexte des systèmes multi-corps avec contact et frottement de Coulomb, le problème de contact frottant discret que l'on obtient à chaque pas de temps après une discrétisation temporelle, ou à chaque pas de chargement en quasi-statique, est généralement résolu par des méthodes itératives de type projection/relaxation (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté). Pour les systèmes de corps rigides, qui sont pour la plupart fortement hyperstatique du fait d'un grand nombre de contacts en regard du nombre de degrés de liberté, les méthodes itératives jouissent de bonnes propriétés de robustesse. Elles permettent de converger de façon sûre, mais lentement vers une solution du problème mais si les forces de réaction ne sont pas définies de manière unique. Il est connu que ces méthodes de Newton non-lisses sont totalement inopérantes pour les systèmes rigides hyperstatiques [1, ?].

Dans le cas de système de corps flexibles, discrétisés par exemple par des éléments finis, il est facile de réduire ce degré d'hyperstaticité en augmentant le nombre de degrés de liberté du système de façon à éviter les contraintes dépendantes au contact. Ceci peut par exemple se faire en raffinant les maillages à contact tout en contrôlant le nombre de point de contact générés. Dans cette contribution, on montre qu'il devient alors intéressant d'utiliser des méthodes de Newton non lisses pour résoudre le problème discret surtout si on veut atteindre des niveaux de précision relative supérieurs à  $10^{-4}$ . Alors que les méthodes itératives de type projection/relaxation continuent à converger lentement, les méthodes de Newton retrouvent leurs convergences quadratiques locales pour des systèmes fortement réguliers. Cela permet d'atteindre des niveaux de précisions arbitraires pour un coût de calcul bien moindres. Dans ce travail, on essaye aussi de montrer qu'il peut être intéressant d'introduire un modèle de comportement élastique dans un système rigide afin de profiter des avantages d'un point de vue numériques des méthodes de Newton. Dans des travaux antérieurs, M. Jean [2, 3] avait montré que l'introduction de l'élasticité permettait de réduire le degré d'hyperstaticité et d'améliorer sensiblement la qualité des solutions en termes de forces de réaction. En préférant des méthodes de Newton non-lisses, on améliore aussi fortement le coût de calcul.

voir si on  
peut le faire

**Formulation du problème** Considérons un nombre  $n_c \in \mathbb{N}$  de points de contact tridimensionnel et un nombre  $n \in \mathbb{N}$  de degrés de liberté du système discret. Pour chaque contact  $\alpha$ , les vitesses relatives locales au contact notées  $u^\alpha \in \mathbb{R}^3$  et les réactions au contact notées  $r^\alpha \in \mathbb{R}^3$  (forces ou impulsions) sont décomposées dans un repère local au contact  $(N^\alpha, T_1^\alpha, T_2^\alpha)$  telles que  $u^\alpha = u_N^\alpha N^\alpha + u_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + u_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$ ,  $u_N^\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $u_T^\alpha = [u_{T_1}^\alpha, u_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$  and  $r^\alpha = r_N^\alpha N^\alpha + r_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + r_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$ ,  $r_N^\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $r_T^\alpha = [r_{T_1}^\alpha, r_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$ . L'interstice au contact est noté  $g_N^\alpha$  (voir la figure 1).

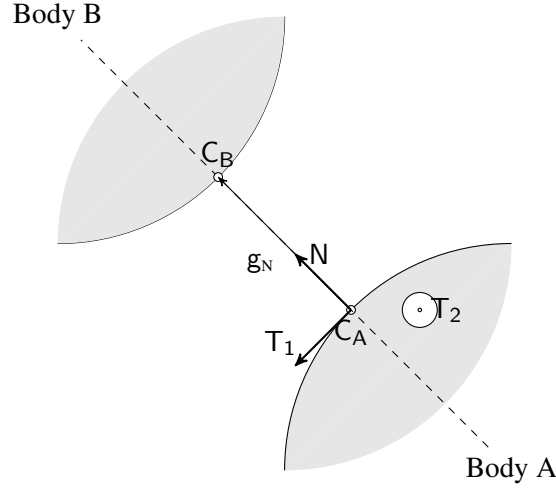


FIGURE 1 – Repère local au contact

Pour chaque contact, on définit le cône de Coulomb comme le cone du second ordre suivant :

$$K^\alpha = \{r^\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha r_n^\alpha\}. \quad (1)$$

où  $\mu^\alpha$  est le coefficient de frottement du contact  $\alpha$ . Sous forme disjonctive, le contact unilatéral en vitesse avec du frottement de Coulomb peut s'écrire

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha > 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ r^\alpha = 0, u_N^\alpha \geq 0 & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{décollage}) \\ r^\alpha \in K^\alpha, u^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{adhérence}) \\ r^\alpha \in \partial K^\alpha, u_N^\alpha = 0, \exists \beta > 0, u_T^\alpha = -\beta r_T^\alpha & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (2)$$

En introduisant la vitesse relative locale modifiée  $\hat{u}^\alpha = u^\alpha + \mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha$  due à [4], le problème peut être reformulé de manière équivalente comme un problème de complémentarité du second ordre [4, 5] :

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha > 0 \\ K^{\alpha,*} \ni \hat{u}^\alpha \perp r^\alpha \in K^\alpha & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Le cône  $K^{\alpha,*}$  est le cône dual de  $K^\alpha$ .

Suite à une discrétisation des équations du mouvement ou d'équilibre, et à une possible linéarisation, on peut relier les variables cinématiques  $v \in \mathbb{R}^n$  aux effort de contact par une relation linéaire, ce qui nous conduit au problème linéaire de complémentarité suivant en cas de contact :

$$\begin{aligned} Mv &= Hr + f, \quad u = H^\top v + w, \quad \hat{u} = u + g(u), \\ K^* &\ni \hat{u} \perp r \in K, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $f \in \mathbb{R}^n$  est homogène à des efforts,  $K$  est le produit cartésien de cônes pour chaque contact,

$$K = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} K^\alpha = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} \{r^\alpha, \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha |r_N^\alpha|\} \quad (5)$$

et  $K^*$  son dual. La fonction  $g(u)$  est une fonction non-lisse définie par

$$g(u) = [[\mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha]^\top, \alpha = 1 \dots n_c]^\top. \quad (6)$$

La matrice  $MIR^{n \times n}$  est le plus souvent définie positive.

**Rang de la matrice  $H$**  Attardons nous un moment sur la matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times 3n_c}$  qui relie les efforts de contact  $r$  aux efforts généralisés et de façon duale les vitesses relatives au contact aux vitesses généralisées.

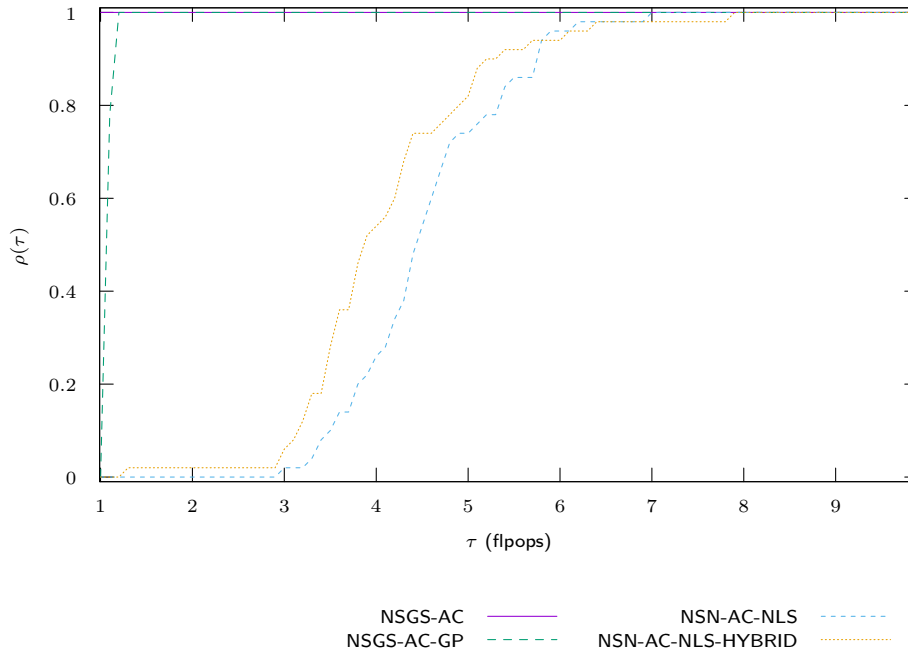


FIGURE 2 – Comparaison entre le solveur NSGS-AC et NSN-AC pour une précision de  $10^{-3}$

- Description du problème de frottement discret
- Problème de rang de H
- Objectifs du papier

1. Comparaison performance NSGS/NSN sur des déformables et des rigides.
2. Intérêt à passer en déformable pour ajouter des ddl.

## 2 Méthodes numériques de résolution

## 3 Profils de performance

## 4 Comparaison sur des solides élastiques

### 4.1 La murette

### 4.2 Résultats

## 5 Comparaison sur des solides rigides

## 6 Utilisation des solides élastiques pour améliorer la convergence

## 7 Conclusion

parallelisme.

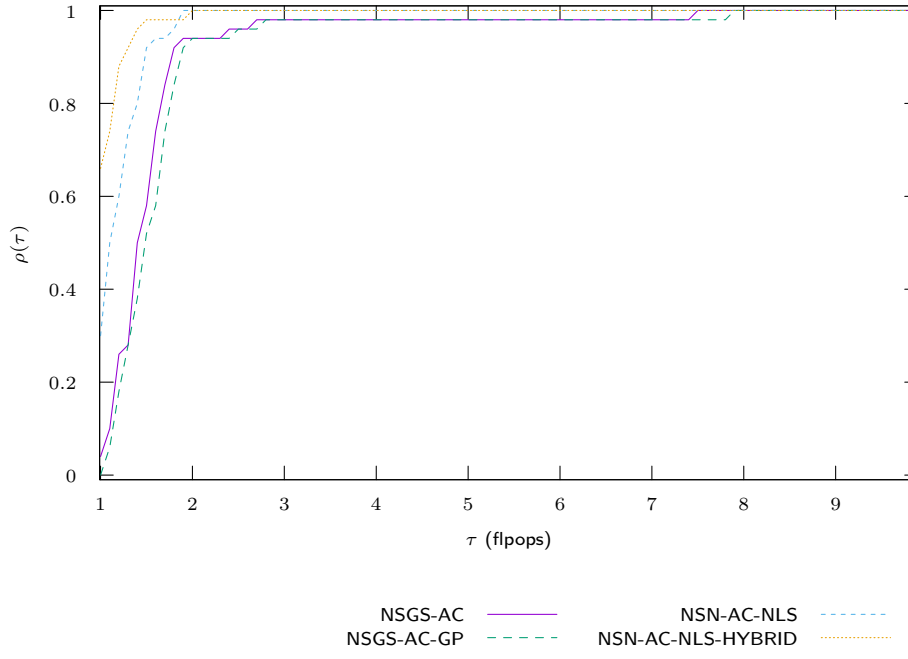


FIGURE 3 – Comparaison entre le solveur NSGS-AC et NSN-AC pour une précision de  $10^{-4}$

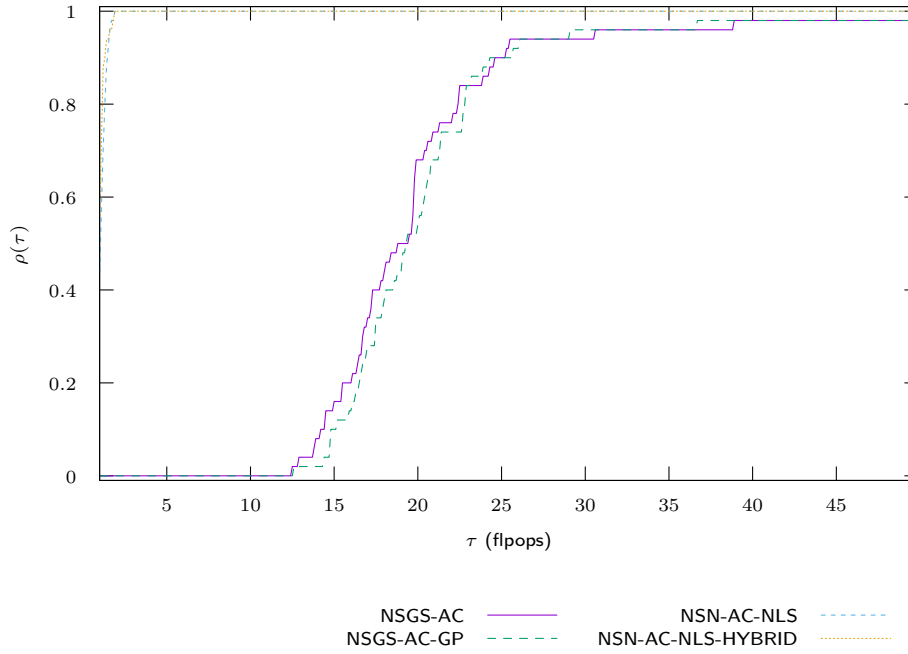


FIGURE 4 – Comparaison entre le solveur NSGS-AC et NSN-AC pour une précision de  $10^{-6}$

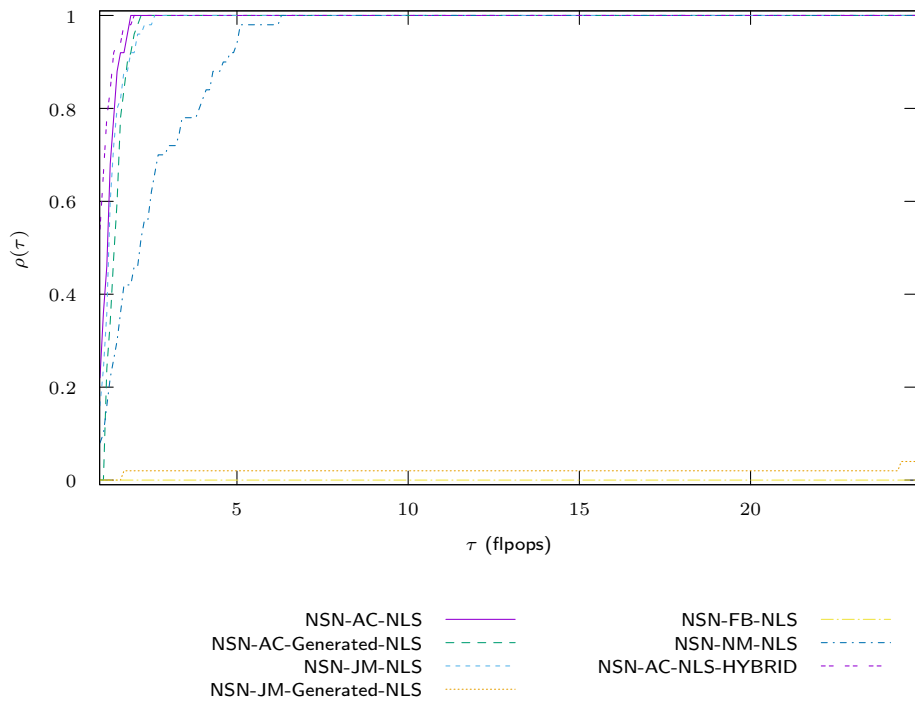


FIGURE 5 – Comparaison des solveurs NSN-\*-NLS pour une précision de  $10^{-4}$

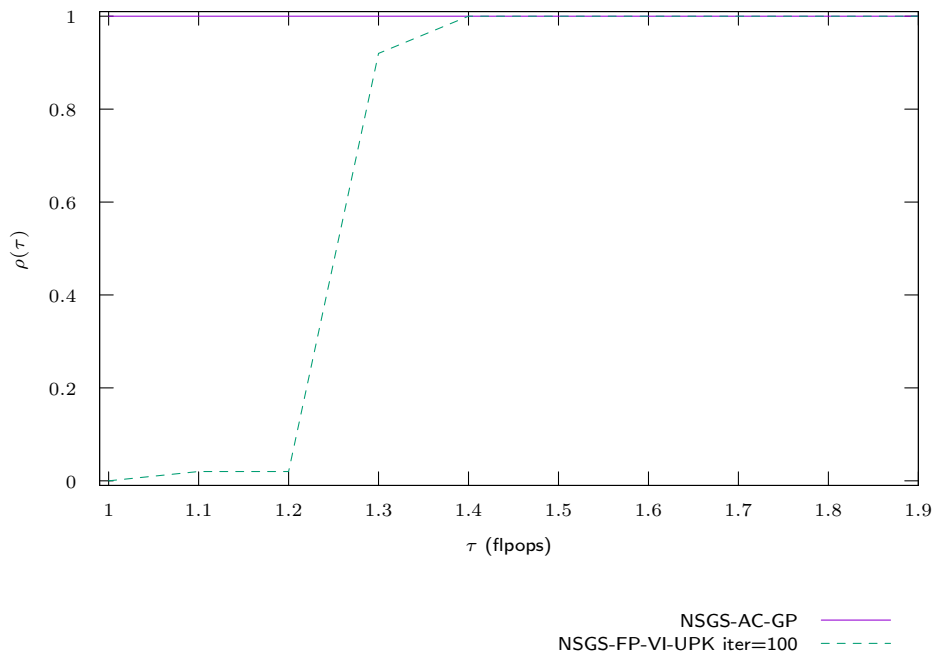


FIGURE 6 – Comparaison des solveurs NSGS pour une précision de  $10^{-4}$

## 7.1 Références bibliographiques

### Références

- [1] F. Bertails-Descoubes, F. Cadoux, G. Daviet, and V. Acary. A Nonsmooth Newton Solver for Capturing Exact Coulomb Friction in Fiber Assemblies. *ACM Transactions on Graphics*, January 2011.
- [2] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
- [3] V. Acary and M. Jean. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method. In DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic performance of monuments*, pages 69–78. Laboratório Nacional de engenharia Civil (LNEC), November 12-14 1998.
- [4] G. De Saxcé. Une généralisation de l’inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, t 314,série II :125–129, 1992.
- [5] V. Acary, F. Cadoux, C. Lemaréchal, and J. Malick. A formulation of the linear discrete coulomb friction problem via convex optimization. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(2) :155–175, 2011.