

Méthodes de Newton non-lisses pour les problèmes de contact frottant dans les systèmes de multi-corps flexibles.

V. Acary¹, M. Brémond², F. Dubois¹

¹ INRIA, Grenoble, {vincent.acary,maurice.bremond}@inria.fr

² LMGC, Université de Montpellier, frederic.dubois@umontpellier.fr

Résumé — Dans cette contribution, on se propose d'évaluer la performance des méthodes de Newton non-lisses dans le contexte des systèmes multi-corps flexibles (mécanismes, milieux granulaires ou milieux divisés) avec contact et frottement. Les méthodes itératives de type projection (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté) sont généralement utilisées pour leur propriétés de robustesse et de régularisation des systèmes fortement hyper-statiques. On montre que dans le cas des systèmes déformables, les méthodes de Newton permettent d'atteindre de grandes précisions à un coût beaucoup plus faible.

Mots clés — contact unilatéral, frottement de Coulomb, méthodes Newton non-lisses.

1 Introduction

Dans le contexte des systèmes multi-corps avec contact et frottement de Coulomb, le problème de contact frottant discret que l'on obtient à chaque pas de temps après une discrétisation temporelle, ou à chaque pas de chargement en quasi-statique, est généralement résolu par des méthodes itératives de type projection (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté). Pour les systèmes de corps rigides, qui sont pour la plupart fortement hyperstatique du fait d'un grand nombre de contacts en regard du nombre de degrés de liberté, les méthodes itératives jouissent de bonnes propriétés de robustesse. Elles permettent de converger de façon sûre, mais lentement vers une solution du problème mais si les forces de réaction ne sont pas définies de manière unique. Il est connu que ces méthodes de Newton non-lisses sont totalement inopérantes pour les systèmes rigides hyperstatiques [1, ?].

Dans le cas de système de corps flexibles, discrétisés par exemple par des éléments finis, il est facile de réduire ce degré d'hyperstaticité en augmentant le nombre de degrés de liberté du système de façon à éviter les contraintes dépendantes au contact. Ceci peut par exemple se faire en raffinant les maillages à contact tout en contrôlant le nombre de point de contact générés. Dans cette contribution, on montre qu'il devient alors intéressant d'utiliser des méthodes de Newton non lisses pour résoudre le problème discret surtout si on veut atteindre des niveaux de précision relative supérieurs à 10^{-4} . Alors que les méthodes itératives de type projection continuent à converger lentement, les méthodes de Newton retrouvent leurs convergences quadratiques locales pour des systèmes fortement réguliers. Cela permet d'atteindre des niveaux de précisions arbitraires pour un coût de calcul bien moindres. Dans ce travail, on essaye aussi de montrer qu'il peut être intéressant d'introduire un modèle de comportement élastique dans un système rigide afin de profiter des avantages d'un point de vue numériques des méthodes de Newton. Dans des travaux antérieurs, M. Jean [2, 3] avait montré que l'introduction de l'élasticité permettait de réduire le degré d'hyperstaticité et d'améliorer sensiblement la qualité des solutions en termes de forces de réaction. En préférant des méthodes de Newton non-lisses, on améliore aussi fortement le coût de calcul.

voir si on
peut le faire

Formulation du problème Considérons un nombre $n_c \in \mathbb{N}$ de points de contact tridimensionnel et un nombre $n \in \mathbb{N}$ de degrés de liberté du système discret. Pour chaque contact α , les vitesses relatives locales au contact notées $u^\alpha \in \mathbb{R}^3$ et les réactions au contact notées $r^\alpha \in \mathbb{R}^3$ (forces ou impulsions) sont décomposées dans un repère local au contact $(N^\alpha, T_1^\alpha, T_2^\alpha)$ telles que $u^\alpha = u_N^\alpha N^\alpha + u_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + u_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$, $u_N^\alpha \in \mathbb{R}$, $u_{T_1}^\alpha, u_{T_2}^\alpha \in \mathbb{R}$, $u_T^\alpha = [u_{T_1}^\alpha, u_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$ and $r^\alpha = r_N^\alpha N^\alpha + r_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + r_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$, $r_N^\alpha \in \mathbb{R}$, $r_T^\alpha = [r_{T_1}^\alpha, r_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$. L'interstice au contact est noté g_N^α (voir la figure 1).

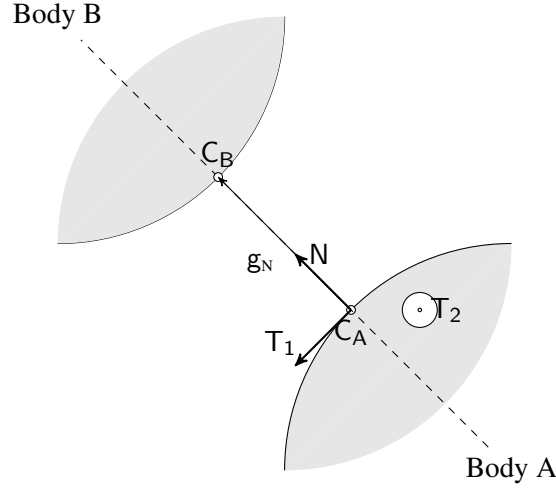


FIGURE 1 – Repère local au contact

Pour chaque contact, on définit le cône de Coulomb comme le cone du second ordre suivant :

$$K^\alpha = \{r^\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha r_n^\alpha\}. \quad (1)$$

où μ^α est le coefficient de frottement du contact α . Sous forme disjonctive, le contact unilatéral en vitesse avec du frottement de Coulomb peut s'écrire

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha > 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ r^\alpha = 0, u_N^\alpha \geq 0 & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{décollage}) \\ r^\alpha \in K^\alpha, u_N^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{adhérence}) \\ r^\alpha \in \partial K^\alpha, u_N^\alpha = 0, \exists \beta > 0, u_T^\alpha = -\beta r_T^\alpha & \text{if } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (2)$$

En introduisant la vitesse relative locale modifiée $\hat{u}^\alpha = u^\alpha + \mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha$ due à [4], le problème peut être reformulé de manière équivalente comme un problème de complémentarité du second ordre [4, 5] :

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{if } g_N^\alpha > 0 \\ K^{\alpha,*} \ni \hat{u}^\alpha \perp r^\alpha \in K^\alpha & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Le cône $K^{\alpha,*}$ est le cône dual de K^α .

Suite à une discrétisation des équations du mouvement ou d'équilibre, et à une possible linéarisation, on peut relier les variables cinématiques $v \in \mathbb{R}^n$ aux effort de contact par une relation linéaire, ce qui nous conduit au problème linéaire de complémentarité suivant en cas de contact :

$$\begin{aligned} Mv &= Hr + f, \quad u = H^\top v + w, \quad \hat{u} = u + g(u), \\ K^* &\ni \hat{u} \perp r \in K, \end{aligned} \quad (4)$$

où $f \in \mathbb{R}^n$ est homogène à des efforts, K est le produit cartésien de cônes pour chaque contact,

$$K = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} K^\alpha = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} \{r^\alpha, \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha |r_n^\alpha|\} \quad (5)$$

et K^* son dual. La fonction $g(u)$ est une fonction non-lisse définie par

$$g(u) = [[\mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha]^\top, \alpha = 1 \dots n_c]^\top. \quad (6)$$

La matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le plus souvent définie positive. Nous nous placerons dans cet article dans les conditions d'existence de solution comme elles sont données dans [6, 5].

Rang de la matrice H Attardons nous un moment sur la matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times 3n_c}$ qui relie les efforts de contact r aux efforts généralisés et de façon duale les vitesses relatives au contact aux vitesses généralisées. Si le nombre de contact est grand en rapport au nombre de degrés de liberté, disons $3n_c > n$, la matrice H ne peut pas être de rang plein par colonnes. Il en résulte une dépendance linéaire des efforts de contacts et la multiplicité des solutions. Dans le cas des systèmes de corps rigides, cette situation qui est liée à l'hyperstaticité du système est le cas générique. Pensons par exemple à la table à quatre pieds. Naturellement, cette situation peut aussi arriver dans le cas $3n_c \leq n$ si des contacts linéairement dépendants sont appliquées au corps. La réduction de rang de cette matrice influence fortement le comportement des méthodes numériques de résolution.

Il en est de même si on cherche à résoudre le problème réduit aux variables locales au contact :

$$\begin{aligned} u &= Wr + q, \\ \hat{u} &= u + g(u) \\ K^* \ni \hat{u} \perp r &\in K, \end{aligned} \quad (7)$$

avec $W = H^\top M^{-1} H \in \mathbb{R}^{3n_c \times 3n_c}$ la matrice de Delassus et $q \in \mathbb{R}^{3n_c}$. De ce cas, c'est la matrice W qui n'est plus de rang plein.

2 Méthodes numériques de résolution

Rappelons brièvement les caractéristiques des méthodes utilisées dans cette étude. Pour plus de détails, on pourra consulter [7].

Méthodes de Newton non-lisses Les méthodes de Newton non-lisses sont basées sur une réécriture du problème sous la forme d'une équation $F(r) = 0$, dont les racines sont les solutions du problème original. Parmi les exemples les plus connus de ces fonctions, on peut citer la fonction de P. Alart et A. Curnier [8] :

$$F_{ac}(r) := \begin{bmatrix} r_N - P_{\mathbb{R}_+^{n_c}}(r_N - \rho_N(Wr + q)_N) = 0, \\ r_T - P_{D(\mu, (r_N - \rho(Wr + q)_N)_+)}(r_T - \rho_T(Wr + q)_T) = 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \rho_N > 0, \rho_T > 0, \quad (8)$$

avec le disque de frottement $D(\mu, (r_N)_+) = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} \{r_T \in \mathbb{R}^2 \mid \|r_T\| \leq \mu(r_N)_+\}$. La fonction P_X représente la projection euclidienne sur un convexe X . Une version similaire peut aussi être utilisée est la fonction proposée par M. Jean et J.J. Moreau [9]

$$F_{mj}(r) := \begin{bmatrix} r_N - P_{\mathbb{R}_+^{n_c}}(r_N - \rho_N(Wr + q)_N) \\ r_T - P_{D(\mu, (r_N)_+)}(r_T - \rho_T(Wr + q)_T) \end{bmatrix} = 0, \quad \rho_N > 0, \rho_T > 0. \quad (9)$$

D'autres fonctions de complémentarité peuvent aussi être utilisées comme la fonction naturelle :

$$F_{nat}(r) := [r - P_K(r - \rho(Wr + q + g(Wr + q)))] = 0, \quad \rho > 0 \quad (10)$$

ou encore la fonction de Fisher-Burmeister. Partant de ces formulations, il convient ensuite de calculer(sélectionner) un élément régulier Φ du sous-différentiel de F au point r , $\Phi(r) \in \partial F(r)$ et d'effectuer les itérations de Newton suivantes :

$$r_{k+1} = r_k - \Phi^{-1}(r_k)(F(r_k)). \quad (11)$$

Dans cet article, nous utilisons MUMPS [] pour la résolution des systèmes linéaires.

Méthodes de projection de type Gauss-Seidel La méthode de Gauss-Seidel avec projection est décrite en détail dans [10, 11]. Elle consiste en une décomposition du problème contact par contact qui permet de calculer à l'itération k les inconnues du contact α en résolvant le problème suivant

$$\begin{aligned} u_{k+1}^\alpha &= W^{\alpha\alpha} r_{k+1}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} W^{\alpha\beta} r_{k+1}^\beta + \sum_{\beta > \alpha} W^{\alpha\beta} r_k^\beta + q^\alpha, \\ \hat{u}_{k+1}^\alpha &= u_{k+1}^\alpha + g(u_{k+1}^\alpha), \\ K^{\alpha,*} \ni \hat{u}_{k+1}^\alpha \perp r_{k+1}^\alpha &\in K^\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

La résolution du problème local au contact (12) peut se faire de manière analytique, ou en utilisant une autre méthode numérique. Dans cet article, on utilisera localement une méthode de Newton non-lisse comme décrite ci-dessus ou des itérations de points fixe de $F_{nat}(r) - r$.

NSN-AC-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (8) sans recherche linéaire
NSN-JM-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (9) sans recherche linéaire
NSN-NM-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (10) sans recherche linéaire
NSN-AC-NLS-HYBRID	Méthode NSN-AC-NLS avec un pré-conditionnement par 100 itérations de NSGS-AC
NSGS-AC	Méthode de Gauss Seidel avec NSN-AC-NLS pour méthode locale
NSGS-FP-VI-UPK	Méthode de Gauss Seidel avec itérations locales de points fixe de $F_{\text{nat}}(r) - r$

TABLE 1 – Nomenclature des méthodes utilisées

Nomenclature Dans la suite, les méthodes utilisées sont nommées comme dans le Tableau 1

Mesure d'erreur Afin de comparer la convergence des méthodes, nous utilisons un critère d'arrêt à une précision utilisateur ε basée sur la fonction naturelle pour les problèmes de complémentarité du second ordre :

$$e = \frac{\|F_{\text{nat}}(r)\|}{\|q\|} < \varepsilon, \quad (13)$$

en supposant que le problème n'est pas dégénéré ($\|q\| \neq 0$). Cette mesure d'erreur est justifiée plus amplement dans [12]. Dans le cas des méthodes itératives de projection, le coût de calcul de $F_{\text{nat}}(r)$ est élevé par rapport une itération. Nous utilisons un critère d'arrêt du type

$$\frac{\|r_{k+1} - r_k\|}{\|r_{k+1}\|} < \tau, \quad (14)$$

où τ est adapté en ligne pour atteindre le critère (13).

Profil de performance Pour évaluer l'efficacité d'une méthode par rapport à une autre, nous utilisons les profils de performance comme ils sont proposés dans [13]. Considérons une ensemble \mathcal{P} de n_p problèmes et \mathcal{S} de n_s méthodes de résolutions. Pour chaque problème $p \in \mathcal{P}$ et chaque méthode $s \in \mathcal{S}$, on définit un critère de performance $t_{p,s}$. Dans notre cas, il s'agira du nombre d'opérations flottantes pour atteindre une précision donnée. Nous utilisons aussi une temps de calcul maximum. Si la précision n'est pas atteinte, le critère est égal à $+\infty$. On définit le rapport de performance par :

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min \{t_{p,s}, s \in \mathcal{S}\}}. \quad (15)$$

Enfin on définit la probabilité $\rho_s(\tau)$ pour une méthode $s \in \mathcal{S}$ que le rapport de performance $r_{p,s}$ soit en dessous d'une valeur $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{p \in \mathcal{P}, r_{p,s} \leq \tau\} \geq 1. \quad (16)$$

On peut remarquer que $\rho_s(1)$ représente la probabilité que la méthode s soit la meilleure par rapport aux autres méthodes. La valeur $\rho_s(\tau)$ pour τ grand caractérise la capacité de la méthode à résoudre un grand nombre de problème en temps long. Les fonctions $\tau \rightarrow \rho_s(\tau)$ sont des fonctions croissantes dont on tracera les graphes appelés profils de performance pour une plage de τ .

3 Comparaison sur des solides élastiques

La murette L'exemple choisi pour illustrer le comportement de solveurs est une modélisation d'une maçonnerie en appareil régulier composée de 12 blocs et soumis à un chargement de cisaillement illustrée à la figure 2. Les blocs sont maillés par des éléments finis linéaires avec un comportement élastique linéaire ($\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $E = 2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.2$). L'interface entre les blocs est modélisée par du frottement de Coulomb avec du contact unilatéral. Le coefficient de frottement entre les blocs est de 0.83 et entre les blocs et les supports de 0.53. Le support du bas est fixe. Sur le support on applique un effort maximum de compression de 30000N et une vitesse tangente de cisaillement de $1 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$. **verifier la description**

— nombre et type d'éléments

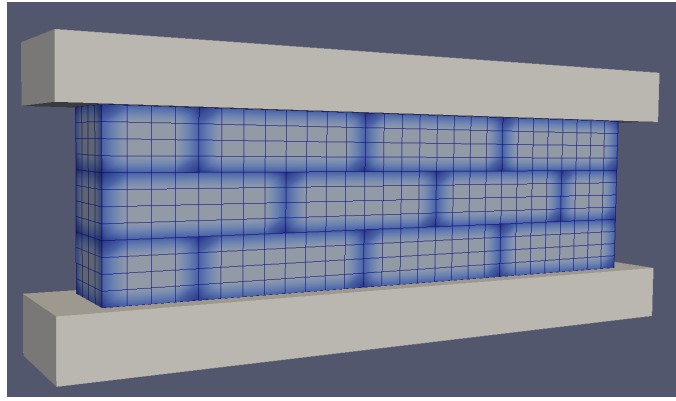


FIGURE 2 – Une murette

Génération d'exemples par simulation et logiciels Le système est modélisé et simulé par le logiciel LMGC90. A chaque pas de temps, on recoud le problème discret de frottement avec Siconos/numerics et on exporte le problème discret à résoudre dans un fichier au format FCLib. De cette collection d'exemples, on a sélectionné 50 problèmes de difficulté graduée pour la méthode de Newton non-lisse.

LMGC90 [] est ... L'implantation des méthodes de résolution est faite dans Siconos [?] qui est un logiciel open-source de modélisation et de simulation des systèmes dynamiques non lisse Enfin FCLib [?] est un format et une collection ouverte de problèmes de frottement qui permet de comparer des méthodes de résolution sur une large base d'exemples.

Résultats Sur la figure 3, on représente les profils de performance des méthodes de résolution pour des précisions différentes.

Pour une précision relativement faible de 10^{-2} , Les performances des méthodes sont très proches. Les méthodes de Newton non lisses NSN-AC-NLS, NSN-JM-NLS et NSN-AC-NLS-HYBRID sont légèrement meilleures que NSGS-AC et NSGS-FP-VI-UPK. La méthode NSN-AC-NLS-HYBRID qui utilise un pré-conditionnement apparaît comme étant la plus performante ce qui est logique puisque les méthodes de projection permettent de trouver une solution grossière plus rapidement. La méthode NSN-NM-NLS est la moins performante.

Pour une précision de 10^{-3} , toutes les méthodes de Newton non-lisses sont plus performantes. Elles sont les plus rapides et ne posent pas de problème de robustesse. La méthode NSN-NM-NLS est la moins performante des méthodes de Newton. On peut noter que la méthode NSN-AC-NLS-HYBRID est la plus performante et qu'elle est en moyenne 4 fois plus performante que la méthode NSGS-AC.

Pour une précision de 10^{-4} et 10^{-6} , cette tendance s'accroît avec des méthodes de Newton qui sont en moyenne 20 fois et respectivement 40 fois plus performantes que les méthodes itératives de projection. Un zoom sur les méthodes de Newton montre que leur performance relative reste inchangée. Par contre, la méthode de NSGS-FP-VI-UPK devient plus performante que la méthode de NSGS-AC pour une précision de 10^{-6} .

4 Comparaison sur des solides rigides

5 Utilisation des solides élastiques pour améliorer la convergence

6 Conclusion

En conclusion, on peut observer que

- Pour des précisions relativement élevées (au delà de 10^{-4}), les méthodes de Newton lisses sont beaucoup plus performantes pour des systèmes multi-corps flexibles.
- La méthode NSN-AC-NLS-HYBRID est la méthode la plus performante des méthodes de Newton. Le pré-conditionnement permet d'accélérer la convergence des premières itérations de Newton.
- Les méthodes itératives de projection restent intéressantes pour des précisions faibles, mais elles

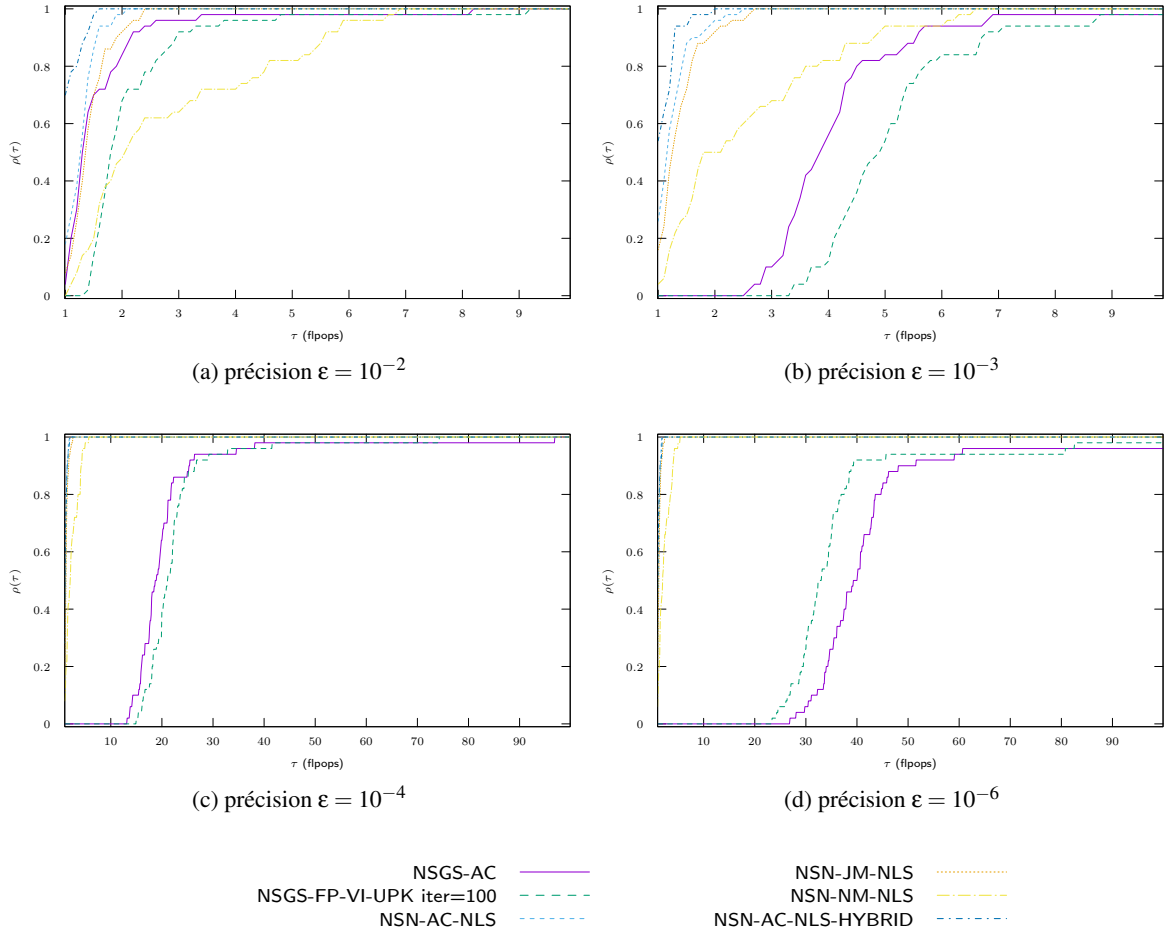


FIGURE 3 – Comparaison entre les méthodes itératives de type projection et les méthodes de Newton non-lisses pour différentes précisions.

ne permettent pas d'atteindre une précision élevée pour un coût raisonnable.

Les perspectives à ce travail sont les suivantes :

- Dans les simulations de systèmes multi-corps rigides, ils conviendrait d'évaluer l'intérêt de passer à un modèle déformable pour accélérer les calculs.
- Les méthodes de Newton non-lisse permettent d'intégrer facilement les comportements non-linéaires de corps ce qui évite une boucle externe de Newton.
- Les bibliothèques de calculs des grands systèmes linéaires comme MUMPS qui sont à la base de méthodes de Newton, sont le plus souvent massivement paralléliser. Cela pourrait fournir une alternative en termes de calcul distribué aux méthodes de Gauss-Seidel distribuées.

c'était dans
l'intro mais
on a pas eu
le temps ==>
reprendre
l'intro

6.1 Références bibliographiques

Références

- [1] F. Bertails-Descoubes, F. Cadoux, G. Daviet, and V. Acary. A Nonsmooth Newton Solver for Capturing Exact Coulomb Friction in Fiber Assemblies. *ACM Transactions on Graphics*, January 2011.
- [2] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
- [3] V. Acary and M. Jean. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method. In DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic performance of monuments*, pages 69–78. Laboratório Nacional de engenharia Civil (LNEC), November 12-14 1998.
- [4] G. De Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t 314,série II :125–129, 1992.
- [5] V. Acary, F. Cadoux, C. Lemaréchal, and J. Malick. A formulation of the linear discrete coulomb friction problem via convex optimization. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(2) :155–175, 2011.
- [6] Anders Klarbring and Jong-Shi Pang. Existence of solutions to discrete semicoercive frictional contact problems. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2) :414–442, 1998.
- [7] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems. Applications in mechanics and electronics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 35. Berlin : Springer. xxi, 525 p. , 2008.
- [8] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353–375, 1991.
- [9] M. Jean and J.J. Moreau. Dynamics in the presence of unilateral contacts and dry friction : a numerical approach. In G. Del Pietro and F. Maceri, editors, *Unilateral problems in structural analysis. II*, pages 151–196. CISM 304, Springer Verlag, 1987.
- [10] E.N. Mitsopoulou and I.N. Doudoumis. A contribution to the analysis of unilateral contact problems with friction. *Solid Mechanics Archives*, 12(3) :165–186, 1987.
- [11] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A Gauss Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1) :31–47, 1998.
- [12] F. Facchinei and J. S. Pang. *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, volume I & II of *Springer Series in Operations Research*. Springer Verlag NY. Inc., 2003.
- [13] E.D. Dolan and J.J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2) :201–213, 2002.