Lineární funkce

Def: $f(x) = \underbrace{1-2x}_{\text{lineární člen}}$ přímka / lineární funkce

$P_y = [0, 1]$ průsečík s osou y [dosadím $x=0$]

P_x: [řeším rovnici $f(x)=0$]

$1-2x = 0 \quad / -1$

$-2x = -1 \quad / \cdot -\frac{1}{2}$

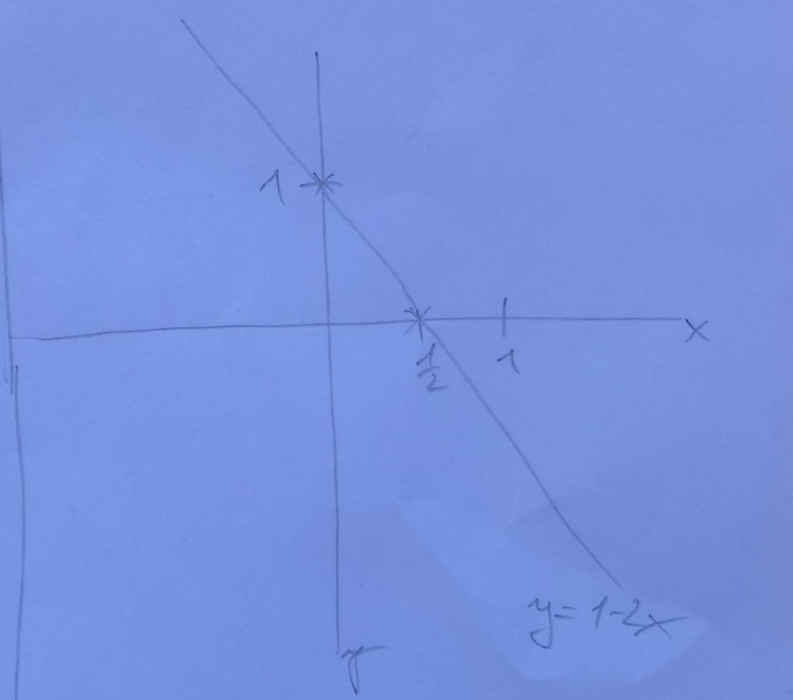
$\underbrace{x = \frac{1}{2}}_{\text{nulový bod lineárního členu}}$

Ekvivalentní úpravy:

a) přičtení (odečtení) čísla k oběma stranám

b) vynásobení (vydělení) obou stran (nenulovým) číslem

$P_x = [\frac{1}{2}; 0]$ průsečík s osou x



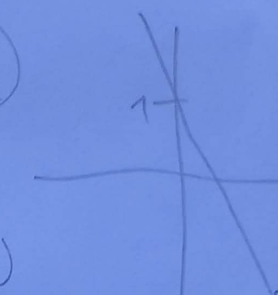
Posouvání grafu

$f(x) = 1-2x = -2x+1$
$= -2(x-\frac{1}{2})$

$f_1(x) = x$

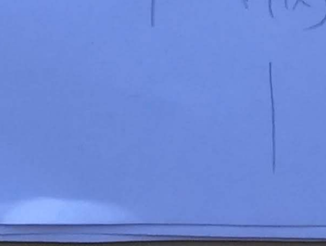
$f_2(x) = -2x$

směrnice přímky



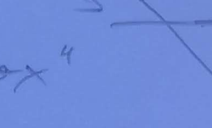
$f(x) = -2x+1$

posun nahoru (+) dolů (−)



$y = ax+b$, a směrnice

$a > 0$ … přímka roste



$a < 0$ … přímka klesá

„jdeme zleva doprava po x“

Př $f(x) = \sqrt{2}x - e$

jsou to vroste čísla

$\sqrt{2} \approx 1.4$, $e \approx 2.7$

$P_y = [0; -e]$

P_x : $\sqrt{2}x - e = 0 \quad / + e$

$\sqrt{2}x = e \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

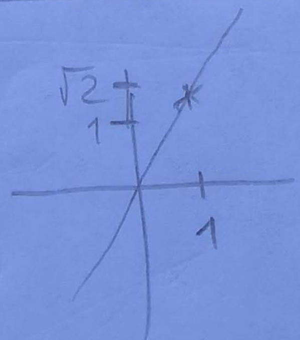
$x = \frac{e}{\sqrt{2}} \approx \frac{2.7}{1.4} = \frac{27}{14} \approx 2$

$P_x = [\frac{e}{\sqrt{2}}; 0]$

<u>Posunutí grafu</u>

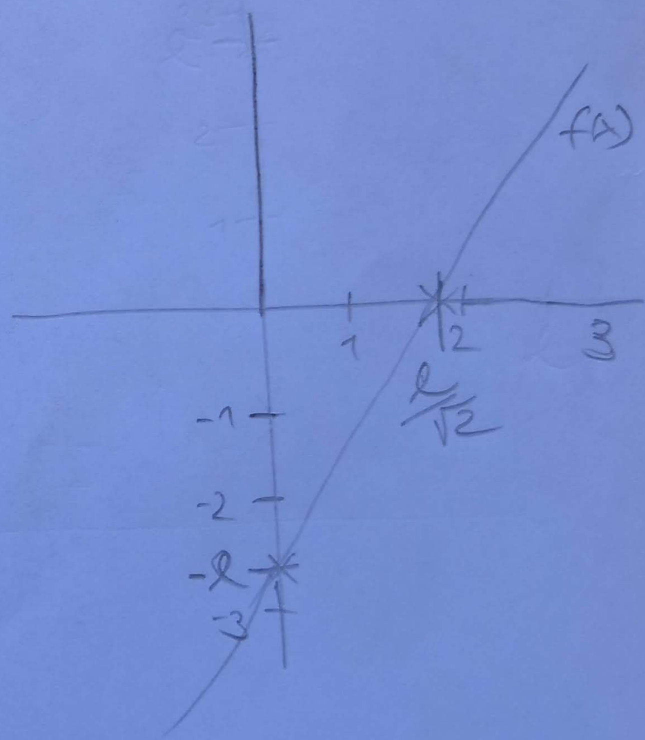
$f_1(x) = \sqrt{2}x$

směrnice



$f(x) = \sqrt{2}x - e$

posun dolů



$\boxed{Př}$ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3$

$P_x, P_y, V = ?$ + nákres
kdy je $f(x) > 0$?

$P_y = [0;-3]$ [dosadit $x=0$]

P_x: [řešíme rovnici $f(x)=0$]

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 = 0 \;/\cdot -\frac{1}{2} \xLeftrightarrow{\text{upravíme}} \underset{a}{1}x^2 \underset{b}{-5}x \underset{c}{+6} = 0$$

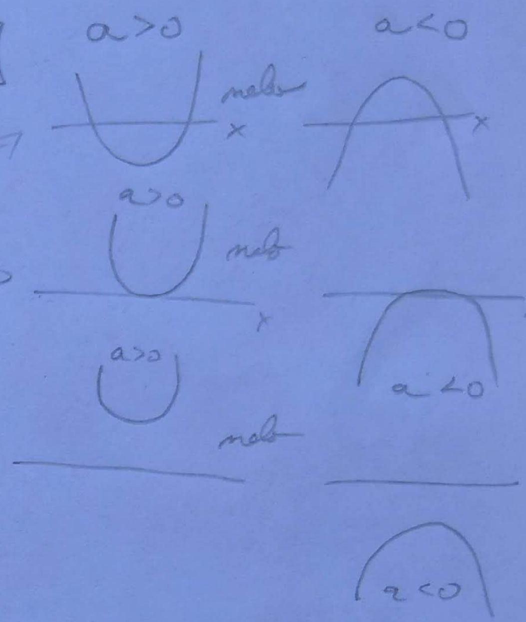
2 Postupy: A) pomocí diskriminantu [funguje vždy]

$D = b^2 - 4ac$

$D > 0$ .... 2 kořeny

$D = 0$ .... 1 kořen

$D < 0$ .... žádný kořen



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D = 25 - 4\cdot 6 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$P_{x_1} = [3;0]$

$P_{x_2} = [2;0]$

B) Vietovy vzorce (hádání)

! rovnice ve tvaru $x^2 + bx + c = 0$, $(a=1)$

$x_1 \cdot x_2 = c$

$x_1 + x_2 = -b$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

2 3 → 5

−2 −3 → −5

Našli jsme kořeny, $f(x)$ lze zapsat v součinovém tvaru

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$V = [?;?]$ souřadnice vrcholu

4 postupy: α) vzorečkem [funguje vždy]

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \dots \quad V = \left[-\frac{b}{2a}; \dots\right]$$

dopočítat dosazením

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3$$

$$V = \left[\frac{-\frac{5}{2}}{-1}; -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\right]$$

$$\frac{-\frac{5}{2}}{-1} = \frac{5}{2}$$

$$-\frac{25}{8} + \frac{25}{4} - 3 = \frac{-25+50-24}{8} = \frac{1}{8}$$

β) pomocí kořenů

mám 2 kořeny $x_1, x_2 \Rightarrow V = \left[\frac{x_1+x_2}{2}; \dots\right]$

dopočítat dosazením!

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3 \longrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5}{2}$$

γ) doplnění na čtverec

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x) - 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \boxed{\frac{5}{2}}\right)^2 + \underbrace{\frac{25}{8} - 3}_{\frac{1}{8}}$$

$$V = [\checkmark; \checkmark]$$

δ) derivace hledání extrémů

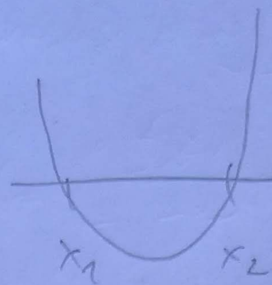
$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3\right)' = -x + \frac{5}{2}$$

$$-x + \frac{5}{2} = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{2} \quad \dots \quad V = \left[\frac{5}{2}; \dots\right]$$

Kladnost / zápornost

$f(x) > 0$ $\quad$ $f(x) < 0$

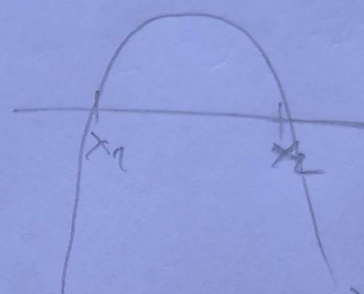
1) mám 2 kořeny: $a > 0$



$f(x) > 0$
$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

$f(x) < 0$
$x \in (x_1, x_2)$

$a < 0$



$f(x) > 0$
$x \in (x_1, x_2)$

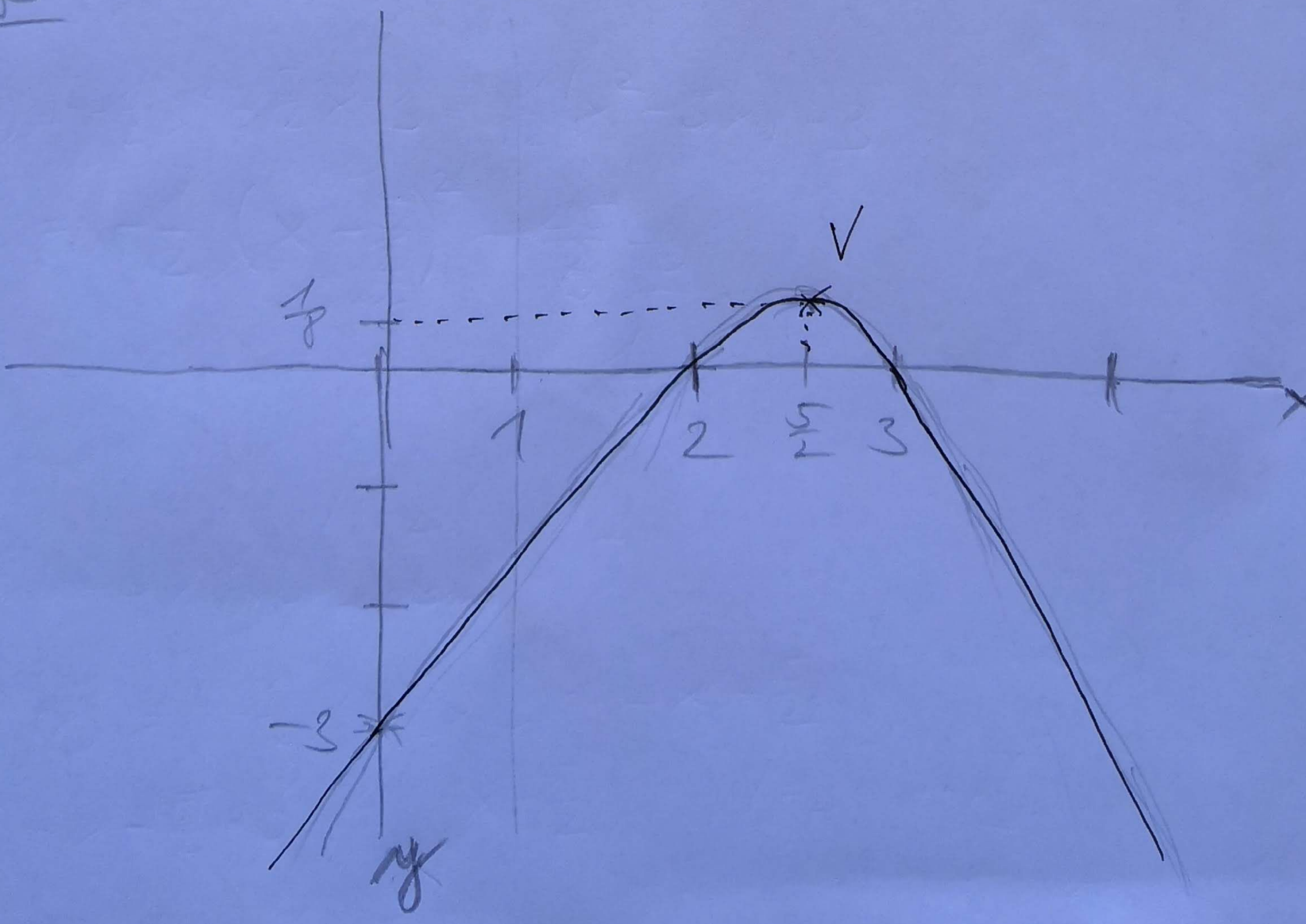
$f(x) < 0$
$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

2) mám 1 / žádný kořen

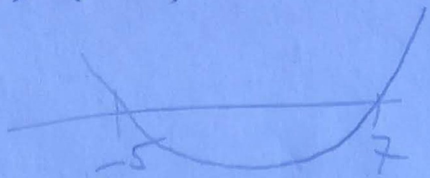
$a > 0 \ldots \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \ldots \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

graf



$\boxed{Př}$ $3x^2-6x-105 = 3(x+5)(x-7)$



$P_y = [0, -105]$

$P_x = \{[-5, 0], [7, 0]\}$

$V = [1, 3-6-105] = [1, -108]$

$\boxed{Př}$ $\frac{1}{3}x^2+x+\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x+2)(x+1)$

$P_y = [0, \frac{2}{3}]$

$P_x = \{[-2, 0], [-1, 0]\}$

$V = [-\frac{3}{2}; \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}] = [-\frac{3}{2}; \frac{9+8-18}{12}] = [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{12}]$

$\boxed{Př}$ $-4x^2+20x+24 = -4(x+1)(x-6)$

$P_y = [0, 24]$

$P_x = \{[-1; 0], [6, 0]\}$

$V = [\frac{5}{2}; -4\cdot\frac{25}{4} + 20\cdot\frac{5}{2} + 24] =$

$= [\frac{5}{2}; -25+50+24] = [\frac{5}{2}; 49]$

$\boxed{Př}$ $-x^2+6x-10$

$P_y = [0; -10]$

nemá kořeny

$V = [3; -1]$