$\boxed{P_2}$

Najděte extrémy funkce f na úsečce AB

$$f(x,y) = x^2 + 3x + 2y^2 + 4y$$
$$A = [-4;-1], \; B = [2;2]$$

$$-1 = a\cdot(-4) + b \Rightarrow b = 4a - 1 \qquad y = ax + b$$
$$2 = a\cdot 2 + b$$

$$2 = 2a + 4a - 1$$
$$6a = 3$$
$$a = \tfrac{1}{2} \quad b = 4\cdot\tfrac{1}{2} - 1 = 1$$

$\Rightarrow$ rovnice $\boxed{y = \tfrac{1}{2}x + 1, \; x \in [-4;2]}$

dosadíme do f

$$h(x) = f(x, \tfrac{1}{2}x+1) = x^2 + 3x + 2(\tfrac{1}{2}x+1)^2 + 4(\tfrac{1}{2}x+1) =$$
$$= x^2 + 3x + 2\left[\tfrac{1}{4}x^2 + x + 1\right] + 2x + 4 =$$
$$= \tfrac{3}{2}x^2 + 7x + 6$$

$$h'(x) = \boxed{3x + 7 = 0} \rightarrow x = -\tfrac{7}{3} \quad y = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{7}{3}\right) + 1 =$$
$$= -\tfrac{1}{6}$$

$$f\left(-\tfrac{7}{3}; -\tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{49}{9}\right) - \tfrac{49}{3} + 6 = -\tfrac{49}{6} + \tfrac{36}{6} = -\tfrac{13}{6}$$

bod $\left[-\tfrac{7}{3}; -\tfrac{1}{6}\right]$ je kandidát na extrém.

KRAJNÍ BODY (ty jsou vždy kandidáty)

$$f(-4;-1) = 16 - 12 + 2 - 4 = 2 \qquad f\left(-\tfrac{7}{3}; -\tfrac{1}{6}\right) = -\tfrac{13}{6}$$

MIN

$$f(2;2) = 4 + 6 + 8 + 8 = 26$$

MAX

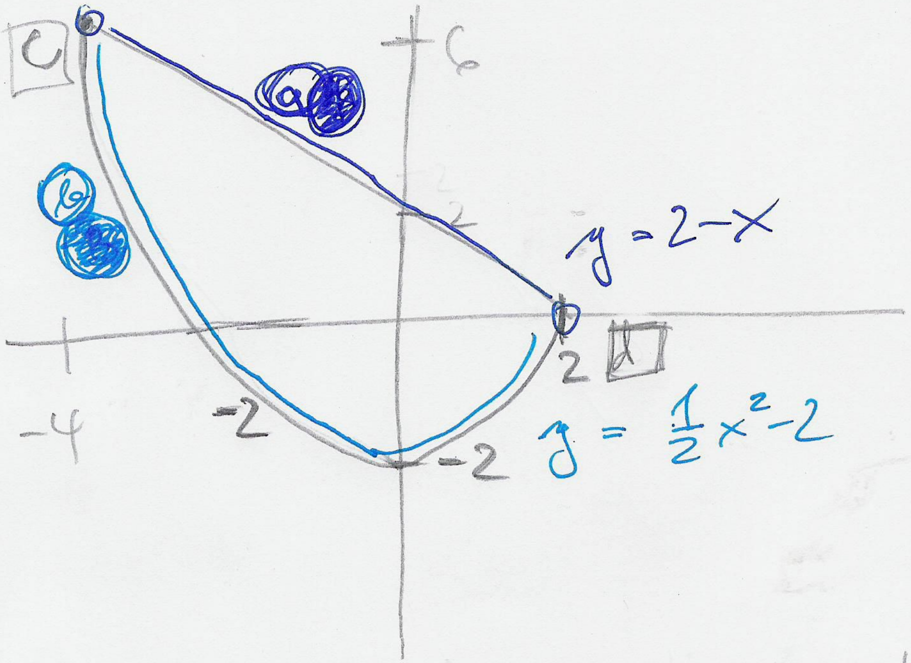
Pozn.

Lineární funkce nemá stacionární body.
$\Rightarrow$ Nejsou kandidáti uvnitř M.

Lineární funkce na lineární vazbě nemá stacionární body. $\Rightarrow$ Kandidáti jsou pouze vrcholy.

Př $f(x,y) = y - x$

$M = \{[x,y] : -4 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x^2 - 2 \le y \le 2 - x\}$



• f lineární ⇒ f nemá stacionární body

⇒ řešíme vázaný extrém pouze na hranici

(a) f lineární, lineární vazba ⇒ kandidáti na extrém pouze ve vrcholech $\boxed{c}$, $\boxed{d}$

(b) $h(x) = f(x, \frac{1}{2}x^2 - 2) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$

$h'(x) = x - 1$

$x = 1,\ y = \frac{1}{2}\,1 - 2 = -\frac{3}{2}$

bod $[1; -\frac{3}{2}]$ je kandidát na extrém

KANDIDÁTI

$f(1; -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$ MIN

$\boxed{d}$ $f(2;0) = -2$

$\boxed{c}$ $f(-4;6) = 6 + 4 = 10$ MAX

Úloha:

Najděte extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na množině

↳ spojitá

$M = \{[x,y];\ g(x,y) = 0\}$

Jacobiho metoda

Řešení soustavy

$$\partial_x f\, \partial_y g - \partial_y f\, \partial_x g = 0$$
$$g = 0$$

jsou kandidáti na extrém.

Lagrangeovy multiplikátory

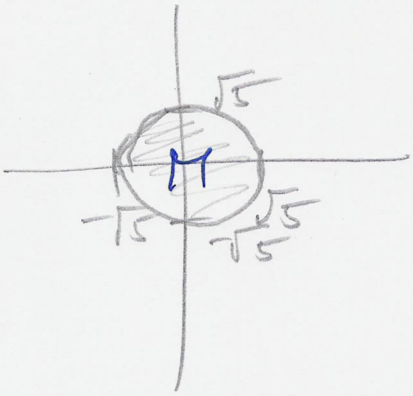
Řešení soustavy

$$\partial_x f + \lambda\, \partial_x g = 0$$
$$\partial_y f + \lambda\, \partial_y g = 0$$
$$g = 0$$

(kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je neznámá) jsou kandidáti na extrém.

Př $f(x,y) = 2x+y-5$

$M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le 5\}$



(A) kandidáti na extrém uvnitř M

f lineární $\Rightarrow$ nejsou kandidáti

(B) kandidáti na extrém na hranici M

Lagrangeho metoda

$g(x,y) = x^2+y^2-5$

$\partial_x f = 2 \qquad \partial_x g = 2x$

$\partial_y f = 1 \qquad \partial_y g = 2y$

$\partial_x f\, \partial_y g - \partial_y f\, \partial_x g = 0$

$g = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 \cdot 2y - 1 \cdot 2x = 0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{array}}$$

$x = 2y$

$4y^2 + y^2 - 5 = 0$

$5y^2 = 5$

$y = \pm 1$

$x = \pm 2$

$f(2;1) = 0 \quad$ MAX

$f(-2;-1) = -4-1-5 = -10$ MIN

Lagrangeovy multiplikátory

$$\partial_x f + \lambda \partial_x g = 0$$
$$\partial_y f + \lambda \partial_y g = 0$$
$$g = 0$$

$2 + \lambda 2x = 0 \xrightarrow{1) x \neq 0} \lambda = -\frac{1}{x}$

$1 + \lambda 2y = 0 \rightarrow 1 + -\frac{1}{x} 2y = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0$ $\quad x = 2y$

$$4y^2 + y^2 - 5 = 0$$
$$5y^2 = 5$$
$$y = \pm 1 \quad x = \pm 2 \Rightarrow$$

KANDIDÁTI
$[+2; +1]$
$[-2; -1]$

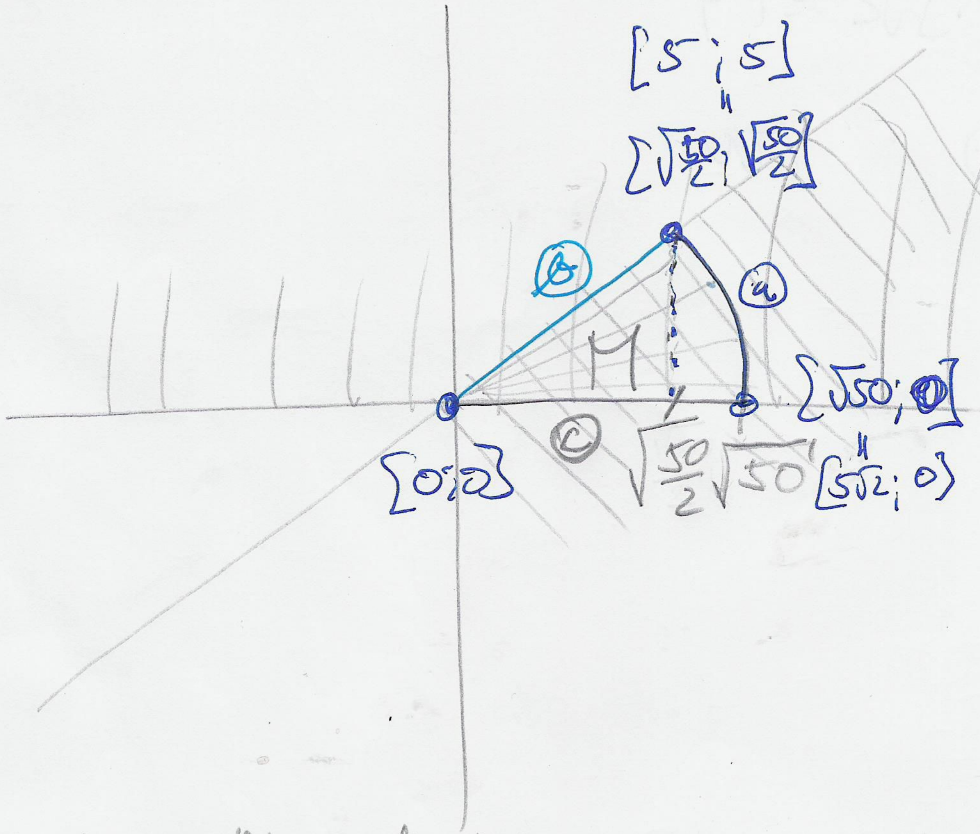
$$\boxed{3) \; x = 0 \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow x \neq 0}$$

$f(2;1) = 0$ MAX

$f(-2;-1) = -10$ MIN

$\boxed{\text{Př}}$ $f(x,y) = 7x + y$

$$M = \{[x,y] : x^2+y^2 \leq 50,\ y \geq 0,\ x \geq y\}$$



kde se vrcholy protínají

$$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2 = 50 \end{cases}$$

$2y^2 = 50$

$y = \pm\sqrt{\frac{50}{2}} =$

$= \pm\sqrt{25} = \pm 5$

(A) kandidáti uvnitř M

f lineární ⇒ f nemá stac. body ⇒ nejsou kandidáti uvnitř M

(B) kandidáti na hranici M

(a) oblouk $x^2+y^2 = 50$ Jacobiho metoda

$g = x^2+y^2-50$

$\partial_x f = 7 \quad \partial_x g = 2x$

$\partial_y f = 1 \quad \partial_y g = 2y$

$$\partial_x f\, \partial_y g - \partial_y f\, \partial_x g = 0$$

$$g = 0$$

$7 \cdot \cancel{2}y - \cancel{2}x = 0 \Rightarrow x = 7y$

$x^2+y^2-50 = 0$

$50y^2 = 50 \quad y = \pm 1 \quad x = \pm 7$

$[7;1]$ je kandidát, ostatní body neleží na hranici M

(b) vazba $y=x$

f lineární, lineární vazba ⇒ nejsou kandidáti

(c) vazba $y=0$ stejně

(d) VRCHOLY

SEZNAM KANDIDÁTŮ

$f(7;1) = 50$ MAX

$f(5;5) = 7\cdot 5 + 5 = 40$

$f(\sqrt{50};0) = 7\cdot 5\sqrt{2} \approx 49$

$f(0;0) = 0$ MIN