Průběh funkce – kvadratická, lineární lomená funkce

- D_f
- P_y, P_x
- KLADNOST/ZÁPORNOST f
- TABULKA FUNKČNÍCH HODNOT
- GRAF (kreslit průběžně)
- z grafu určit, kde je funkce rostoucí, klesající, max, min, obor hodnot

A. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $P_y = [0; \frac{15}{2}]$
- P_x:

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2} = 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\overset{\parallel}{(x+3)(x-5)}$$

$P_{x_1} = [-3; 0]$

$P_{x_2} = [5; 0]$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 15) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-5)$$ „součinový tvar"

doplnění na čtverec

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) + \frac{15}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 8$$

$$\Rightarrow V = [1; 8]$$

alternativně:

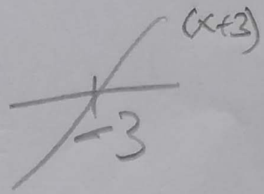
Má-li kvadratická funkce 2 kořeny x_1, x_2 tak $\longrightarrow$ $V = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}; \text{DOPOČÍTAT DOSAZENÍM } \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ DO } f\right]$

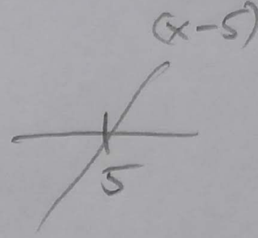
• KLADNOSŤ / ZÁPORNOSŤ – použijeme súčinový tvar

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-5)$$

TABUĽKA

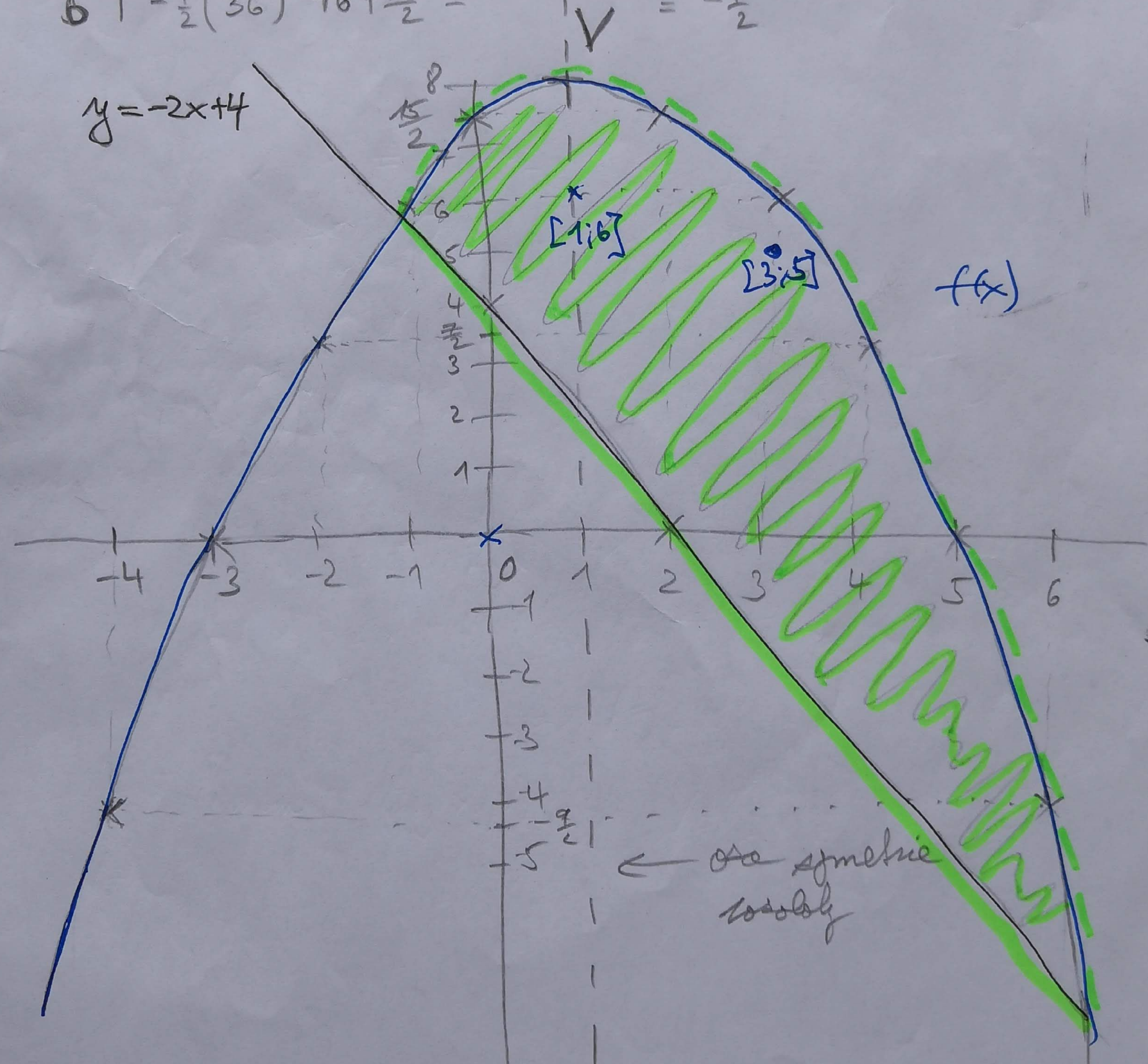
	$(-\infty;3)$	$(3;5)$	$(5;+\infty)$
$-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$





TABULKA FUNKČNÍCH HODNOT

x	$f(x)$
-4	$-\frac{1}{2}(16) - 4 + \frac{15}{2} = \frac{-24+15}{2} = \frac{-9}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}(4) - 2 + \frac{15}{2} = \frac{-8+15}{2} = \frac{7}{2}$
-1	$-\frac{1}{2} - 1 + \frac{15}{2} = \frac{-3+15}{2} = 6$
2	$-\frac{1}{2}(4) + 2 + \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$
3	$-\frac{1}{2}(9) + 3 + \frac{15}{2} = \frac{-9+6+15}{2} = 6$
4	$-\frac{1}{2}(16) + 4 + \frac{15}{2} = \frac{-8+15}{2} = \frac{7}{2}$
6	$-\frac{1}{2}(36) + 6 + \frac{15}{2} = \; = -\frac{9}{2}$



- f je rostoucí na $(-\infty; 1)$
  f je klesající na $(1; +\infty)$
  maximum v bodě $x = 1$
  obor hodnot $H_f = (-\infty; 8\rangle$

Patří body $[3;5]$, $[1;6]$, $[0;0]$ do množiny $\{y \geq -2(x-2) \wedge y < -\frac{1}{2}(x-5)(x+3)\}$?

$5 \geq -2(3-2) = -2$ ✓

$5 < -\frac{1}{2}(-2)(6) = 6$ ✓

bod $[3;5]$ ANO

$6 \geq -2(1-2) = 2$ ✓

$6 < -\frac{1}{2}(-4)(4) = 8$ ✓

bod $[1;6]$ ANO

$0 \geq -2(-2) = 4$ ✗ bod $[0;0]$ NE

B. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $P_y = [0;6]$
- P_x : $x^2 - 2x - 24 = 0$

$$\overset{\shortparallel}{(x+4)(x-6)}$$

$P_{x_1} = [-4;0]$

$P_{x_2} = [6;0]$

$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2-2x-24) = -\frac{1}{4}(x+4)(x-6)$

doplníme na čtverec

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2-2x) + 6 =$$

$$= -\frac{1}{4}(x^2-2x+1) + \frac{1}{4} + 6 =$$

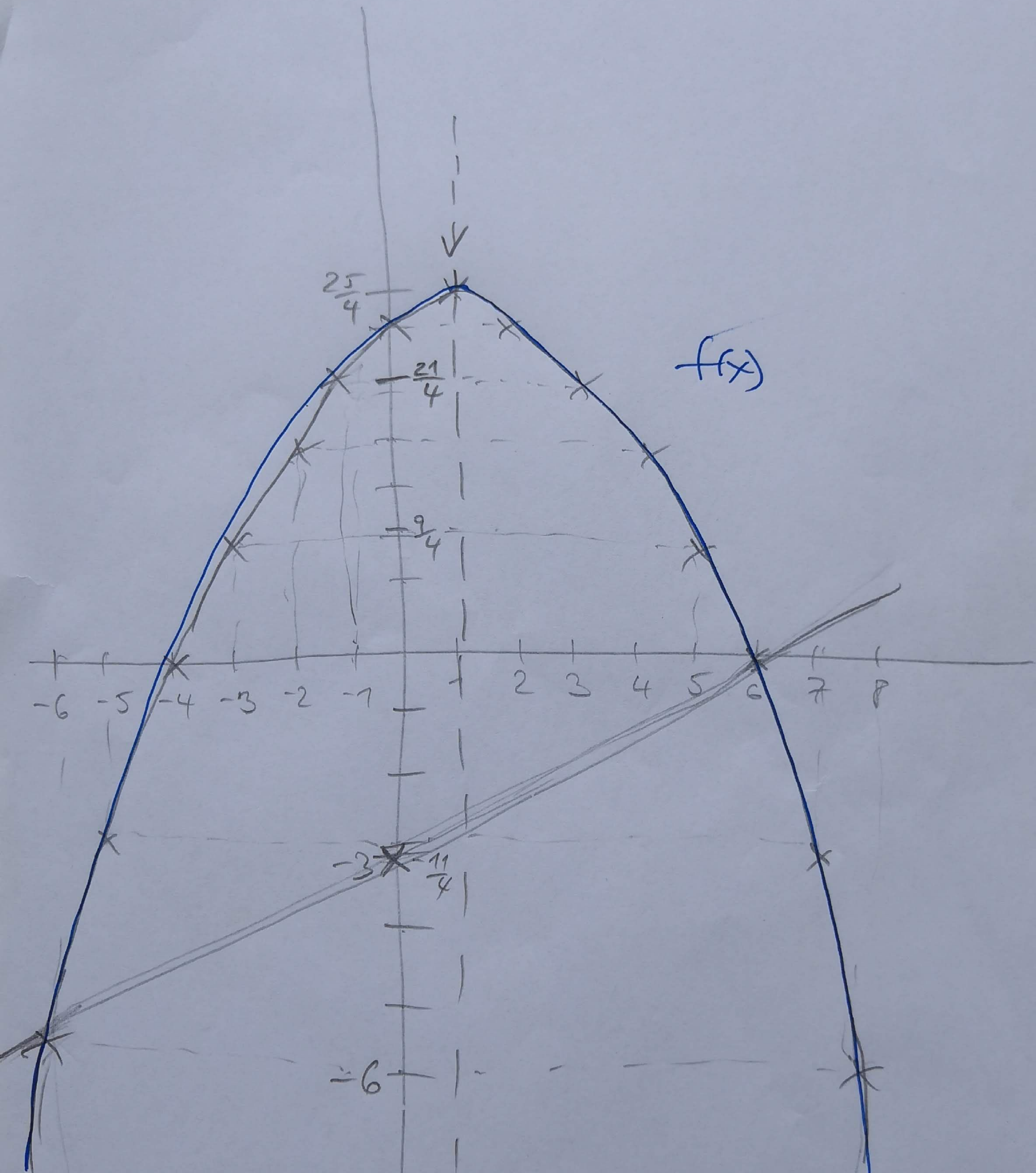
$$= -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{25}{4} \qquad V = [1; \tfrac{25}{4}]$$

KLADNOST / ZÁPORNOST

	$(-\infty;-4)$	$(-4;6)$	$(6;+\infty)$
$-\frac{1}{4}$	$-$	$-$	$-$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$
$(x-6)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

TABULKA FUNKČNÍCH HODNOT

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-6	-6	4	4
-5	$-\frac{11}{4}$	5	$\frac{9}{4}$
-4	0	6	0
-3	$\frac{9}{4}$	7	$-\frac{11}{4}$
-2	4	8	-6
-1	$\frac{21}{4}$		
0	6		
1	$\frac{25}{4}$		
2	6		
3	$\frac{21}{4}$		



osa souměrnosti

f je rostoucí na $(-\infty; 1\rangle$

f je klesající na $\langle 1; +\infty)$

maximum v bodě $x = 1$

obor hodnot $H_f = (-\infty; \frac{25}{4}\rangle$

$\frac{1}{2}(x-6) \geq -\frac{1}{4}(x+4)(x-6) \quad / \cdot 4$

Početně:

$\cancel{2x} - 12 \geq -x^2 + \cancel{2x} + 24$

$0 \geq -(x^2 - 36)$

$0 \leq (x^2 - 36)$

$0 \leq (x-6)(x+6)$

$x \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

C. $f(x) = \frac{2x-2}{x-3}$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $P_y = [0; \frac{2}{3}]$
- P_x : $\frac{2x-2}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x-2=0$

$$x = 1$$

$$P_x = [1; 0]$$

$$2x-2 : (x-3) = 2 + \frac{4}{x-3}$$
$$\frac{-2x+6}{4}$$

$f(x) = 2 + \frac{4}{x-3}$ „součtový tvar"

$$S = [3; 2]$$

alternativně

$$S = \left[\text{bod, který nepatří do } D_f ; \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-2}{x-3}\right]$$

alternativně

$$S = \left[\text{bod, který nepatří do } D_f ; \frac{\boxed{2}x-2}{\boxed{1}x-3}\right]$$

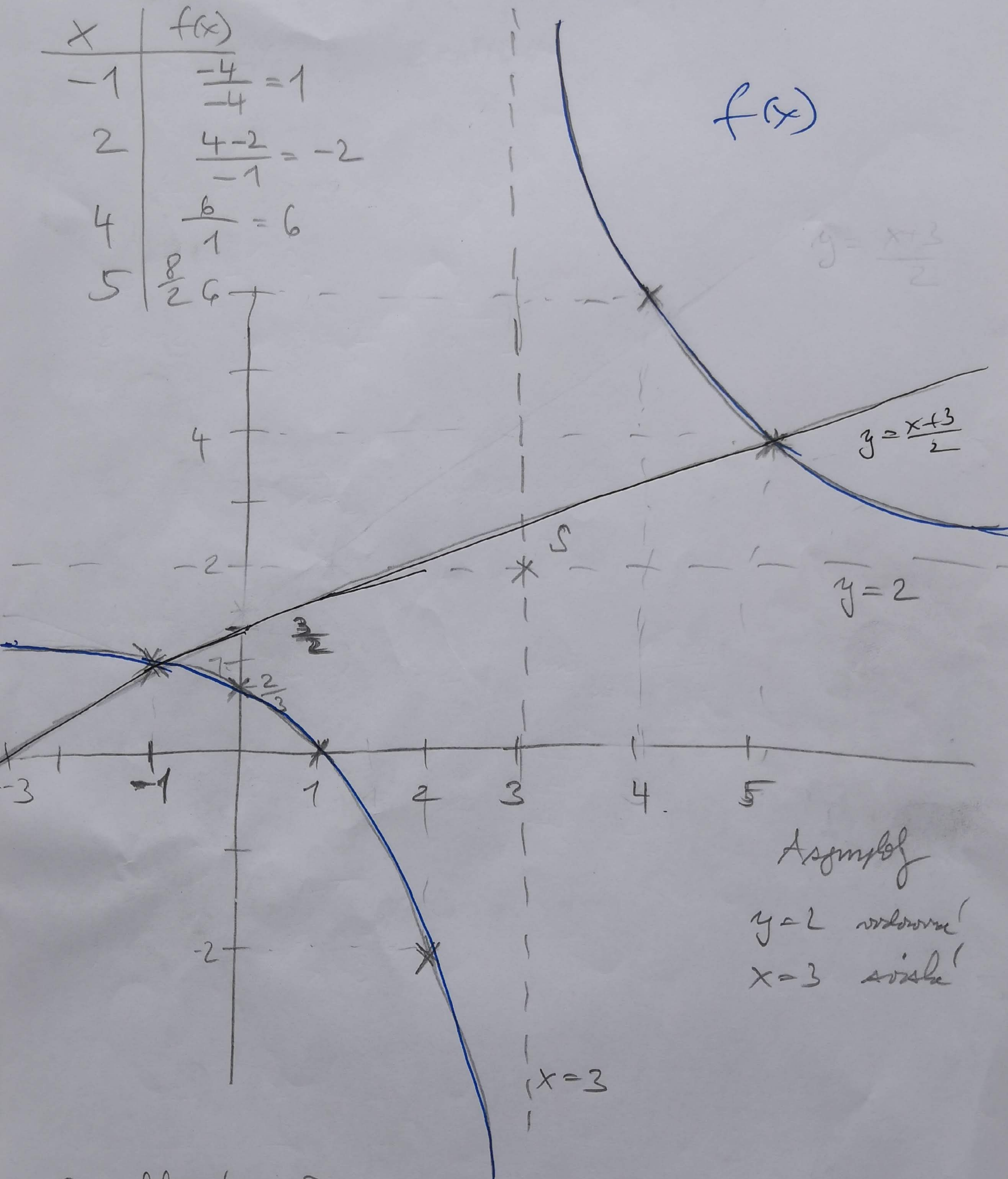
KLADNOST / ZÁPORNOST

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-3} = \frac{2(x-1)}{x-3}$$

	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$
$(x-1)$	−	+	+
$(x-3)$	−	−	+
$f(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

TABULKA FUNKČNÍCH HODNOT

x	$f(x)$
-1	$\frac{-4}{-4} = 1$
2	$\frac{4-2}{-1} = -2$
4	$\frac{6}{1} = 6$
5	$\frac{8}{2}$ 4



Asymptoty

$y = 2$ vodorovná

$x = 3$ svislá

- f je klesající na $\mathbb{R}$

  nemá maximum ani minimum (nemá extrémy)

  obor hodnot $H_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\frac{x+3}{2} \geq \frac{2x-2}{x-3}$? $x \in \langle -1; 3) \cup \langle 5; +\infty)$

kde se vyrovnají ?   GRAFICKY

$x^2-9 = 4x-4$

$x^2-4x-5=0$

$x_1 = 5$

$x_2 = -1$

POČETNĚ

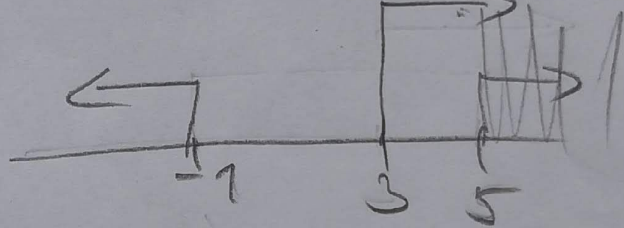
$\frac{x+3}{2} \geq \frac{2x-2}{x-3}$

1) $x \in (3; +\infty)$ … „$x-3$ je kladné"

$x^2-9 \geq 4x-4$

$x^2-4x-5 \geq 0$

$(x-5)(x+1) \geq 0$



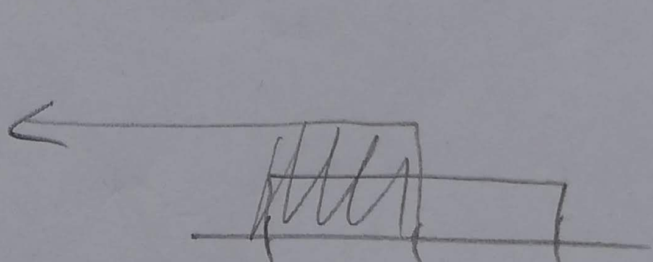
$x \in [(-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; +\infty)] \cap (3; +\infty) = \langle 5; +\infty)$

2) $x \in (-\infty; 3)$ … „$x-3$ je záporné"

$x^2-9 \leq 4x-4$

$x^2-4x-5 \leq 0$

$(x-5)(x+1) \leq 0$



$x \in \langle -1; 5\rangle \cap (-\infty; 3) = \langle -1; 3)$