2. cvičení - LS 2017

Michal Outrata

Opakování z přednášky

- Soustavy lineárních rovnic - metoda sčítací a dosazovací. Typové možnosti výsledků.
- Kvadratická funkce/rovnice - diskriminant $D = b^2 - 4ac$, kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, Vietovy vzorce, konvexita, konkávnost, parabola, vrchol paraboly, úprava na čtverec
- Lineární lomenné funkce - hyperbola, větve hyperboly, asymptota, úprava na základní tvar.
- Exponenciála a logaritmus - prostá funkce, inverzní funkce, exponent a základ, definice logaritmu, Eulerovo číslo e.

Soustavy dvou rovnic od vou neznámých Vyřešte a zapište množinu řešení v $\mathbb{R}$. Pokuste se i o grafické řešení.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ -6x + 9y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.5t - 3s &= 2 \\ 12s - 2t &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.5x - 2.5y &= -6 \\ 10y - 4x &= 24 \end{aligned}$$

Kvadratická rovnice a funkce Pro dannou kvadratickou funkci určete její vrchol, průsečíky s osami, konvexitu/konkávnost a převeďte do tvaru čtverce a součinu. Pokuste se i o náčrtek.

- $f(x) = x^2$;

i $f(x) = (x-2)^2 + 3$;

ii $f(x) = x^2 - 4x - 5$;

iii $f(x) = 4x^2 + 10x - 6$;

iv $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$;

v $f(x) = -2x^2 + 6x - 5$;

vi $f(x) = 3x^2 - 27x - 66$.

Lineární lomenné funkce Načrtněte graf následujících lomenných funkcí, určete asymptoty, definiční obor a obor hodnot.

- $f(x) = 1/x$;

a $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1.5$;

b $f(x) = (x-1)/(x-2)$;

c $f(x) = (2-x)/(x+7)$;

d $f(x) = (3x-1)/(2x-2)$;

e $f(x) = (3-x)/(-4x+1)$.

Řešení

- Soustavy lin. rovnic - popořadě: $\{x = 0, y = 1/3\}$, všechna reálná čísla, nemá řešení.
- Kvadratické funkce - chcete-li si zkontrolovat grafy, lze využít následující stránku.
  - Funkce je rovnou zadána ve tvaru čtverce a zároveň ve tvaru součinu ($f(x) = (x-0)(x-0)$). V tomto případě všechny průsečíky splývají v jeden a tím je bod $[0, 0]$. Vrchol paraboly je také v počátku.

  i Funkce je zadána rovnou ve tvaru čtverce, vidíme že je konvexní (koef. u x^2 je 1 a $1 > 0$), nemá v $\mathbb{R}$ kořeny - tedy žádný průsečík s osou x. Průsečík s osou y je v bodě $[0, 7]$. Protože není žádný průsečík s osou x, nelze funkci převést do součinového tvaru. Vrchol paraboly je v bodě $[2, 3]$.

  ii Převodem do tvaru čtverce dostaneme $f(x) = (x-2)^2-9$. Snadno lze nalézt kořeny odpovídající kvadratické funkce - $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Tedy součinový tvar lze psát jako $f(x) = (x+1)(x-5)$. Vidíme že funkce je opět konvexní (koef. u x^2 je kladný). Průsečíky s osou x - $[-1, 0]$ a $[5, 0]$; průsečík s osou y - $[0, -5]$. Vrchol paraboly je v bodě $[2, -9]$.

  iii Převodem do tvaru čtverce dostaneme $f(x) = 4(x + 5/4)^2 - 6 - 25/16$ $(-6 - 25/16 = 109/16)$. Snadno lze nalézt kořeny odpovídající kvadratické funkce - $x_1 = -3$, $x_2 = 1/2$. Tedy součinový tvar lze psát jako $f(x) = 4(x + 3)(x - 1/2)$. Vidíme že funkce je opět konvexní (koef. u x^2 je kladný). Průsečíky s osou x - $[-3, 0]$ a $[1/2, 0]$; průsečík s osou y - $[0, -6]$. Vrchol paraboly je v bodě $[-5/4, -49/4]$.

  iv Převodem do tvaru čtverce dostaneme $f(x) = 3(x + 2/3)^2 + 2/3$. Snadno lze vidět že daná funkce neprotíná osu x a tudíž ani nelze převést na součinový tvar. Vidíme že funkce je opět konvexní (koef. u x^2 je kladný). Průsečíky s osou x neexistují, průsečík s osou y je $[0, 2]$. Vrchol paraboly je v bodě $[-2/3, 2/3]$.

  v Převodem do tvaru čtverce dostaneme $f(x) = -2(x-3/2)^2-1/2$. Snadno lze vidět že daná funkce neprotíná osu x a tudíž ani nelze převést na součinový tvar. Vidíme že funkce je konkávní (koef. u x^2 je záporný). Průsečíky s osou x neexistují, průsečík s osou y je $[0, -5]$. Vrchol paraboly je v bodě $[3/2, -1/2]$.

- Lineární lomenné funkce - chcete-li si zkontrolovat grafy, lze využít následující stránku.
  - Asymptota je dána rovnicí $y = 0$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

  a Asymptota je dána rovnicí $y = 1.5$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{1.5\}$.

  b Převedeme do základního tvaru $f(x) = 1 + 1/(x - 2)$. Asymptota je dána rovnicí $y = 1$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

  c Převedeme do základního tvaru $f(x) = -1 + 9/(x + 7)$. Asymptota je dána rovnicí $y = -1$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{-7\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

  d Převedeme do základního tvaru $f(x) = 1.5 + 1/(x - 1)$. Asymptota je dána rovnicí $y = 1.5$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{1.5\}$.

  e Převedeme do základního tvaru $f(x) = 0.25 + 2.75/(4x - 1)$. Asymptota je dána rovnicí $y = 0.25$, definiční obor je $D_f = \mathbb{R} - \{0.25\}$, obor hodnot je $H_f = \mathbb{R} - \{0.25\}$.