6. Goniometrie

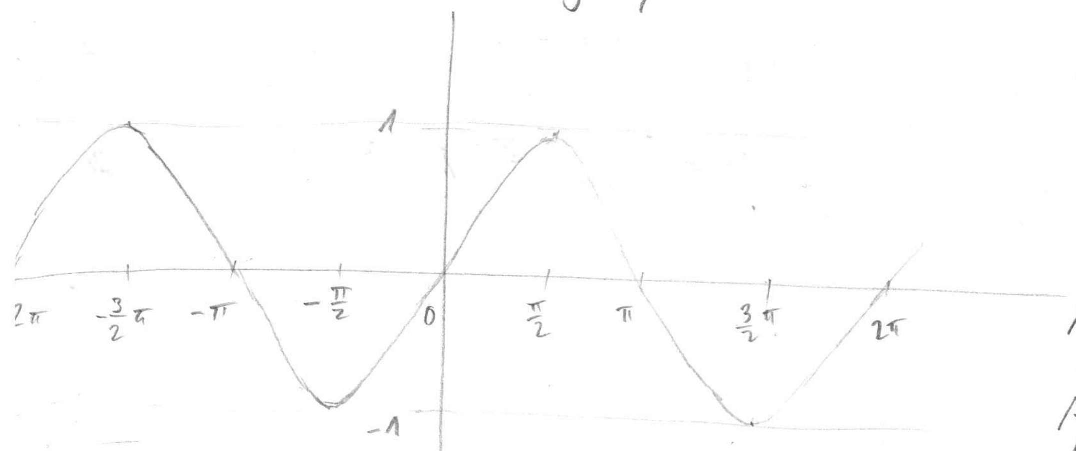
- původ slova z řeckých γωνια, gonia – úhel
  a μετρώ, metró – měřit, počítat
- tzv. goniometrické funkce lze zavést více způsoby
  - jako "funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku" – v kapitole trojúhelník
    můžeme tomu říkat konstrukce zdola
  - představení funkcí a jejich vlastností, později geometrická interpretace na konkrétních případech &
    "konstrukce shora"

6.1 Goniometrické funkce

funkce: $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $cotg\, x$

Sin x

$f: y = \sin(x)$



$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1, 1 \rangle$

lichá

periodická s periodou $T = 2\pi$

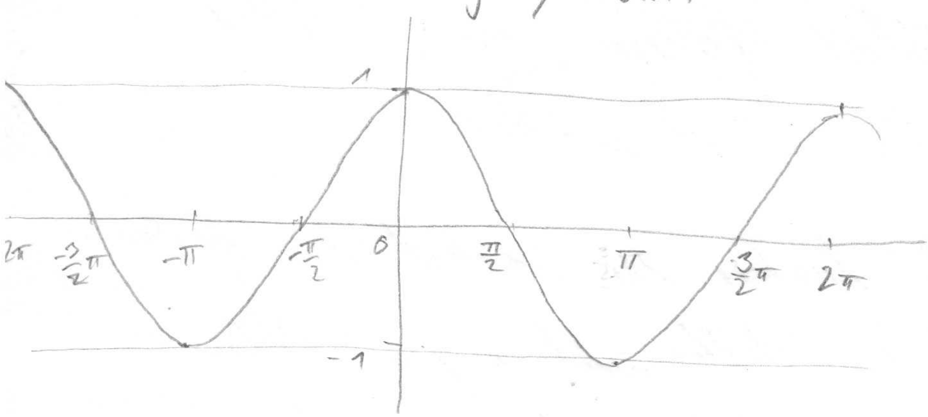
spojitá na D_f

lokální maxima a minima v $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ a $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

0 v $k \cdot \pi$

cos x

$f: y = \cos(x)$



$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1, 1 \rangle$

sudá

periodická s periodou $T = 2\pi$

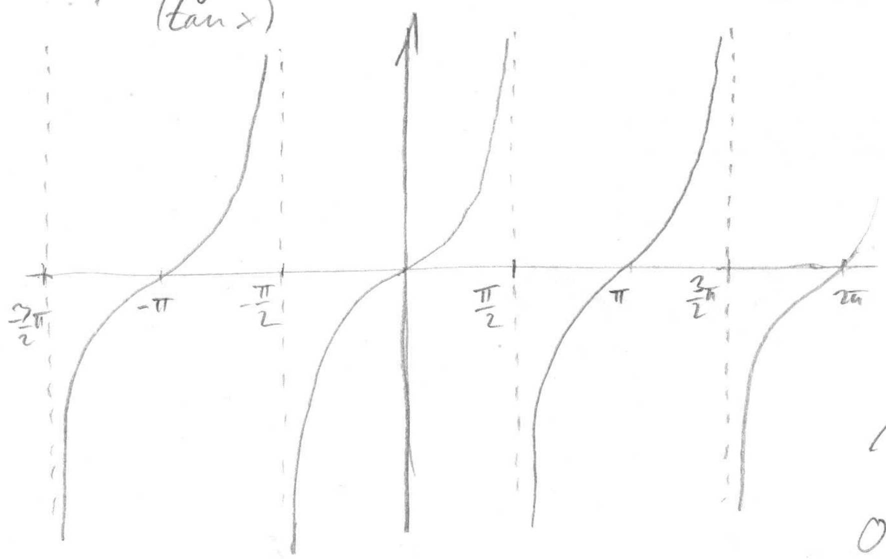
spojitá na D_f

lokální maxima a minima v $k \cdot 2\pi$ a $\pi + k \cdot 2\pi$

0 v $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Tangens x

$f: y = tg(x)$
$(\tan x)$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

$H_f = \mathbb{R}$

lichá

spojitá na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
$k \in \mathbb{Z}$

periodická s periodou $\boxed{T = \pi}$

nemá lokální maxima ani minima

0 v $k \cdot \pi$.

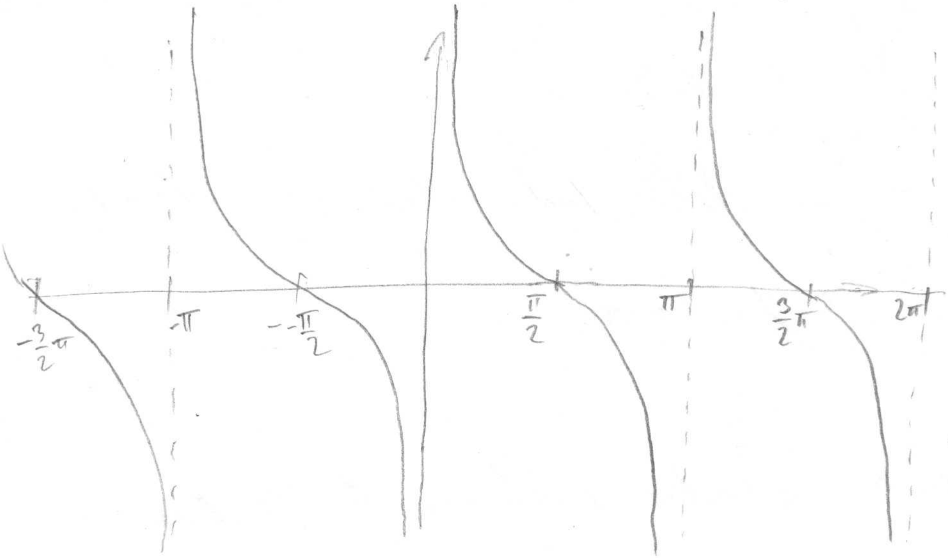
asymptoty v $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

rostoucí v $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens x

$f: y = \cot g\, x$

cotan



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$H_f = \mathbb{R}$

lichá

spojitá na $(k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

periodická s periodou $\underline{T = \pi}$

nemá lokálni maxima ani minima

0 v $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

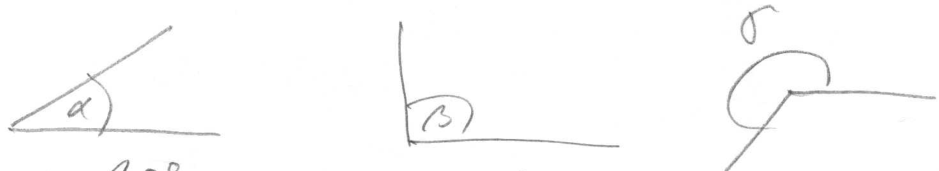
asymptoty v $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

klesajúci v $(k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

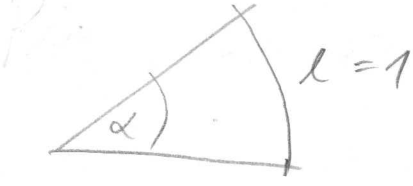
6.2 Oblúková miera vs. stupně

Veľkosť uhlu popisujeme dvěma spôsoby
- stupně
- oblúková miera (radián)

Príklad



V oblúkové míře úhel o veľkosti 1 rad vymeruje na jednotkovej kružnici oblúk dĺžky 1.



$r = 1$

$\alpha = 1$ rad

Pokud vezmu jednotkovou kružnici, ale i kružnici s poloměrem r, odpovídá úhlu 1 rad oblouk délky r.

Protože plný úhel je 2π, délka odpovídajícího oblouku je $2\pi r$ ... tedy obvod kružnice.

Velikost v obloukové míře snadno získáme trojčlenkou

víme, že plný úhel $2\pi \sim 360°$.

Tak např.

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \dots\dots & 360° \\ x & \dots\dots & 30° \end{array}$$

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{30}{360}$$

$$x = \frac{30}{360}2\pi = \frac{1}{12}2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Je dobré si pamatovat často se vyskytující hodnoty

15°	$\frac{\pi}{12}$
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

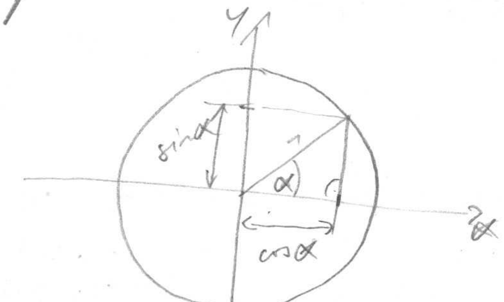
Ostatní snadno poskládáme

$$135° = 90° + 45° \longrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

6.3 Hodnoty goniometrických funkcí

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×
$\operatorname{cotg} x$	×	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

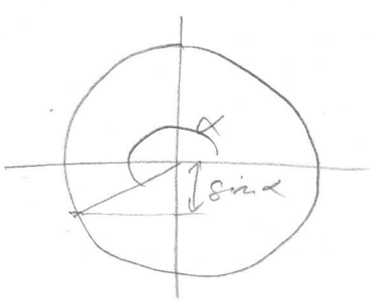
U hodnot větších než $\frac{\pi}{2}$ je třeba začít dávat pozor na znaménko. Pomůže jednotková kružnice.



Na $\sin\alpha$ můžeme nahlížet jako na y-souřadnici bodu na kružnici o poloměru 1, jehož průvodič svírá s osou x úhel α. $\cos\alpha$ pak odpovídá x-souřadnici.

Příklad. Spočtěte $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

$$\alpha = \frac{7}{6}\pi = \frac{6}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = \pi + \frac{1}{6}\pi$$



Z obrázku je zřejmé, že $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) < 0$,
Zároveň ze známých hodnot vidím, že $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \pm\frac{1}{2}$

Dohromady $\Rightarrow \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

6.4 Goniometrické identity (vzorce)

Spousta vzorců je v Plus4U, ještě více na wikipedii.

Tyto je nutné znát: Vzorce jsou platné pro všechna x, pro která mají výrazy smysl.

$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin(x)$ lichá fce

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos(x)$ sudá fce

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$ lichá fce

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(x) = -\operatorname{cotg} x$ lichá fce

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Pozor: $\cos^2 x = (\cos x)^2$
$\cos^2 x \neq \cos(x^2)$ častá chyba

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \cos y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \sin y$

$\cos(x \pm 2\pi k) = \cos(x)$ $\quad$ $\sin(x \pm 2\pi k) = \sin x$ $\quad$ $\operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(x \pm k \cdot \pi) = \operatorname{cotg}(x)$

Poznámka

- všimněte si, že tabulku hodnot si nemusíme pamatovat celou, když známe goniometrické vzorce

víme-li například: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

potom $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{6})}$

$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ✓

- Pomocí goniometrických vzorců mohu snadno vyčíslit gon. fce. v různých bodech

např. $\cos(\frac{11}{6}\pi) = \cos(\frac{11}{6}\pi - 2\pi) = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{5}{4}\pi) = \sin(\pi + \frac{1}{4}\pi) = \underset{0}{\sin\pi} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cos\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.5 Goniometrické rovnice

V kapitole 4 jsme zavedli pojem rovnice. Jde o úlohu nalezení všech $x \in M$, pro která nastane rovnost

$$f(x) = 0 .$$

Podle podoby funkce $f(x)$ pak rozlišujeme různé druhy rovnic. Pokud $f(x)$ je nějaká goniometrická funkce, nebo jejich kombinace, hovoříme o goniometrických rovnicích.

Pro řešení goniometrických rovnic je klíčová dobrá znalost funkcí a jejich vlastností, funkčních hodnot a goniometrických identit.

Obecná strategie

1. zjednodušení výrazů v rovnici
   cílem je získat rovnici ve tvaru
   goniometrická fce (výraz s x) = číselný výraz.
2. vyjádření nutných podmínek rovnosti
3. závěrečné úpravy.

Příklad. $\sin(3x) = 1 - \sin(x)$ Řešte v $\mathbb{R}$

$$2\sin(3x) = 1$$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2} \iff z = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

ale $z = 3x \Rightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2}{3}\pi}$

Poznámka: na cvičení uvidíme příklady, které je nutno řešit speciálně, např. substitucí.

Př. $\cos^2 x + \cos x = 0$

substituce $y = \cos x$

$$y^2 + y = 0$$

$$y(y+1) = 0 \iff \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}$$

$\cos x = 0 \iff x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$\cos x = -1 \iff x_2 = -\pi + k \cdot 2\pi$