4 Rovnice a nerovnice

4.1 Rovnice vs. rovnost

symbol "=" ("rovná se") má v různých kontextech různé významy.

Ilustrace: uvažujme rovnici

$$0\cdot x = 1$$

vidíme, že pro žádné $x\in\mathbb{R}$ nenastává rovnost, přesto používáme stejný symbol jako v případě rovnosti.

Můžeme si pomoci dodatečným symbolem, např. $\stackrel{?}{=}$

Řešte rovnici $\quad 0\cdot x \stackrel{?}{=} 1$

Jinými slovy: nalezněte taková x ($\in\mathbb{R}$), aby nastala rovnost. ($\stackrel{?}{=} \longrightarrow =$)

Co je tedy rovnost?

Definice: Rovnost je vztah (relace) vyjadřující totožnost objektů v tomto vztahu

Poznámky: – Vztah rovnosti má řadu vlastností, zmíníme 3 z nich:

- každý objekt je roven sám sobě (reflexivita)

$$x=x$$

- symetrie

$$x=y \iff y=x$$

- trasitivita

$$x=y \wedge y=z \implies x=z$$

Příklady:

$$5=5 \qquad a=5 \text{ (přiřazení)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$(a+b)(a-b)^{\cancel{2}}=a^2-b^2$$

Mnoho úloh lze formulovat takto.

Úloha (U1): Nalezněte všechna čísla z daného číselného oboru M, pro která jsou definovány funkce f a g proměnné a nabývají téhož hodnot, tedy

$$f(x)=g(x) \qquad x\in M$$

Definice: Úloha (U1) se nazývá rovnice s neznámou x. $f(x)$ se nazývá levá strana rovnice, $g(x)$ pravá strana rovnice.

Poznámky:

- je-li $g(x)=0$, říkáme, že rovnice je v anulovaném tvaru
- podle podoby/typu funkcí rozlišujeme různé druhy rovnic
  lineární, kvadratické, polynomiální exponenciální, logaritmické atd..
- pojem lze snadno zobecnit pro více proměnných - využitím funkcí více proměnných
  $$f(x,y,\dots)=g(x,y,\dots)$$
- f a g mohou obecně zastupovat nějaké algebraické výrazy. Hranice mezi funkcí a algebraickým výrazem je zde tenká.

Příklady: Řešte v oboru reálných čísel

$$x+7=9$$

$$2^x=16$$

$$\log_7 x=3$$

4.2. Úpravy rovnic

Rovnici se sérií úprav snažíme převést do tvaru, ze kterého je řešení patrné.
Vlastně jednotlivými úpravami získáváme nové rovnice.
Je třeba ale volit takové úpravy, při nichž kořen rovnice původní zůstává i kořenem rovnice nové (žádný kořen se nesmí ztratit).

Definice: Úpravy rovnice, při nichž kořen rovnice původní je i kořenem nové rovnice se nazývají důsledkové úpravy. Rovnice vzniklá těmito úpravami se nazývá důsledková rovnice.
Pokud navíc každý kořen důsledkové rovnice je i kořenem původní rovnice, hovoříme o ekvivalentních úpravách a ekvivalentní rovnici.

Ekvivalentní úpravy:

- prohození stran rovnice
  $$f(x)=g(x) \iff g(x)=f(x)$$
- vynásobení obou stran rovnice nenulovým číslem nebo funkcí
  $$f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot c=g(x)\cdot c \quad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
  $$f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), \quad h(x)\neq 0 \;\; \forall x\in M$$

- přičtení čísla nebo funkce k oběma stranám rovnice

$$f(x)=g(x) \iff f(x)+c=g(x)+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=g(x) \iff f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$$

- složení s prostou (injektivní) funkcí

$$f(x)=g(x) \iff h(f(x))=h(g(x))$$

$h(x)$ prostá

(pozor na definiční obory a obory hodnot)

Příklad: "logaritmování"

$$f(x)=g(x) \iff \log_a(f(x))=\log_a(g(x))$$

$f(x), g(x)>0 \ \forall x\in M$

Obecné neekvivalentní úpravy:

- skládání s neprostou funkcí

např. umocnění na sudé mocniny

Poznámka: Při používání <u>neekvivalentních důsledkových</u> úprav **můžeme** získat kořeny, které původní rovnici neřeší. Potom je <u>nutné</u> provést <u>zkoušku</u>, tedy dosadit získané kandidáty na kořeny do <u>původní</u> rovnice a ověřit, zda jsou skutečnými kořeny.

- Zkouška je však vhodné pro jistotu provést vždy.

Příklad: 1) $3x-6=12 \quad /+6$ Pouze ekvivalentní

$3x=18 \quad /:3$ úpravy, není nutné

$\underline{\underline{x=6}}$ provést zkoušku

2) $\sqrt{5-x^2}=x-1 \quad /^2$ neekvivalentní úprava

$5-x^2=x^2-2x+1 \quad /-5+x^2$

$0=2x^2-2x-4 \quad /:2$

$0=x^2-x-2$

$0=(x-2)(x+1) \qquad x_1=2 \quad x_2=-1$

Zkouška: $x_1=2$: $LS=\sqrt{5-4}=\sqrt{1}=1$

$PS=2-1=1$

$LS=PS$ ✓

$x_2=-1$: $LS=\sqrt{5-(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$PS=-1-1=-2$

$LS\neq PS$

Řešením původní rovnice je pouze kořen $\underline{\underline{x_1=2}}$

4.3 Nerovnice a nerovnost

Veškeré úvahy, které jsme použili k popisu a konstrukci rovnic, můžeme vztáhnout i na nerovnice.

Původní symbol rovnosti nahradíme některým ze symbolů nerovnosti, tj. "$=$" $\longrightarrow <, >, \leq, \geq$

! u nerovností musíme dát pozor na násobení záporným číslem nebo funkcí !

$\longrightarrow$ obrací se nerovnost

např. $-2 < 3 \quad /\cdot(-1)$ platná nerovnost

špatně: $+2 < -3$ neplatná nerovnost

správně $+2 > -3$ platná nerovnost

Příklad: $2x+4 > -7 \quad /-4$

$$2x > -11 \quad /:2$$

$$x > -\frac{11}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{11}{2}, \infty\right)$$

Poznámka: – ekvivalentní úpravou lze vždy převést rovnici/nerovnici do anulovaného tvaru

$$f(x) = g(x) \quad /-g(x)$$

$$\underbrace{f(x)-g(x)}_{f'(x)}=0$$

$$f'(x) = 0$$

4.4 Lineární a kvadratické rovnice

Definice: Rovnice ve tvaru

$$P=Q \qquad (P<Q, >, \leq, \geq)$$

kde P a Q jsou polynomy se nazývá polynomická rovnice (někdy algebraická)

(dále budu předpokládat tvar $P=0$, v duchu poslední poznámky)

Podle stupně polynomu P rozlišujeme několik speciálních polynomických rovnic/nerovnic

st P = 1 : lineární rovnice /nerovnice

st P = 2 : kvadratická rovnice /nerovnice

st. P = 3 : kubická rovnice /nerovnice

4.4.1 Lineární (ne)rovnice

Postup řešení je přímočarý – stačí základní ekvivalentní úpravy.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$ax + b = 0 \quad /-b$$
$$ax = -b \quad /:a$$
$$x = \frac{-b}{a}$$

stejně pro nerovnice

4.4.2 Kvadratické (ne)rovnice

Kvadratická rovnice má obecný tvar

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

Nabízí se řada postupů

1) vzorcem $\quad x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

číslu $D = b^2 - 4ac$ říkáme diskriminant

$D > 0$ ... rovnice má 2 reálné kořeny

$D = 0$ ... rovnice má 1 dvojnásobný kořen

$D < 0$ ... rovnice nemá žádný reálný kořen

2) Doplnění na čtverec dvojčlenu a dále rozložení na kořenové činitele (Podrobně v kapitole 3)

3) Využití "Vietových vzorců"

z rozkladu na kořenové činitele vidíme

$$a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$$

$$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=0$$

$$ax^2-a(x_1+x_2)\cdot x+a\cdot x_1\cdot x_2=0$$

srovnáním s obecným tvarem kvadr. rovnice

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2&=\frac{c}{a}\end{aligned}}$$ Vietovy vzorce

4) Rozklad pomocí speciálních vzorců (viz kapitola 3)

např. $b=0$: $(ax^2-c)=0$ zde $a, c>0$

$$a\left(x^2-\frac{c}{a}\right)=0$$

$$a\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\cdot\left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0$$

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$$

Strategie řešení kvadratických nerovnic

1. nalezení nulových bodů, tj. kořenů
2. rozdělení číselné osy na intervaly s kořeny na krajích
3. nalezení znamének kořenových činitelů v jednotlivých intervalech
4. shrnutí

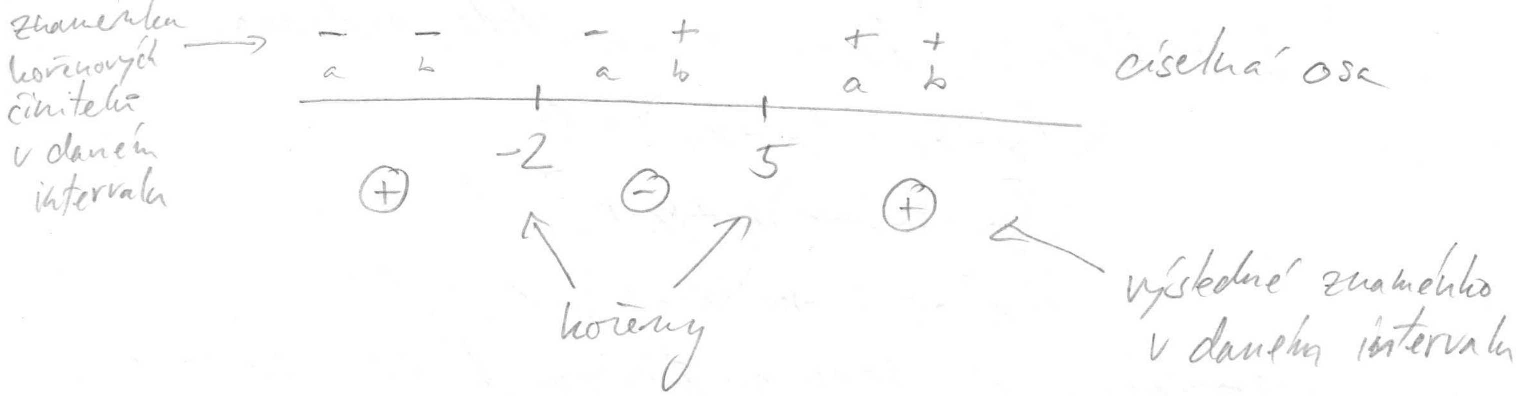
Pomáhá grafické znázornění

Příklad $3x^2 - 9x + 30 < 0$

nejprve kořeny: $3x^2 - 9x + 30 = 0$

$$3(x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$3(\underset{a}{x-5}) \cdot (\underset{b}{x+2}) = 0$$



odsud vidíme řešení: $\underline{x \in (-2\,;\,5)}$

4.4.3 Soustavy lineárních rovnic

Může se stát, že neznámých bude více než jedna. Obecně potřebuji tolik rovnic, kolik je neznámých, abych mohl neznámé nalézt.

Postup řešení soustavy lineárních rovnic je přímočarý:

2 způsoby

- z jedné rovnice vyjádřím jednu proměnnou a dosadím do rovnice druhé
- rovnice vhodně sečtu / odečtu, čímž jednu neznámou vyloučím a dostanu výsledek

Mohu očekávat 3 kategorie výsledků:

1) n-tici čísel, kde n je počet neznámých
→ existuje právě 1 řešení

2) v průběhu řešení narazím na výraz typu
$2=2$, $0=0$ apod.
⇒ soustava má nekonečně mnoho řešení

3) v průběhu řešení narazím na výraz typu
$1=2$, $0=1$ apod.
⇒ soustava nemá žádné řešení

Poznámka: vyřešit soustavu n rovnic o n neznámých znamená nalézt n čísel, pro které budou všechny rovnice splněné <u>zároveň</u>.

4.5 Speciální rovnice

4.5.1. rovnice s odmocninami

Patrně nejčastější typ rovnice, k jejímuž řešení potřebujeme neekvivalentní úpravu.

Příklad: $\sqrt{3x-2} = x \quad /^2$

$3x-2 = x^2$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Zkouška: x_1: $LS = \sqrt{1} = 1$

$PS = 1$

$LS = PS$

x_2: $LS = \sqrt{6-2} = 2$

$PS = 2$

$LS = PS$

✓

4.5.2 Rovnice s absolutní hodnotou

Připomeňme absolutní hodnotu:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Rovnice s absolutní hodnotou musíme řešit zvlášť pro různá znaménka výrazu v absolutní hodnotě. Opět lze ilustrovat graficky

Př. $|x-7| = 5$

$x=7$ je nulový bod výrazu $x-7$

$x < 7$	$x > 7$
$x-7<0$	$x-7>0$
$|x-7| = -(x-7) = -x+7$	$|x-7| = x-7$
$-x+7=5$	$x-7=5$
$x=2$	$x=12$

7, $\mathbb{R}$