

Složené úroky

Rozhodli jste se spořit peníze na spořicímu účtu. Vaše banka vám nabízí spořicí účet s úrokovou sazbou p % p.a. (*per annum*) s úročením na konci každého měsíce. V půlce každého měsíce (tedy před úročením) vložíte na účet částku v .

Úkol

1. Kolik peněz naspoříte po N letech?
2. Po kolika letech naspoříte milion?

Můžete srovnat své výsledky s matematickým řešením níže.

Analytické řešení

Zaveďme značení:

- S_i stav na konci i -tého měsíce
- q měsíční úročí faktor

Úplně na počátku (před prvním úročením) bude na účtu pouze první vklad

$$S_0 = v$$

Úročí se každý měsíc, tj. dvanáctkrát do roka. Celkové zúročení za rok musí odpovídat p.a. úrokové sazbě. Tedy:

$$q^{12} = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Odsud plyne

$$q = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

Částka na účtu tak narůstá ve dvou krocích:

1. vkladem v ,
2. měsíčním zúročením, tj. přenásobením q .

Proto

$$S_0 = v$$

$$S_1 = v \cdot q$$

$$S_2 = (v \cdot q + v) \cdot q = v \cdot q^2 + v \cdot q$$

$$S_3 = ((v \cdot q + v) \cdot q + v) \cdot q = v \cdot q^3 + v \cdot q^2 + v \cdot q$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} S_n &= v \cdot q^n + v \cdot q^{n-1} + \dots + v \cdot q^2 + v \cdot q \\ &= v \cdot q \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1) \\ &= v \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Z S_n můžeme vyjádřit n jako

$$n = \frac{\ln \left(\frac{S(q-1)}{v \cdot q} + 1 \right)}{\ln q}$$