# BMPI - poznámky k přednášce
v0.3

Václav Alt, Unicorn University

Podzim 2021

# Obsah


**1 Analytická geometrie** **3**

1.1 Základní pojmy . . . 3

1.1.1 Bod a souřadnice . . . 4

1.1.2 Vzdálenost bodů (délka úsečky) . . . 4

1.1.3 Střed úsečky . . . 5

1.1.4 Orientovaná úsečka, vektor . . . 6

1.1.5 Skalární součin a odchylka vektorů . . . 8

1.1.6 Dodatky . . . 8

1.2 Geometrický útvar a jeho analytické vyjádření . . . 9

1.3 Analytická geometrie v rovině . . . 9

1.3.1 Přímka . . . 9

1.3.2 Vzájemná poloha přímek . . . 12

1.3.3 Kuželosečky . . . 13

1.3.4 Vzájemná poloha přímky a kuželosečky . . . 13

1.4 Analytická geometrie v prostoru . . . 13

1.5 Složitější úlohy . . . 13

Toto je přepis pracovních poznámek k přednáškám z předmětu Matematický proseminář (BMPI) na Unicorn University. Zatím tu toho moc není a v tom, co tady je, je patrně hodně chyb. Taky tady nejsou moc hezké obrázky. Postupně budu poznámky vylepšovat. Nebo alespoň doplňovat. Připomínky jsou vítány.

Šíření těchto poznámek mimo rámec BMPI je zakázáno. Zakázáno!

# Kapitola 1

# Analytická geometrie

## 1.1 Základní pojmy

Polák říká [1]:

> Analytická geometrie je založena na vyjadřování geometrických útvarů a vztahů mezi nimi pomocí metody souřadnic a vektorové algebry.

Jde tedy o geometrii, ale výhradně početně. V této kapitole nás čeká

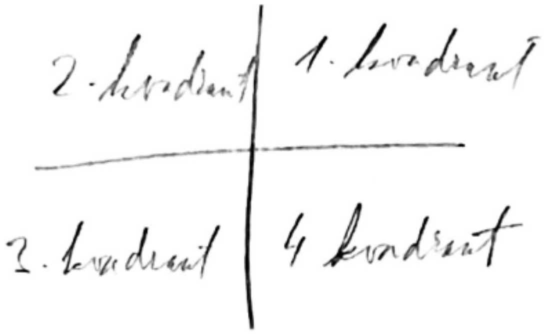
- popis základních objektů (většinou lineárních): bod, přímka, rovina, kružnice (a případne elipsa)
- vyšetřování vztahů mezi nimi: vzdálenost, vzájemná poloha, úchylky

Připomeňte si pojem kartézkého součinu a uspořádaných dvojic.

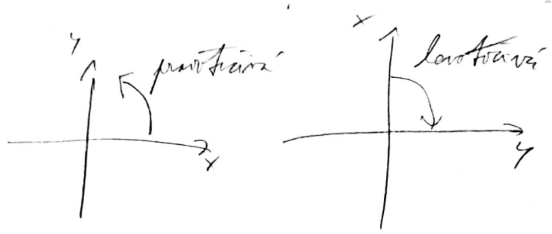
**Definice 1.** *Kartézská soustava souřadnic je soustava navzájem kolmých přímek, které se protínají v jednom bodě (počátku). Na všech osách obvykle volíme stejnou jednotku.*

*Poznámky.*

- Pojmenováno po René Descartovi (latinsky Cartesius →kartézská soustava)
- Kartézská soustava v rovině: 2 kolmé osy v této rovině.
- Kartézská soustava v prostoru: 3 navzájem kolmé osy
- Společný bod se nazývá počátek - obvykle značíme 0 nebo $O$
- Osy obvykle značíme postupně $x$, $y$, $z$
- Celou soustavu značíme $Oxy$, resp. $Oxyz$
- Na každé ose ovlíme jednotkový bod $I$ ($J$, $K$,...). Pokud $|OI| = |OJ| = |OK|$, hovoříme o ortonormální soustavě.




Obrázek 1.1: Obyklé značení kvadrantů



Obrázek 1.2: Pravotočivá a levotočivá soustava

### 1.1.1 Bod a souřadnice

**Definice 2.** *Nechť $A$ je bod v rovině (prostoru), ve kterém je zavedena kartézská soustava $Oxy$ ($Oxyz$). Bodem $A$ veďme rovnoběžky s osami: $p_1 \parallel y$, $p_2 \parallel x$. Přímka $p_1$ protne osu $x$ v bodě odpovídajícím číslu $a_1 \in \mathbb{R}$, $p_2$ protne osu $y$ v bodě odpovídajícím číslu $a_2 \in \mathbb{R}$ (v prostoru podobná konstrukce pomocí rovnoběyných rovin). Čísla $a_1, a_2, \ldots$ nazýváme souřadnice bodu $A$ vzhledem k $Oxy$.*

*Poznámky.*

- v $n$-rozměrném prostoru udáváme polohu bodu zadáním $n$ čísel - souřadnic.
- na $Oxy \ldots$ můžeme nahlížet jako na kartéský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$. Prvky skalárního součinu jsou uspořádané $n$-tice.

### 1.1.2 Vzdálenost bodů (délka úsečky)

**Tvrzení 1.** *Vzdálenost $|AB|$ bodů $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ je dána předpisem*

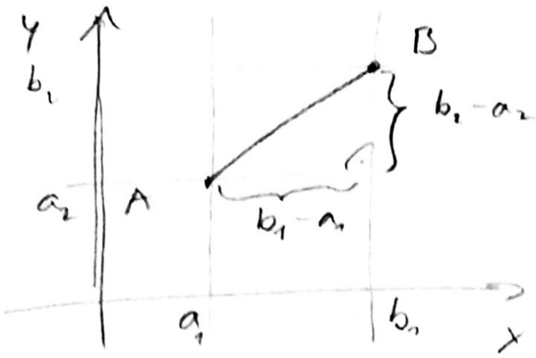
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

*Lze přímočaře zobecnit do $n$ rozměrného prostoru:*

$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

TODO: rozměrová analýza

*Důkaz.* Z obrázku 1.3 a Pythagorovy věty. □




Obrázek 1.3: Vzdálenost dvou bodů

### 1.1.3 Střed úsečky

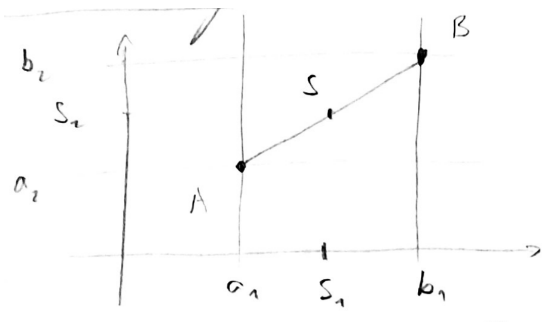
**Tvrzení 2.** *Nechť* $A, B \in \mathbb{R}^n$. *Střed úsečky* $AB$ *má souřadnice*

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$$

*Důkaz.* Z obrázku 1.4 je vidět, že například souřadnice $S_1$ je dána výrazem

$$S_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Pro ostatní souřadnice stejně. □




Obrázek 1.4: Střed úsečky dvou bodů

### 1.1.4 Orientovaná úsečka, vektor

**Definice 3.** *Orientovaná úsečka je úsečka doplněná o orientaci. Značíme $\overrightarrow{AB}$, bodu $A$ říkáme počáteční bod, bodu $B$ koncový bod. Velikost orientované úsečky je stejná jako velikost odpovídající úsečky, tj. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$. Orientovanou úsečku $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ reprezentujeme $n$-ticí souřadnic:*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n]$$

*Obvykle kreslíme jako šipku z bodu $A$ do bodu $B$.*

**Definice 4** (Vektorový prostor)**.** *Nechť $V$ je neprázdná množina, jejíž prvky umíme sčítat a násobit reálným číslem. Předpokládejme navíc, že množina $V$ je vůči těmto operacím uzavřená, tj.*

- *uzavřenost vůči sčítání*

$$x + y \in V,\ \forall x, y \in V$$

- *uzavřenost vůči násobení*

$$\alpha x \in V,\ \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

*Množina $V$ se nazývá reálný vektorový prostor, pokud platí:*

- *sčítání je asociativní a komutativní, tj.*

$$(\forall x, y, z \in V)[x + y = y + x;\ x + (y + z) = (x + y) + z]$$

- *existence nulového prvku: Existuje prvek $0 \in V$ takový, že pro každý prvek $x \in V$ platí $x + 0 = 0 + x = x$. Neboli*

$$(\exists 0 \in V)(\forall x \in V)[x + 0 = 0 + x = x]$$

- *existence opačného prvku: pro každý prvek $x \in V$ existuje $y \in V$ takový, že platí $x + y = y + x = 0$. Neboli*

$$(\forall x \in V)(\exists y \in V)[x + y = y + x = 0]$$

- *násobení vektoru číslem je asociativní (na pořádí závorek nezáleží)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x]$$

- *násobení číslem je distributivní ke sčítání prvků $V$ (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})[\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y]$$

- *násobení číslem je distributivní ke sčítání čísel (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x]$$

*Prvky vektorového prostoru se nazývají vektory.*

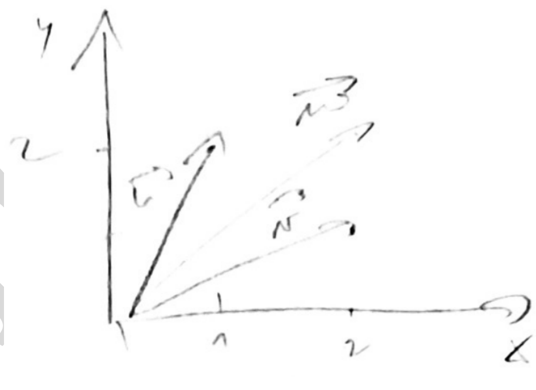
**Tvrzení 3.** *Množina všech orientovaných úseček se sčítáním a násobením po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Nulovým prvkem je* $\vec{0} = [0, 0, \dots, 0]$, *opačným prvkem k* $\vec{x}$ *je* $-\vec{x}$.

*Důkaz.* Stačí ověřit všechny vlastnosti vektorového prostoru - většinu splněny díky obyčejné aritmetice.

□

*Poznámky.*

- Tvrzení "vektor je šipka" je nesprávné, ale "šipka je vektor" už je správně.
- Orientované úsečky tedy umíme sčítat a násobit číslem a dostáváme tak nové orientované úsečky.
- Bod můžeme chápat jako orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku. Tedy $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \overrightarrow{OA}$
- Odteď budeme mluvit o vektorech a budeme mí na mysli orientované úsečky.
- Graficky můžeme orientované úsečky sčítat doplněním na rovnoběžník, viz 1.5.




Obrázek 1.5: Střed úsečky dvou bodů

**Definice 5** (Lineární kombinace)**.** *Nechť V je reálný vektorový prostor a* $\vec{v}, \overrightarrow{x_i} \in V,\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$. *Řekneme, že vektor* $\vec{v}$ *je lineární kombinací vektorů* $\overrightarrow{x_i},\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$, *pokud existují reálná čísla* $a_i$ *taková, že platí*

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \dots + a_k\overrightarrow{x_k} = \sum_{i=1}^{k} a_i\overrightarrow{x_i}$$

**Definice 6** (Lineární ne/závislost)**.** *Nechť* $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots \overrightarrow{x_k} \in V$ *jsou vektory a V je reálný vektorový prostor. Pokud je některý z vektorů* $\overrightarrow{x_i}$ *lineární kombinací ostatních, říkáme že jsou lineárně závislé. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.*

*Poznámky.*
- v $n$-rozměrném vektorovém prostoru existuje nejvýše $n$ lineárně nezávislých vektorů.
- v $n$-rozměrném vektorovém prostoru: libovolná množina $n$ lineárně nezávislých vektorů se nazývá báze. Každý vektor v tomto prostoru pak mohu vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů.

### 1.1.5 Skalární součin a odchylka vektorů

**Definice 7.** *Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ nazýváme operaci*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

*Poznámky.*
- "skalární" je od slova skalár neboli číslo. Výsledkem skalárního součinu je číslo.
- velikost vektoru lze spočítat pomocí skalárního součinu.

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

**Tvrzení 4.** *Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je úměrný cosinu uhlu $\phi$, jenž vektory svírají*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \phi$$

*Poznámka.* Pokud jsou vektory kolmé (říkáme orogonální), mají nulový skalární součin, neboť $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \phi$$

### 1.1.6 Dodatky

- Orientované úsečky jsme zavedli jako $\overrightarrow{AB} = B - A$. Pokud budeme trvat na umístění orientované úsečky (vektoru) v jejím počátečním bodě, hovoříme o *vázaném vektoru.*

  Oproti tomu množinu všech rovnoběžných orientovaných úseček stejné velikosti označujeme *volný vektor*. Většinu času budeme mít na mysli volný vektor.
- Mezi bázemi preferujeme takové, ve kterých jsou všechny vektory navzájem kolmé - *ortogonální.* Taková báze se kupodivu nazývá ortogonální. Pokud mají navíc všechny vektory ortogonální báze velikost 1, hovoříme o *ortonormální bázi.*

## 1.2 Geometrický útvar a jeho analytické vyjádření

Na úvod jsme poznamenali, že analytická geometrie se zabývá geometrickými útvary a vztahy mezi nimi. Nejprve si musíme říct, co vlastně geometrické útvary jsou. Existuje více způsobů, jak definovat geometrický útvar, my si uvedeme pouze jeden

**Definice 8.** *Geometrický útvar je množina bodů Euklidová prostoru (můžeme říkat $\mathbb{R}^n$).*

*Poznámka.* Často se pojmem geometrický útvar označuje i typ geometrického objektu (např. přímka, kružnice, ...).

**Definice 9.** *Analytické vyjádření geometrického útvaru je vztah, který splňují souřadnice všech bodů toho útvaru. Jinými slovy - útvar $U$ má analytické vyjádření $V$ právě tehdy, když platí výrok: Bod $X \in U \iff$ souřadnice $X$ splňují vyjádření $V$.*

## 1.3 Analytická geometrie v rovině

Rovinou máme na mysli *reálný dvourozměrný eukleidovský prostor*, neboli $\mathbb{R}^2$. V rovině se naučíme popisovat body, přímky a vybrané kuželosečky (kružnice a elipsa) a budeme vyšetřovat jejich vzájemné vztahy, zejména vzájemnou polohu.

### 1.3.1 Přímka

*Poznámky.*

- Přímka je základní jednorozměrný geometrický útvar.
- *jednorozměrný* znamená, že nám stačí jeden parametr (někdy *stupeň volnosti*) k pokrytí celého útvaru.
- V rovině je přímka jednoznačně dána dvěma body. Tedy každými dvěma různými body prochází právě jedn přímka.
- V $\mathbb{R}^2$ máme 4 typy analytického vyjádření (rovnic přímky). Jsou navzájem ekvivalentní„ ale mají různé užitečné geometrické interpretace. Mluvíme o parametrickém, obecném, směrnicovém a úsekovém tvaru rovnice přímky.

#### Parametrický tvar

Idea: mějme přímku $p$ a na ní ležící bod $A$. Vycházíme z bodu $A$ ve směru vektoru $\vec{u}$ do libovolné vzdálenosti. Každý bod $X$ přímky $p$ pak je určen sadou rovnic

$$p: \; X = A + t\vec{u}$$

. Vektor $\vec{u}$ se nazývá *směrový vektor přímky* $p$, číslo $t \in \mathbb{R}$ nazýváme *parametr.*

*Poznámky.*

- Hovořím schválně o sadě rovnic - každý bod v rovině má dvě souřadnice, takže mám zvlášť jednu rovnici pro každou souřadnici:

$$\begin{aligned} p: \; x &= A_x + tu_x \\ y &= A_y + tu_y \end{aligned}$$

Pozor, parametr $t$ je pro obě rovnice stejný.

- bod $X$ leží na přímce $p \iff \exists t \in \mathbb{R}$ :
$$X = A + t\vec{u}$$
- parametr slouží k natahování/zkracování směrového vektoru (nemůže změnit jeho směr jinak, než obrácením).
- Směrový vektor získáme ze dvou bodů přímky (přímka je určena dvěma body, viz výše) jakožto orientovanou úsečku danou těmito dvěma body.

*Příklad.* Přímka $p$ je dána body $A = [1, 2]$ a $B = [-1, 1]$. Zapište parametrickou rovnici přímky $p$ a najděte souřadnice průsečíku s osou $y$ a tomu odpovídající hodnotu parametr $t$.

- směrový vektor
$$\vec{u} = B - A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- rovnice
$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- hledáme tedy
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$
Stačí vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:
$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2t \\ y &= 2 - t \end{aligned}$$
Řešením je $t = \frac{1}{2}$ a $\frac{3}{2}$

**Obecný tvar**

Obecná rovnice přímky má tvar
$$ax + by + c = 0,$$
$a, b, c \in \mathbb{R}$.Z parametrické rovnice získáme obecnou snadno vyloučením parametru $t$
$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 2 - t \qquad / \cdot 2 \end{aligned}\right\} \oplus$$
$$\overline{\phantom{x + 2y = 5}}$$
$$x + 2y = 5$$
$$\overline{\phantom{x + 2y - 5 = 0}}$$
$$x + 2y - 5 = 0$$

*Poznámky.*

- $a, b$ josu souřadnice tzv. normálového vektoru (tj. vektoru kolmého na směrový vektor a tedy i na přímku).
- Geometrická interpretace: patrnější, když má normálový vektor velikost 1, tj. $|\vec{n}| = 1$. Potom $c$ má význam vzdálenosti rovnice od přímky.

*Příklad.* Přímka $+$ je dána body $C = [-1, 0]$ a $D = [0, 1]$.

- směrový vektor
$$\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- normálový vektor
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(všimněte si, že $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$). Velikost normálového vektoru je ovšem $|\vec{n}| = \sqrt{2}$. Vezměmě tedy raději vektor
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
jehož velikost už je 1.
- obecná rovnice
$$q: \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + c = 0.$$
Protože body $C$ a $D$ leží na přímce $q$ a jejich souřadnice tak musí splňovat analytické vyjádření přímky $q$ (tedy její obecnou rovnice), můžeme dosazením některého z nich chybějící parametr $c$ dopočítat.
$$D \in q \implies \frac{1}{\sqrt{2}}0 - \frac{1}{\sqrt{2}}1 + c = 0 \implies c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
Takže
$$q: \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$
Vzdálenost přímky $q$ od počátku je však právě $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (lze ukázat např. pomocí Pythagorovy věty).

*Poznámky.*

- Rovnice $ax + by + c = 0$ zůstává pro danou přímku platná i po přenásovení libovolným $K \in \mathbb{R},\ K \neq 0$ (ekvivalentní úprava). Ale pro $|\vec{n}| \neq 1$ není geometrický význam tak názorný.
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff x - y + 1 = 0$$
- Normálový vektor nalezneme snadno ze směrového. Normálový vektor musí být kolmý na směrový, tj. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
$$\vec{u} = (a, b) \to \vec{n} = (-b, a) \text{ nebo } \vec{n} = (b, -a)$$

**Směrnicový tvar**

Směrnicový tvar známe z kapitoly o funkcích, má podobu

$$p: \ y = kx + q,$$

kde číslo $k$ se nazývá směrnice přímky, $q$ obvykle absolutní člen (intercept).

Směrnicový tvar má přímočarou geometrickou interpretaci: směrnice $k$ má význam tangenty úhlu $\phi$, který přímka svírá s osou $x$, tj. $k = \tan\phi$, zatímco $q$ je $y$-souřadnice průsečíku přímky s osou $y$.

*Poznámky.*

- $\tan\phi$ není definován pro $\phi = \frac{\pi}{2}$, takže rovnicí ve směrnicovém tvaru neumíme popsat přímku rovnoběžnou s osou $y$. Té totiž odpovídá konstatní hodnota $x$ (nejdná se tím pádem o funkci) amůžeme ji zapsat takto

$$q : x = m$$

- Směrnicový tvar získáme z obecného vyjádřením $y$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

tedy $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$

**Úsekový tvar**

Úsekový tvar rovnice přímky

$$p : \frac{x}{r} + \frac{x}{s} = 1$$

je velmi podobný obecnému tvaru, ale přináší trochu jinou geometrickou interpretaci. Parametry $r$, resp. $s$, májí význam $x$-souřadnice průsečíku přímky s osou $x$, resp. $y$ souřadnice průsečíku přímky s osou $y$, tedy $P_x = [r, 0]$ a $P_y = [0, s]$. Jsou to vlastně délky úseků, které přímka vymezí na souřadných osách - odtud pojmenování úsekový tvar.

*Poznámka.* Směrnicový tvar získáme z obecného separováním absolutního členu $c$ na druhou stranu rovnice a vydělením $c$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow -\frac{ax}{c} - \frac{by}{c} = 1$$

tedy $r = -\frac{c}{a}$, $s = -\frac{c}{b}$.

### 1.3.2 Vzájemná poloha přímek

Nechť $p$ a $q$ jsou přímky v rovině. Mohou nastat jen tyto tři možnosti:

- Přímky $p$ a $q$ jsou různobežné - mají právě jeden společný bod. Značíme TODO: nemůžu přijít na to, jak se ten symbol píše

- Přímky $p$ a $q$ jsou rovnoběžné - nemají ani jeden společný bod. Značíme $p \parallel q$.
- Přímky $p$ a $q$ jsou totožné - mají nekonečně mnoho společných bodů. Značíme $p = q$.

Pokud bod náleží více geometrickým útvarům $U_1, U_2, \dots, U_n$, musí jeho souřadnice splňovat všechna odpovídající analytická vyjádření $V_1, V_2, \dots, V_n$.

Vzdájemnou poloho (vztah) útvarů $U_i$ vyšetříme tak, že řešíme jejich analytická vyjádření $V_i$ jako soustavu rovnice.

*Poznámky.*

- rovnoběžné přímky mají rovnoběžné směrové (normálové) vektory.
- kolmé přímky mají kolmé směrové vektory (normálové).

*Příklad.*

- prvni
- druhy
- treti

### 1.3.3 Kuželosečky

**Kružnice**

**Elipsa**

### 1.3.4 Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

## 1.4 Analytická geometrie v prostoru

## 1.5 Složitější úlohy

# Literatura

[1] J Polák. *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, 2016.

Zatím trochu smutné, ale bude líp.