Václav Alt

alt.vaclav@gmail.com

geometrie ⟶ analytická geometrie

vaclav-alt.github.io . nemamradlekorici

3 testy po 16 b. } 108 b. 20–30 min. 22. 10.
Zkouškový test 60 b. 19. 11.
17. 12.

Vlastnosti čísel

Definice: $a \mid b$ "a dělí b" "právě tehdy když" $\Leftrightarrow$

existuje $c \in \mathbb{N}$ takové, že $b = a \cdot c$

$6 \mid 18$, protože $\underset{b}{18} = \underset{a}{6} \cdot \underset{c}{3}$

Definice: • Společný dělitel přir. čísel $n_1, \dots n_k$,
nazýváme přir. č. d, které dělí $n_1, \dots n_k$
největší takové: „největší společný dělitel" $D(n_1, \dots n_k)$

• Společný násobek čísel $n_1, \dots n_k$
je takové číslo $x \in \mathbb{N}$, že každé z čísel $n_1, \dots n_k$ dělí x.
Nejmenší takové: "nejmenší společný násobek" $n(n_1, \dots n_k)$

Definice: Prvočíslo je takové $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$,
které je dělitelné jen 1 a samo sebou.
Ostatní: "složená"

Tvrzení: Každé složené číslo lze vyjádřit jednoznačně jako součin prvočísel.

"Prvočíselný rozklad"

349 – prvočíslo $\quad 256 = 2^8$

$186 = 2 \cdot 93 \quad 400 = 2^4 \cdot 5^2$

Tvrzení: Výpočet $D(n_1, n_2)$, $n(n_1, n_2)$

$D(n_1, n_2)$ = součin všech společných prvočinitelů v nejnižší mocnině

$n(n_1, n_2)$ = součin všech prvočinitelů v nejvyšší mocnině

Př. $n_1 = 2604 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$
$n_2 = 1836 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17$

$D(2604, 1836) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$n(2604, 1836) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 = 398\,412$

Algebraické výrazy

Definice: A.V. je každý matematický zápis, tvořený z konstant a proměnných, mezi nimiž jsou pomocí závorek a alg. op. tvořeny smysluplné vztahy.

Př. $x+3 \qquad \sin^2 x + \cos^2 x$ ✓

$(x-) \qquad \frac{1}{}$ ✗

Zlomky

$\frac{a}{b}$ čitatel / jmenovatel $\qquad a, b$ … A.V $\qquad \frac{7}{5}$, $\frac{x^2+4y}{3 \cdot \sin y^2}$

$\boxed{b \neq 0}$ $\qquad$ Pp. $a \neq 0$ $\qquad \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$

$b = 0 \Rightarrow a = 0 \cdot c = 0$ ↯ SPOR

$\pm$: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$

$\cdot$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$:$: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{b \cdot c}$

Krácení: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \left(\frac{a}{b \cdot c}\right) \cdot c = \frac{a}{b}$

Př. $\frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-1) \cdot (x-1)} : \frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+2)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x-1)} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-3)}} = \frac{x+2}{x-1}$

Mocniny a odmocniny

$a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r}$ $\qquad a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$

$2^2 = 2 \cdot 2 \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Tvrzení: Pravidla pro počítání s mocninami

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$
$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s}$ $\qquad r, s \in \mathbb{N}$

2) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

3) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\qquad r > s$, $a \neq 0$

4) $\frac{1}{a^s} = a^{-s}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $\qquad b \neq 0$

6) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Poznámky: pro všechna
- $a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $1^r = 1 \qquad \forall r \in \mathbb{R}$
- $a^1 = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$
- 0^0

Definice: n-tá odmocnina čísla a je číslo, jehož n-tou mocninou je a

$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

$\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}} \qquad \sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} \qquad \left(\sqrt[s]{a}\right)^r = \sqrt[s]{a^r}$

$\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} \qquad \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r \cdot s]{a}$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, protože $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[2]{-4} \Rightarrow$ komplexní čísla

Polymomy

Definice: Polynom (mnohočlen) n-tého stupně je výraz

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, n$
$a_n \neq 0$

$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 x^0 + a_1 \cdot x^1 + \ldots + a_n \cdot x^n$

Sčítání (odečítání): p, q pol. stupně n

$p_n(x) \pm q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \pm \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i$

Př. $p(x) = x + 1$ $\qquad p(x) + q(x) = -2x + 3$
$q(x) = -3x + 2$

$(x^2 + 3x - 1) + (2x - 2) = x^2 + 5x - 3$

násobení: $p(x) \cdot q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$

$(x+1)(-x^2+3) = x \cdot (-x^2) + 3x + 1 \cdot (-x^2) + 3 = -x^3 + 3x - x^2 + 3$

Definice: Číslo a se nazývá kořen polynomu, pokud platí
$p(a) = 0$ $\qquad$ Př. $p(x) = x + 1$
$p(-1) = -1 + 1 = 0$

Tvrzení: Každý polynom můžeme zapsat jako součin tzv. kořenových činitelů

$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

$x_{1, \dots n}$ jsou kořeny polynomu stupně n.

Př. $p(x) = x^2 - 4 = \underset{x - x_1}{(x+2)} \cdot \underset{x - x_2}{(x-2)}$
kořeny: $-2, 2$

Rozklad pomocí vzorečků

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a \cdot b + b^2 \qquad x^2 + 2x + 4 = (x+2)^2$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2) = a^3 - b^3$

Doplnění na čtverec dvojčlenu

smyslem $\quad ax^2 + bx + c \longrightarrow \bar{a}(x - \bar{b})^2 + \bar{c}$

$(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x\right) + c$

$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a} x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{0}\right) + c$

$A^2 + 2BA + B^2 \qquad -B^2$

$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$

$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

$\bar{a} = a \qquad \bar{b} = -\frac{b}{2a} \qquad \bar{c} = c - \frac{b^2}{4a}$