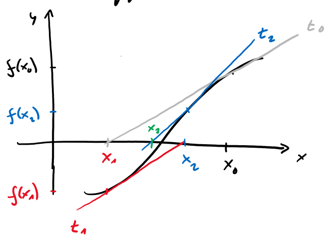
Newtonova metoda tečen

Potřebujeme funkci $f(x)$ a její první derivaci $f'(x)$.

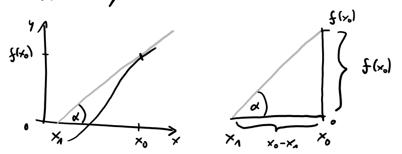
Hledáme x_1 pro které $f(x)=0$ (dostatečně přesně)

Idea:
- zvolíme počáteční bod x_0
- sestrojíme v bodě x_0 tečnu t_0 k funkci $f(x)$
- průsečík tečny t_0 s osou x označíme jako x_1
- opakujeme v bodě x_1

Pro hezky vychované funkce a s dobrým odstřelem x_0 metoda konverguje docela rychle



Konstrukce tečny:



$$k = tg\,\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

↑ směrnice tečny

derivace funkce f v bodě x_0, tj. $f'(x_0)$, má význam směrnice tečny k funkci f v bodě x_0, tedy $k = f'(x_0)$

Dohromady:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

$$f'(x_0)(x_0-x_1) = f(x_0)$$

$$-x_1 f'(x_0) = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Postup opakujeme, takže

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

Kdy přestat?

když už se v jednotlivých iteracích x_i moc nemění. Dobrým měřítkem je relativní změna:

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{|x_{i+1}-x_i|}{x_i}$$

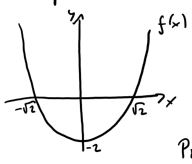
V double precision, tedy i v Pythonu, nemá smysl překročit $\underline{\varepsilon \doteq 10^{-15}}$

Příklad:

$f(x) = x^2-2 \qquad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2-2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

- funkce má dva kořeny, vybrat si můžeme nástřelem x_0
- pro $x=0$ metoda selže - dělení nulou



Zvolíme-li $x_0 > 0$, metoda bude konvergovat k $\sqrt{2}$.

Pro $x_0 < 0$ půjde k $-\sqrt{2}$.

Odhad: $f(1) = 1-2 = -1$
$f(2) = 4-2 = 2$ $\Rightarrow$ řešení leží v intervalu $(1,2)$

zvolme např. $x_0 = 2$

1. iterace $f(x_0) = 2 \qquad f'(x_0) = 4$

$$x_1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

2. iterace: $f(x_1) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \qquad f'(x_1) = 3$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1/4}{3} = \frac{18}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

⋮

Úkol: zkuste Newtonovou metodou najít kořen funkce $f(x) = \sin(x)$ v intervalu $(2,4)$

$f'(x) = \cos(x)$.

Copak asi vyjde?