Rovnice a nerovnice

$=$ $\qquad 2=2 \qquad a=2$

$0 \cdot x = 1 \qquad 0 = 1$

$0 \cdot x \overset{?}{=} 1$

Definice: Rovnost je vztah (relace) vyjadřující totožnost obj. v tomto vztahu

Vlastnosti rovnost:

- reflexivita $\quad x=x$
- symetrie $\quad x=y \iff y=x$
- tranzitivita $\quad x=y \wedge y=z \implies x=z$

Př. $5=5 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Úloha (U1): Nalezněte vš. čísla z daného č. oboru M, pro které jsou def. funkce f a g proměnné x a nabývají týchž hodnot, tedy

$f(x) = g(x) \qquad x \in M$

Definice: Úloha (U1) se nazývá rovnice s neznámou x.

$f(x)$ … levá strana rce
$g(x)$ … pravá strana rce

Poznámky:
- $g(x)=0 \implies$ rce je "anulovaném tvaru"
- podle f a g rozlišujeme druhy rovnic
- lze rozšířit pro fce více proměnných
  $f(x, y, \ldots) = g(x, y, \ldots)$

Př. $x+7=9 \qquad \sin(2x) + \cos(x) = 1$

$2^x = 16$
$\log_2 x = 3$

Úpravy rovnic

$x+7=9$
$x=2$

Definice: Úpr. rce, při nichž kořen rovnice původní je kořen i nové rovnice se nazývají "důsledkové úpravy"
Rovnice: "důsledková rovnice"

Pokud navíc každý kořen důsl. rce je zároveň kořenem původní rovnice, hovoříme o ekvivalentní úpravě a ekvivalentní rci.

Ekvivalentní úpravy:
- prohození stran rce
  $f(x) = g(x) \iff g(x) = f(x)$
- vynásobení obou stran rce nenulovým č. nebo funkcí
  $f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot c = g(x) \cdot c \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  $f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x) \qquad h(x) \neq 0 \ \forall x \in M$
- přičtení čísla nebo fce k oběma str. rce
  $f(x)=g(x) \iff f(x)+c = g(x)+c \qquad c \in \mathbb{R}$
  $f(x)=g(x) \iff f(x)+h(x) = g(x)+h(x)$
- složení s prostou (injektivní) funkcí
  $f(x)=g(x) \iff h(f(x)) = h(g(x))$ $\quad$ h(x) je prostá!

$h(x) = \log_a x$ prostá funkce $\implies$ rovnici můžu zlogaritmovat / odlogaritmovat

$h(x) = x^2$ není prostá $\implies$ obecně $f(x)=g(x) \not\Leftarrow f(x)^2 = g(x)^2$

Vždy po neekvivalentní úpravě ZKOUŠKU!

Příklad:

1) $3x - 6 = 12 \quad /+6$
$3x - 6 + 6 = 12 + 6 \quad /\cdot\frac{1}{3} \quad (:3)$
$3x = 18$
$x = 6$

2) $\sqrt{5-x^2} = x - 1 \quad /^2$
$5 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \quad / + x^2 - 5$
$0 = 2x^2 - 2x - 4 \quad /:2$
$0 = x^2 - x - 2$
$0 = (x-2)(x+1) \qquad x_1 = 2, \ x_2 = -1$

Zk. x_1: $LS = \sqrt{5-4} = 1$, $PS = 2 - 1 = 1$ $\qquad LS = PS$ ✓
x_2: $LS = \sqrt{5-1} = 2$, $PS = -2$ $\qquad LS \neq PS$ $\qquad \boxed{x=2}$

Pozn. $\sqrt{x}$ 2. odmocnina je vždy kladné číslo.

Řešte $x^2 = a$, $a > 0$ $\qquad x = \pm\sqrt{a}$ $\qquad \sqrt{4} = \pm 2$

Nerovnice a nerovnost

"=" $\longrightarrow$ $<, >, \leq, \geq$ $\qquad x<y \not\Leftrightarrow y<x$
chybí symetrie

$-2 < 3 \quad /\cdot(-1)$
× $2 < -3$ špatně
$2 > -3$ $\qquad$ Při násobení záporným číslem se otáčí znaménko nerovnosti

$1 < \frac{1}{x-2} \quad /\cdot(x-2)$ $\qquad (x-2)<0 \quad (x-2)>0$
$x \neq 2$ $\qquad$ I) $x-2 > 1$ $\quad$ II) $x - 2 < 1$ $\qquad$ I $\quad 2 \quad$ II

Příklad: $2x + 4 > -7 \quad /-4$
$2x > -11$
$x > -\frac{11}{2} \qquad x \in \left(-\frac{11}{2}, \infty\right)$

Poznámka: Rci lze vždy převést do anul. tvaru
$f(x) = g(x) \quad / - g(x)$
$\underbrace{f(x) - g(x)}_{} = 0$
$f'(x) = 0$

Lineární a kvadratické rovnice

Definice: Rovnice $(<, >, \leq, \geq)$
$P = Q$ $\qquad$ P, Q jsou polynomy
"polynomická rovnice" (algebraická)
Často: $P_n(x) = 0$

St. p = n
$n=1$ … lineární rce
$n=2$ … kvadratická rce
$n=3$ … kubická rce

Lineární rce: $ax + b = 0 \quad /-b \qquad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$
$ax = -b \quad /:a$
$x = -\frac{b}{a}$

Kvadratická rce: $ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

1) $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad D = b^2 - 4\cdot a \cdot c$ diskriminant

$D > 0$: 2 reálné kořeny
$D = 0$: 1 reálný
$D < 0$: žádný reálný kořen

2) čtverec dvojčlenu $\longrightarrow$ rozklad na součin

3) Vietovy vzorce
$a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0 \qquad a \neq 0$
$a\cdot[x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2] = 0$
$\left.\begin{array}{l} ax^2 - a\cdot(x_1+x_2)\cdot x + a\cdot x_1 \cdot x_2 = 0 \\ ax^2 + b\cdot x + c = 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)\cdot(x-3) = 0$

4) Využití spec. vzorců:
př. $b = 0$: $\quad ax^2 - c = 0 \qquad a, c > 0$
$a\left(x^2 - \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad 2x^2 - 6 = 0$
$a\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\cdot\left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 0$

Strategie řešení kvadr. (alg.) nerovnic

1. rozklad polynomů na součin
2. rozdělit č. osu na intervaly podle kořenů
3. shrnutí

Př. $3x^2 - 9x - 30 < 0$

$x^2 - 3x - 10 < 0$
$(x-5)(x+2) < 0$
$x_1 = -2$
$x_2 = 5$

$- \ - \quad - \ + \quad + \ +$
$+ \quad -2 \quad - \quad 5 \quad +$ $\quad \mathbb{R}$

$x \in (-2, 5)$

Soustavy lineárních rovnic

$x + y = 10$
$x - y = 10$

2 cesty:
- z jedné rce vyjádříme např. x a dosadím do druhé
- rovnice chytře sečíst $\implies$ eliminujeme 1 neznámou

3 druhy výsledku:
- dvojice čísel, která řeší obě rce zároveň $\longrightarrow$ soustava má 1 řešení
- obdržíte výraz typu $0=0 \quad 2=2$ $\longrightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
- obdržíte výraz typu $1=2 \quad 0=1$ $\longrightarrow$ soustava nemá žádné řešení

Př. $x + y = 10$
$x - y = 10$

1) $x = 10 - y$
$10 - 2y = 10$
$y = 0$
$x = 10$

2) $\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 10 \end{array}\right\} \oplus$
$2x + 0y = 20$
$x = 10$
$y = 0$

řešením je $(10, 0)$

Rovnice s absolutní hodnotou

$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $\qquad |5| = 5 \quad |0| = 0 \quad |-5| = 5$

$|x - 7| = 5$

I $\qquad$ II
$x - 7 < 0 \quad 7 \quad x - 7 > 0$ $\quad \mathbb{R}$
$|x-7| = -(x-7) = -x + 7 \qquad |x-7| = x - 7$

I) $x \in (-\infty, 7)$
$-x + 7 = 5$
$x = 2$

II) $x \in \langle 7, \infty)$
$x - 7 = 5$
$x = 12$

$K = \{2, 12\}$