Vektorový součin

- má smysl pouze v $\mathbb{R}^3$

značíme $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$ $\qquad \vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$, $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$

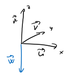
$$\vec{u}\times\vec{v}=(\overset{x}{u_yv_z-u_zv_y},\ \overset{y}{u_zv_x-u_xv_z},\ \overset{z}{u_xv_y-u_yv_x})$$

Vlastnosti

- $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ $\qquad \vec{w}\perp\vec{u}$ a $\vec{w}\perp\vec{v}$, $\quad \vec{w}\cdot\vec{u}=0$ $\quad \vec{w}\cdot\vec{v}=0$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=u_x\cdot(u_yv_z-u_zv_y)+u_y\cdot(u_zv_x-u_xv_z)+u_z\cdot(u_xv_y-u_yv_x)=0$$

- antisymetrický: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$
  vs.
  symetrický: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

- 

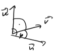
  $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ $\quad (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tvoří pravotočivý systém

  $\vec{w}=\vec{v}\times\vec{u}$ $\quad (\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ opět pravotočivý systém.

- $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ $\qquad |\vec{w}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\varphi$

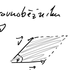
  $\varphi=0\ \rightarrow\ \vec{w}=\vec{0}$

  $\varphi=\frac{\pi}{2}$ $\quad |\vec{w}|$ je maximální



navíc $|\vec{w}|$ je číselně rovna velikosti rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$

plocha $S=|\vec{u}\times\vec{v}|$

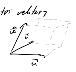


- 

  $\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}$
  $\vec{x}=\vec{y}\times\vec{z}$
  $\vec{y}=\vec{z}\times\vec{x}$

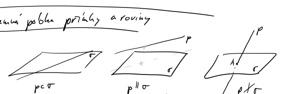
- Smíšený součin: $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ .. tři vektory

  objem $V=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$
  $=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$



Vzájemná poloha přímky a roviny

σ, p



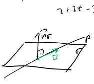
$p\subset\sigma$	$p\parallel\sigma$, $p\cap\sigma=\emptyset$	$p\not\parallel\sigma$, $p\cap\sigma=\{A\}$
Přímka p leží v rovině σ. ①	Přímka p je rovnoběžná s rovinou σ ②	Přímka p protíná rovinu σ ③

- Řešíme soustavu rovnic: p,σ
  ① ∞ mnoho řešení soustavy
  ② žádné řešení soustavy
  ③ právě jedno řešení

Příklad: $\sigma: 2x-3y+z-3=0$ $\qquad \vec{n}_\sigma=(2,-3,1)$

$p: X=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}}_{A}+t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ $\rightarrow p: x=1+t,\ y=1+t,\ z=4+t$

$p\rightarrow\sigma$: $2(1+t)-3(1+t)+(4+t)-3=0$
$2+2t-3-3t+4+t-3=0$
$0\cdot t+0=0$
$0=0\ \rightarrow\ \infty$ mnoho řešení
$\rightarrow p\subset\sigma$



Jiný postup: $\vec{n}_\sigma\cdot\vec{u}=2\cdot1-3\cdot1+1\cdot1=0$
$\rightarrow$ buď $p\parallel\sigma$, nebo $p\subset\sigma$

$A=[1,1,4]\in p$
$A\in\sigma$?: $2\cdot1-3\cdot1+4-3=2-3+4-3=0$ ✓
$A\in\sigma$
$\Rightarrow \boxed{p\subset\sigma}$

- $\sigma: 2x-3y+z-3=0$ $\qquad q: X=\underset{B}{\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

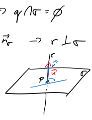
  $\vec{n}_\sigma\cdot\vec{u}=0$
  $B\in\sigma$?: $4-6+2-3=-3\ \rightarrow B\notin\sigma$ $\Big\}\Rightarrow q\parallel\sigma$

- $2\cdot(2+t)-3(2+t)+(2+t)-3=0$
  $-3=0$ $\quad$ NŘ $\Rightarrow q\cap\sigma=\emptyset$

$r: X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\vec{n}_\sigma\ \rightarrow r\perp\sigma$

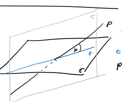
$r\rightarrow\sigma$: $2\cdot(1+2t)-3\cdot(1-3t)+t-3=0$
$2+4t-3+9t+t-3=0$
$14t=4$
$t=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

$P=[1+\frac{4}{7},1-\frac{6}{7},\frac{2}{7}]$
$=[\frac{11}{7},\frac{1}{7},\frac{2}{7}]$



Odchylka přímky a roviny

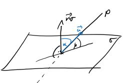
odchylka φ přímky p a roviny σ
= úhel mezi p a t,
t je průsečnice τ a σ
a $\tau\perp\sigma$ a $p\subset\tau$



$\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$
$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

$\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})=\sin(\varphi)$ $\longrightarrow$

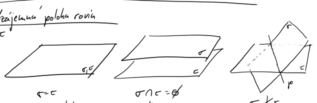


Odchylka přímky od roviny

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}_\sigma|}}$$

Vzájemná poloha rovin

σ,τ



$\sigma=\tau$	$\sigma\cap\tau=\emptyset$, $\sigma\parallel\tau$	$\sigma\not\parallel\tau$
roviny jsou totožné	roviny jsou rovnoběžné	roviny jsou různoběžné, $\sigma\cap\tau=p$, p.... průsečnice

Příklad:
- $\sigma: x+y+z+1=0$, $\tau: x+y+z+2=0$ $\Big\}\ominus$ $\qquad \vec{n}_\sigma=(1,1,1)$, $\vec{n}_\tau=(1,1,1)$
  $\longrightarrow \sigma\parallel\tau$
  $0\quad -1=0\ \longrightarrow$ NŘ.

- $\sigma: x+y+z+1=0$, $\tau: x+y+z+1=0$ $\Big\}\ominus\Rightarrow$ totožné $\sigma=\tau$
  $0=0\ \longrightarrow \infty$ řešení

- $\sigma: x+y+z+1=0$ $\qquad \vec{n}_\sigma=(1,1,1)$
  $\tau: x-2y+z=0$ $\qquad \vec{n}_\tau=(1,-2,1)$ $\qquad \vec{n}_\sigma\cdot\vec{n}_\tau=0$

  $x+y+z+1=0$
  $x-2y+z=0$

  $z=t$, $t\in\mathbb{R}$
  $x+y+t+1=0$ $\quad \cdot2\ \}\oplus$ $\quad \cdot(-1)\ \}\oplus$
  $x-2y+t=0$

  $3x+3t+2=0$
  $x=-\frac{2}{3}-t$

  $-3y+0t-1=0$
  $y=-\frac{1}{3}$

  Průsečnice p: $x=-\frac{2}{3}-t$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=t$

  $A\in\sigma$?: $-\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})+0+1=0$ ✓ $\qquad A=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0]$ $t\in\mathbb{R}$
  $A\in\tau$?: $-\frac{2}{3}-2\cdot(-\frac{1}{3})+0=0$ ✓

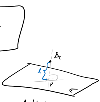
Vzdálenost bodu od roviny

σ: $ax+by+cz+d=0$, $\vec{n}=(a,b,c)$
$A=[A_x,A_y,A_z]$

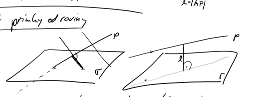
vzdálenost l bodu A od σ:

$$\boxed{l=\frac{|aA_x+bA_y+cA_z+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Pokud $|\vec{n}|=1$ a $A=[0,0,0]$
$l=\frac{|0+d|}{1}=|d|$



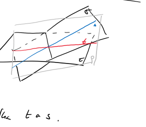
Vzdálenost přímky od roviny



- Má smysl pouze pro přímky rovnoběžné s (ležící v) σ.
  $\rightarrow$ Vzdálenost p od σ = vzdálenost libovolného bodu $A\in p$ od σ.

Odchylka dvou rovin

$\rho\perp\sigma \wedge \rho\perp\tau$



t: průsečnice ρ a τ
s: průsečnice ρ a σ

Odchylka rovin = odchylka t a s.

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_\sigma\cdot\vec{n}_\tau|}{|\vec{n}_\sigma|\cdot|\vec{n}_\tau|}$$