Množiny

Definice: Množina je soubor mat. nebo jiných (navzájem různých)

- prázdné: neobsahují žádný prvek
- neprázdné: obs. alespoň 1 prvek

Značení

množiny: $A, B, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

prvky: a, b, a, b

$a \in A$: "a je prvkem A"

$a \notin A$: "a není prvkem A"

prázdná množina: $\{\}, \emptyset$ $\quad \neq \quad K = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$

Zadání množin

a) výčtem prvků

$B = \{1, 2, 3\}$

b) pomocí charakteristické vlastnosti

$A = \{x \in Z \,;\, V(x)\}$ $\quad M = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \leq 16\}$ $\quad X = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x^2 \leq 16\}$

Z ... základní množina (univerzum)

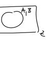
$V(x)$ ... výrok o x

Definice: operace a vztahy na množinách

- $A \subset B$ "A je podmnožinou B"
  inkluze $\iff x \in A \Rightarrow x \in B$

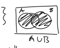
- $A = B$ "A je totožná s B"
  $\iff A \subset B \wedge B \subset A$
  tedy pokud mají stejné prvky

- $A \cap B$ "průnik množin A a B"
  $A \cap B = \{x \in Z \,;\, x \in A \wedge x \in B\}$



- $A \cup B$ "sjednocení množin A a B"
  $A \cup B = \{x \in Z \,;\, x \in A \vee x \in B\}$
  or

- $\overline{A}$, A' "doplněk A vzhledem k zákl. množině Z"
  $\overline{A} = \{x \in Z \,;\, x \notin A\}$



$M = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \leq 16\}$ $\quad M' = \{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \geq 17\}$ (> 16)

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\quad M' = \{5, 6, 7, \dots\}$

$Z = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{n \in Z \,;\, n^2 \leq 16\} = Z$ $\quad M' = \{\} = \emptyset$

$M \cup \overline{M} = Z$ $\quad \overline{A} = Z \setminus A$

- $A \setminus B$, $A - B$ "rozdíl množin A a B"
  $A \setminus B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$

$A_1, A_2, \dots A_n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in Z \,;\, x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in Z \,;\, x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$

de Morganovy vzorce

Pozn.

- $\emptyset$ je podmnožinou každé množiny
- $A \subset A$ $\quad \wedge A \subset A \Rightarrow A = A$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ "A a B jsou disjunktní"

Definice: Potenční množina množiny A ($P(A)$, 2^A)
= množina všech podmnožin A.

$|A| = n$ $\quad$ A má n prvků, mohutnost A je n.

Tvrzení: A je množina $|A| = n$
Potom $|P(A)| = 2^n$

Příklad: $A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$|A| = 3$ $\quad |P(A)| = 2^3 = 8$

Definice: Sdružení n objektů se stanoveným pořadím = "uspořádaná n-tice"
objekty: "složky/prvky n-tice"
Značíme: $(x_1, \dots x_n)$ $\quad [x_1, \dots x_n]$

Definice: Kartézský součin množin A_i, $i = 1, \dots n$
je množina
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[x_1, x_2, \dots x_n] \,;\, x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$

Příklad: $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$ $\quad$ n-rozměrný Euklidovský prostor

$\mathbb{R}^3$: souřadnice : uspořádaná trojice čísel (x_1, x_2, x_3)

Dále $n = 2$: $A \times B = \{[a, b] \,;\, a \in A \wedge b \in B\}$

Definice: Libovolná podmnožina kartézského součinu se nazývá relace.

Příklad: $A = \{1, 2\}$ $\quad B = \{3, 4\}$

$A \times B = \{[1,3], [1,4], [2,3], [2,4]\}$

$F = \{[1,3]\} \subset A \times B \Rightarrow F$ je relace (na $A \times B$)

$F' = \{[1,3], [3,1]\} \not\subset A \times B$

Definice: Relaci F na $X \times Y$ nazveme zobrazení F z X do Y, pokud platí:

$(x, y_1), (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$

tj. $F = \{(x, y) \in X \times Y \,;\, (x, y_1), (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2\}$

Značíme $F: X \to Y$ $\quad F(x) = y$

Příklad $F = \{[1,3]\}$ relace a zobrazení

$F = \{[1,3], [1,4]\}$ relace, ale není zobrazení

Definice: Definiční obor $F: X \to Y$ je množina $D_F \subset X$

$D_F = \{x \in X \,;\, \exists y \in Y: (x, y) \in F\}$ $\quad F(x) = y$

existuje

Obor hodnot $F: X \to Y$ $\quad H_F \subset Y$

$H_F = \{y \in Y \,;\, \exists x \in X: (x, y) \in F\}$ $\quad F(x) = y$

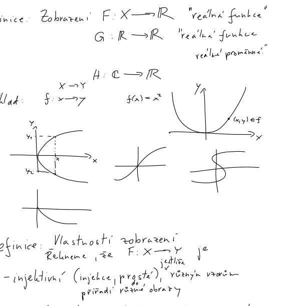
x ... vzor $\quad y$ ... obraz

Definice: Zobrazení $F: X \to \mathbb{R}$ "reálná funkce"

$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "reálná funkce reálné proměnné"

$H: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

Příklad $f: x \to y$ ($X \to Y$) $\quad f(x) = x^2$



Definice: Vlastnosti zobrazení

Řekneme, že $F: X \to Y$ je

- injektivní (injekce, prosté), jestliže různým vzorům přiřadí různé obrazy
  tj. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F: x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$
- surjektivní (surjekce, na), jestliže ke každému obrazu existuje vzor
  $\forall y \in Y \; \exists x \in X: F(x) = y$
- bijektivní (bijekce, 1-1), jestliže je injekce a surjekce zároveň do a na

Příklad barvy = {...}
závodníci = {...}

Pokud každému závodníkovi přiřadím max 1 barvu $\Rightarrow$ zobrazení

Pokud navíc nepřiřadím 1 barvu několika závodníkům $\Rightarrow$ injekce

Obrázky