Rovnice a nerovnice

$=$ $\qquad 2=2 \qquad a=2$

$0\cdot x=1 \qquad 0=1$

$0\cdot x\overset{?}{=}1$

Definice: Rovnost je vztah (relace) vyjadřující totožnost obj. v tomto vztahu

Vlastnosti rovnost:

- reflexivita $\quad x=x$
- symetrie $\quad x=y \iff y=x$
- tranzitivita $\quad x=y \wedge y=z \implies x=z$

Př. $\quad 5=5 \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Úloha (U1): Nalezněte vš. čísla z daného č. oboru M, pro které jsou def. funkce f a g proměnné x a nabývají týchž hodnot, tedy

$$f(x)=g(x) \qquad x\in M$$

Definice: Úloha (U1) se nazývá rovnice s neznámou x.

$f(x)$ … levá strana rce
$g(x)$ … pravá strana rce

Poznámky:

- $g(x)=0 \implies$ rce je "anulovaném tvaru"
- podle f a g rozlišujeme druhy rovnic
- lze rozšířit pro fce více proměnných $f(x,y,\dots)=g(x,y,\dots)$

Př. $\quad x+7=9 \qquad \sin(2x)+\cos(x)=1$

$2^x=16$

$\log_2 x=3$

Úpravy rovnic

$x+7=9$
$x=2$

Definice: Úpr. rce, při nichž kořen rovnice původní je kořen i nové rovnice se nazývají "důsledkové úpravy"

Rovnice: "důsledková rovnice"

Pokud navíc každý kořen důsl. rce je zároveň kořenem původní rovnice, hovoříme o ekvivalentní úpravě a ekvivalentní rci.

Ekvivalentní úpravy:

- prohození stran rce
  $f(x)=g(x) \iff g(x)=f(x)$
- vynásobení obou stran rce nenulovým č. nebo funkcí
  $f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot c=g(x)\cdot c \qquad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
  $f(x)=g(x) \iff f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x) \qquad h(x)\neq 0 \ \forall x\in M$
- přičtení čísla nebo fce k oběma str. rce
  $f(x)=g(x) \iff f(x)+c=g(x)+c \qquad c\in\mathbb{R}$
  $f(x)=g(x) \iff f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$
- složení s prostou (injektivní) funkcí
  $f(x)=g(x) \iff h(f(x))=h(g(x))$
  $h(x)$ je prostá!

$h(x)=\log_a x$ prostá funkce $\implies$ rovnici můžu zlogaritmovat / odlogaritmovat

$h(x)=x^2$ není prostá $\implies$ obecně $f(x)=g(x) \not\Leftarrow f(x)^2=g(x)^2$

Vždy po neekvivalentní úpravě ZKOUŠKU!

Příklad:

1)
$3x-6=12 \qquad /+6$
$3x-6+6=12+6 \qquad /\cdot\frac{1}{3} \quad (:3)$
$3x=18$
$x=6$

2)
$\sqrt{5-x^2}=x-1 \qquad /^2$
$5-x^2=x^2-2x+1 \qquad /+x^2-5$
$0=2x^2-2x-4 \qquad /:2$
$0=x^2-x-2$
$0=(x-2)(x+1) \qquad x_1=2, \ x_2=-1$

Zk. x_1: $LS=\sqrt{5-4}=1$, $PS=2-1=1$ $\quad LS=PS$ ✓
x_2: $LS=\sqrt{5-1}=2$, $PS=-2$ $\quad LS\neq PS$ $\quad \boxed{x=2}$

Pozn. $\sqrt{x}$ 2. odmocnina je vždy kladné číslo.

Řešte $x^2=a$, $a>0$ $\quad x=\pm\sqrt{a} \qquad \sqrt{4}=\pm 2$

Nerovnice a nerovnost

"=" $\longrightarrow$ $<, >, \leq, \geq$

$x<y \not\Leftrightarrow y<x$
chybí symetrie

$-2<3 \qquad /\cdot(-1)$
× $2<-3$ špatně
$2>-3$ Při násobení záporným číslem se otáčí znaménko nerovnosti

$1<\frac{1}{x-2} \qquad /\cdot(x-2)$
$x\neq 2$

I) $x-2>1$ $\quad$ II) $x-2<1$

$(x-2)<0 \quad (x-2)>0$, I $\mid 2 \mid$ II

Příklad: $\quad 2x+4>-7 \qquad /-4$
$2x>-11$
$x>-\frac{11}{2} \qquad x\in\left(-\frac{11}{2},\infty\right)$

Poznámka: Rci lze vždy převést do anul. tvaru
$f(x)=g(x) \qquad /-g(x)$
$\underbrace{f(x)-g(x)}=0$
$f'(x)=0$

Lineární a kvadratické rovnice

Definice: Rovnice $(<,>,\leq,\geq)$

$P=Q \qquad P, Q$ jsou polynomy

"polynomická rovnice" (algebraická)

Často: $P_n(x)=0$

St. p $=n$
$n=1$ … lineární rce
$n=2$ … kvadratická rce
$n=3$ … kubická rce

Lineární rce: $\quad ax+b=0 \quad /-b \qquad a,b\in\mathbb{R}, \ a\neq 0$
$ax=-b \quad /:a$
$x=-\frac{b}{a}$

Kvadratická rce: $\quad ax^2+bx+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R}, \ a\neq 0$

1) $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad D=b^2-4a\cdot c$ diskriminant

$D>0$: 2 reálné kořeny
$D=0$: 1 reálný
$D<0$: žádný reálný kořen

2) čtverec dvojčlenu $\longrightarrow$ rozklad na součin

3) Vietovy vzorce

$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0 \qquad a\neq 0$
$a\cdot[x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2]=0$
$\left.\begin{array}{l} ax^2-a(x_1+x_2)\cdot x+a\cdot x_1\cdot x_2=0 \\ ax^2+b\cdot x+c=0 \end{array}\right\} \implies \quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$x^2-5x+6=0$
$(x-2)\cdot(x-3)=0$

4) Využití spec. vzorců:

př. $b=0$: $\quad ax^2-c=0 \qquad a,c>0$
$a\left(x^2-\frac{c}{a}\right)=0 \qquad 2x^2-6=0$
$a\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\cdot\left(x-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)=0$

Strategie řešení kvadr. (alg.) nerovnic

1. rozklad polynomu na součin
2. rozdělit č. osu na intervaly podle kořenů
3. shrnutí

Př. $\quad 3x^2-9x-30<0$

$x^2-3x-10<0$
$(x-5)(x+2)<0$
$x_1=-2$
$x_2=5$

$- \ - \quad - \ + \quad + \ +$
$+ \quad -2 \quad - \quad 5 \quad + \quad \mathbb{R}$

$x\in(-2,5)$

Soustavy lineárních rovnic

$x+y=10$
$x-y=10$

2 cesty:
- z jedné rce vyjádříme např. x a dosadím do druhé
- rovnice chytře sečíst $\implies$ eliminujeme 1 neznámou

3 druhy výsledku:

- dvojice čísel, která řeší obě rce zároveň
  $\longrightarrow$ soustava má 1 řešení
- obdržíte výraz typu $0=0 \quad 2=2$
  $\longrightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
- obdržíte výraz typu $1=2 \quad 0=1$
  $\longrightarrow$ soustava nemá žádné řešení

Př. $\quad x+y=10$
$x-y=10$

1) $x=10-y$
$10-2y=10$
$y=0$
$x=10$

2) $\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ x-y=10 \end{array}\right\} \oplus$
$2x+0y=20$
$x=10$
$y=0$

řešením je $(10,0)$

Rovnice s absolutní hodnotou

$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \qquad |5|=5 \quad |-5|=5 \quad |0|=0$

$|x-7|=5$

I: $x-7<0$, $|x-7|=-(x-7)=-x+7$ $\quad \mid 7 \mid \quad$ II: $x-7>0$, $|x-7|=x-7$ $\quad \mathbb{R}$

I) $x\in(-\infty,7)$
$-x+7=5$
$x=2$

II) $x\in\langle 7,\infty)$
$x-7=5$
$x=12$

$K=\{2,12\}$