5. Funkce

Připomenutí: Reálná funkce reálné proměnné je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, neboli množina všech uspořádaných dvojic $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, pro které platí

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Funkce je zadána

- předpisem a definičním oborem
- výčtem např. grafem

Poznámka:

· Vidíme drobný nesoulad v používání $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ může značit dvě věci

a) obecně reálnou funkci reálné proměnné a $D_f \subset \mathbb{R}$ a $H_f \subset \mathbb{R}$

b) reálnou funkci reálné proměnné a $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \mathbb{R}$

Různí lidé k tomu přistupují různě. Např.

· $y = 2x+3$, $D_f = \mathbb{R}$

· $y = 2x+3$, $D_f = \mathbb{R}^+$

Matematici to považují za dvě různé funkce, fyzici obvykle za stejnou funkci vyšetřenou na jiné množině.

· Pokud není explicitně zadán definiční obor, uvažuje se maximální možný

5.1 Vlastnosti funkcí

Funkce můžeme klasifikovat dle jejich vlastností:

- Monotonie (někdy monotónnost)
- Omezenost
- Periodicita
- Parita
- (Spojitost
- Hladkost)

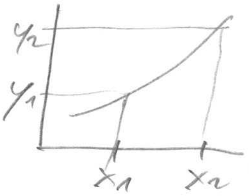
- Monotonie

Monotónní funkce je taková funkce, která je v bodě či na daném intervalu rostoucí nebo klesající, případně nerostoucí nebo neklesající.

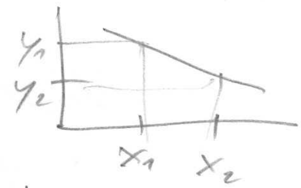
mějme $x_1, x_2 \in \underbrace{I}_{\text{interval}} \subset D_f$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Funkce f je

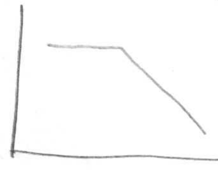
- rostoucí $\Leftrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$



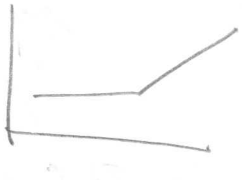
- klesající $\Leftrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$



- nerostoucí $\Leftrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$



- neklesající $\Leftrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$



- konstantní $\Leftrightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 = y_1$
  $\vee\, x_1 < x_2$

Poznámka:

- všimněme si, že platí implikace

  funkce je rostoucí $\Rightarrow$ funkce je neklesající

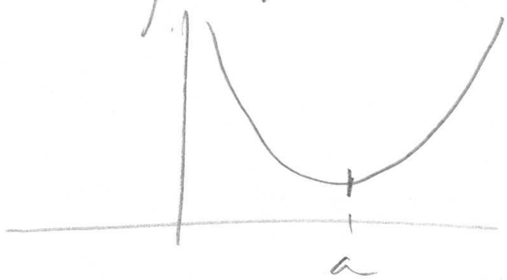
  funkce je klesající $\Rightarrow$ funkce je nerostoucí.

  Obrácené implikace neplatí.

- pozorování: funkce je konstantní $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ funkce je nerostoucí $\wedge$ neklesající.

- funkce samozřejmě mohou charakter monotonie měnit



klesající v $(-\infty, a)$

rostoucí v (a, ∞)

- Omezenost

  Řekneme, že funkce je omezená na množině $M \subseteq D_f$, pokud $\exists K \in \mathbb{R}: \ |f(x)| \leq K \ , \forall x \in M$.

  Řekneme, že funkce je shora (zdola) omezená na množině $M \subseteq D_f$, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$:

  $$f(x) \leq L \qquad (f(x) \geq L) \qquad \forall x \in M.$$

  Funkce je neomezená, pokud není omezená shora ani zdola.

Poznámky:

- funkce je omezená $\Leftrightarrow$ funkce je omezená shora i zdola.
- konstanty K a L mohou být libovolné, nemusí se jednat o minimum nebo maximum.

• Parita

- souhrnné slovo pro sudost či lichost funkce.

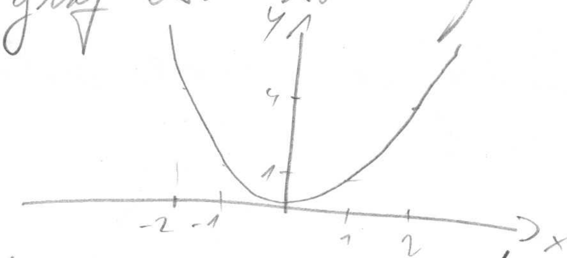
Předpokládejme, že $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f$. Řekneme, že funkce f je

sudá $\iff f(-x) = f(x)$

lichá $\iff f(-x) = -f(x)$

Lichost či sudost funkce zjistíme ověřením charakt. vlastnosti nebo z grafu.

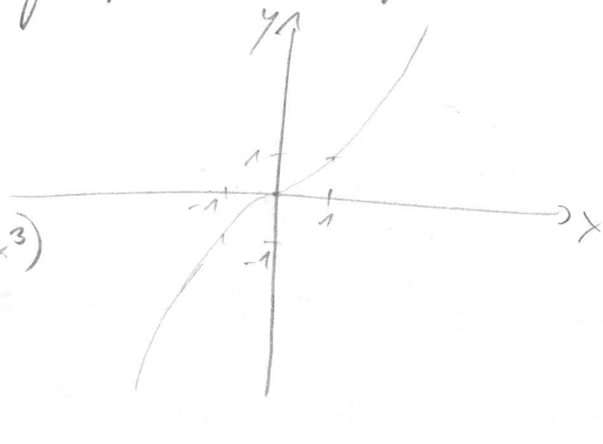
• Sudá funkce má graf osově souměrný kolem osy y



např. $f: y = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Lichá funkce má graf souměrný středově kolem počátku



např. $f: y = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x^3)$

Poznámky: • funkce nemusí být ani sudá ani lichá

• x^n — sudá pro n sudé
— lichá pro n liché

Coincidence? I think not!

· Periodicita

Předpokládejme, že $\forall x \in D_f \quad x \pm p \in D_f$, $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

Řekneme, že funkce f je periodická s periodou p,

pokud $\quad f(x \pm p) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$

Poznámky:

- z definice plyne
  $f(x + np) = f(x) \qquad n \in \mathbb{Z}$
  lze dokázat indukcí
- jako periodu obvykle označujeme nejmenší číslo p, pro které platí definice výše.
- Konstantní funkce splňuje definici výše, ale nehovoříme o ní jako o periodické (a nemůžeme najít nejmenší periodu)
- funkcím, které nejsou periodické nikdy říkáme aperiodické.
- číslo $\frac{1}{p}$ se označuje jako frekvence.

pokud $x = t$ a $[t] = s$ (čas, sekunda)

perioda se obvykle značí T, $[T] = s$

a $f = \frac{1}{T} \quad [f] = Hz = s^{-1}$

Hertz

pokud $x = d$ a $[d] = m$ (vzdálenost, metr)

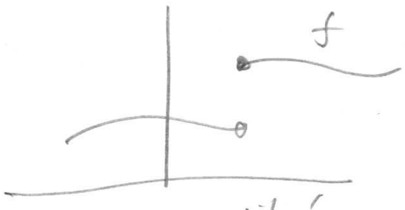
pak $f = \frac{1}{p} \quad [f] = m^{-1}$

„prostorová frekvence“

2 vlastnosti z budoucích kursů:

· Spojitost:

zjednodušeně: funkce je spojitá, pokud její graf můžeme nakreslit nepřerušenou čarou.

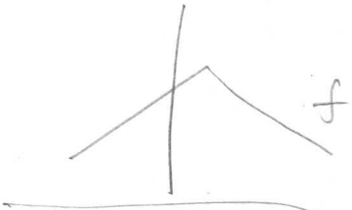


nespojitá

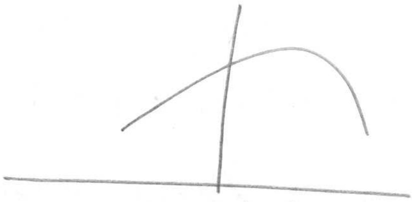
spojitá

· Hladkost

zjednodušeně: funkce je hladká, pokud v jejím grafu nejsou "ostré zlomy" a je spojitá



není hladká



hladká!

Vzpomínka na vlastnosti zobrazení

zobrazení mohlo být: injektivní, surjektivní, bijektivní

funkce jsou speciálním případem zobrazení ⇒ mohou mít stejné vlastnosti.

- bijekce = surjekce ∧ injekce — nezajímá nás.

-

- surjekce – „na" komplikované vzhledem k nejasnostem v D_f vs $\mathbb{R}$ a H_f vs $\mathbb{R}$.

Příklad

$f: y=x^2$ je určitě zobrazení $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
to ale není surjekce.

$g: y=x^2$ jakožto zobrazení z $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
ale surjekce je.

Funkce $f: D_f \longrightarrow H_f$ je vždy surjektivní.

- injekce: $F: X \longrightarrow Y$ je injekce, pokud

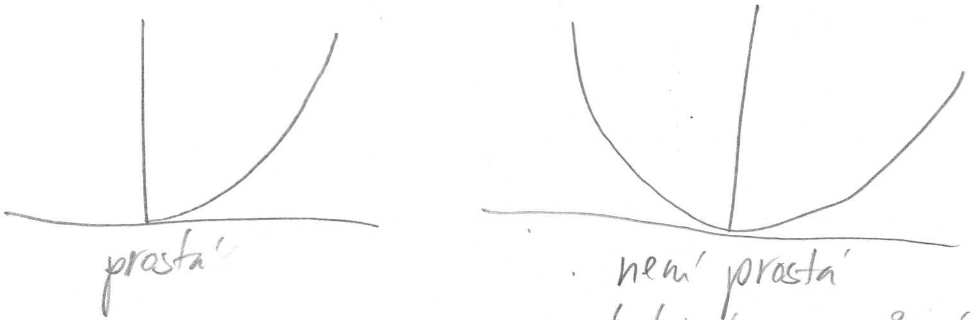
$y_2 = y_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F$

slovy: injektivní funkce přiřadí různým vzorům různé obrazy.

Injektivní funkci se říká <u>prostá</u>.

Poznámka:

· Funkce je prostá, pokud je ryze monotónní
(tj. rostoucí nebo klesající)



prostá

není prostá
(stejné y pro různá x)

5.2 Transformace grafů

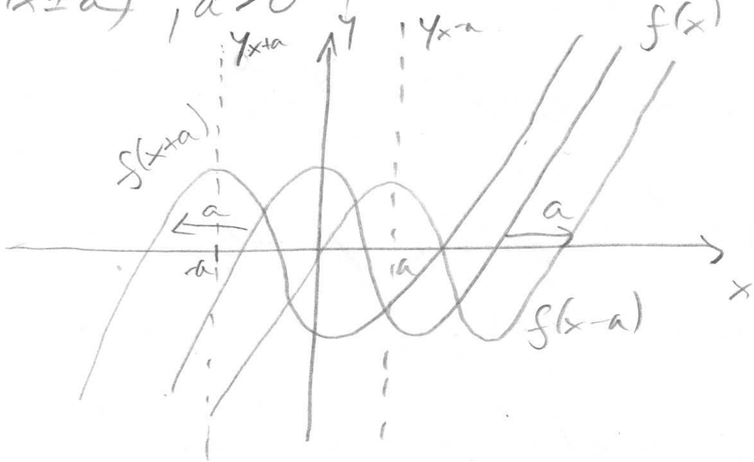
Dle textu H. Říhové, odkaz v Plus4U

Některé operace v předpisech funkcí mají snadno představitelný vliv na podobu grafu. Je dobré o nich vědět a využívat je ke konstrukci grafů.

Předpokládejme, že známe graf funkce $f(x)$: 

1) Posunutí ve směru osy x

$y = f(x \pm a)$, $a > 0$

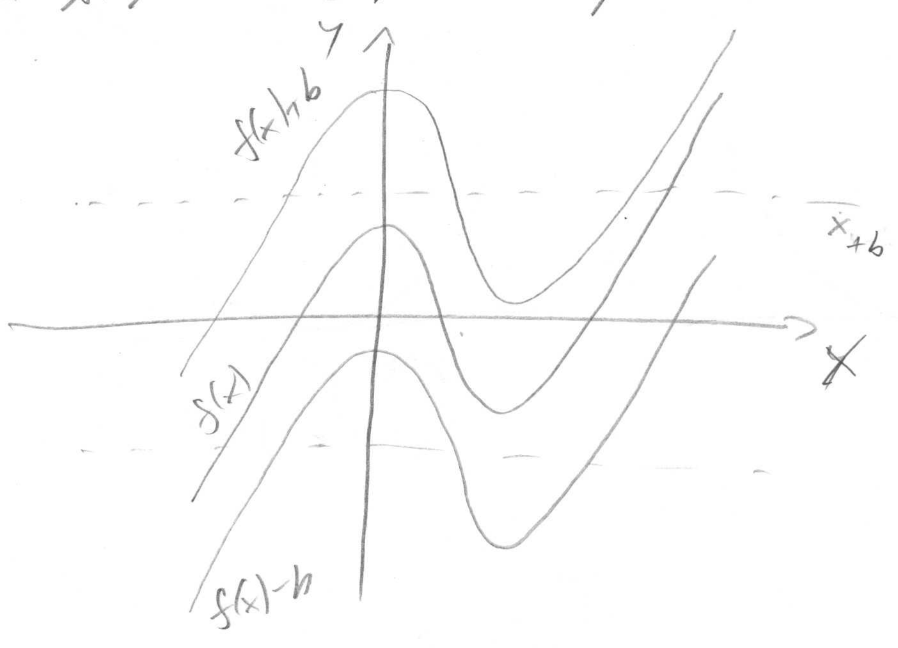


můžeme si pomoci zakreslením pomocné osy y

2) Posunutí ve směru osy y

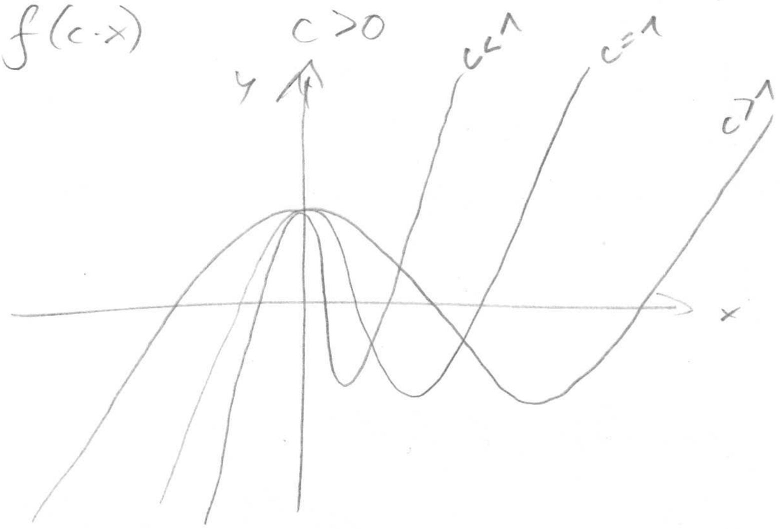
$y = f(x) \pm b$, $b > 0$ posune celý graf nahoru/dolů

opět si můžeme zakreslit pomocnou osu



3) Kontrakce a dilatace ve směru osy x

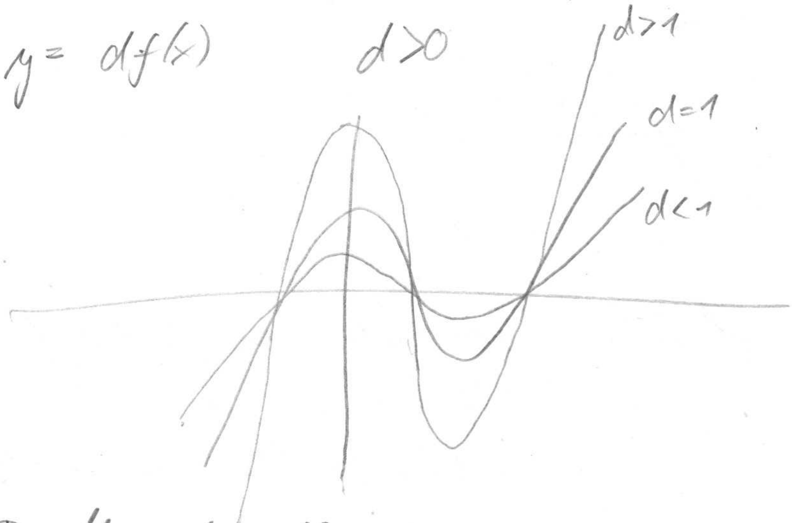
$y = f(c \cdot x)$ $\quad c > 0$



$c > 1$ ... dilatace
$c < 1$ ... kontrakce

4) Kontrakce a dilatace ve směru osy y.

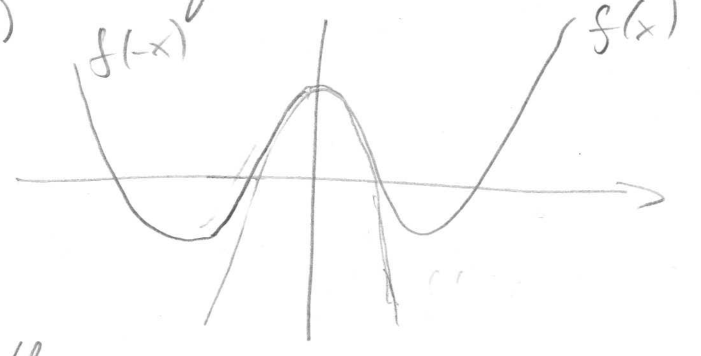
$y = d f(x)$ $\quad d > 0$



$d > 1$ ... dilatace
$d < 1$ kontrakce

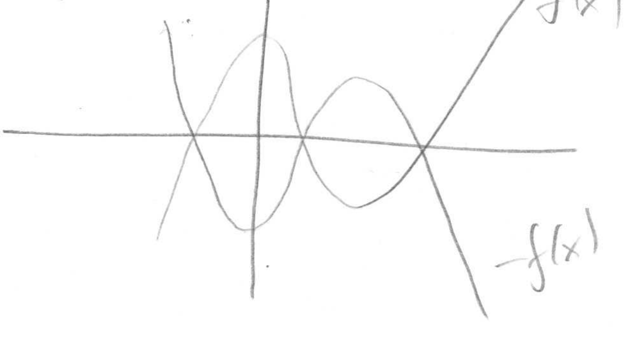
5) Překlopení podle osy y

$y = f(-x)$



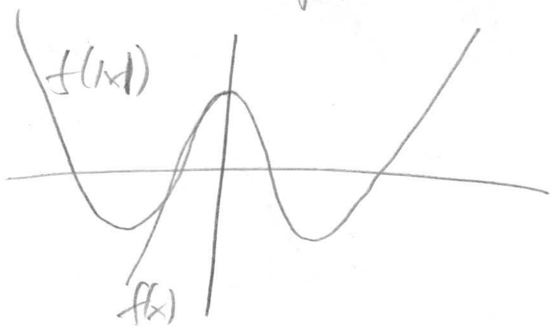
6) Překlopení podle osy x

$y = -f(x)$



7) absolutní hodnota argumentu

$y = f(|x|)$ – z funkce se stane sudá



8) Absolutní hodnota funkční hodnoty

$y = |f(x)|$ okolí je <0 překlopíme do >0

Podrobněji a s kreslícími obrázky: "Transformace grafů funkcí"
H. Říhová
Odkaz v Plus 4U. v sekci
Lineární a kvadr. fce.

Dělení funkcí dle typu

funkce můžeme klasifikovat rovněž podle druhu výrazu v předpisu

- konstantní $y = c \in \mathbb{R}$
- polynomické
  - lineární
  - kvadratické
  - kubické
  - ostatní
- exponenciální a logaritmické $e^x, a^x, \ln x, \log_a x$
- goniometrické a cyklometrické $\sin x, \cos x, \arcsin x$
- mocninné a odmocninné
- speciální, např. absolutní hodnota
- racionální (algebraické), $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q polynomy

Tyto funkce považujeme za elementární a znalost jejich grafů je nezbytná.

Dnes: lineární, kvadratické, lineární lomené a abs. hodnota

5.3. Lineární funkce

lineární funkce, neboli polynom 1. stupně je každá funkce tvaru $y = a \cdot x + b$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

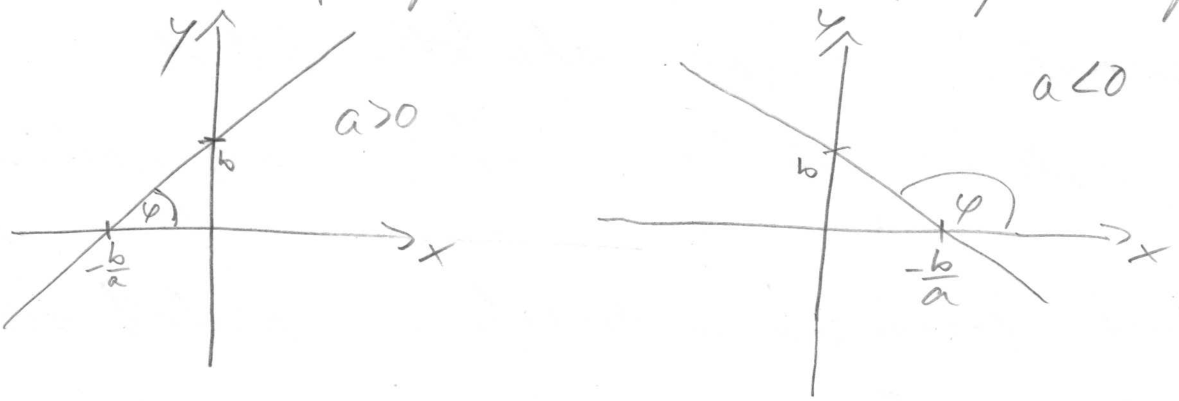
$D_f = \mathbb{R}$ Graf: přímka

$H_f = \mathbb{R}$

a… se nazývá směrnice (slope)

b… absolutní člen, průsečík (intercept)

- Směrnice je číselně rovna $\operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel mezi přímkou a osou x
- $a > 0$ … fce je rostoucí, $a < 0$ fce je klesající



Poznámky: · zkuste si rozmyslet souvislost s transformacemi grafů

- přímky kolmé k ose x takto nelze zapsat (nejedná se o funkce)

5.4. Kvadratická funkce

- polynom 2. stupně

  každá funkce tvaru $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

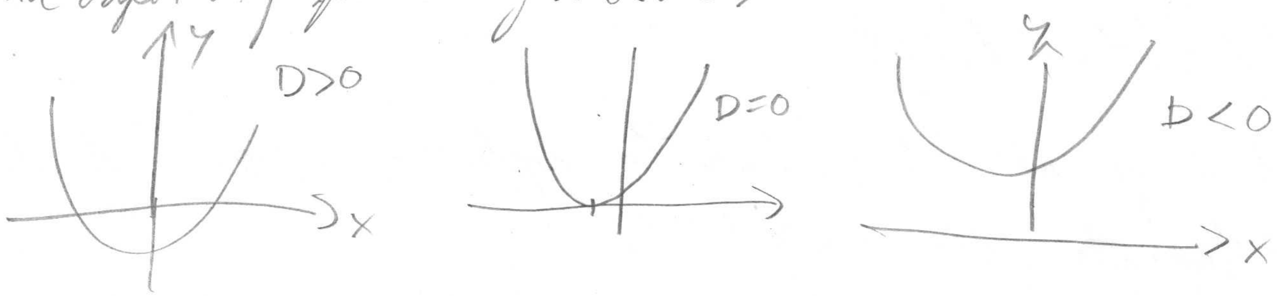
  grafem je parabola

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (-\infty, V_y\rangle$ nebo $\langle V_y, \infty)$

V_y … y-souřadnice vrcholu

- omezená buď zdola nebo shora
- připomeňme, že kvadratický polynom má v závislosti na diskriminantu D buď 2 kořeny (D>0), jeden dvojnásobný kořen (D=0), žádný reálný kořen (D<0)

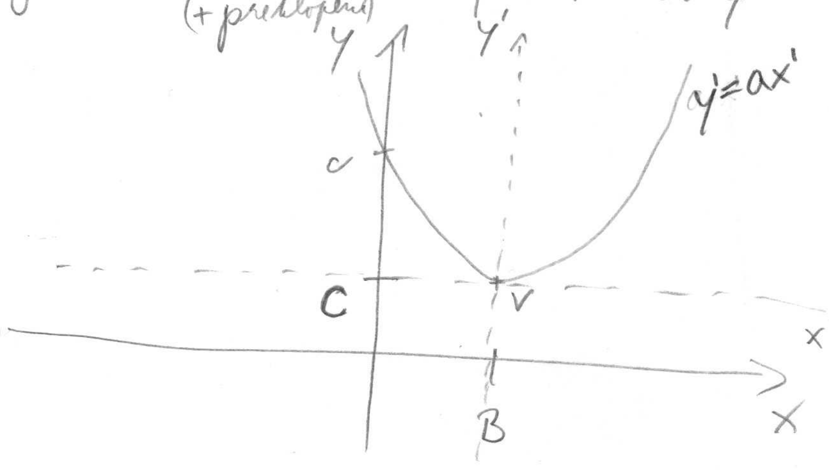
Tomu odpovídají průsečíky s osou x



- „výhodný" je zápis v podobě čtverce dvojčlenu (můžeme udělat vždy)

$$y = a\cdot(x-B)^2 + C \qquad B = -\frac{b}{2a}, \quad C = c - \frac{b^2}{4a} \quad \text{(viz kapitola 3)}$$

5.2 Transformace grafů: kontrakce nebo dilatace v y (+ překlopení); posun ve směru x; posun ve směru y



odsud souřadnice vrcholu:

$$\boxed{V = [B, C] = \left[-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right]}$$

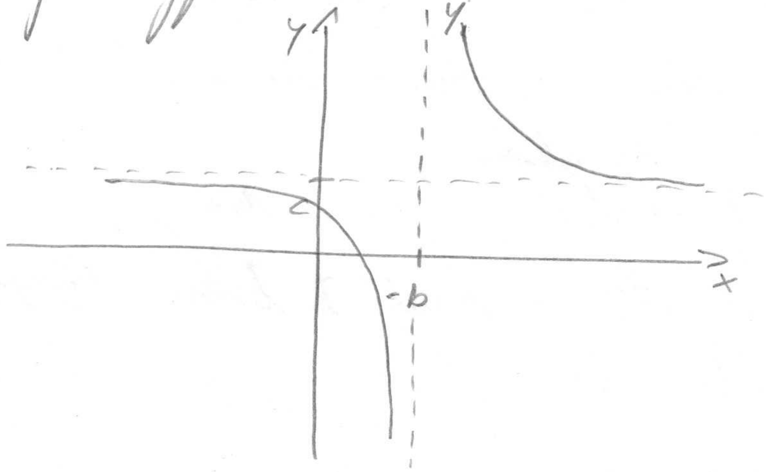
5.5 Lineární lomená funkce

je každá funkce tvaru $= \frac{a}{x+b} + c$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\} \qquad H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

Grafem je hyperbola



5.6 Absolutní hodnota

pokud je absolutní hodnota doplněna k jiné funkci, postupujte dle oddílu 5.2

Příklad jednodušší funkce s absolutní hodnotou může vypadat takto

$$y = a \cdot |x + b| + c$$