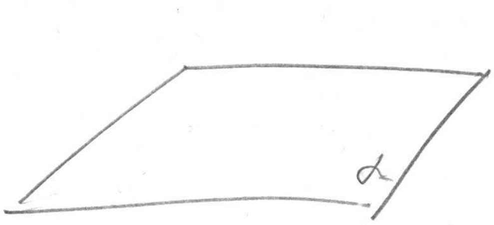
11. Stereometrie

- z řeckého στερεομετρία – měření objemů těles
  στερεός … těleso

- ke pojmům z planimetrie nám tak přibyde řada nových: rovina, různá tělesa atd.
- mimo to bude měřit objemy a povrchy.

11.1 Rovina

- rovina je dvourozměrný geometrický útvar
- obvykle ji znázorňujeme pomocí nějakého rovinného útvaru, nejčastěji čtyřúhelníku
- značíme malým řeckým písmenem

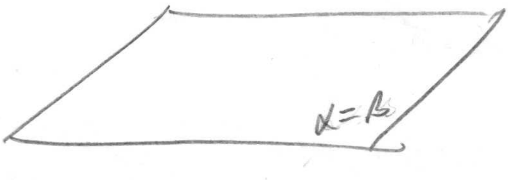


- rovina je určena 3 body, které neleží v přímce nebo 1 přímkou a 1 bodem který na ní neleží (nebo dvojicí různoběžných či rovnoběžných přímek)

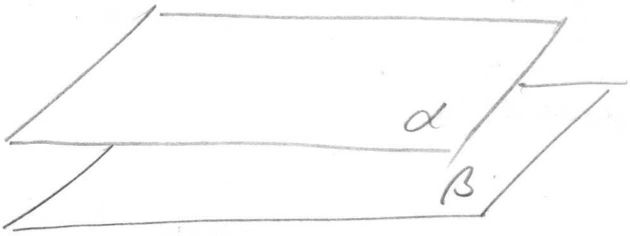
rovinu lze opět chápat jako množinu bodů,
ale množinová notace zde má mnoho výjimek
např. kružnici ležící v rovině α by se měla zapisovat
$k \subset \alpha$, ale často se píše $k \in \alpha$.

11.1.1 Vzájemná poloha rovin

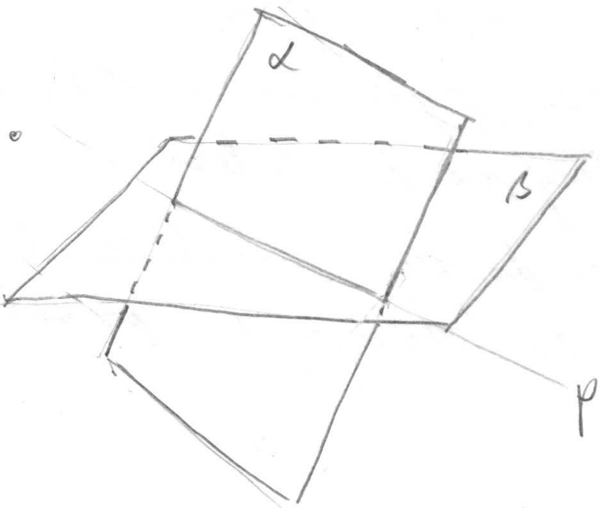
Podobně jako u přímek nastává u rovin právě jeden ze tří případů:

- 

$\alpha = \beta$
roviny jsou totožné

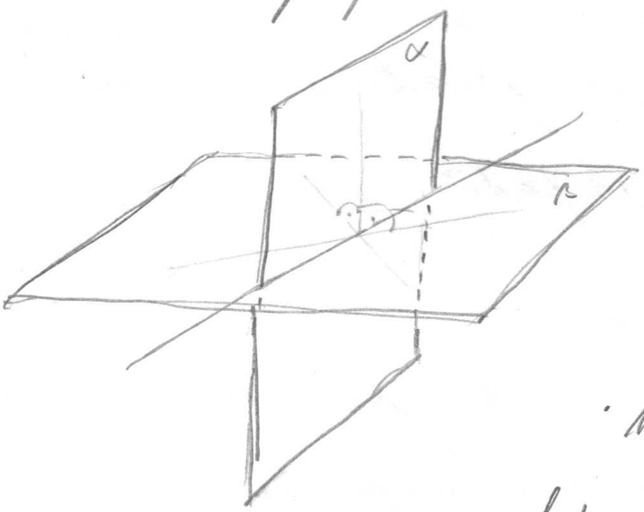
- 

$\alpha \parallel \beta$
roviny jsou rovnoběžné
(nemají žádný společný bod)

- 

roviny jsou různoběžné
($\alpha \times \beta$ se, myslím, nepoužívá)
přímka p se nazývá průsečnice

Speciálním případem různoběžnosti je kolmost

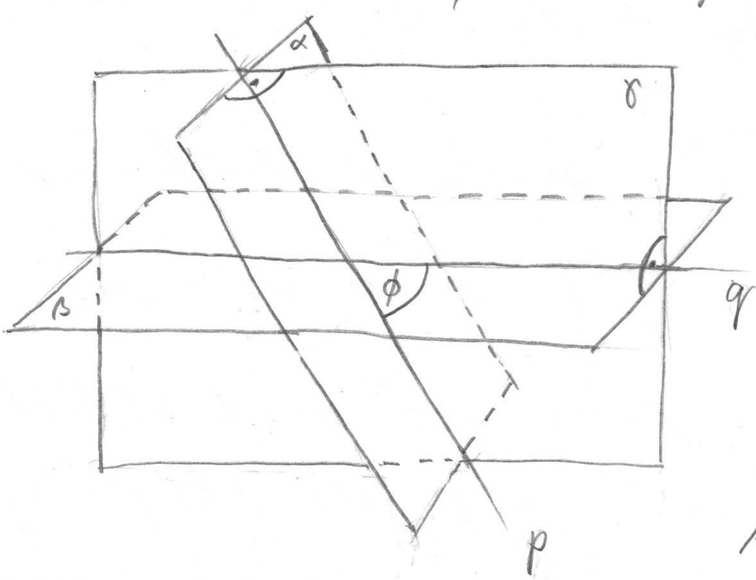


$\alpha \perp \beta$

roviny jsou na sebe kolmé

· kolmost nastává právě tehdy,
když jedna rovina obsahuje
přímku kolmou na druhou rovinu (viz dále)

· Zavádí se odchylka rovin = úhel, který svírají průsečnice rovin α a β s rovinou, která je k nim kolmá.



p je průsečnice α s γ

q je průsečnice β s γ

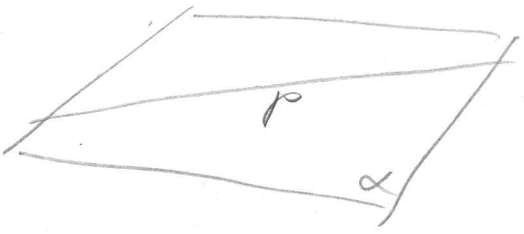
$\alpha \perp \gamma$

$\beta \perp \gamma$

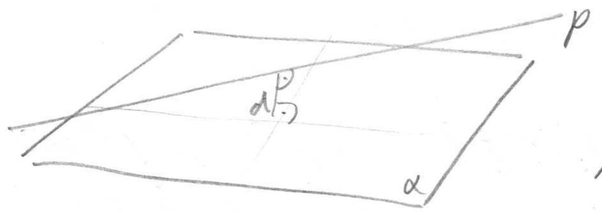
úhel ϕ mezi p a q
se nazývá odchylka rovin.

11.1.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

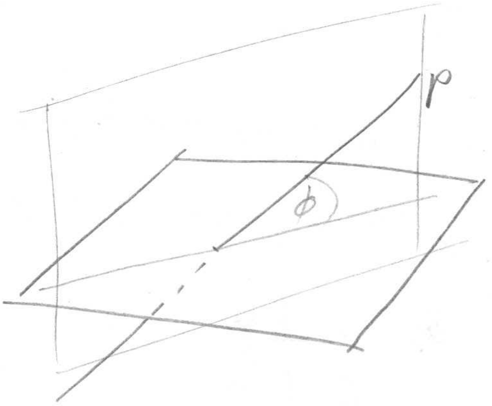
Zde je situace podobná: mějme přímku p a rovinu α.
Nastává právě jeden ze 3 případů.



$p \in \alpha$:
přímka leží v rovině
- nekonečně mnoho společných bodů

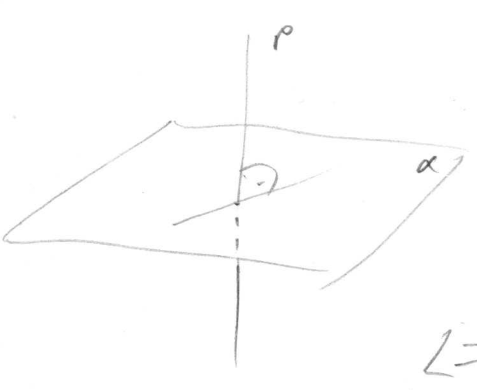


$p \parallel \alpha$
přímka je rovnoběžná s rovinou
- žádný společný bod
- vzdálenost přímky od roviny: d



· přímka je různoběžná s rovinou
($p \nparallel \alpha$ se asi nepoužívá)

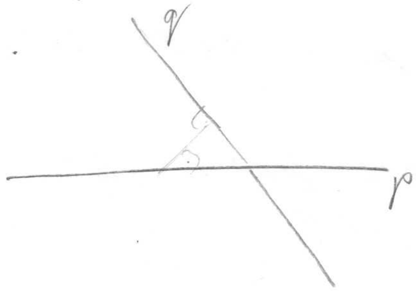
· můžeme opět zavést odchylku přímky p od roviny α, jako úhel φ, který svírá přímka p s průsečnicí roviny α s rovinou γ, která je k α kolmá a obsahuje přímku p



$p \perp \alpha$ speciální případ
přímka je kolmá k rovině α
$\iff$ je kolmá ke všem přímkám v rovině α

11.2. Vzájemná poloha přímek v prostoru

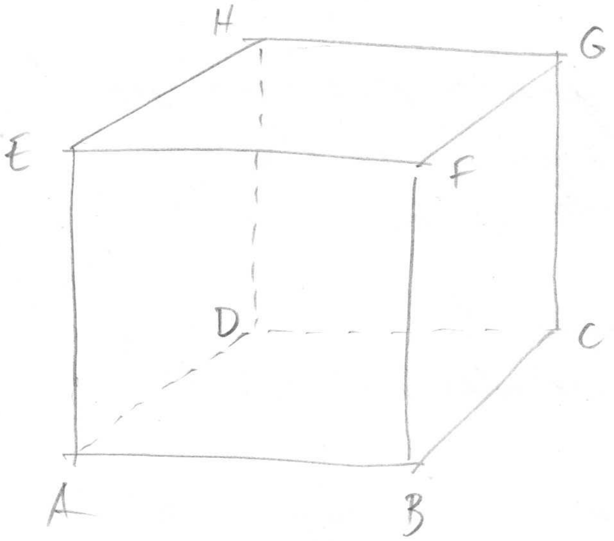
oproti planimetrii zde máme navíc jednu možnost vzájemného postavení dvou přímek



přímky p a q jsou mimoběžné

od rovnoběžnosti a různoběžnosti se to liší tím, že mimoběžné přímky neleží v jedné rovině.

Situaci lze ilustrovat např. na krychli



Srovnejme:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ $(\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{BF})$

$\overleftrightarrow{AB}$ mimoběžná s $\overleftrightarrow{GC}$

11.3 Obsah a objem (a délka)

délka, obsah a objem jsou geometrické veličiny, kterými vyjadřujeme velikost (míru) jedno-, dvou- a třírozměrné části prostoru

v praxi nacházíme mnoho příkladů užití těchto veličin. Např.

- délka: obvod pozemku odpovídá délce plotu, kterým pozemek chceme oplotit
- obsah: velikost plochy: uplatníme při natírání nebo pokládání podlahové krytiny
- objem: množství vody, které se vejde do akvária

Každou z těchto veličin měříme pomocí příslušných jednotek. V soustavě SI (mezinárodní systém jednotek) je základní jednotkou délky metr, značíme m.

U obsahu a objemu nesmíme zapomenout, že měří 2- a 3 rozměrné objekty a tomu musí odpovídat jednotky:

délka … m (metr) obsah … m^2 (metr čtvereční) objem … m^3 (metr krychlový).

Toho využíváme i při převodu jednotek, např.

$$1\,m = 100\,cm \Rightarrow 1\,m^2 = 1\,(100\,cm)^2 = 1 \cdot 10000\,cm^2 = 10000\,cm^2$$

$$1\,m^3 = 1\,(100\,cm)^3 = 10^6\,cm^3$$

Pro měření objemu často užíváme jednotku litr (l), který je totožný s jednotkou dm^3 (decimetr krychlový). Tedy:

$$1\,dm^3 = 1\,l \Rightarrow 1\,m^3 = 1 \cdot (10\,dm)^3 = 1000\,l$$

"1 kubík"

11.4 Přehled těles a jejich vlastností

- Je mnoho způsobů, jak třídit tělesa. Já si jeden vybral, ale uvidíme, že má řadu nedostatků. To necháme stranou a zkusíme si všímat hlavní charakteristických vlastností.

Co je vlastně těleso?
Tělesem rozumíme určitou část prostoru, která je nějak ohraničena.

• Koule

- na papíře ji nerozeznáme od kruhu/kružnice

- množina všech bodů, které mají od pevného bodu (středu) vzdálenost nejvýše r (poloměr)

$$K(S,r) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |PS| \le r\}$$

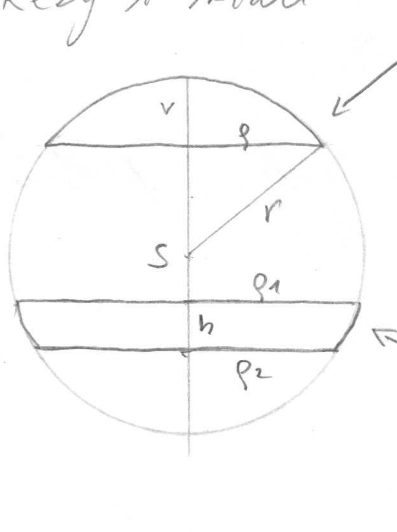
- koule je tedy trojrozměrnou obdobou kruhu

- obdoba kružnice se obvykle nazývá sféra:

$$S(S,r) = \{P \in \mathbb{R}^3 : |PS| = r\}$$

Obsah: $S = 4\pi r^2$ Objem: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Řezy v kouli



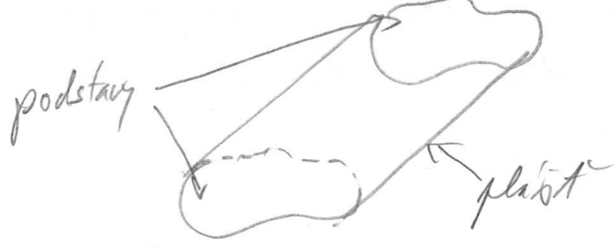
Kulová úseč: $V = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$
povrch kulové úseče se nazývá kulový vrchlík: $S = 2\pi r v$

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi h}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$
povrch kulové vrstvy se nazývá kulový pás: $S = 2\pi r \cdot h$

Tyto vzorečky si nemusíte pamatovat

• Válec

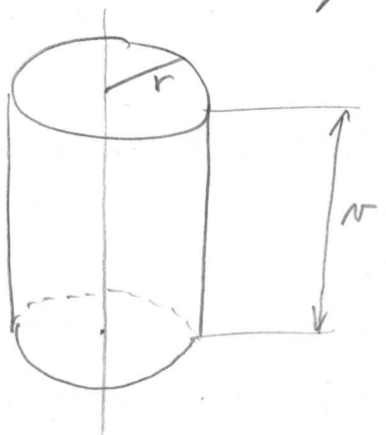
- těleso vymezené 2 rovnoběžnými podstavami a pláštěm



- podstava může být tvořena různými útvary (typicky hladkými, tj. bez vrcholů)

- je-li plášť kolmý na podstavy, mluvíme o <u>kolmém válci</u>, v opačném případě o <u>kosém válci</u>

- nejčastěji mluvíme o tzv. <u>kruhovém válci</u> = kolmý válec s kruhovou podstavou s výškou v a poloměrem r



Objem: $V = \pi r^2 \cdot v$

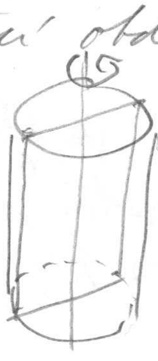
Povrch: je dán součtem povrchů podstav a pláště

$$S = 2 \cdot S_{pod.} + S_{pl}$$

Rozvinutý plášť je obdélník o stranách $v \times O$, kde $O = 2\pi r$ je obvod podstavy

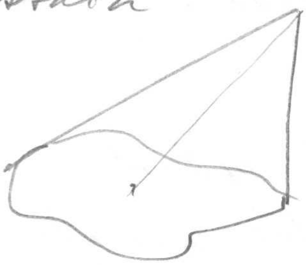
Tedy
$$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot v = 2\pi r \cdot (r + v)$$

Kruhovému válci se někdy říká rotační válec, protože vzniká rotací obdélníku kolem osy



· Kužely

- kužel se od válce liší tím, že má pouze jednu podstavu

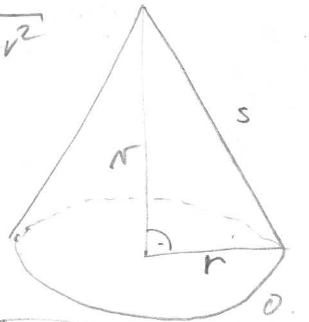


$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

- opět rozlišujeme kosý × kolmý
- opět dělíme dle tvaru podstavy

- Kruhový kužel
  podstava má tvar kruhu
  rozvinutý plášť má tvar kruhové výseče

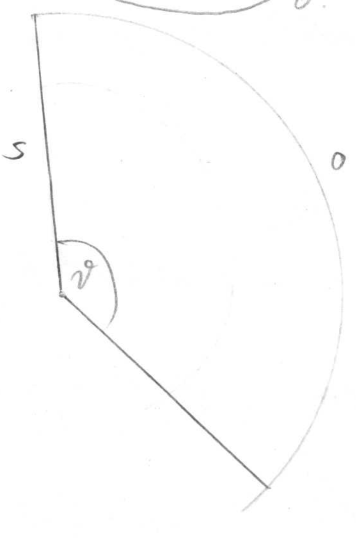
$s = \sqrt{r^2 + v^2}$



Objem $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$

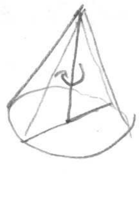
Povrch: $S = S_p + S_{pl}$

Obsah výseče lze spočítat z tohoto
$S_{pl} = \frac{1}{2} s \cdot o$
kde s je poloměr výseče
a o je vyměřený oblouk



$\Rightarrow S = \pi r^2 + \frac{1}{2} s \cdot 2\pi r$
$= \pi r (r + s)$

Podobně jako u válce: kruhovému kuželu se někdy říká rotační kužel



• Mnohostěny

mnohostěn je trojrozměrný geometrický útvar, který se skládá z konečné mnoha stěn tvořených mnohoúhelníky.

mnohostěny lze opět dělit mnoha způsoby, my se zde zaměříme jen na dva speciální druhy: jehlany a hranoly.

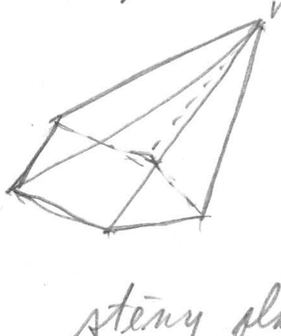
Výjimečnou skupinou jsou tzv. Platónská tělesa, neboli pravidelné mnohostěny: všechny stěny mají stejný tvar a jsou stejně veliké. Existuje pouze těchto 5:

čtyřstěn - trojúhelníky
šestistěn (krychle) - čtverce
osmistěn - trojúhelníky
dvanáctistěn - pětiúhelníky
dvacetistěn - trojúhelníky

-Jehlan

těleso podobné kuželu, ale podstavou je mnohoúhelník

opět existuje kosý a kolmý,
podstava n-úhelník → n-boký jehlan
podle n-úhelníku → pravidelný a nepravidelný



Objem: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

Povrch: $S = S_p + S_{pl}$

stěny pláště jsou tvořeny trojúhelníky

pravidelný kolmý jehlan:
- stěny pláště jsou stejné rovnoramenné trojúhelníky

• Hranol

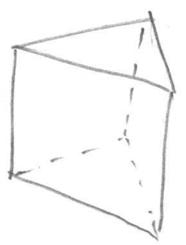
hranol má dvě mnohoúhelníkové podstavy

- kolmý vs kosý
- pravidelný vs nepravidelný
- n-boký
- úsečky spojující vrcholy - úhlopříčky < stěnové, tělesové

Objem $V = S_p \cdot v$ Povrch: $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

Plášť je tvořen obdélníky.

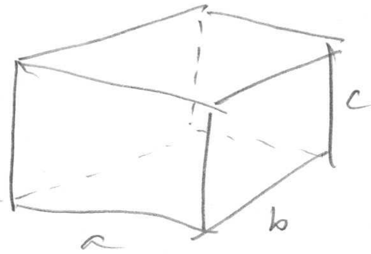
Příklad: pravidelný 3-boký hranol



kosý 4-boký hranol = rovnoběžnostěn

- Kvádr

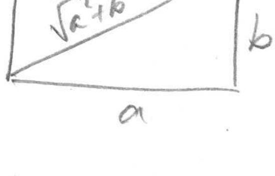
speciální případ hranolu - 4-boký kolmý hranol



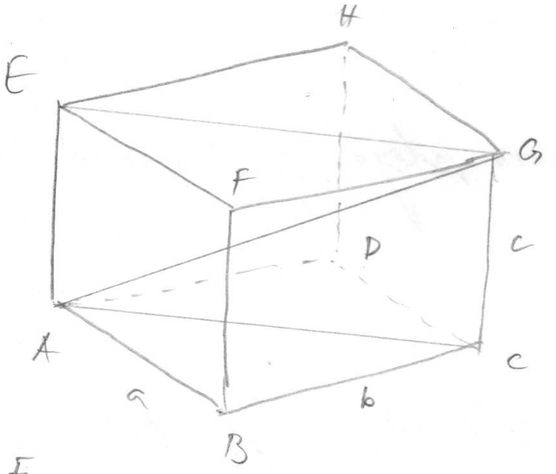
- všechny stěny jsou obdélníky
- obvykle značíme délkou stran a, b, c

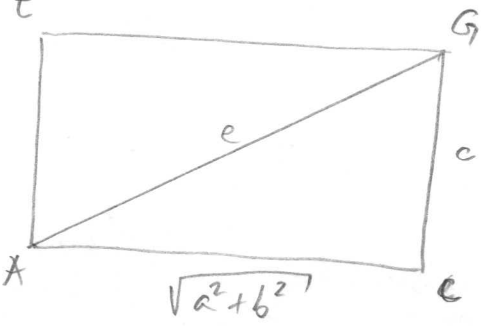
Objem $V = a \cdot b \cdot c$
Povrch $S = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$

stěnové úhlopříčky: úhlopříčky jednotlivých stěn



tělesové úhlopříčky: procházejí vnitřkem tělesa
→ dvojí užití Pythagorovy věty





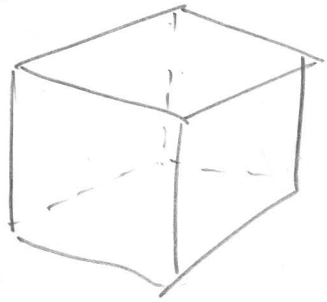
Délka tělesové úhlopříčky.

$e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

- Krychle

speciální případ kvádru: $a = b = c$

- pravidelný šestistěn



Objem $V = a^3$

Povrch $S = 6a^2$

stěnová úhlopříčka $\sqrt{2}\,a$

tělesová úhlopříčka $\sqrt{3}\,a$