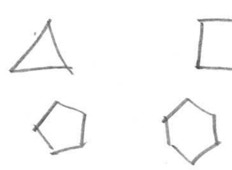
# 8. Trojúhelník

· omezíme se na geometrii v rovině

· několik základních útvarů v rovině

určité  neurčité: 

· mnoho způsobů dělení podle vlastností

- pravidelné / nepravidelné
- konvexní / nekonvexní
- souvislé / nesouvislé

· nás čeká 

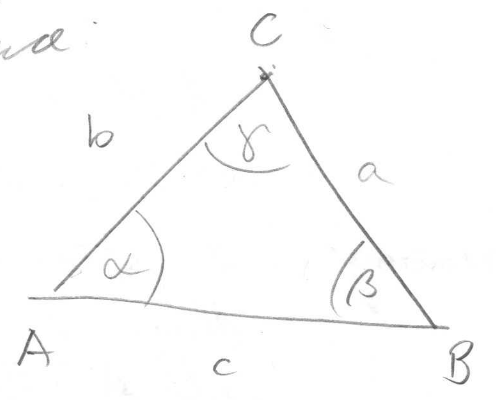
---

trojúhelník je nejjednodušší mnohoúhelník.

Název napovídá, o jaký útvar se jedná

trojúhelník, triangle, dreieck

· Trojúhelník je určen 3 body, které neleží v jedné přímce



- body obvykle značíme velkými písmeny
- protilehlé strany značíme odpovídajícími malými písmeny.
- přilehlé úhly značíme malými řeckými písmeny.
  vnitřní úhly

Zapisujeme: $\triangle ABC$.

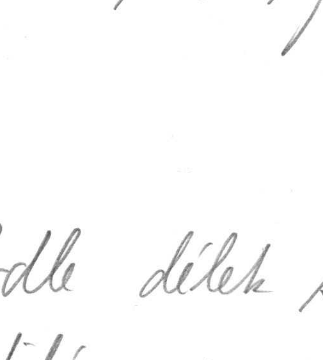
Pro každý trojúhelník platí

- součet vnitřních úhlů je vždy $180°$
- "trojúhelníková nerovnost" – tj součet dvou stran musí být větší než strana zbývající!

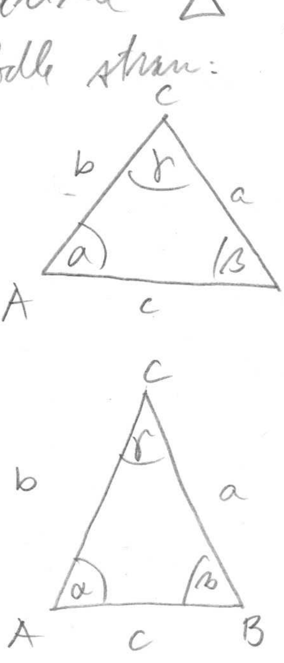
$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

Podle délek stran a velikostí vnitřních úhlů dělíme $\triangle$ na:

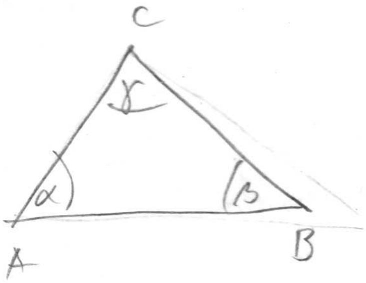
Podle stran:




- Rovnostranný: · všechny strany jsou stejně dlouhé
  - každý vnitřní úhel je právě $60°$
  - $a=b=c, \quad \alpha=\beta=\gamma$

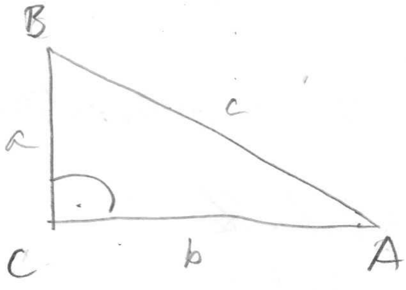



- Rovnoramenný · dvě strany (ramena) jsou stejně dlouhé
  - úhly při "základně" jsou stejné
  - $a=b \quad \alpha=\beta$



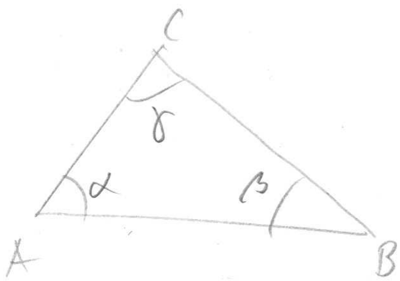

Obecný : nic zvláštního.

Podle úhlů



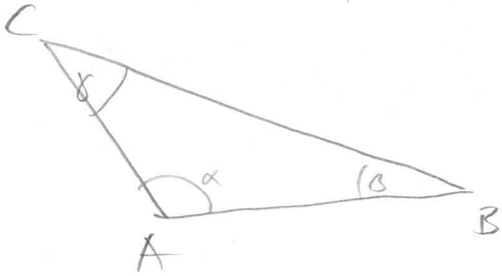

Pravoúhlý : • jeden úhel je pravý (90°)
• strany při pravém úhlu se nazývají odvěsny, strana proti pravému úhlu se nazývá přepona

$\gamma = 90°$   $a, b$ ... odvěsny
$c$ ... přepona




Ostroúhlý : • všechny vnitřní úhly jsou ostré (< 90°)

$\alpha, \beta, \gamma < 90°$

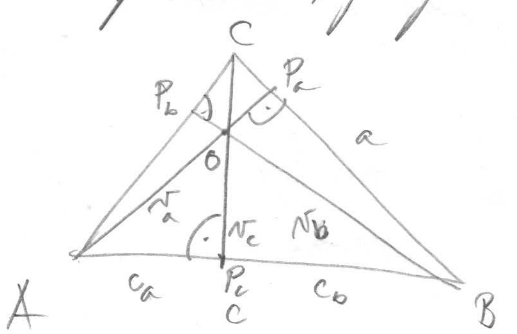


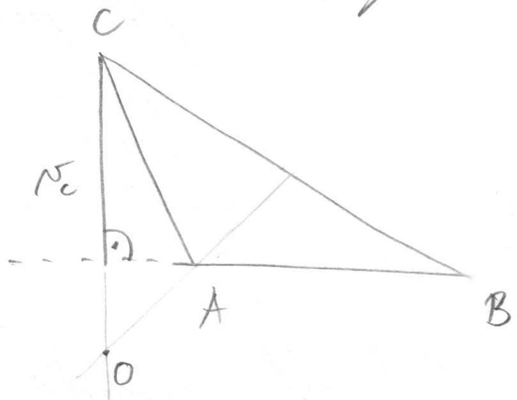

Tupoúhlý : • jeden z vnitřních úhlů je tupý (> 90°)

# Výška trojúhelníku

Výška △ je úsečka kolmá na stranu trojúhelníka procházející protilehlým bodem

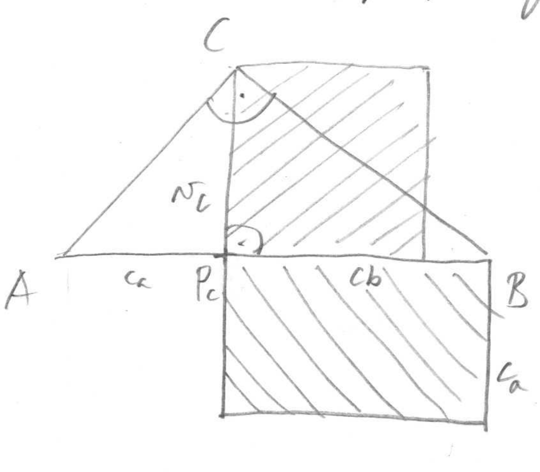
- každý trojúhelník má 3 výšky.
- výšky se protínají v jednom bodě, zvaném ortocentrum.
- výška se může nacházet mimo trojúhelník
- průsečík výšky se stranou se nazývá pata.




- Eukleidova věta o výšce

„Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z úseků přepony."

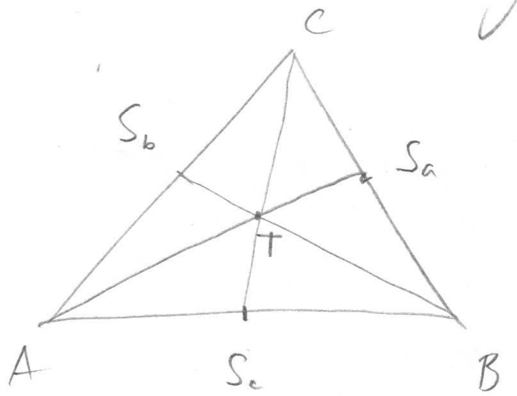



$$\boxed{v_c^2 = c_a \cdot c_b}$$

## Těžnice trojúhelníku

Těžnice je úsečka vedoucí ze středu strany trojúhelníka k protilehlému vrcholu.

- těžnice trojúhelníka se protínají v bodě, který se nazývá těžiště a dělí se v poměru 2:1, přičemž delší část se vždy nachází u vrcholu.

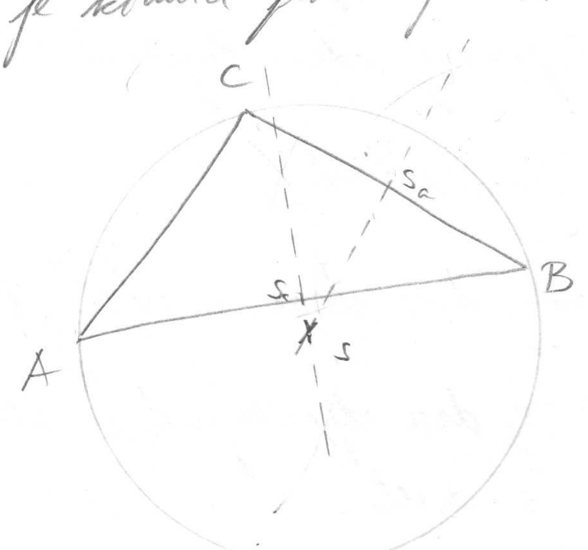



- těžnice vždy leží uvnitř trojúhelníka.

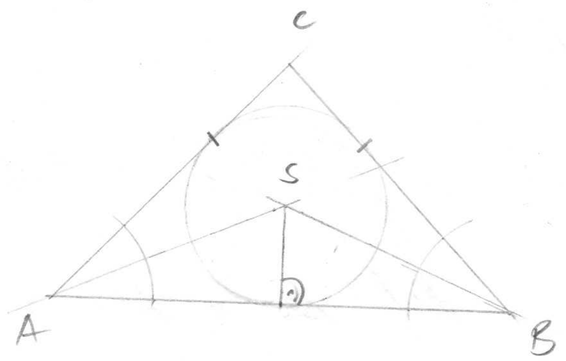
## Kružnice opsaná a vepsaná

- Kružnice opsaná prochází vrcholy trojúhelníka a její střed leží na průsečíku os stran.

Osa strany je kolmice procházející středem strany.



Kružnice vepsaná se dotýká všech tří stěn trojúhelníka a její střed leží v průsečíku os úhlů.




## Podobnost trojúhelníků

Řekneme, že dva trojúhelníky jsou si podobné, pokud existuje $k > 0$: $a' = k \cdot a$

$b' = k \cdot b$

$c' = k \cdot c$

$k$ ... koeficient podobnosti $\Delta$: $k = 1$ shodné trojúhelníky

$k < 1$ zmenšení

$k > 1$ zvětšení.

Věty o podobnosti $\Delta$: 2 trojúhelníky jsou podobné, pokud ...

sss: ... se shodují poměry odpovídajících si stran

uu: ... se shodují ve dvou úhlech

sus: ... se shodují poměry dvou stran a úhel, jež svírají

Ssu: ... se shodují poměry dvou odpovídajících si stran a úhel, proti větší z nich.

Poznámka:

- poměry délek stran podobných trojúhelníků se rovnají právě koeficientu $k$.

Pro $k=1$, tedy shodné trojúhelníky, dostáváme čtveřici vět o shodnosti trojúhelníků.

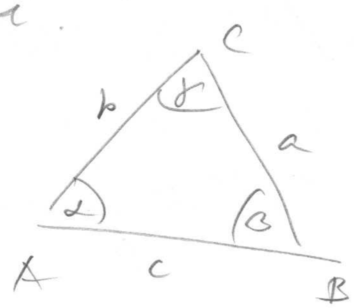
---

## Sinová a cosinová věta

Pro každý trojúhelník platí věty:

sinová: Poměr délek stran a sinů protilehlých úhlů je v trojúhelníku konstantní.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$




cosinová:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cos\beta$$

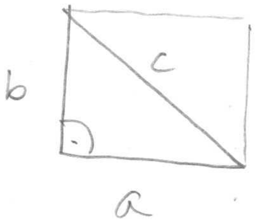
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos\gamma$$

# Obvod a Obsah

Obvod $O = a+b+c$

Obsah $S = \frac{v_a \cdot a}{2} = \frac{v_b \cdot b}{2} = \frac{v_c \cdot c}{2}$

Výpočet obsahu lze snadno vidět v pravoúhlém trojúhelníku.




Obsah je zřejmě roven polovině obsahu vyznačeného obdélníka $S = \frac{a \cdot b}{2}$

V pravoúhlém trojúhelníku $v_a = b$

$v_b = a$

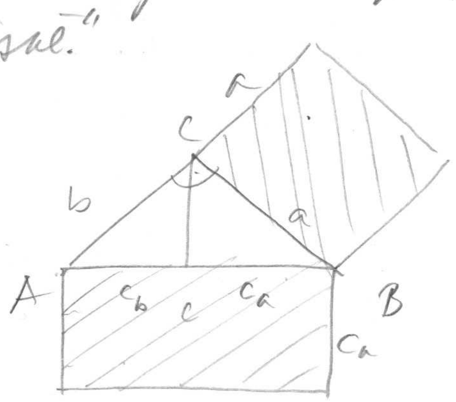
---

# Pravoúhlý trojúhelník

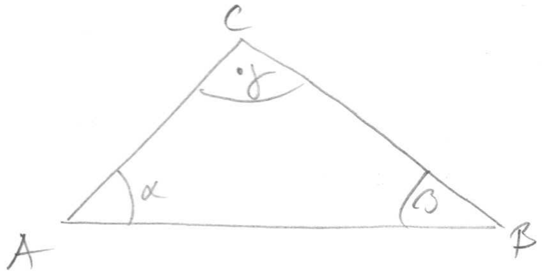
Kromě Eukleidovy věty o výšce platí ještě

Eukleidova věta o odvěsně:

"Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého △ je roven obsahu obdélníka sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně."



# Cosinová věta v pravoúhlém trojúhelníku




$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot b\cdot a\cos\gamma$$

ale $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0$

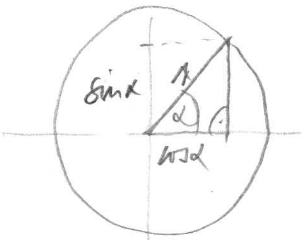
$$\Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2} \text{ Pythagorova věta.}$$

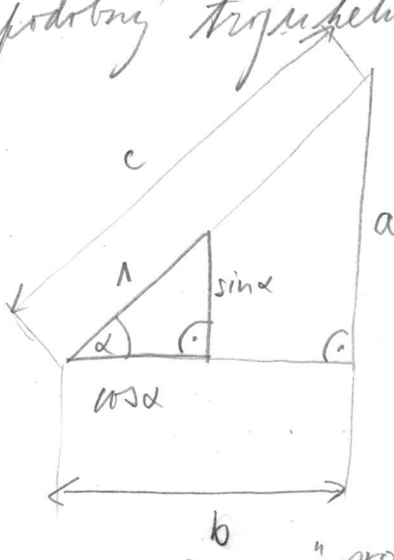
"Obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami."

---

## Goniometrické funkce jako funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku

Připomeňme si jednotkovou kružnici a uvažujme podobný trojúhelník




koeficient podobnosti zvolíme $k = c$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= c\cdot\sin\alpha \\ b &= c\cdot\cos\alpha \end{aligned}}$$

všimněte si:
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
Pythagorova věta

Tedy lze zavést:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ "protilehlá odvěsna ku přeponě"

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ "přilehlá ku přeponě"

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$ "protilehlá ku přilehlé" $\cot\text{an}\,\alpha = \frac{b}{a}$