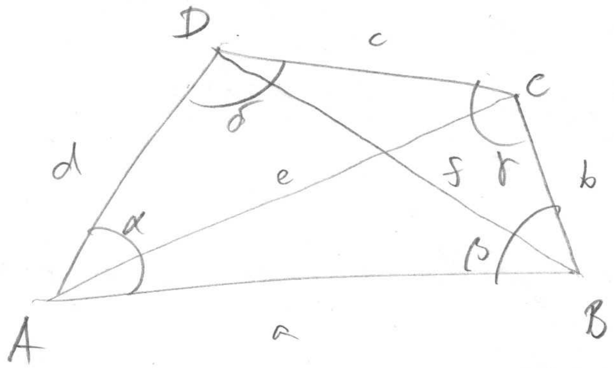
9. Čtyřúhelník

- název napovídá: rovinný útvar se čtyřmi vnitřními úhly.

- podobně jako u trojúhelníku členíme čtyřúhelníky podle jejich vlastností.

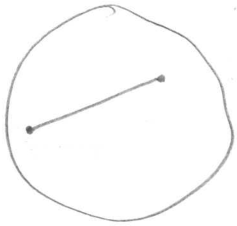
- konvence a značení:



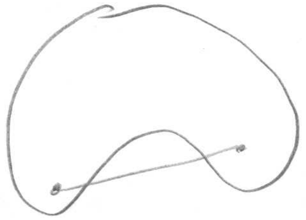
a, b, c, d .. strany
e, f .. úhlopříčky
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .. vnitřní úhly
A, B, C, D .. vrcholy

- Konvexní vs. nekonvexní:
- platí nejen pro čtyřúhelníky (u $\triangle$ o tom jen nemělo smysl hovořit)

Definice: Rovinný útvar nazveme konvexní, pokud spojnice libovolných dvou vnitřních bodů leží uvnitř útvaru

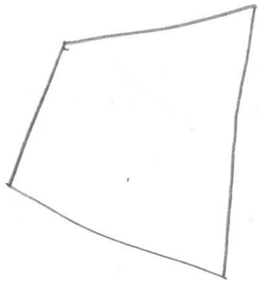


konvexní

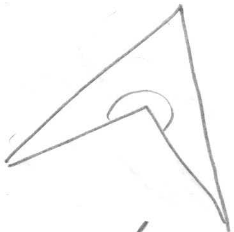


nekonvexní

Čtyřúhelníky:



konvexní



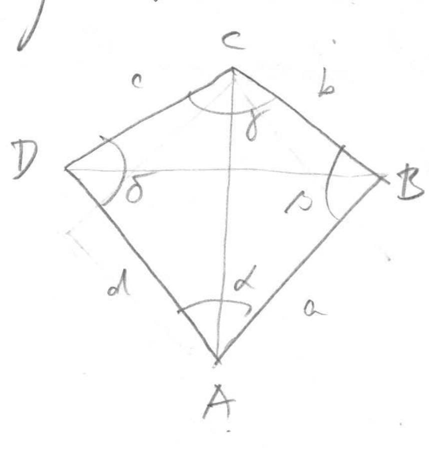
nekonvexní

Poznámka: všimněte si, že u nekonvexního čtyřúhelníku musí být jeden úhel větší než přímý (> 180°).

Obecný čtyřúhelník není příliš zajímavý – podíváme se na speciální případy.

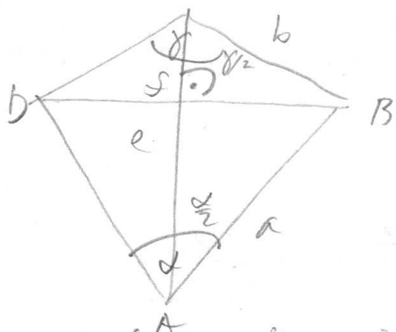
Deltoid

- čtyřúhelník, ve kterém mají dvojice přilehlých stran stejnou velikost.

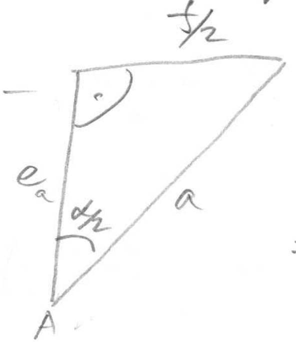


$a=d$, $b=c$

Postřehy (vše plyne z $a=d$ a $b=c$)

- deltoid je osově souměrný podle jedné úhlopříčky ← „hlavní"
- úhlopříčky jsou na sebe kolmé, hlavní úhlopříčka půlí tu vedlejší, hlavní úhlopříčka půlí úhly α a γ
- 

vezmeme



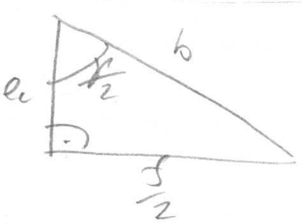
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{f/2}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 2\cdot a\cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$e_a = a\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e hlavní úhlopříčka

f vedlejší



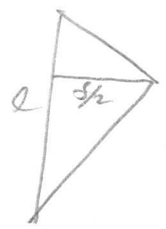
$$f = 2\cdot b\cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$e_c = b\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$e = a\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + b\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Obvod: $o = a+b+c+d$

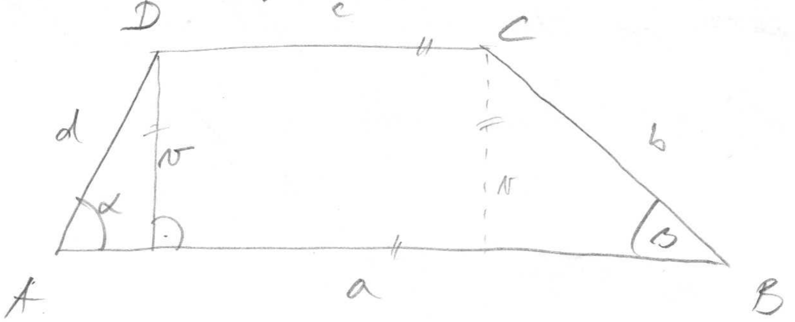
Obsah: Součtem obsahů dvou trojúhelníků



$$S = 2\cdot S_\Delta = 2\cdot\frac{1}{2}e\cdot\frac{f}{2} = \underline{\frac{1}{2}ef}$$

Lichoběžník

- čtyřúhelník, který má právě 1 dvojici rovnoběžných stran



$a \parallel c$

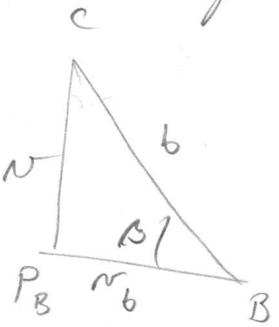
a, c ... základny

b, d ... ramena

Opět řadu vztahů odvodíme pomocí trigonometrie.

$v = d \cdot \sin\alpha$

$v_a = d \cdot \cos\alpha$



$v = b \cdot \sin\beta$

$v_B = b \cdot \cos\beta$

$a = c + v_a + v_b$

- Obsah: $S = S_{\Delta} + S_{\square} + S_{\Delta}$

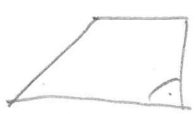
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} v \cdot v_a + v \cdot a + \frac{1}{2} v \cdot v_b = \frac{1}{2} v \cdot (v_a + 2\cancel{a} + v_b)$$

$$= \frac{1}{2} v \left(a + \underbrace{a + v_a + v_b}_{c}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} v \cdot (a + c)}$$

Speciální případy lichoběžníku:

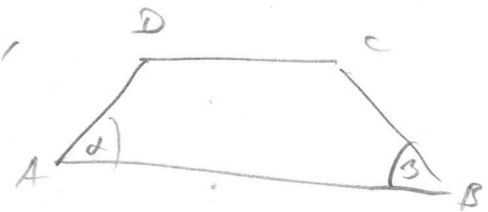
- pravoúhlý: jedno rameno svírá se základnou pravý úhel



- rovnoramenný: ramena jsou stejně dlouhá

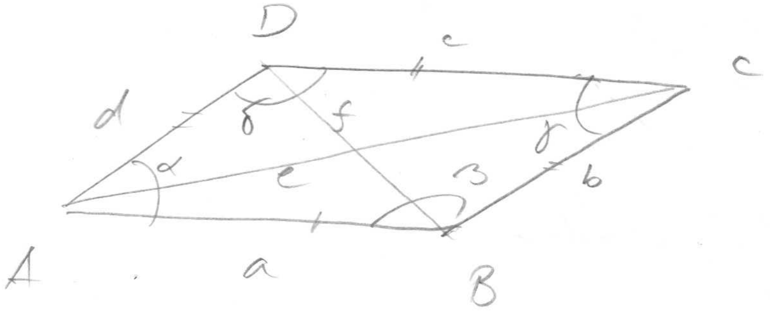
$b = d$

$\Rightarrow \alpha = \beta, \ \gamma = \delta$



Rovnoběžník – někdy kosodélník

– čtyřúhelník, který má dvě dvojice rovnoběžných stran



$a \parallel c$ a $b \parallel d$

Postřehy

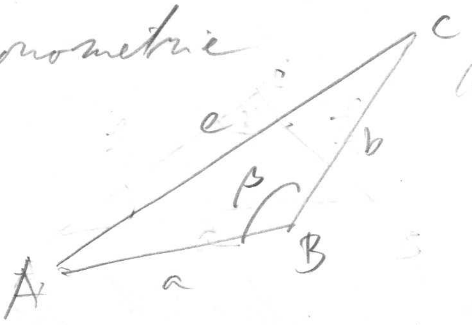
– protější strany mohou být rovnoběžné, pouze pokud jsou stejně dlouhé, tedy $a = c$ a $b = d$

– protější úhly tak taky musí být stejně velké:

$\alpha = \gamma \quad \beta = \delta$

– úhlopříčky jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí

– trigonometrie

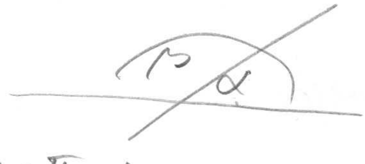


$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos\beta}$

podobně

$f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a b \cos\alpha}$

– všimneme si



$\beta + \alpha = 180$

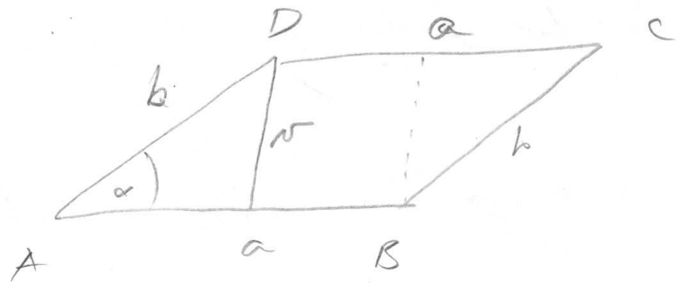
$\beta = 180° - \alpha \approx \pi - \alpha$

$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = \cos\pi \cos\alpha + \sin\pi \sin\alpha = -\cos\alpha$

$\Rightarrow$

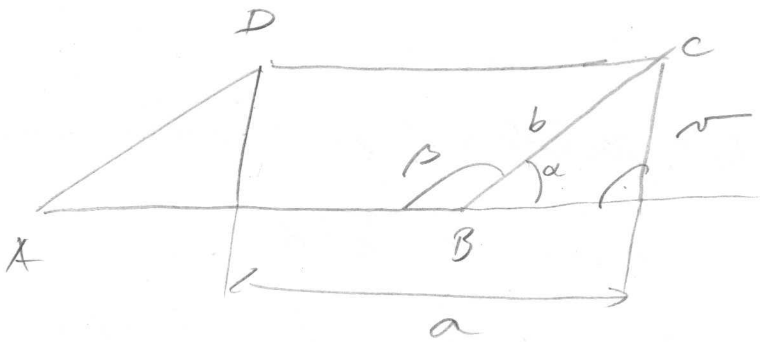
$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$

- u rovnoběžníků má opět smysl zavést výšku



$v = \sin\alpha \cdot b$

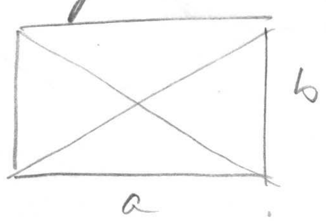
- obsah lze odvodit snadno



$S = a \cdot v = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

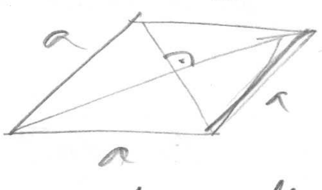
Speciální případy:

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 90° ⟶ obdélník · úhlopříčky jsou stejně dlouhé

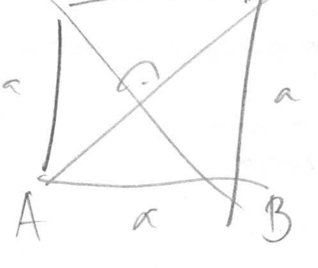


$e = f$

- $a = b$ ⟶ kosočtverec · úhlopříčky jsou na sebe kolmé



- $a = b$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ⟶ čtverec



$e = f$

· úhlopříčky jsou stejně dlouhé a půlí se