2. Vlastnosti čísel

Čísla dělíme do skupin, podle vlastností.

Nabízí se dvě cesty
- "shora" – $\mathbb{C}$ a postupně vymezíme specifické podmnožiny
- "zdola" – postupným přidáváním vlastností ~ historický vývoj.

My budeme budovat zdola.

Co prozatím umíme s čísly?

- porovnat $a = b$ rovnají se a $a \neq b$ jsou různá
- základní početní operace: sčítání a násobení a k nim inversní: odečítání a dělení.

Definice: Řekneme, že množina M je uzavřená vzhledem k operaci $\circ$, jestliže platí

$$\forall a, b \in M : (a \circ b) \in M .$$

Definice: Množina čísel, ve které je definované sčítání a násobení nazýváme číselný obor.

2.1 Přirozená čísla

Definice: Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je množina, která obsahuje číslo 1 a s každým číslem k i číslo $k+1$.

tj $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Poznámka:
- Existuje více způsobů, jak zavést přirozená čísla, některé konceptuálně velmi ~~ab~~abstraktní
  např. Von Neumanova konstrukce
  $0 = \emptyset \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
  $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ atd.
- někdy se k přirozeným číslům počítá i 0
  $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$
- $\mathbb{N}$ je uzavřená vzhledem k sčítání i násobení, ne však vzhledem k odečítání a dělení:
  $3 : 2 = 1{,}5 \notin \mathbb{N}$
  $3 - 10 = -7 \notin \mathbb{N}$.

2.1.1 Dělitelnost a prvočísla

Definice: Řekneme, že $a \in \mathbb{N}$ dělí $b \in \mathbb{N}$, jestliže $\exists c \in \mathbb{N}$ takové, že $b = a \cdot c$. Značíme $a \mid b$ (nedělí $\Rightarrow a \nmid b$)

(Tedy b je c-násobkem a, b je dělitelné a i a je dělitel b).

Příklad: $4 \mid 120$, neboť $120 = 4 \cdot 30$, tj $c = 4$

Věta 2.1: Kritéria dělitelnosti
Přirozené číslo a je dělitelné

- 2 $\Leftrightarrow$ končí některou z číslic $\{0,2,4,6,8\}$
- 3 $\Leftrightarrow$ je jeho ciferný součet dělitelný 3.
- 4 $\Leftrightarrow$ je poslední dvojčíslí dělitelné 4.
- 5 $\Leftrightarrow$ končí číslicí 0 nebo 5
- 8 $\Leftrightarrow$ je poslední trojčíslí dělitelné 8
- 9 $\Leftrightarrow$ je jeho ciferný součet dělitelný 9
- 10 $\Leftrightarrow$ končí 0
- 11 $\Leftrightarrow$ rozdíl součtů číslic sudých a lichých řádu dělitelný 11.

Příklad:
- $24 = 2 \cdot 12$
- $3 \mid 3917421$, neboť $3+9+1+7+4+2+1 = 27$ a $3 \mid 27$
- $5 \mid 21792335$
- $8 \mid 2536$, neboť $8 \mid 536$ $536 = 8 \cdot 67$
- $11 \mid 8284749$, neboť $|32-10| = 22$ a $11 \mid 22$.

Poznámka: · pravidla lze dále kombinovat

$6 \mid a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2 \mid a \wedge 3 \mid a$

$55 \mid a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 5 \mid a \wedge 11 \mid a$

$55 \mid 39325$: končí na 5
a $11 - 11 = 0$.

Definice: Společným dělitelem přirozených čísel $n_1, n_2 \dots n_k$ nazýváme přirozené číslo, které dělí každé z čísel $n_1, \dots n_k$.
Největší z nich se nazývá největší společný dělitel, obvykle se značí $D(n_1, \dots n_k)$.

Pokud $D(n_1, \ldots n_k) = 1$, čísla se nazývají nesoudělná.

Společným násobkem přirozených čísel $n_1 \ldots n_k$ nazveme přirozené číslo, které je násobkem každého z nich. Nejmenší takové číslo se nazývá nejmenší společný násobek, značí se $n(n_1, \ldots n_k)$

Definice: Prvočíslo je takové přirozené číslo, které je dělitelné jenom 1 a samo sebou. Číslo, které není prvočíslo se nazývá složené číslo.

Věta 2.2. Každé složené číslo můžeme vyjádřit jako součin prvočísel a to jednoznačně až na pořadí.

Tato prvočísla se nazývají prvočinitelé daného složeného čísla a toto vyjádření se nazývá prvočíselný rozklad.

Příklad:
a) 349 prvočíslo
b) $186 = 2 \cdot 93 = 2 \cdot 3 \cdot 31$
c) $256 = 2^8$
d) $400 = 2^4 \cdot 5^2$

Věta 2.3 Výpočet $D(n_1, n_2)$ a $n(n_1, n_2)$ lze provést z prvočíselného rozkladu čísel n_1, n_2.

$D(n_1, n_2)$ je součin všech společných prvočinitelů v nejnižší mocnině, v jaké se v rozkladech vyskytují.

$n(n_1, n_2)$ je součin všech prvočinitelů v nejvyšší mocnině, v jaké se v rozkladech vyskytují.

Příklad: a) $n_1 = 2604 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$

$n_2 = 1836 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17$

$\Rightarrow \quad D(n_1, n_2) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$n(n_1, n_2) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 = 398\,412$

b) $n_1 = 156 = 4 \cdot 39 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

$n_2 = 234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

$D(n_1, n_2) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$

$n(n_1, n_2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 468$

Poznámka:

$$n(n_1, n_2) \cdot D(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$$

viz b) $156 \cdot 234 = 36\,504$

$78 \cdot 468 = 36\,504$

2.2 Celá čísla

Definice: Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je množina, která obsahuje čísla přirozená, nula a čísla opačná k přirozeným.

tj. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$

Poznámka: obor celých čísel už je otevřený vzhledem ke sčítání:

napří. $10 - 40 = -30 \in \mathbb{Z}$

2.3 Racionální čísla

Definice: Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je množina všech čísel, která lze vyjádřit jako podíl celých čísel.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

Poznámka a) mezi racionální čísla patří všechna čísla s ukončeným ~~nebo~~ periodickým desetinným rozvojem.

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ $\qquad 0{,}2379$

$\frac{10}{11} = 0{,}\overline{90}$ $\qquad 0{,}\overline{1250}$

b) Obor přirozených čísel je uzavřený vzhledem k dělení.

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$$

c) racionální používáme k vyjádření poměru

$$\frac{a}{b} \longrightarrow a:b \quad (\text{"a ku b"})$$

říkáme, že číslo c zvětšíme/zmenšíme v daném poměru. Počítáme jako součin.

např. Zvětšíme číslo 60 v poměru 7 : 6

$$\longrightarrow \cancel{8}\ \frac{7}{6}\cdot 60 = 70$$

d) speciální případ poměru: procento $\frac{a}{100}$ %

promile $\frac{b}{1000}$ ‰

"x je p% z y": $\underbrace{x}_{\text{"procentová část"}} = \frac{p}{100}\cdot y = \underbrace{y}_{\text{"základ"}}\cdot p\%$

e) Racionálních čísel je nekonečně mnoho. Mezi každými $a, b \in \mathbb{Q}$ leží nekonečně mnoho racionálních čísel.

Např. $c_n = \frac{a+b}{n} \quad n = 2, \ldots$

$$a < c_n < b$$

2.4 Iracionální čísla

Definice: Iracionální čísla jsou čísla, která nejsou racionální.
Značíme $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Q}\}$, někdy $\mathbb{Q}'$

Poznámka: · patří sem čísla s nekonečným neperiodickým desetinným rozvojem.
napři. $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt[7]{6^5}, \cos\frac{\pi}{6}$

2.5 Reálná čísla

Definice Množinu racionálních a iracionálních čísel nazýváme reálná čísla.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Poznámka: · reálná čísla jsou uzavřena vzhledem k celé řadě dalších operací

$$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$$
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$$

Věta: Aritmetika reálných čísel

- nulový prvek: existuje právě jedno reálné číslo 0:
$$a+0=0+a=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
- jednotkový prvek: existuje právě jedno číslo 1:
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
- číslo opačné: ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $-a \in \mathbb{R}$:
$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

· převrácené číslo: ke každému $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ existuje právě jedno $1/a \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

· asociativní zákon: $a + (b+c) = (a+b)+c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

· komutativní zákon: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

· distributivní zákon: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Co se nevešlo jinam (nebo jsem na to zapomněl)

· absolutní hodnota

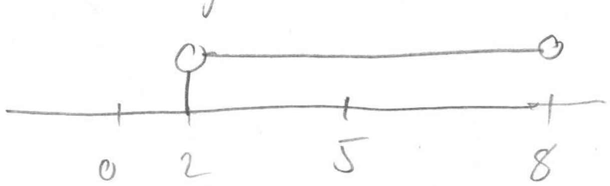
$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

tj. $|-5| = 5$, $|2| = 2$

lze chápat jako měření vzdálenosti

např. $M = \{x \in \mathbb{R} ; |x-5| < 3\} = (2, 8)$

množina reálných čísel, jejichž vzdálenost od čísla 5 je menší než 3



- oblíbené podmnožiny

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ kladná reálná čísla

$\mathbb{R}^+_0 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\mathbb{R}^+$ s nulou

- oblíbené kartézské součiny:

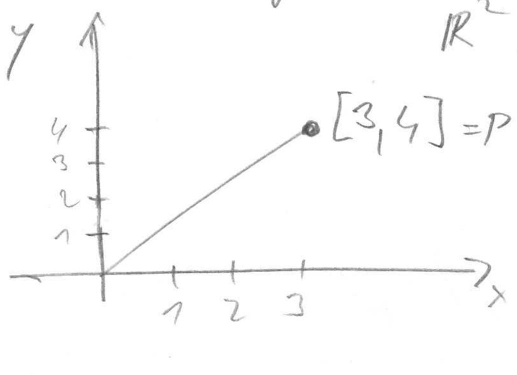
$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$

n-dimensionální eukleidovský prostor

$\mathbb{R}^2$ rovina

$\mathbb{R}^3$ prostor (3D)

prvky $\mathbb{R}^n$ jsou uspořádané n-tice, které můžeme chápat jako souřadnice



bod P v rovině $\mathbb{R}^2$ je určen svými souřadnicemi, tj. uspořádanou dvojicí čísel