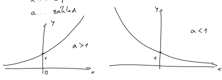
Exponenciální a logaritmická fce

Exponenciální funkce

$f: y = a^x \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

x … exponent
a … základ

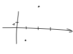


$D_f = \mathbb{R}$
$H_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
zdola omezená

ani periodická, ani s., ani lichá
nemá maximum ani minimum
rostoucí v D_f $a > 1$
klesající v D_f $a < 1$

$\boxed{\text{PROSTÁ}}$

Pozn.
- $a = 1$ $f: y = 1^x = 1$
- $a < 0$ $g: y = (-2)^k$ $k \in \mathbb{Z}$

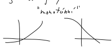


- $\underline{x = 0: \ a^x = 1}$ $\forall a \in \mathbb{R}$
- exponenciální vs. mocninná
  a^x x^a
- $a^{2x+3} = (a^x)^2 \cdot a^3$

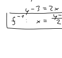
Inverzní funkce

prostá fce: každému $x \in D$ přiřadí $\underline{\text{právě jedno}}$ $y \in H$

fce klesající/rostoucí v D => prostá
"monotónní"



- je-li f prostá, můžu každému $y \in H_f$ $\underline{\text{jednoznačně}}$ přiřadit $x \in D_f$: $y = f(x)$
  $f^{-1}: y \longrightarrow x$
  "inverzní funkce k f"



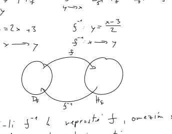
$f: \begin{matrix} x_1 \longrightarrow y_1 \\ x_2 \longrightarrow y_2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{prostá}} f^{-1}: \begin{matrix} y_2 \longrightarrow x_2 \\ y_1 \longrightarrow x_1 \end{matrix}$

$g: \begin{matrix} x_1 \longrightarrow y \\ x_2 \longrightarrow y \end{matrix}$ $\qquad g^{-1}: y \begin{matrix} \longrightarrow x_1 \\ \longrightarrow x_2 \end{matrix}$?

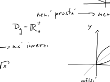
Příklad: $f: y = 2x + 3$

$f: \begin{matrix} 1 \longrightarrow 5 \\ 0 \longrightarrow 3 \end{matrix}$
$f^{-1}: \begin{matrix} 5 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 0 \end{matrix}$

$y = 2x + 3$
$y - 3 = 2x$
$\boxed{f^{-1}: \ x = \frac{y-3}{2}}$

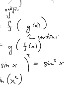


- $f: \underset{x \longrightarrow y}{}$ D_f, H_f $\qquad f^{-1}: \underset{y \longrightarrow x}{}$ $D_{f^{-1}} = H_f$ $\quad H_{f^{-1}} = D_f$
- $f: y = 2x + 3$ $\qquad f^{-1}: y = \frac{x-3}{2}$
  $f: x \longrightarrow y$ $\qquad f^{-1}: x \longrightarrow y$



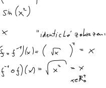
- chci-li f^{-1} k neprosté f, omezím se na $A \subset D_f$, kde f je prostá

$f: y = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$



není prostá ⟶ nemá inverzi

$g: y = x^2 \quad D_g = \mathbb{R}_0^+$
prostá ⟶ má inverzi
$g^{-1}: y = \sqrt{x}$



- skládání funkcí
  f, g fce:
  $(f \circ g)(x) = \underset{\text{vnější}}{f}(\underset{\text{vnitřní}}{g(x)})$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f = x^2$ $\qquad (f \circ g)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$
$g = \sin x$ $\qquad (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$

$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ "identické zobrazení"

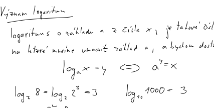
$f: y = x^2 \quad f^{-1}: y = \sqrt{x}$ $\qquad (f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt{x})^2 = x$
$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x$ $\quad x \in \mathbb{R}_0^+$

Logaritmus

$f: y = a^x$ je prostá => $\exists f^{-1}$

Definice: inverzní funkce k $y = a^x$ se nazývá logaritmus o základu a.

$y = \log_a(x)$



$D_f = \mathbb{R}^+$
$H_f = \mathbb{R}$

není per., s., ani l.
rostoucí v D_f $a > 1$
klesající v D_f $a < 1$

Význam logaritmu

logaritmus o základu a z čísla x, je takové číslo y, na které musíme umocnit základ a, abychom dostali x.

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \qquad \log_{10} 1000 = 3$
$2^{\square} = 8$

$(8)_{10} = (\overset{2^3}{1}\,\overset{2^2}{0}\,\overset{2^1}{0}\,\overset{2^0}{0})_2 \qquad \log_2 8 = 3$

Počítání s logaritmy

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (a^{x+y} = a^x \cdot a^y)$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$
$\log_a a^r = r \cdot \log_a a = r$

Skládání: $\boxed{\log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x}$
$(\log_a \circ a^{\square})(x) = ?$

Eulerovo číslo

$a = e \qquad \log_a x \longrightarrow \ln x = \log_e x$ "přirozený logaritmus"

$a^x \longrightarrow e^x$

e – Eulerovo číslo
iracionální $\qquad e \doteq 2{,}7182818\ldots$

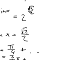
$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

složené úroky: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e$

epidemie: $N(t) = e^{R \cdot t}$

statistika: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$



QM: $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H} t}\, \psi(x)$

Exponenciální rce

I) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$
$\iff f(x) = g(x) \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Příklad: $5^{3x-1} = 1$
$5^{3x-1} = 5^0$
$3x - 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}$

$2^{\sin x} = 4^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
$2^{\sin x} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = \frac{\pi}{4} + \ldots$
$x = \frac{3}{4}\pi + \ldots$

II) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad a \neq b$

Logaritmování: skládání obou stran rovnice s log.

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad / \log_c(\ )$
$\log_c(a^{f(x)}) = \log_c(b^{g(x)})$
$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$
$f(x) = \underbrace{\frac{\log_c b}{\log_c a}}_{\log_a b} \cdot g(x) \qquad \log x = \log_{10} x$

Příklad: $2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2} \quad / \log$
$\log(2^x \cdot 5^{2x}) = \log 3^{x-2}$
$\log 2^x + \log 5^{2x} = \log 3^{x-2}$
$x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 = (x-2) \cdot \log 3$
$x(\log 2 + 2 \log 5 - \log 3) = -2 \log 3$
$x \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 5^2}{3}\right) = \log 3^{-2}$
$x = \frac{\log 3^{-2}}{\log\left(\frac{2 \cdot 5^2}{3}\right)}$

III) ostatní

např. $7^{2x} + 7^x - 6 = 0$
$(7^x)^2 + 7^x - 6 = 0 \qquad u = 7^x$
$u^2 + u - 6 = 0$
$(u+3) \cdot (x-2) = 0$

$u_1 = -3$
$7^{x_1} = -3$
NŘ, protože $a^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$u_2 = 2$
$7^{x_2} = 2 \quad / \log_7$
$\log_7 7^{x_2} = \log_7 2$
$\boxed{x_2 = \log_7 2}$

Logaritmické rovnice

I) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
$\iff f(x) = g(x)$

$\log_a f(x) = \log_b g(x) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
$\log_a f(x) = \frac{\log_a g(x)}{\log_a b}$
$\log_a f(x) = \log_a (g(x))^{\frac{1}{\log_a b}}$

II) ostatní