Načrtněte a popište funkci $f(x)$

$f(x) = x^2 \underbrace{+x}_{2B} - 12 \longrightarrow$ parabola

$y = x^2$

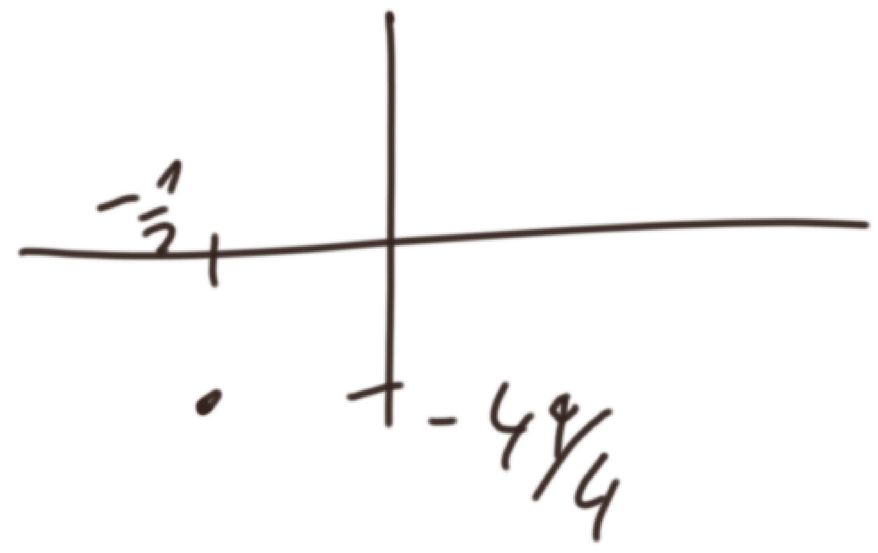
$= (x + \dots)^2 + \dots$

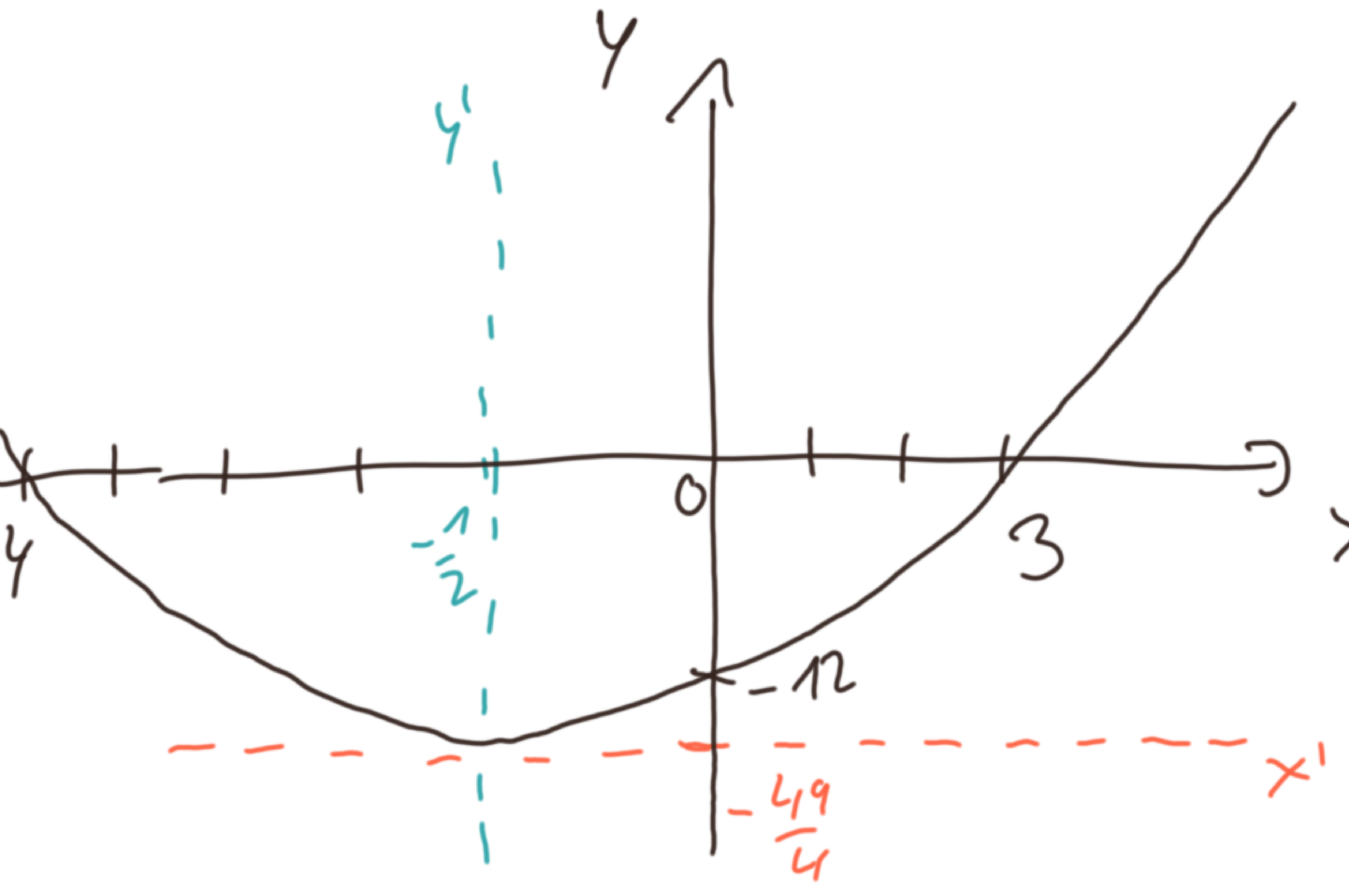
$= (x+\frac{1}{2})^2 - 12 - (\frac{1}{2})^2 \overset{?}{=}$

$(\underset{x}{A}+B)^2 = A^2 + 2AB + \underline{B^2}$

Zk: $x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \cancel{(\frac{1}{2})^2} - 12 - \cancel{(\frac{1}{2})^2} = x^2 + x - 12$

$\overset{?}{=} \underbrace{(x+\frac{1}{2})^2}_{\text{posun v x}} - \underbrace{\frac{49}{4}}_{\text{posun v y}}$





$x \longrightarrow \underline{x - a}$

$x - (-\frac{1}{2})$

P_x: $0 = x^2 + x - 12$

$0 = (x+4)\cdot(x-3)$

$x_1 = -4 \quad x_2\ 3$

P_y: $f(0) = -12$

$f(x) = x^2 + x - 12 = (x + \underline{\frac{1}{2}})^2 - \underline{\frac{49}{4}} = (x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2 = (x+\frac{1}{2}+\frac{7}{2})\cdot(x+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}) =$

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$= (x+4)\cdot(x-3)$

$V = [\underline{-\frac{1}{2}}, \underline{-\frac{49}{4}}]$

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -\frac{49}{4}, \infty)$

klesající v $(-\infty; -\frac{1}{2})$

rostoucí v $(-\frac{1}{2}, \infty)$

omezená zdola

není sudá ani lichá

není prostá

Sudá vs. lichá funkce (parita)

funkce f je sudá $\iff f(-x)=f(x)$

lichá $\iff f(-x)=-f(x)$

$f(x)=x \qquad f(-x)=-x=-1\cdot x=-1\cdot f(x)=-f(x)$

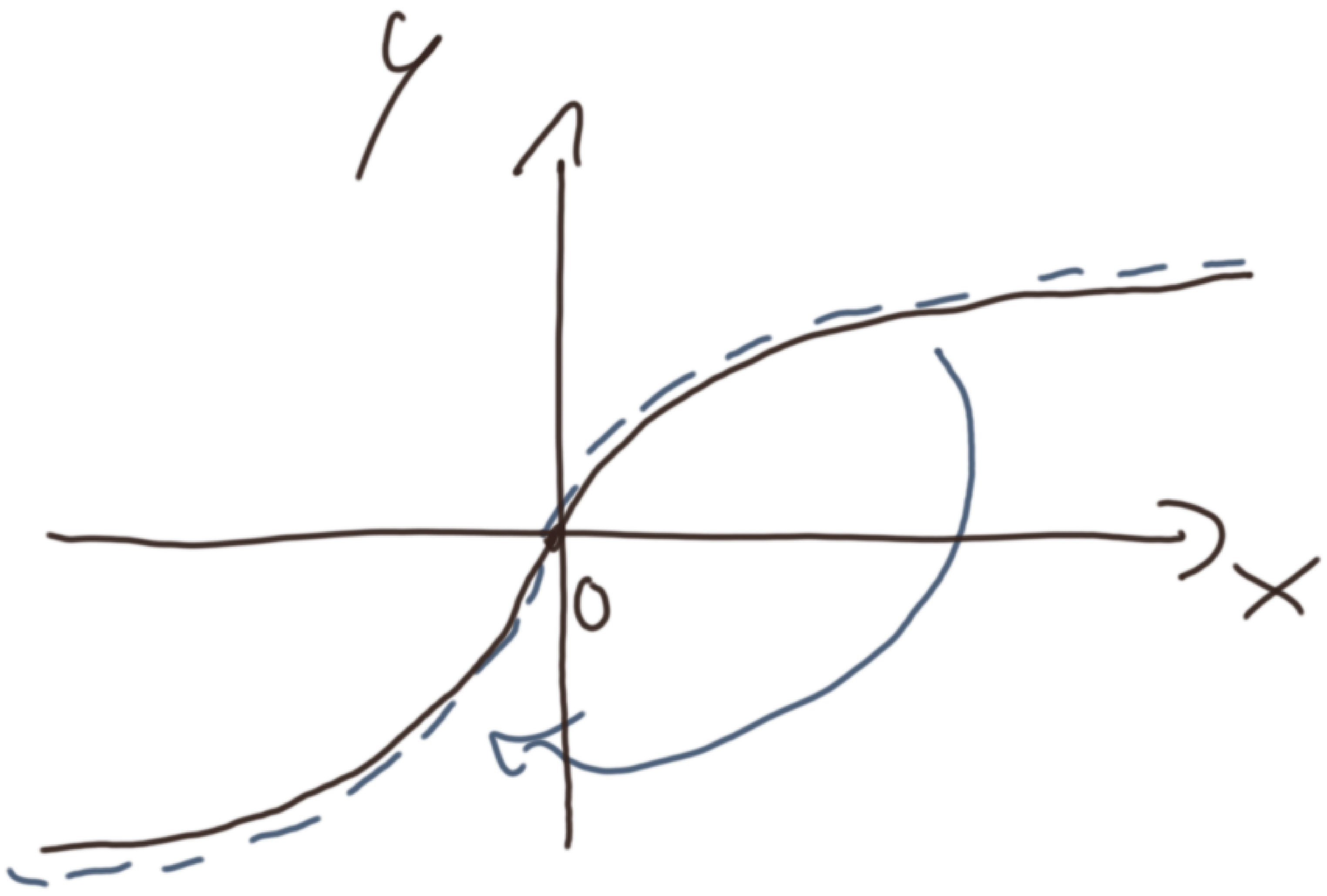
$\Rightarrow$ lichá

$g(x)=x^2 \qquad g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x)$

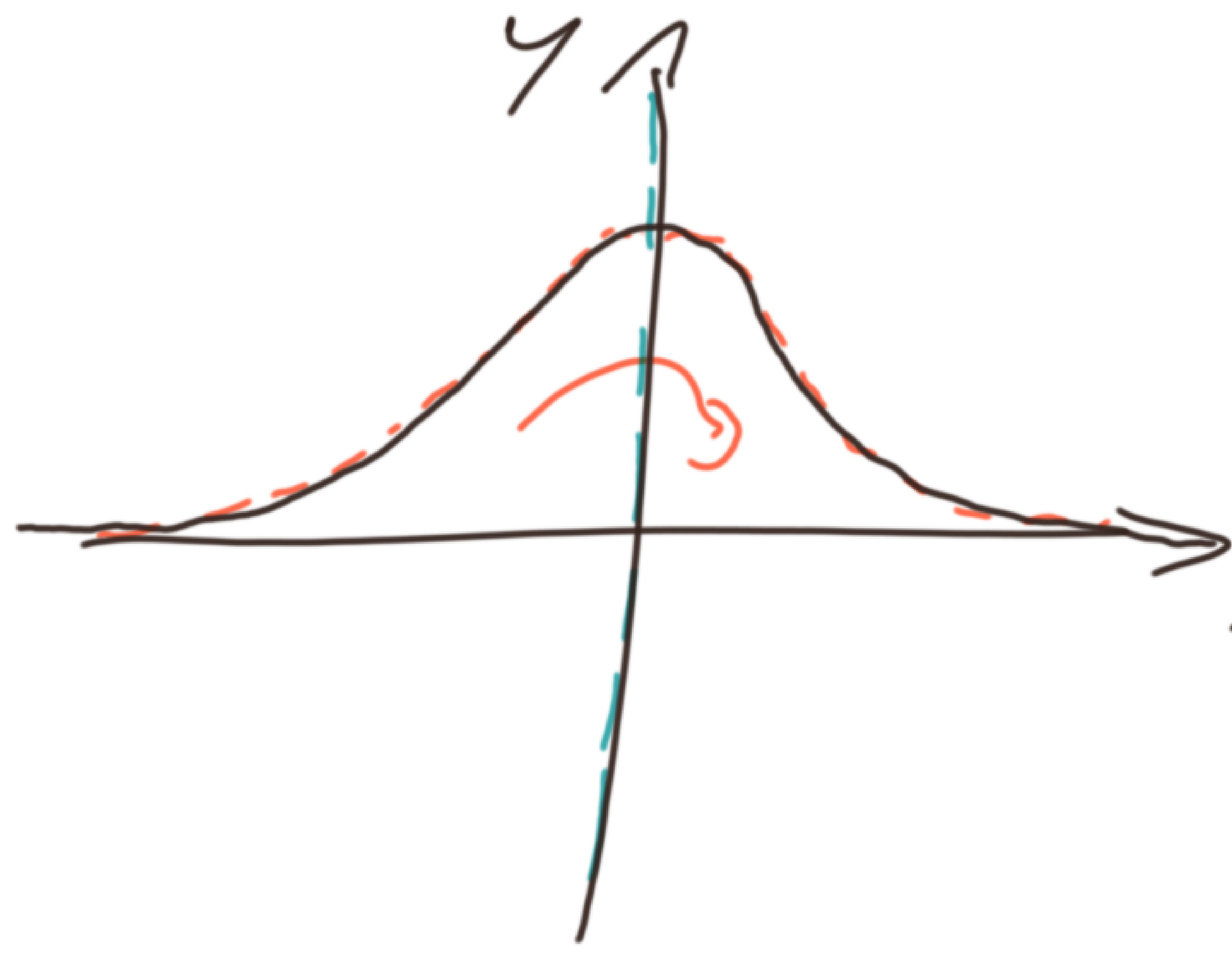
$\Rightarrow$ sudá

$h(x)=x^2\underline{+}x \qquad h(-x)=(-x^2)-x=x^2\underline{-}x=-(-x^2+x)$

není ani sudá ani lichá



lichá: graf středově souměrný podle počátku



sudá: graf osově souměrný podle y

$y=x^2$

sudá

$y=(x-2)^2$

není sudá

$y=x$

lichá

$y=x+2$

Načrtněte a popište funkci

$g(x) = \frac{4}{x-2} - 3$ $\quad \sim \frac{1}{x} \Rightarrow$ rovnoosá hyperbola

P_x: $\quad 0 = \frac{4}{x-2} - 3 \quad \underbrace{x \neq 2}$

$3 = \frac{4}{x-2} \quad / \cdot (x-2)$

$3(x-2) = 4$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

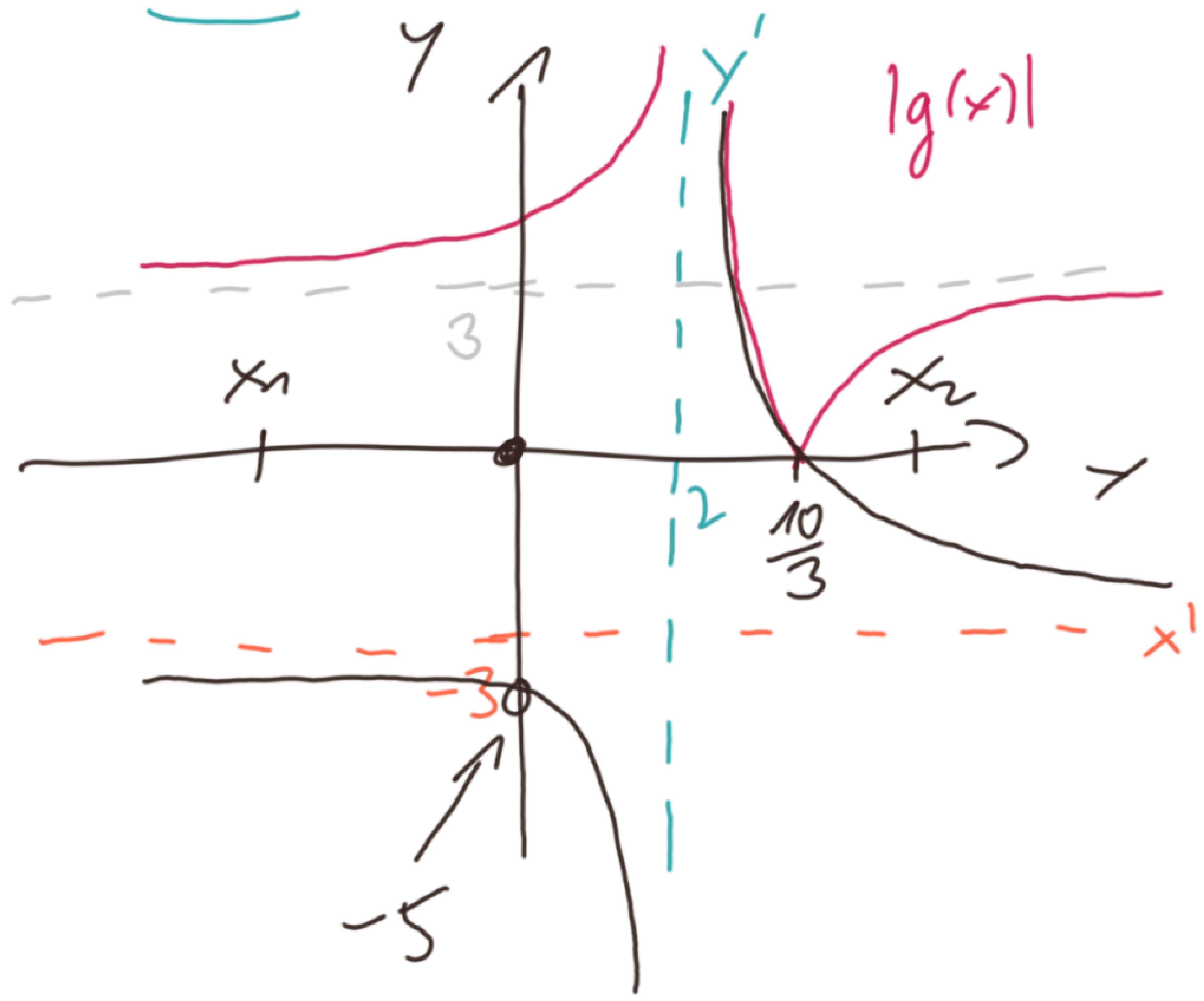
$P_x = [\frac{10}{3}, 0]$

P_y: $g(0) = \frac{4}{0-2} - 3$

$= -2 - 3 = -5$

$P_y = [0, -5]$

$g(x) = \underbrace{\frac{4}{x-2}} \underbrace{-3}$



$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x \neq 2$

$H_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$\frac{4}{x-2} - 3$

pro velká x je $\frac{4}{x-2}$ zanedbatelně malé

$g(x) \longrightarrow -3$

klesající v $(-\infty, 2)$ a v $(2, \infty)$

! není klesající v D_g

kles. $g(x)$: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

$\frac{1}{x}$ je lichá, ale $g(x)$ není ani lichá ani sudá

není omezená

prostá

$g'(x) = |g(x)|$

Definiční obor $D, \mathcal{D}$ Domain

f: $D_f, \mathcal{D}_f$ g: $D_g, \mathcal{D}_g$

Obor hodnot. $H, \mathcal{H}$

$f(x), g(x), h(x)$ funkce značíme malým písmenem

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\varphi(\underbrace{x}) = x^2+x$

$f(x) = |\underbrace{x-2}| - |\underbrace{x+1}|$

Pozor: nejde o funkci tvaru $|g(x)|$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$, $|0| = 0$, $|-5| = 5$

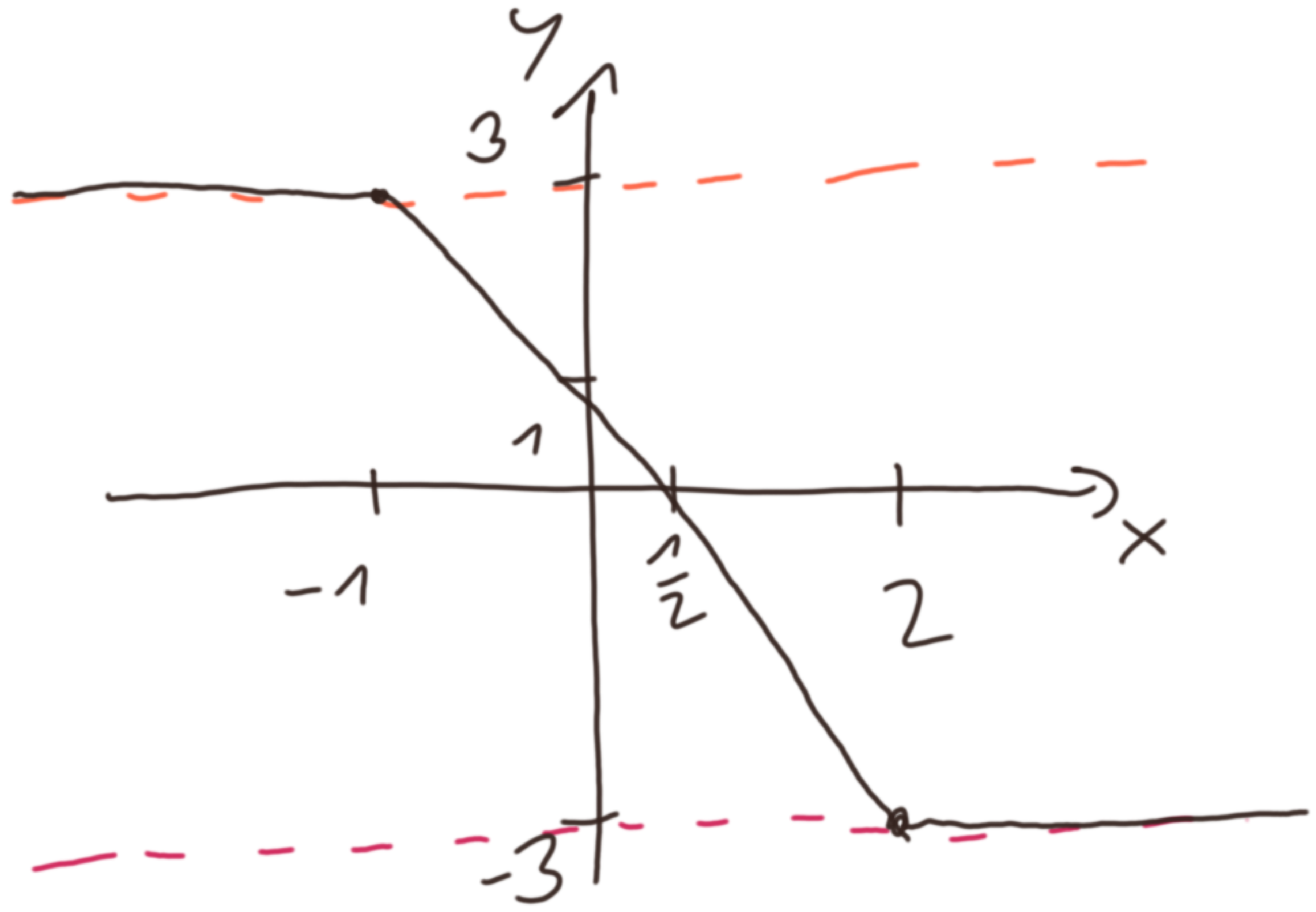
$-$ $-$ $+$ $-$ $+$ $+$

-1 2 $\mathbb{R}$

$x \in (-\infty, -1)$
$f(x) = -(x-2) - [-(x+1)]$
$= -x+2+x+1$
$= 3$

$x \in \langle -1, 2)$
$f(x) = -(x-2) - (x+1)$
$= -x+2-x-1$
$= \underbrace{-2x+1}$

$x \in \langle 2, \infty)$
$f(x) = x-2-(x+1)$
$= x-2-x-1$
$= -3$



P_x: $0 = -2x+1$
$x = \frac{1}{2}$ $P_x = [\frac{1}{2}, 0]$

P_y: $f(0) = 1$ $P_y = [0, 1$

Když pouze odstraníme $| \; |$
$f(x) = x-2-(x+1) = -3$

$|f(x)|$

$D_f = \mathbb{R}$
$H_f = \langle -3, 3 \rangle$
omezená
konstantní v $(-\infty, -1)$
v $(2, \infty)$
klesající v $(-1, 2)$
není s. ani l.
není prostá

Speciální rovnice

$\sqrt{3x+1} - x = -3 \quad /+x$

$\sqrt{3x+1} = x - 3 \quad /^2$

Zkouška sem

$3x+1 = (x-3)^2$

$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$

$0 = x^2 - 9x + 8$ ✓

$0 = ax^2 + bx + c$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 8}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

! Nutné provést zkoušku !

Zk. $x_1 = 8 \quad LS = \sqrt{3 \cdot 8 + 1} = \sqrt{25} = 5 \quad LS = PS$ ✓

$PS = 8 - 3 = 5$

$x_2 = 1 \quad LS = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = \sqrt{4} = 2 \quad LS \neq PS$ ✗

$PS = 1 - 3 = -2$

$K = \{8\}$

Nerovnice

$2x < 3 \quad /:2$

$x < \frac{3}{2}$

$x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

$-2x < 3 \quad /:(-2)$

$x > -\frac{3}{2}$

$x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

Zk. např. $x = 0$

$LS = 0 \quad PS = -\frac{3}{2}$

$LS > PS$ ✓

takhle ne

$-2x < 3 \quad /:(-2)$

$x < -\frac{3}{2}$

$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

Zk: např. $x = -5$

$LS = 10 \quad PS = 3$

$LS > PS$ ✗

$\frac{1}{x-1} < 3$

Předem nevíme, zda $(x-1) \gtrless 0$

$x \neq 1$

$(x-1) < 0$	$(x-1) > 0$
$x \in (-\infty, 1)$	$x \in (1, \infty)$

$\frac{1}{x-1} < 3 \quad /\cdot(x-1)$

$1 > 3x - 3$

$4 > 3x$

$x < \frac{4}{3}$

$x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$

$\cap \ (-\infty, 1)$

$\boxed{x \in (-\infty, 1)}$

$\frac{1}{x-1} < 3 \quad /\cdot(x-1)$

$1 < 3x - 3$

$4 < 3x$

$x > \frac{4}{3}$

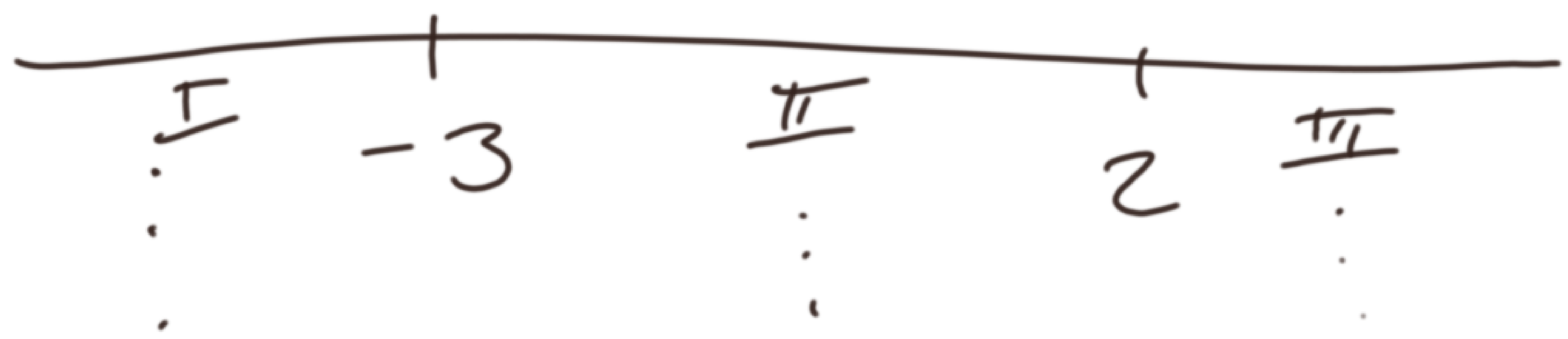
$x \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

$\cap \ (1, \infty)$

$\boxed{x \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)}$

$\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)}$

$$\frac{1}{x-2} < \frac{1}{x+3}$$



$$\frac{1}{x-2} < \frac{1}{x+3} \quad \Big/ -\frac{1}{x+3}$$

$x \neq 2$

$x \neq -3$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} < 0$$

$$\frac{x+3-(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)} < 0$$

$$\boxed{\frac{5}{(x-2)\cdot(x+3)}} < 0$$

$x \in (-3, 2)$ ✓

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 0$$

$x \neq 1$

$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 2, \infty)$

Soustavy lineárních rovnic

$$\left.\begin{aligned} x+\underbrace{y} &= 3 \\ 2x\underbrace{-y} &= 5 \end{aligned}\right\} \oplus \xrightarrow{\text{2. metoda}}$$

$$3x+0=8$$

$$\boxed{x=\frac{8}{3}}$$

$$\frac{8}{3}+y=3$$

$$y=\frac{9}{3}-\frac{8}{3}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}}$$

$y=3-x$

$2x-(3-x)=5$

$2x-3+x=5$

$3x=8$

$x=\frac{8}{3}$

⋮

v $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: uspořádané dvojice $[x,y]$

$$K=\left\{\left[\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right]\right\}$$

$x-3y=2 \quad /\cdot 2$

$-2x+6y=-4$

$$\left.\begin{aligned} 2x-6y &= 4 \\ -2x+6y &= -4 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$0+0=0$

$0=0 \quad 5=5$

→ rce $\underbrace{\text{má nekonečně mnoho řešení}}$

$(x=2+3y)$ navíc

$x+y=-3 \quad /\cdot 2$

$-2x-2y=-3$

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y &= -6 \\ -2x-2y &= -3 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$0+0=-9$

$0=-9 \quad \times$

úloha nemá žádné řešení

$x+y=-3$

$x+y=\frac{3}{2}$