

# Funkce

Reálna funkce reálné proměnné  $x$  je zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ :

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x_0 \Rightarrow y = y_0\}$$

Funkce je zobrazení

- pro každému  $x$  def. obor
- uříděm (grafem)

Pozn.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{obor: } D_f \subset \mathbb{R} \quad H_f \subset \mathbb{R}$$

$$y = 2x + 3 \quad D_f = \mathbb{R} \quad H_f = \mathbb{R}$$

$$y = 2x + 3 \quad D_f = \mathbb{R}^+ \quad H_f = \mathbb{R}^+$$

## Vlastnosti funkcí

- Monotonie
- Periodicita
- (Spjitost, Hladkost)
- Omezenost
- Parita
- Prosta (injekce)

### Monotonie

$$x_1, x_2 \in I \subset D_f, \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

Řekneme, že  $f$  je:

- rostoucí  $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$
- klesající  $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$
- nerostoucí  $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 \leq y_2$
- neklesající  $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2$
- konstantní  $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$



### Omezenost

Definice: Řekneme, že funkce  $f$  je omezená na  $M \subset D_f$  pokud  $\exists K \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq K \quad \forall x \in M$

- $f$  je omezená shora (dolů) na  $M \subset D_f$ , pokud  $\exists L \in \mathbb{R}: f(x) \leq L$  ( $f(x) \geq L$ )  $\forall x \in M$
- $f$  je neomezená, pokud není omezená ani shora ani dolů



### Parita

$f$ , pp.  $\forall x \in D_f: -x \in D_f$ . Řekneme, že  $f$  je:

- sudá  $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$
- lichá  $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

Poznámky:

Sudá funkce má graf osově souměrný podle  $y$

$$f: y = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$



Lichá funkce má graf středově souměrný podle počátku

$$f: y = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$



- $x^n$ 
  - sudá pro  $n$  sudé
  - lichá pro  $n$  liché

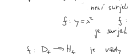
### Periodicita

$f$ , pp.  $\forall x \in D_f: x + p \in D_f, p \in \mathbb{R}^+$

Řekneme, že funkce  $f$  je periodická s periodou  $p$ , pokud  $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

- $f(x + n \cdot p) = f(x) \quad n \in \mathbb{Z}$

Pr.  $y = \sin(x)$



### Spjitost

ne-spjitá

spjitá

spjitá

### Hladkost

ně-hladká

hladká

Další vl.: injekce, surjekce, bijekce

- bij = inj  $\cap$  surj

-surjekce

$$f: y = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

není surjekce: protěsno  $x^2 \geq 0$

$$f: y = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

je surjekce

$f: D_f \rightarrow H_f$  je vždy surjekce

-injekce

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

je injekce (průstří), pokud  $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

průstří fce: různá  $x$  vedou různá  $y$



### Transformace grafů

1) Posunutí vzhledem k  $x$

$$y = f(x + a), a > 0$$



2) Posunutí vzhledem k  $y$

$$y = f(x) + b, b > 0$$



### Kontrahce a dilatace v x

$$y = f(cx), c > 0$$



### Kontrahce a dilatace v y

$$y = d \cdot f(x), d > 0$$



### Průstřípnost podle y

$$y = f(-x)$$



### Průstřípnost podle x

$$y = -f(x)$$



### Absolutní hodnota argumentu

$$y = f(|x|)$$



### Absolutní hodnota funkční hodnoty

$$y = |f(x)|$$



### Lineární funkce

$$f: y = a \cdot x + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R}$

graf: přímka

$H_f = \mathbb{R}$

$a$  - směrnice (slope)

$a = \tan \varphi$

$b$  - absolutní zena (intercept)

$a > 0$

$a < 0$



průstří, neomezená na  $D_f$ , není periodická

$a > 0$  rostoucí v  $D_f$

$a < 0$  klesající v  $D_f$

### Kvadratická funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

graf: parabola

$D_f = \mathbb{R}$

$$H_f = \{f(x_0, y_0) \mid x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}\}$$

omezená

omezená

$y_0$  - je  $y$ -souřadnice vrcholku paraboly

Průstřípnost a osy:

$$x: y = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = c$$

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = c$$



$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

není průstří, klesající v  $(-\infty, x_0)$ , rostoucí v  $(x_0, \infty)$

není periodická

### Lineární lomenci

$$y = \frac{a}{x + b} + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$y = \frac{a}{x}$  graf: rovnice hyperboly



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$

$H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

klesající / rostoucí v  $(-\infty, -b), (b, \infty)$

průstří, není periodická, neomezená