BMPI - poznámky k přednášce
v0.11

Václav Alt, Unicorn University

Podzim 2021

Obsah

Toto je přepis pracovních poznámek k přednáškám z předmětu Matematický proseminář (BMPI) na Unicorn University. Prozatím jsou pokryty pouze kapitoly z analytické geometrie, postupem času se zde objeví i zbytek semestru. Analytická geometrie je zde takřka kompletní, už budu doplňovat pouze obrázky, upravovat formulace a opravovat případné chyby. Připomínky jsou stále vítány.

Šíření těchto poznámek mimo rámec BMPI není dovoleno.

Kapitola 1

Analytická geometrie

1.1 Základní pojmy

Polák říká [1]:

> *Analytická geometrie je založena na vyjadřování geometrických útvarů a vztahů mezi nimi pomocí metody souřadnic a vektorové algebry.*

Jde tedy o geometrii, ale výhradně početně. V této kapitole nás čeká

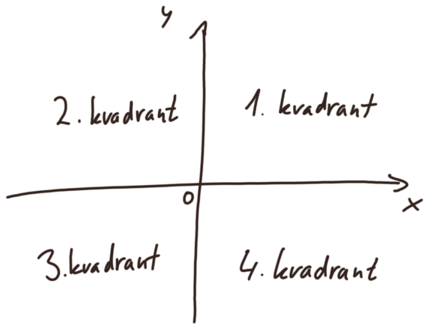
- popis základních objektů (většinou lineárních): bod, přímka, rovina, kružnice (a případne elipsa)
- vyšetřování vztahů mezi nimi: vzdálenost, vzájemná poloha, odchylky

Připomeňte si pojem kartézkého součinu a uspořádaných dvojic.

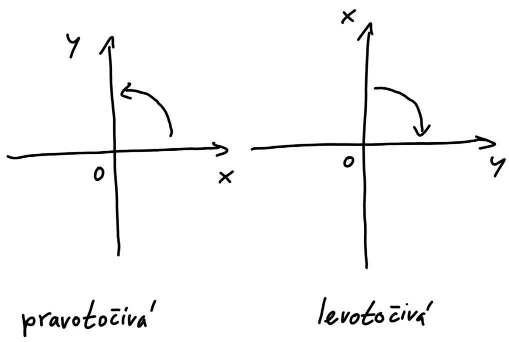
Definice 1. *Kartézská soustava souřadnic je soustava navzájem kolmých přímek, které se protínají v jednom bodě (počátku). Na všech osách obvykle volíme stejnou jednotku.*

Poznámky.

- Pojmenováno po René Descartovi (latinsky Cartesius $\longrightarrow$ kartézská soustava)
- Kartézská soustava v rovině: 2 kolmé osy v této rovině.
- Kartézská soustava v prostoru: 3 navzájem kolmé osy
- Společný bod se nazývá počátek - obvykle značíme 0 nebo O
- Osy obvykle značíme postupně x, y, z
- Celou soustavu značíme Oxy, resp. $Oxyz$
- Na každé ose volíme jednotkový bod I (J, K,...). Pokud $|OI| = |OJ| = |OK|$, hovoříme o ortonormální soustavě.



Obrázek 1.1: Obyklé značení kvadrantů



Obrázek 1.2: Pravotočivá a levotočivá soustava

- Ve 2D rozdělí osy x a y rovinu na kvadranty, které obykle značíme proti směru hodinových ručiček. První kvadrant je oblast, kde $x > 0$ a $y > 0$. Viz obrázek 1.1.
- Rozlišujeme také levotočivou a pravotočivou soustavu. Existuje řada pomůcek, jak si zapamatovat, která je která. Tady jen poznamenám, že pravotočivá je ta normální (Obrázek 1.2).

1.1.1 Bod a souřadnice

Definice 2. *Nechť A je bod v rovině (prostoru), ve kterém je zavedena kartézská soustava Oxy ($Oxyz$). Bodem A veďme rovnoběžky s osami: $p_1 \parallel y$, $p_2 \parallel x$. Přímka p_1 protne osu x v bodě odpovídajícím číslu $a_1 \in \mathbb{R}$, p_2 protne osu y v bodě odpovídajícím číslu $a_2 \in \mathbb{R}$ (v prostoru podobná konstrukce pomocí rovnoběžných rovin). Čísla a_1, a_2, … nazýváme souřadnice bodu A vzhledem k Oxy.*

Poznámky.

- v n-rozměrném prostoru udáváme polohu bodu zadáním n čísel - souřadnic.

- na Oxy … můžeme nahlížet jako na kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$. Prvky kartézského součinu jsou uspořádané n-tice.

1.1.2 Vzdálenost bodů (délka úsečky)

Tvrzení 1. *Vzdálenost $|AB|$ bodů $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ je dána předpisem*

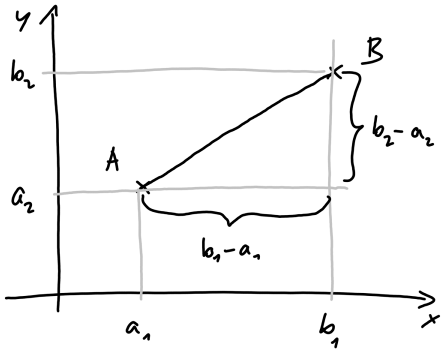
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Lze přímočaře zobecnit do n rozměrného prostoru:

$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$$

Důkaz. Z obrázku 1.3 a Pythagorovy věty.

□



Obrázek 1.3: Vzdálenost dvou bodů

1.1.3 Střed úsečky

Tvrzení 2. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^n$. Střed úsečky AB má souřadnice*

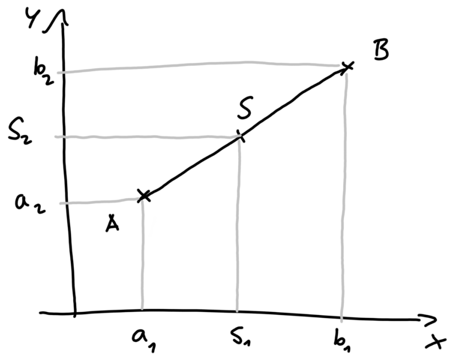
$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$$

Důkaz. Z obrázku 1.4 je vidět, že například souřadnice S_1 je dána výrazem

$$S_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Pro ostatní souřadnice stejně.

□



Obrázek 1.4: Střed úsečky

1.1.4 Orientovaná úsečka, vektor

Definice 3. *Orientovaná úsečka je úsečka doplněná o orientaci. Značíme $\overrightarrow{AB}$, bodu A říkáme počáteční bod, bodu B koncový bod. Velikost orientované úsečky je stejná jako velikost odpovídající úsečky, tj. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$. Orientovanou úsečku $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ reprezentujeme n-ticí souřadnic:*

$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n]$$

Obvykle kreslíme jako šipku z bodu A do bodu B.

Definice 4 (Vektorový prostor)**.** *Nechť V je neprázdná množina, jejíž prvky umíme sčítat a násobit reálným číslem. Předpokládejme navíc, že množina V je vůči těmto operacím uzavřená, tj.*

- *uzavřenost vůči sčítání*

$$x + y \in V,\ \forall x, y \in V$$

- *uzavřenost vůči násobení*

$$\alpha x \in V,\ \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Množina V se nazývá reálný vektorový prostor a její prvky vektory, pokud platí:

1. *sčítání vektorů je komutativní a asociativní, tj.*

$$(\forall x, y, z \in V)[x + y = y + x;\ x + (y + z) = (x + y) + z]$$

2. *násobení vektoru číslem je asociativní (na pořádí závorek nezáleží)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x]$$

3. *násobení číslem je distributivní ke sčítání prvků V (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})[\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y]$$

4. *násobení číslem je distributivní ke sčítání čísel (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x]$$

5. *existence nulového prvku: Existuje prvek* $0 \in V$ *takový, že pro každý prvek* $x \in V$ *platí* $x + 0 = 0 + x = x$. *Neboli*

$$(\exists 0 \in V)(\forall x \in V)[x + 0 = 0 + x = x]$$

6. *existence opačného prvku: pro každý prvek* $x \in V$ *existuje* $y \in V$ *takový, že platí* $x + y = y + x = 0$. *Neboli*

$$(\forall x \in V)(\exists y \in V)[x + y = y + x = 0]$$

Shrnutí. Definice vektorového prostoru je docela zdlouhavá. Body 1-4 říkají pouze to, že s vektory můžeme počítat tak, jak jsme zvyklí - tedy roznásobovat závorky, měnit pořadí sčítanců a podobně. Body 5 a 6 nám tuto "vektorovou aritmetiku" doplňují o ujištění, že existuje i mezi vektory jakási *nula* a že vektory vlastně umíme i odečítat (přičtením opačného vektoru).

Tvrzení 3. *Množina všech orientovaných úseček se sčítáním a násobením po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Nulovým prvkem je* $\vec{0} = [0, 0, \dots, 0]$, *opačným prvkem k* $\vec{x}$ *je* $-\vec{x}$.

Důkaz. Stačí ověřit všechny vlastnosti vektorového prostoru - většinou splněny díky obyčejné aritmetice.

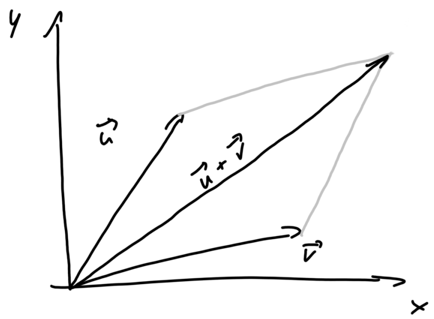
□

Poznámky.

- Tvrzení "vektor je šipka" je nesprávné, ale "šipka je vektor" už je správně.
- Orientované úsečky tedy umíme sčítat a násobit číslem a dostáváme tak nové orientované úsečky.
- Bod můžeme chápat jako orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku. Tedy $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \overrightarrow{OA}$
- Odteď budeme mluvit o vektorech a budeme mít na mysli orientované úsečky.
- Vektory budeme značit malými písmeny s šipkou, např. $\vec{v}$. V literatuře často ještě tučně **v**, nebo prostě v, je-li z kontextu zřejmé, oč se jedná.
- Graficky můžeme orientované úsečky sčítat doplněním na rovnoběžník, viz 1.5.

Definice 5 (Lineární kombinace)**.** *Nechť* V *je reálný vektorový prostor a* $\vec{v}, \overrightarrow{x_i} \in V,\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$. *Řekneme, že vektor* $\vec{v}$ *je lineární kombinací vektorů* $\overrightarrow{x_i},\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$, *pokud existují reálná čísla* a_i *taková, že platí*

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \dots + a_k\overrightarrow{x_k} = \sum_{i=1}^{k} a_i\overrightarrow{x_i}$$



Obrázek 1.5: Grafické sčítání vektorů.

Definice 6 (Lineární ne/závislost). *Nechť $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots \overrightarrow{x_k} \in V$ jsou vektory a V je reálný vektorový prostor. Pokud je některý z vektorů $\overrightarrow{x_i}$ lineární kombinací ostatních, říkáme že jsou lineárně závislé. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.*

Poznámky.

- v n-rozměrném vektorovém prostoru existuje nejvýše n lineárně nezávislých vektorů.
- v n-rozměrném vektorovém prostoru: libovolná množina n lineárně nezávislých vektorů se nazývá báze. Každý vektor v tomto prostoru pak mohu vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů.
- Na vektorový prostor se můžeme dívat jako na množinu, která je uzavřená vůči lineární kombinaci. Tedy množina V je vektorový prostor, pokud všechny lineární kombinace libovolných prvků patří opět do tohoto prostoru.

1.1.5 Skalární součin a odchylka vektorů

Definice 7. *Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ nazýváme operaci*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Poznámky.

- ”skalární” je od slova skalár neboli číslo. Výsledkem skalárního součinu je číslo.
- velikost vektoru lze spočítat pomocí skalárního součinu.

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Tvrzení 4. *Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je úměrný cosinu uhlu ϕ, jejž vektory svírají*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \phi$$

Poznámky.

- Pokud jsou vektory kolmé (říkáme ortogonální), mají nulový skalární součin, neboť
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$
- U odchylky vektorů ignorujeme periodu funkce cosinus, fakticky nás zajímá jen ostrý úhel mezi vektory. Toho snadno docílíme tím, že skalární součin zabalíme do absolutní hodnoty.

Tvrzení 5. *Ostrý úhel mezi vektory získáme z absolutní hodnoty skalárního součinu, tj.*

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = cos\phi \in \langle 0, 1 \rangle$$

Důkaz.

- Pokud vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ svírají ostrý úhel, pak $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$ a $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Potom $\cos \phi \in \langle 0, 1 \rangle$ a tedy $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
- Pokud vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ svírají tupý úhel, pak $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ a $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = -\vec{u} \cdot \vec{v}$. Potom opět $\cos \phi \in \langle 0, 1 \rangle$ a tedy $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Viz obrázek.

□

1.1.6 Dodatky

- Orientované úsečky jsme zavedli jako $\overrightarrow{AB} = B - A$. Pokud budeme trvat na umístění orientované úsečky (vektoru) v jejím počátečním bodě, hovoříme o *vázaném vektoru.*

  Oproti tomu množinu všech rovnoběžných orientovaných úseček stejné velikosti označujeme *volný vektor.* Většinu času budeme mít na mysli volný vektor.

- Mezi bázemi preferujeme takové, ve kterých jsou všechny vektory navzájem kolmé - *ortogonální.* Taková báze se kupodivu nazývá ortogonální. Pokud mají navíc všechny vektory ortogonální báze velikost 1, hovoříme o *ortonormální bázi.*

1.2 Geometrický útvar a jeho analytické vyjádření

Na úvod jsme poznamenali, že analytická geometrie se zabývá geometrickými útvary a vztahy mezi nimi. Nejprve si musíme říct, co vlastně geometrické útvary jsou. Existuje více způsobů, jak definovat geometrický útvar, my si uvedeme pouze jeden

Definice 8. *Geometrický útvar je množina bodů Euklidova prostoru (můžeme říkat $\mathbb{R}^n$).*

Poznámka. Často se pojmem geometrický útvar označuje i typ geometrického útvaru (např. přímka, kružnice, ...).

Definice 9. *Analytické vyjádření geometrického útvaru je vztah, který splňují souřadnice všech bodů toho útvaru. Jinými slovy - útvar U má analytické vyjádření V právě tehdy, když platí výrok: Bod $X \in U \iff$ souřadnice X splňují vyjádření V.*

1.3 Analytická geometrie v rovině

Jako *rovinu* obykle označujeme *reálný dvourozměrný eukleidovský prostor*, neboli $\mathbb{R}^2$. V rovině se naučíme popisovat body, přimky a vybrané kuželosečky (kružnice a elipsa) a budeme vyšetřovat jejich vzájemné vztahy, zejména vzájemnou polohu.

1.3.1 Přímka

Poznámky.

- Přímka je základní jednorozměrný geometrický útvar.
- *jednorozměrný* znamená, že nám stačí jeden parametr (někdy *stupeň volnosti*) k pokrytí celého útvaru.
- V rovině je přímka jednoznačně dána dvěma body. Tedy každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- V $\mathbb{R}^2$ máme 4 typy analytického vyjádření (rovnic přímky). Jsou navzájem ekvivalentní„ ale mají různé užitečné geometrické interpretace. Mluvíme o parametrickém, obecném, směrnicovém a úsekovém tvaru rovnice přímky.

Parametrický tvar

Idea: mějme přímku p a na ní ležící bod A. Vycházíme z bodu A ve směru vektoru $\vec{u}$ do libovolné vzdálenosti. Každý bod X přímky p pak je určen sadou rovnic

$$p: \ X = A + t\vec{u}.$$

Vektor $\vec{u}$ se nazývá *směrový vektor přímky p*, číslo $t \in \mathbb{R}$ nazýváme *parametr.*

Poznámky.

- Hovořím záměrně o sadě rovnic - každý bod v rovině má dvě souřadnice, máme tedy zvlášť jednu rovnici pro každou souřadnici:

$$\begin{aligned} p:\ x &= A_x + tu_x \\ y &= A_y + tu_y \end{aligned}$$

  Pozor, parametr t je pro obě rovnice stejný.

- bod X leží na přímce $p \iff \exists t \in \mathbb{R}:$

$$X = A + t\vec{u}$$

- parametr slouží k natahování/zkracování směrového vektoru (nemůže změnit jeho směr jinak, než obrácením).

- Směrový vektor získáme ze dvou bodů přímky (přímka je určena dvěma body, viz výše) jakožto orientovanou úsečku danou těmito dvěma body.

Příklad. Přímka p je dána body $A = [1, 2]$ a $B = [-1, 1]$. Zapište parametrickou rovnici přímky p a najděte souřadnice průsečíku s osou y a tomu odpovídající hodnotu parametr t.

- směrový vektor

$$\vec{u} = B - A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- rovnice

$$p:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Průsečík s osou y musí mít souřadnice

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

  Stačí tedy vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2t \\ y &= 2 - t \end{aligned}$$

  Řešením je $t = \frac{1}{2}$ a $y = \frac{3}{2}$

Obecný tvar

Obecná rovnice přímky má tvar

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, $c \in \mathbb{R}$. Z parametrické rovnice získáme obecnou vyloučením parametru t. Ukažme si to na přímce p z předchozího příkladu:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 - 2t & \\ y = 2 - t & / \cdot 2 \end{array}\right\} \oplus$$

$$\overline{}$$

$$x + 2y = 5$$

$$\overline{}$$

$$x + 2y - 5 = 0$$

Poznámky.

- a, b jsou souřadnice tzv. *normálového vektoru* (tj. vektoru kolmého na směrový vektor a tedy i na přímku).
- Geometrická interpretace: patrnější, když má normálový vektor velikost 1, tj. $|\vec{n}| = 1$. Potom c má význam vzdálenosti přímky od počátku.

Příklad. Přímka q je dána body $C = [-1, 0]$ a $D = [0, 1]$.

- směrový vektor
$$\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- normálový vektor
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(všimněte si, že $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$). Velikost tohoto vektoru je ovšem $|\vec{n}| = \sqrt{2}$. Vezměmě tedy raději vektor
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
jehož velikost už je 1, ale stále míří stejným směrem.
- obecná rovnice
$$q: \ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + c = 0.$$
Protože body C a D leží na přímce q, jejich souřadnice musí splňovat analytické vyjádření přímky q (tedy i její obecnou rovnice), dosazením některého z nich dopočítáme chybějící parametr c.
$$D \in q \implies \frac{1}{\sqrt{2}}0 - \frac{1}{\sqrt{2}}1 + c = 0 \implies c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Takže

$$q:\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Vzdálenost přímky q od počátku je však právě $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (lze ukázat např. pomocí Pythagorovy věty).

Poznámky.

- Rovnice $ax + by + c = 0$ zůstává pro danou přímku platná i po přenásobení libovolným $K \in \mathbb{R},\ K \neq 0$ (ekvivalentní úprava). Ale pro $|\vec{n}| \neq 1$ není geometrický význam tak názorný.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff x - y + 1 = 0$$

- Alternativně můžeme obecnou rovnici sestavit tak, že nalezneme normálový vektor k přímce a zbývající člen c dopočítáme dosazením bodu ležícího na přímce.

- Normálový vektor nalezneme snadno ze směrového. Normálový vektor musí být kolmý na směrový, tj. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\vec{u} = (a, b) \to \vec{n} = (-b, a) \text{ nebo } \vec{n} = (b, -a)$$

Směrnicový tvar

Směrnicový tvar známe z kapitoly o funkcích. Má podobu

$$p:\ y = kx + q,$$

kde číslo k se nazývá *směrnice přímky* (slope), q obvykle *absolutní člen* (intercept).

Směrnicový tvar má přímočarou geometrickou interpretaci: směrnice k má význam tangenty úhlu ϕ, který přímka svírá s osou x, tj. $k = \tan\phi$, zatímco q je y-souřadnice průsečíku přímky s osou y.

Poznámky.

- $\tan\phi$ není definován pro $\phi = \frac{\pi}{2}$, takže rovnicí ve směrnicovém tvaru neumíme popsat přímku rovnoběžnou s osou y. Té totiž odpovídá konstatní hodnota x (nejedná se tím pádem o funkci) a můžeme ji zapsat takto

$$q : x = m.$$

- Směrnicový tvar získáme z obecného vyjádřením y

$$ax + by + c = 0 \to y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

tedy $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$.

Úsekový tvar

Úsekový tvar rovnice přímky

$$p : \frac{x}{r} + \frac{x}{s} = 1$$

je velmi podobný obecnému tvaru, ale přináší trochu jinou geometrickou interpretaci. Parametry r, resp. s, mají význam x-souřadnice průsečíku přímky s osou x, resp. y souřadnice průsečíku přímky s osou y, tedy $P_x = [r, 0]$ a $P_y = [0, s]$. Čísla r a s jsou v absolutní hodnotě vlastně délky úseků, které přímka vymezí na souřadných osách - odtud pojmenování úsekový tvar.

Poznámky.

- Směrnicový tvar získáme z obecného separováním absolutního členu c na druhou stranu rovnice a vydělením c

  $$ax + by + c = 0 \to -\frac{ax}{c} - \frac{by}{c} = 1$$

  tedy $r = -\frac{c}{a}$, $s = -\frac{c}{b}$.
- Úseková rovnice přímky neexistuje, pokud $a = 0$, nebo $b = 0$. Tomu odpovídá přímka rovnoběžná s osou x, nebo s osou y.

1.3.2 Vzájemná poloh a bodu a přímky

Nabízí se pouze dvě možnosti: buď bod na přímce leží, nebo ne. Zda bod na přímce leží poznáme přímo z definice: jeho souřadnice musí splňovat rovnici přímky. Pokud ji nesplňují, bod na přímce neleží.

Pokud bod na přímce neleží, můžeme se ptát, jak daleko od přímky se nachází.

Definice 10 (Vzdálenost bodu od přímky)**.** *Vzdálenost bodu X od přímky p je délka úsečky PX, která je kolmá na přímku p a bod $P \in p$.*

Tvrzení 6. *Vzdálenost bodu $A = (A_x, A_y)$ od přímky p lze spočítat jako*

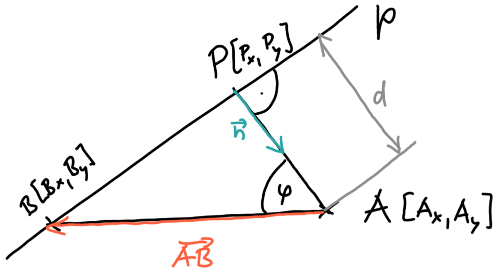
$$d = \frac{|aA_x + bA_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kde a, b, c jsou koeficienty obecné rovnice přímky p, tj.

$$p : \; ax + by + c = 0$$

Důkaz. Z obrázku 1.6, definice 10 a základní trigonometrie: Doplním.

□



Obrázek 1.6: Ilustrace vzdálenosti bodu od přímky.

1.3.3 Vzájemná poloha přímek

Nechť p a q jsou přímky v rovině. Mohou nastat jen tyto tři možnosti:

- Přímky p a q jsou různobežné - mají právě jeden společný bod. Značíme $p \nparallel q$.
- Přímky p a q jsou rovnoběžné - nemají ani jeden společný bod. Značíme $p \parallel q$.
- Přímky p a q jsou totožné - mají nekonečně mnoho společných bodů. Značíme $p = q$.

Pokud bod náleží více geometrickým útvarům $U_1, U_2, \dots, U_n$, musí jeho souřadnice splňovat všechna odpovídající analytická vyjádření $V_1, V_2, \dots, V_n$.

Vzdájemnou polohu (vztah) útvarů U_i vyšetříme tak, že řešíme jejich analytická vyjádření V_i jako soustavu rovnic.

Poznámky.

- rovnoběžné přímky mají rovnoběžné směrové (normálové) vektory.
- kolmé přímky mají kolmé směrové vektory (normálové).

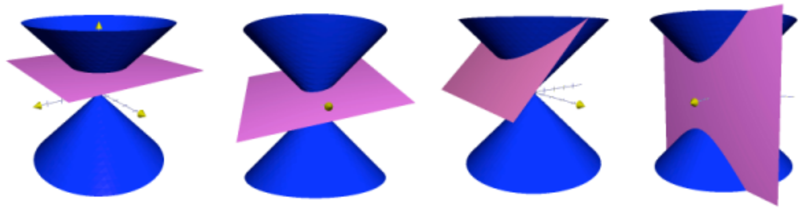
Příklad.

- prvni
- druhy
- treti

1.3.4 Kuželosečky

Kuželosečky jsou křivky, které vznikají, překvapivě, řezy kuželovou plochou. Mohou nastat 4 možnosti:

- Rovina řezu je kolmá na osu kuželové plochy. Vzniká tak kružnice.



Obrázek 1.7: Řezy kuželovou plochou. Zleva: kružnice, elipsa, parabola, hyperbola (dočasně zapůjčeno z [2])

- Rovina řezu svírá s osou kuželové plochy úhel větší než je vrcholový úhel kuželu - kuželosečkou je elipsa.
- Rovina řezu svírá s osou kuželové plochy úhel shodný s vrcholovým úhlem kuželové plochy - výsledkem je parabola.
- Rovina řezu svírá s osou kuželové plochy úhel menší než je vrcholový úhel kuželové plochy. Křivka má tentokrát dvě ramena a nazývá se hyperbola.

Všechny možnosti ilustruje obrázek 1.7.

Není to ovšem jediný způsob, jak lze tyto křivky zavést - lze jde definovat pomocí jistých charakteristických vlastností. Zde prozatím probereme jenom dvě: kružnici a elipsu.

Kružnice

Kružnici lze definovat jako množinu všech bodů roviny, které mají od pevného bodu - středu - stejnou vzdálenost r, zvanou poloměr. Tedy kružnici k o poloměru $r > 0$ se středem S lze zapsat takto:

$$k = \{X \in \mathbb{R}^2 : |XS| = r\}$$

Vzdálenost mezi dvěma body už umíme vyjádřit. Pro $S = [m, n]$ a $X = [x, y]$ můžeme tedy psát

$$k = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} = r\right\}$$

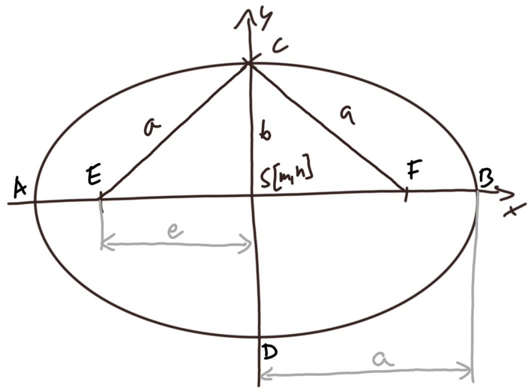
Rovnice kružnice se obvykle zapisuje ve tvaru

$$k : \ (x - n)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Elipsa

Elipsa je množina bodů, které mají od dvou pevných bodů (ohnisek) stejný součet vzdáleností.

Zaveďme obvyklé značení. Ohniska značíme E, F, střed elipsy S, vzdálenost ohnisek od středu e, tj. $|SE| = |SF| = e$. Elipsa má dvě kolmé osy - hlavní a vedlejší. Hlavní osa je delší a má délku $2a$, vedlejší osa je kratší a má délku $2b$. Často hovoříme o hlavní, resp. vedlejší, poloose se délkou a, resp. b.



Obrázek 1.8: Elipsa a obvyklé značení

Formálně můžeme elipsu zapsat takto:

$$e = \{X \in \mathbb{R}^2 : |XE| + |XF| = 2a\} \tag{1.1}$$

Zároveň je z obrázku 1.8 vidět, že

$$a^2 = e^2 + b^2 \tag{1.2}$$

Přímým dosazením

$$|XE| = \sqrt{(x - e_x)^2 + (y - e_y)^2}$$
$$|XF| = \sqrt{(x - f_x)^2 + (y - f_y)^2}$$

a sérií úprav s využitím (1.2) dostaneme rovnici elipsy:

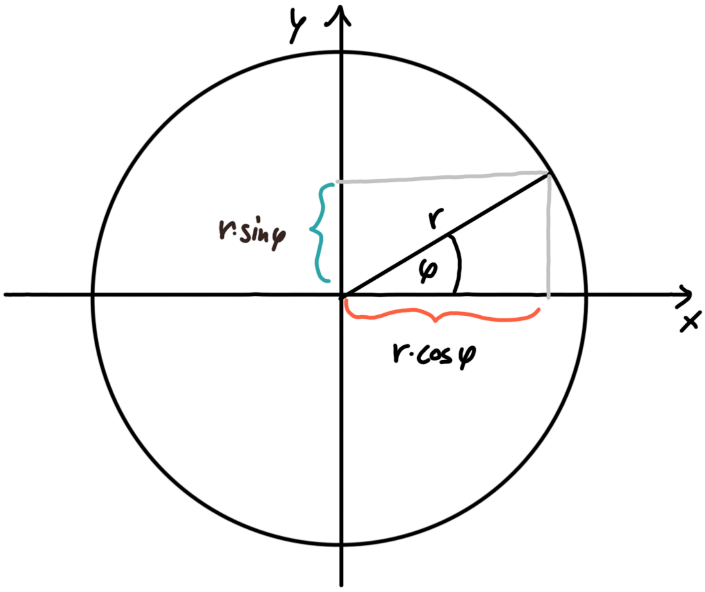
$$e: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \tag{1.3}$$

Poznámky.

- Ohniska vždy leží na hlavní ose. Nebo lépe: hlavní osa prochází ohnisky.
- Pokud $a = b$, můžeme rovnici (1.3) přepsat jako

  $$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \qquad / \cdot a^2$$
  $$(x-m)^2 + (y-n)^2 = a^2$$

  což je rovnice kružnice o poloměru a. Pokud jsou tedy poloosy stejně dlouhé, elipsa přejde v kružnici. Překvapivě.
- V této kapitole předpokládáme, že elipsa má hlavní osu pouze ve směru osy x nebo y. Jiné orientace vyžadují trochu popis.



Obrázek 1.9: Původ parametrického vyjádření kružnice.

- Vzdálenost ohnisek e od středu S se nazývá *excentricita*.
- Má-li střed elipsy souřadnice $S = [m, n]$, mají ohniska souřadnice
  - $E = [m - e, n]$, $F = [m + e, n]$ (hlavní osa ve směru x)
  - $E = [m, n - e]$, $F = [m, n + e]$ (hlavní osa ve směru y)

Parametrické rovnice kuželoseček

Kuželosečky lze vyjádřit i parametricky s využitím goniometrických funkcí. Vzpomenete-li si na goniometrické funkce jakožto funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku, mělo by být zřejmé, že kružnici k můžeme zapsat jako

$$k = \{[r \cos t, r \sin t]; t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \tag{1.4}$$

a elipsu e jako

$$e = \{[a \cos t, b \sin t]; t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \tag{1.5}$$

K původním rovnicím přejdeme opět vyloučení parametru t, tentokrát s využitím goniometrických identit. Vyzkoušejte si to.

1.3.5 Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

Vyšetření vzájemné probíhá jako vždy - hledáme společné řešení rovnice přímky a rovnice dané kuželosečky. Omezíme se na kružnici a elipsu. Mohou nastat tři možnosti

- Soustava má dva řešení - tedy přímka má s kuželosečkou dva společné body. Říkáme, že přímka je *sečnou* kuželosečky.

- Soustava má jedno řešení - tedy přímka má s kuželosečkou jeden společný bod zvaný *bod dotyku*. Říkáme, že přímka je *tečnou* kuželosečky. Tečna je kolmá k *průvodiči* (úsečce spojující střed kružnice/elipsy a bod dotyku).

- Soustava nemá žádné řešení - přímka a kuželosečka nemají žádný společný bod. Tomu nijak neříkáme.

Příklad.

1.4 Analytická geometrie v prostoru

1.4.1 Rovnice přímky v prostoru

Z důvodů (které možná uvidíme později) máme v prostoru k dispozici pouze parametrickou rovnici přímky. Jediný rozdíl je, že tentokrát potřebujeme tři souřadnice.

Příklad. Zapište rovnici přímky p dané body $A = [1, 2, -1]$, $B = [0, -3, 1]$. Postupujeme úplně stejně jako v rovině.

- Směrový vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$.

- Rovnice:

$$\begin{aligned} p: \ x &= 1 - t \\ y &= 2 - 5t \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}$$

1.4.2 Vzájemná poloha přímek

Podobně jako v rovině, nastává pro přímky p a q několik možností:

- Přímky p a q jsou různobežné - mají právě jeden společný bod. Značíme $p \nparallel q$.

- Přímky p a q jsou rovnoběžné - nemají ani jeden společný bod. Značíme $p \parallel q$.

- Přímky p a q jsou totožné - mají nekonečně mnoho společných bodů. Značíme $p = q$.

V prostoru ale může nastat situace, ve které směrové vektory nejsou kolineární, ale přesto přímky nemají žádný společný bod. Říkáme, že přímky jsou *mimoběžné*.

1.4.3 Rovina a její rovnice

Poznámky.

- Rovina je první dvourozměrný geometrický útvar. V analogii s popisem přímky výše to znamená, že k jejímu pokrytí potřebujeme dva parametry.

- Rovina v $\mathbb{R}^3$ je jakousi obdobou přímky v $\mathbb{R}^2$. Rovnice roviny může mít 3 podoby: parametrickou, obecnou a úsekovou.
- Rovina je jednoznačně určena třemi body, které neleží v přímce.
- Rovinu obvykle značíme malým řeckým písmenem, např. σ nebo τ.

Parametrická rovnice

Idea je stejná jako v případě parametrické rovnice přímky. Zvolíme si výchozí bod $\vec{A}$ a z něj se můžeme pohybovat ve směru *dvou lineárně nezávislých směrových vektorů* $\vec{u}$, $\vec{v}$. Rovina σ je pak dána rovnicí:

$$\sigma: \; X = A + r\vec{u} + s\vec{v} \tag{1.6}$$

nebo po složkách

$$\begin{aligned} \sigma: \; x &= A_x + ru_x + sv_x \\ y &= A_y + ru_y + sv_y \\ z &= A_z + ru_z + sv_z \end{aligned} \tag{1.7}$$

Příklad. Napište parametrickou rovnici přímky σ dané body $A = [1, 3, 2]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [-3, 2, -1]$.

- směrové vektory

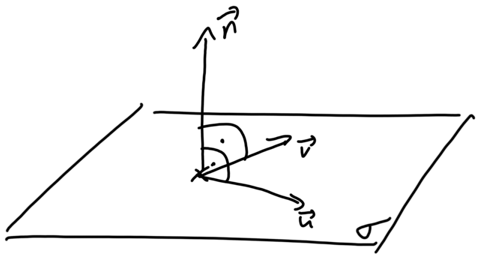
$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (-2, -3, -1) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AC} = (-4, -1, -3) \end{aligned}$$

- rovnice

$$\begin{aligned} \sigma: \; x &= 1 - 2r - 4s \\ y &= 3 - 3r - s \\ z &= 2 - r - 3s \end{aligned}$$

Poznámky.

- Směrové vektory opět získáme jako orientované úsečky ze souřadnice bodů, kterými je rovnice určena.
- Pokud se pokusíme sestrojit rovinu ze tří bodů ležících na přímce, dostaneme dvojici kolineárních, a tedy i lineárně závislých, vektorů (jeden je násobkem druhého). Získáme tak maximálně parametrickou rovnici přímky.



Obrázek 1.10: Rovina se svými směrovými a normálovým vektorem.

Obecná rovnice

Obecná rovnice roviny má podobný tvar jako obecná rovnice přímky v rovině:

$$\sigma: \ ax + by + cz + d = 0 \tag{1.8}$$

Poznámky.

- Koeficienty a, b, c jsou souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\sigma = (a, b, c)$.
- Normálový vektor je kolmý ke všem vektorům k rovině (viz obrázek 1.10).
- Význam koeficientu d je opět vzdálenost roviny od počátku (opět pouze pokud $|\vec{n}_\sigma| = 1$)
- Obecnou rovnici přímky získáme z parametrické vyloučením parametrů. Tentokrát to ovšem může dát trochu více práce.

Příklad.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 2r - 4s \quad / \cdot (-4) \\ y &= 3 - 3r - s \\ z &= 2 - r - 3s \quad / \cdot 5 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$\overline{}$$

$$-4x + y + 5z = 9$$

$$\overline{}$$

$$-4x + y + 5z - 9 = 0$$

Alternativně se můžeme pokusit nalézt souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (a, b, c)$. Normálový vektor musí být kolmý na všechny vektory v rovině. Stačí nám najít libovolný vektor, který bude kolmý na směrové vektory, tj.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -2a - 4b - c &= 0 \quad / \cdot (-3) \\ -4a - b - 3c &= 0 \end{aligned}\right\} \oplus$$

a zvolme např. $a = 1$

$$-3b - c = 2$$
$$-b - 3c = 4$$

$$b = -\frac{1}{4}$$
$$c = -\frac{5}{4}$$

Neboli

$$\vec{n} = (1, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$$

Případně

$$\vec{n} = (-4, 1, 5)$$

Takže:

$$\sigma : \ -4x + y + 5z + d = 0$$

Koeficient d už dopočítáme dosazením libovolného bodu ležícího v rovině. V části 1.4.8 se naučíme jednodušší způsob nalezní normálového vektoru.

Úseková rovnice

Úseková rovnice rovine je rovněž zcela analogická úsekové rovnici přímky v rovině:

$$\sigma : \ \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1 \tag{1.9}$$

Z rovnice tak dokážeme rovnou přečíst souřadnice průsečíků roviny σ se souřadnými osami: $P_x = [r, 0, 0]$, $P_y = [0, s, 0]$, $P_z = [0, 0, t]$.

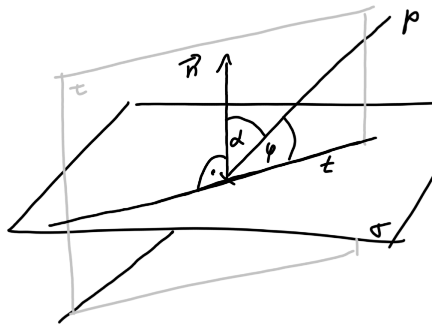
1.4.4 Vzdálenost bodu od roviny

Tvrzení 7. *Vzdálenost bodu $A = (A_x, A_y, A_z)$ od roviny σ lze spočítat jako*

$$d = \frac{|aA_x + bA_y + cA_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{1.10}$$

kde a, b, c, d jsou koeficienty obecné rovnice roviny σ, tj.

$$\sigma : \ ax + by + cz + d = 0$$



Obrázek 1.11: Ilustrace odchylky přímky od roviny

Poznámky.

- Všimněte si podobnosti se vzdáleností bodu or přímky v rovině.
- Odsud je opět patrný geometrický význam obecné rovnice - stačí vzít $A = [0,0,0]$ a $|\vec{n}| = 1$.

1.4.5 Vzájemná poloha přímky a roviny

Vyšetřování vzájemné polohy přímky p a roviny σ probíhá stejně jako v ostatních případech - snažíme se vyřešit současně obě dvě rovnice, tj. rovnici přímky i rovnici roviny. Opět tři možnosti:

- nekonečně mnoho společných bodů: přímka p leží v rovině σ. Píšeme $p \subset \sigma$.
- jeden společný bod: přímka p protíná rovinu σ. Píšeme $p \cap \sigma = \{P\}$, kde bod P je průsečík.
- žádný společný bod: přímka p je rovnoběžná s rovinou σ. Píšeme $p \parallel \sigma$.

Odchylka přímky od roviny

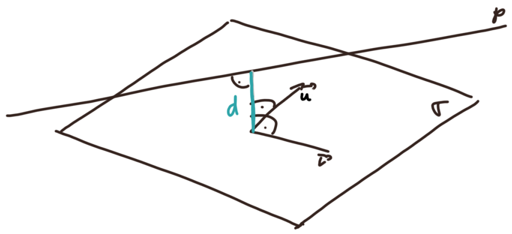
Mějme přímku p a rovinu σ. Přidejme k nim ještě druhou rovinu ρ tak, aby $p \in \rho$ a $\rho \perp \sigma$. Průsečnici rovin ρ a σ označme například q. Úhel mezi přímkou p a průsečnice q se nazývá odchylka přímky a roviny. Situace je znázorněna v obrázku 1.11.

Realizovat takový výpočet je poněkud pracné. Naštěstí to jde snáze. Umíme totiž snadno nalézt rovnici přímky t, která je k rovině σ kolmá - normálový vektor roviny σ poslouží jako směrový vektor přímky t. Odchylka φ přímky od roviny potom bude doplněk odchylky α přímek p a t do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Tvrzení 8 (Odchylka přímky od roviny)**.** *Nechť p je přímka se směrovým vektorem $\vec{u}$ a σ je rovina s normálovým vektorem $\vec{n}$.*

$$\sin\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)^{1} = \cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|} \tag{1.11}$$

[1] $\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos(\phi - \frac{\pi}{2}) = \sin\phi$



Obrázek 1.12: Vzdálenost přímky od roviny

1.4.6 Vzdálenost přímky od roviny

Toto má smysl pouze pro přímky, které jsou s rovinou rovnoběžné. Stačí zvolit libovolný bod přímky a spočítat jeho vzdálenost od roviny s užitím (1.10), viz obrázek 1.12.

1.4.7 Vzájemná poloha dvou rovin

Situace je obdobná vzájemné poloze přímek v rovině. V prostoru mohou roviny σ a τ zaujmout tři různé vzájemné polohy (viz obrázek 1.13):

- Rovnoběžné, tj. $\sigma \parallel \tau$. Roviny nemají žádné společné body; soustava rovnice nemá žádné řešení. I v tomto případě jsou normálové vektory kolineární.
- Totožné, tj. $\sigma = \tau$. Roviny mají nekonečně mnoho společných bodů; odpovídající soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení a normálové vektory jsou kolineární.
- Různobežné. Roviny mají nekonečně mnoho bodů; soustava rovnice má nekonečně mnoho řešení, ale normálové vektory jsou různobežné. Společné body v tomto případě tvoří přímku, kterou nazýváme *průsečnice rovin*.

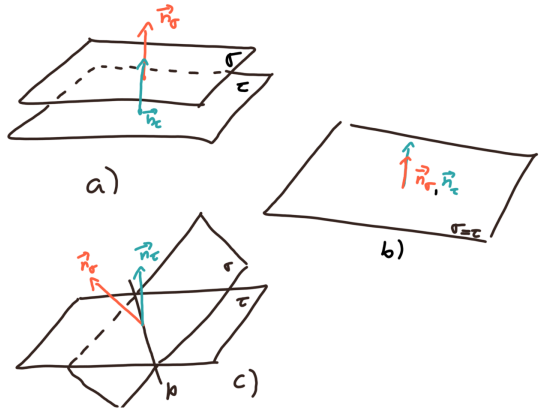
1.4.8 Vektorový součin

V trojrozměrném prostoru můžeme zavést novou operaci mezi vektory: vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$. Nazývá se vektorový, neboť jeho výsledkem je opět vektor (srovnej se skalárním součinem).

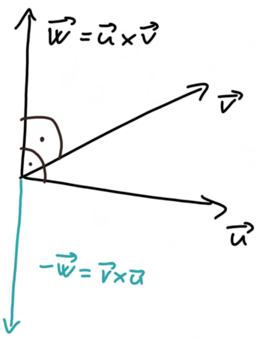
Definice 11 (Vektorový součin)**.** *Operaci*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x\right)$$

nazýváme vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.



Obrázek 1.13: Vzdájemná poloha rovin: a) rovnoběžné, b) totožné, c) různobežné.



Obrázek 1.14: Vektorový součin

Tvrzení 9. *Vektor $\overrightarrow{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý na vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a jeho velikost je číselně rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.*

$$|\overrightarrow{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin \varphi$$

.

Důkaz. Přímým výpočtem skalárního součínu.

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{w} = u_x \left(u_y v_z - u_z v_y\right) + u_y \left(u_z v_x - u_x v_z\right) + u_z \left(u_x v_y - u_y v_x\right) = 0$$

a stejně pro $\vec{v}$. Velikost zatím bez důkazu.

□

Poznámky.

- Vektorový součin tak můžeme použít ke snadnému a rychlému nalezení normálového vektoru roviny. Mějme například směrové vektory roviny $\vec{u} = (1, 2, 3)$ a $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. Potom jako normálový vektor můžeme vzít:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -4, 2)$$

- Zavádí se i tzv. smíšený součin tří vektorů

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$$

  který je číselně roven objemu rovnoběžnostěnu o hranách daných těmito vektory (to by mělo být zřejmé z toho, co víme o vektorovém součinu).

- Vektorový součin je takzvaně *antisymetrický*, neboli změní znaménko, pokud zaměníme pořadí vektorů, tedy

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u},$$

  z čehož je rovněž vidět i to, že vektorový součin vektoru se sebou samotným je nulový.

Vzdálenost mimoběžek

Vzdáleností mimoběžek máme na mysli délku tzv. *osy mimoběžek*. Osa mimoběžek je úsečka, která spojuje obě dvě mimoběžky (její krajní body leží na mimoběžkách) a je k oběma kolmá. Návod, jak spočítat vzdálenost mimoběžek nám ukazuje obrázek 1.15. Mějme dvě mimoběžné přímky: p danou bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ a q danou bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$. Krajní body osy mimoběžek označme P a Q a $\vec{n}$ vektor kolmý k oběm přímkám (můžeme získat například jako vektorový součin směrových vektorů $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$). Do bodu Q se tak můžeme dostat dvěma způsoby: z bodu A se do bodu P přesuneme nějakým násobkem směrového vektoru $t\vec{u}$ a po tom násobkem $d\vec{n}$. Alternativně se můžeme přesunout z bodu B opět nějakým násobkem $s\vec{v}$ do bodu Q. Tedy

$$\begin{aligned} Q &= A + t\vec{u} + d\vec{n} \\ Q &= B + s\vec{v} \end{aligned}$$

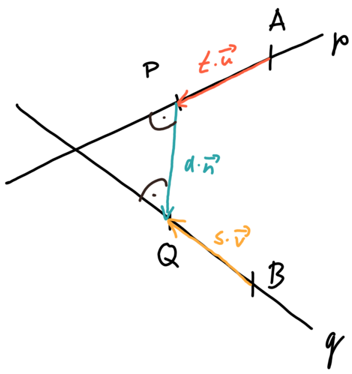
nebo dohromady

$$A + t\vec{u} + d\vec{n} = B + s\vec{v}.$$

Toto je soustava tří rovnic o třech neznámých a pro mimoběžky bude mít vždycky řešení. Vzdálenost mimoběžek tedy získáme jako délku vektoru $d\vec{n}$, tedy

$$|pq| = |d\vec{n}|$$

Existuje ještě jeden snadný způsob, jak spočítat vzdálenost mimoběžek. Můžeme jednou z přímek proložit rovinu, která je rovnoběžná s druhou přímkou. Vzálenost mimoběžek pak je prostě vzdálenost přímky od roviny. Konkrétně vezměme rovinu σ danou normálovým vektorem $\vec{n}$ a nějakým bodem. Pokud zvolíme $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, bude rovina rovnoběžná s oběma přímkami. Zbývající člen d obecné rovnice roviny σ určíme dosazením nějakého bodu, např. $A \in p$. Přímka p tak tedy leží v rovině σ, tj. $p \subset \sigma$. Vzdálenost mimoběžek už spočítáme s využitím (1.10).



Obrázek 1.15: Vzdálenost mimoběžek

1.4.9 Koule a elipsoid

Vzájemná poloha koule a roviny

1.5 Dodatky

Dosud jsme používali k popisu polohy dvojici (trojici) souřadnic - čísel x, y (z) vyjadřujících vzdálenost od počátku ve směru jednotlivých souřadných os. Takovým souřadnicím říkáme *kartézské*. V některých situacích bývá praktické zavést jiné souřadnice.

1.5.1 Polární souřadnice

Polární souřadnice používáme v rovině. Poloha bodu je určena úhlem φ a vzdáleností od počátku$r$. Vztah mezi polárními a kartézskými souřadnicemi je stejný, jako jsme viděli u parametrické rovnice kružnice, (viz obrázek 1.9), tedy:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.12}$$

Tyto vztahy reprezentují přechod polárních ke kartézským souřadnicím. Inverzní vztahy (tedy přechod od karztézkých k polárním) získáme vyřešením soustavy rovnic, kterou vztahy 1.13 reprezentují (patrně s využitím goniometrických rovnic)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right), & y \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Příklad. Vezměme bod $A = [1, 1]$. Jeho polární souřadnice jsou $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ a $\varphi = \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

1.5.2 Sférické souřadnice

Sférické souřadnice fungují na stejném principu jako polární souřadnice, pouze je třeba o jeden úhel víc. Standardní zavedení sférických souřadnic vypadá takto

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\varphi \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Úhel φ se nazývá *azimutový úhel*, úhel θ se nazývá *zenitový* nebo *polární úhel*[2]. Inverzní převodní vztahy jsou poněkud složitější, tak je prozatím vynecháme.

Sférické souřadnice znáte z běžného života - poloha na zeměkouli se udává právě pomocí azimutového a zenitového úhlu, ale v tomto kontextu se jim obvykle říká *zeměpisná délka* a *zeměpisná šířka* (i když rovníku odpovídá zeměpisná šířka 0°, takže zeměpisná šířka je oproti běžnému zenithovému úhlu posunutá o 90°).

[2]Matematici obvykle používají obrácené značení - písmenem φ značí azimutový úhel, písmenem θ zenitový. Matematiky se ale netrapme.

Literatura

[1] J Polák. *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, 2016.

[2] Analytická geometrie. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka_geometrie/kuzelosecky.php`. 2021-11-22.