10. Planimetrie

- oblast geometrie
- pojednává o vztazích rovinných geometrických útvarů, o jejich obsazích, obvodech, vzdálenostech, úhlech atd.

- základními objekty jsou bod a přímka.

- některými geometrickými útvary jsme se zabývali už v předchozích kapitolách (△, □)

10.1 Bod

- bezrozměrný základní geometrický útvar.
- obvykle zakreslujeme symbolem + a označujeme hůlkovým písmenem.   + A

- dva body mohou být shodné, nebo rozdílné.

  $+A \quad +B \qquad\qquad +A=B$

- všechny další geometrické útvary můžeme považovat za množiny bodů

  → pokud tedy např. bod A leží na kružnici k, píšeme $A \in k$.

10.2 Přímka

- základní jednorozměrný geometrický útvar
- pro každé dva body existuje právě 1 přímka, která jimi prochází
- "nekonečně tenká, dokonale rovná čárka"
- nekonečná řada bodů
- znázorňujeme rovnou čarou a značíme malým písmenem

$q = \overleftrightarrow{AB}$

10.2.1. Vzájemná poloha přímek

pro každé dvě přímky p, q nastává jeden z těchto případů

a)

- přímky jsou rovnoběžné
- nemají žádný společný bod
- značíme $p \parallel q$

b)

- přímky jsou různoběžné
- mají právě 1 společný bod
- značíme $p \nparallel q$.

c)

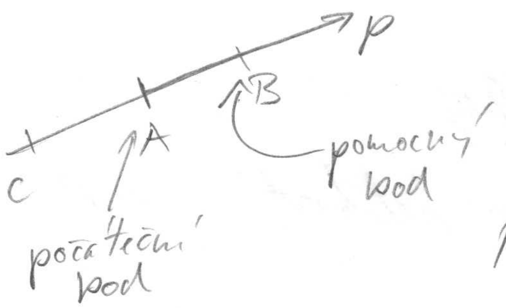
- přímky jsou <u>totožné</u>
- mají nekonečně mnoho společných bodů
- značíme $p = q$

Speciálním případem různoběžnosti je kolmost:

- kolmé přímky svírají pravý úhel.
- značíme $p \perp q$

10.2.2 Polopřímka a úsečka

- polopřímka vznikne rozdělením přímky bodem
- volí se ještě druhý, „pomocný bod", který určuje směr

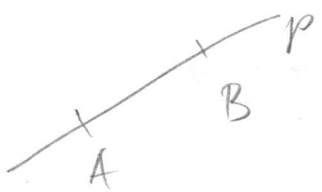


Znázorňujeme šipkou ⟼

Značíme $\overrightarrow{AB}$

Polopřímka $\overrightarrow{AC}$ je <u>opačná</u> k $\overrightarrow{AB}$

- úsečka je část přímky mezi 2 body

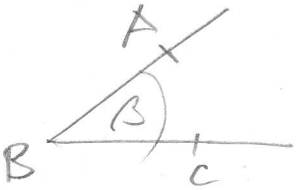


- značíme AB
- délka úsečky $|AB|$

10.3. rovinný úhel

různé definice, např.

- část roviny ohraničená 2 polopřímkami se společným počátkem.
- dvojice polopřímek se společným počátkem, nebo dvojice přímek

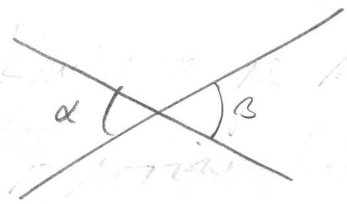


Značíme $\measuredangle ABC$ nebo β

$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ polopřímky.

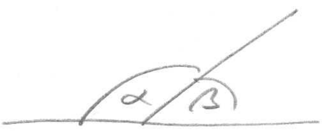
- velikost úhlu v kapitole Goniometrie

10.3.1 vztahy mezi úhly v rovině



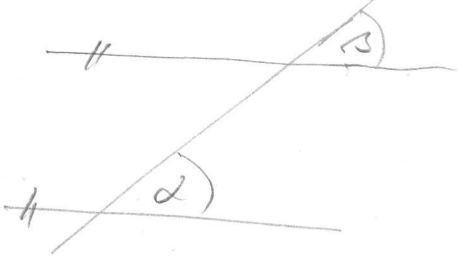
Vrcholové úhly

- mají stejnou velikost $\alpha = \beta$



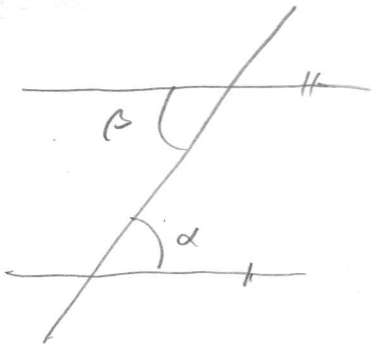
Vedlejší úhly

- součtem je přímý úhel $\alpha + \beta = 180°$



Souhlasné úhly

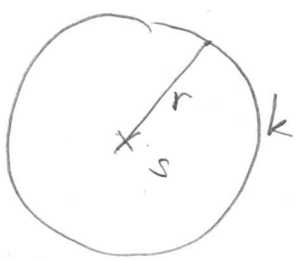
- mají stejnou velikost $\alpha = \beta$



Střídavé úhly mají stejnou velikost. $\alpha = \beta$

10.4. Kružnice a kruh

· Definice: kružnice je množina bodů v rovině, které mají od pevného bodu (středu), stejnou vzdálenost.



Vzdálenost bodu kružnice od středu se nazývá **poloměr**.

Značíme $k(S,r)$ - kružnice se středem S a poloměrem r.

Spojnice středu a bodu kružnice se nazývá průvodič.

Symbolicky: $k(S,r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PS| = r\}$

· Definice: kruh je množina bodů v rovině, které mají od pevného bodu (středu) vzdálenost nejvýše r.

Symbolicky: $\mathcal{K}(S,r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PS| \leq r\}$

Pro kruh se nezavádí zvláštní označení.

Obvod kružnice a kruhu: $O = 2\pi r = \pi d$

$d \ldots$ průměr

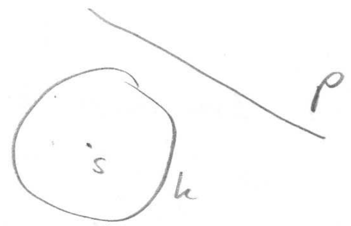
$= 2r$

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

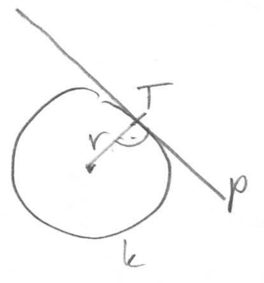
Poznámka: lze zavést i obsah kružnice, ale je roven 0.
Budeme tedy hovořit pouze o obsahu kruhu.

10.4.1 Vzájemná poloha kružnice a přímky

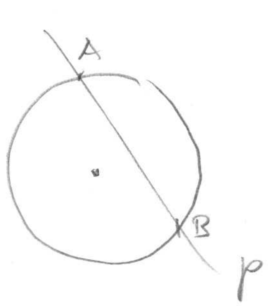
Pro každou přímku p a kružnici k nastává právě jeden případ:

- 

žádný společný bod

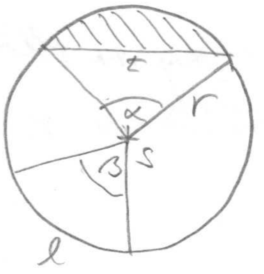
- 

1 společný bod T
→ přímka se nazývá tečnou kružnice k
→ tečna je vždy kolmá na průvodič.

- 

2 společné body A, B
→ úsečka AB se nazývá tětiva.

10.4.2. Řezy v kružnici



t ... tětiva l ... oblouk

... kruhová úseč

... kruhová výseč

- Délka oblouku l
  - známe z kapitoly o goniometrii

  $l = r \cdot \beta$ (pozor: β měříme v radiánech)

- Délka tětivy t

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$$

- Obsah kruhové výseče
  - podobně jako délka oblouku

  $S_v = r^2 \cdot \beta$ (β opět v obloukové míře)

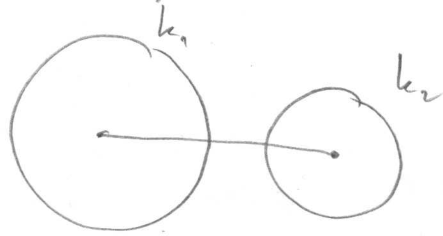
10.4.3 Vzájemná poloha dvou kružnic

Mějme kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, a označme vzdálenost jejich středů jako v.
Může nastat těchto 6 případů:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $r_1 > r_2$

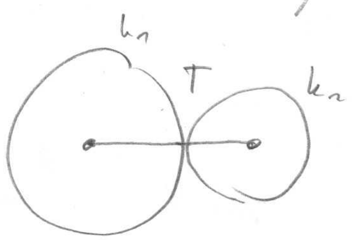
i) kružnice nemají společný bod

$r_1 + r_2 < v$



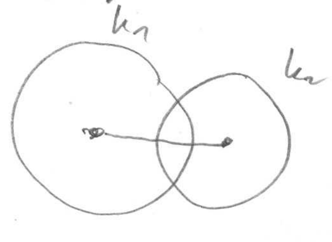
ii) vnější dotyk – 1 společný bod

$r_1 + r_2 = v$



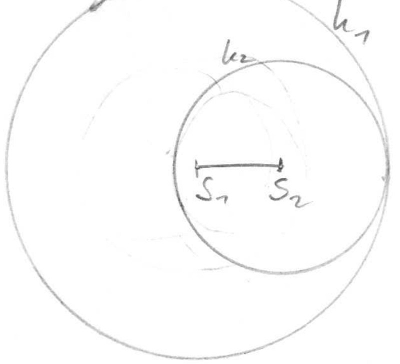
iii) kružnice se protínají – 2 společné body.

$r_1 + r_2 > v > r_1$



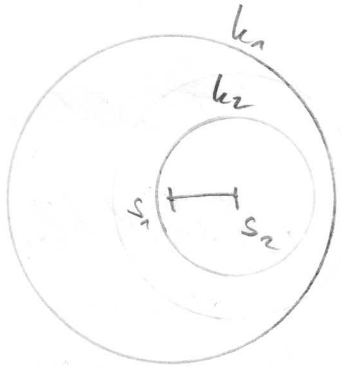
iv) vnitřní dotyk – 1 společný bod

$v = r_1 - r_2$



v) kružnice k_2 leží v kružnici k_1 – žádný společný bod.

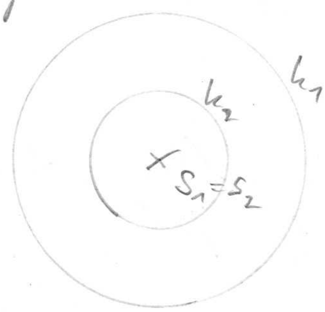
$0 < v < r_1 - r_2$



vi) kružnice mají společný střed – žádný společný bod

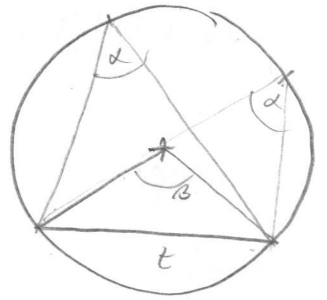
"k_1 a k_2 jsou koncentrické"

$v = 0$



10.4.4 Úhly v kružnici

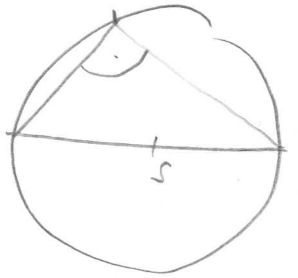
Vyznačíme v kružnici tětivu a úhly α, β, γ



- úhel α se nazývá obvodový a jeho velikost nezávisí na poloze jeho vrcholu na kružnici.
- úhel β se nazývá středový.

Platí: $\beta = 2\alpha$ Tedy středový úhel má dvojnásobnou velikost proti obvodovému

Speciální případ: $\beta = 180° \implies \alpha = 90°$



"Thaletova kružnice"

– trojúhelník sestrojený z průměru kružnice a bodu ležícího na kružnici je pravoúhlý.

10.5 Geometrická zobrazení v rovině

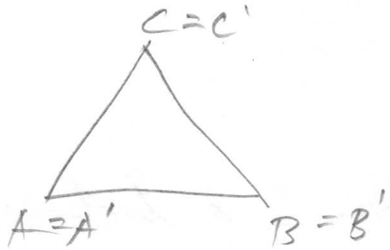
Geometrické zobrazení v rovině: předpis, který bodu X v rovině přiřadí bod X' v téže rovině

geometrická zobrazení dělíme na shodná a podobná:

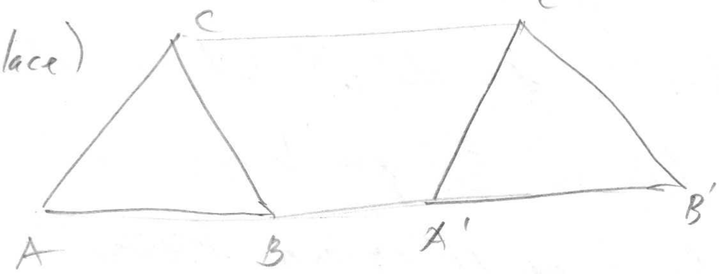
shodná zobrazení

- zachovávají vzdálenosti, tj. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 \quad |X'Y'| = |XY|$.
- základní vlastnosti shodnosti:
  - obrazem úsečky je úsečka stejné délky
  - obrazem rovnoběžek jsou rovnoběžky
  - obrazem každého trojúhelníka je trojúhelník s ním shodný.
- Shodnost dále dělíme na
  - přímou: $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ mají souhlasnou orientaci vrcholů
    patří sem: identita, posunutí, otočení a středová souměrnost.
  - nepřímou: nesouhlasná orientace vrcholů
    – osová souměrnost.

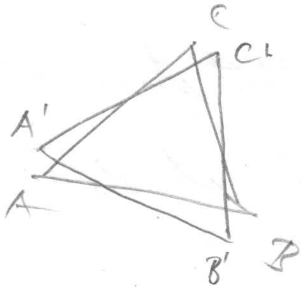
identita:



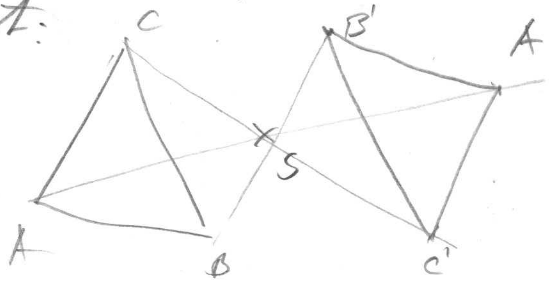
posunutí (translace)



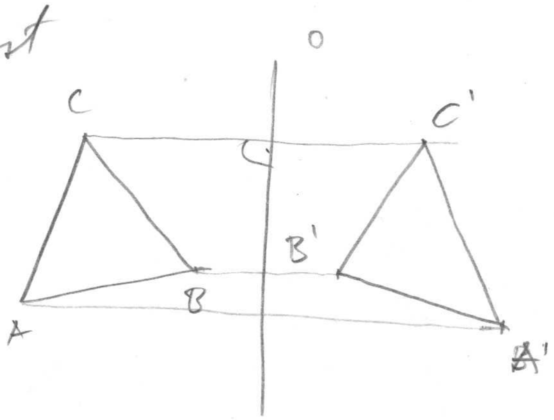
otočení (rotace)



středová souměrnost:



osová souměrnost



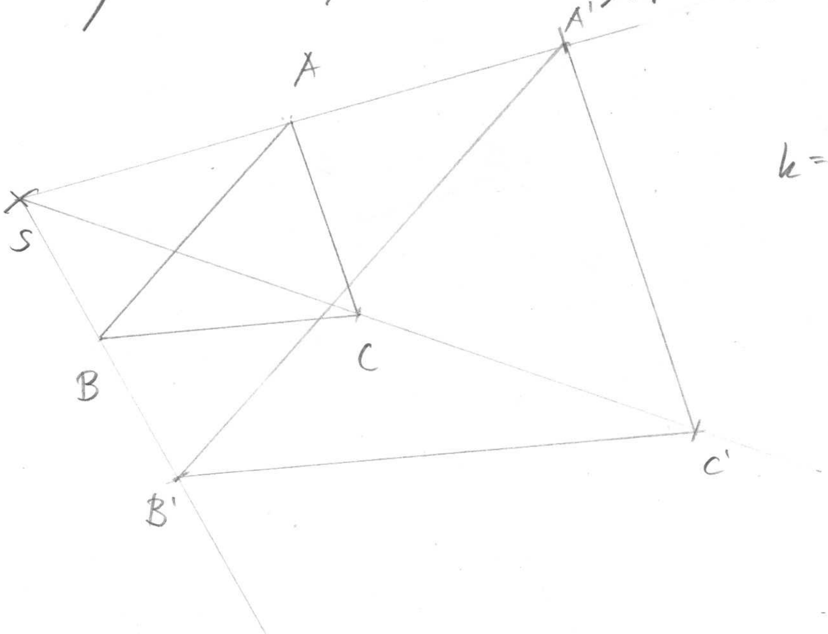
Podobná zobrazení

- stejnolehlost se středem S a koeficientem k
  1. bodu S přiřadí S'
  2. bodu $X \neq S$ přiřadí X' tak, že platí: $|SX'| = |k| \cdot |SX|$

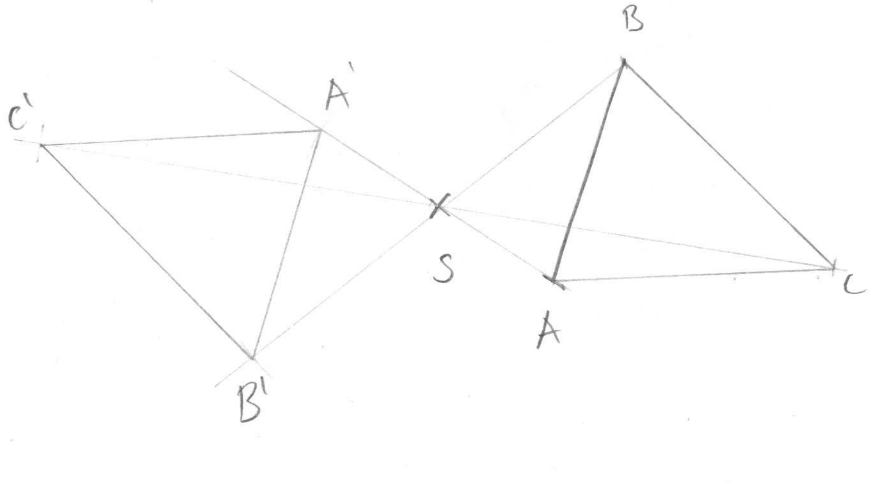
  X' leží na $\overrightarrow{SX}$ pro $k > 0$

  X' leží na ~~op~~ polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$ pro $k < 0$

- pro $k = 1$ se stejnolehlost stává identitou
- pro $k = -1$ se stává středovou souměrností



$k = 2$



$k = -1$

~ středová souměrnost