3. Algebraické výrazy

Definice: Algebraický výraz je každý matematický zápis, který je tvořen z konstant a proměnných, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací a závorek vytvořeny smysluplné vztahy.

Poznámka:
- terminologie
  - proměnná – libovolné písmeno zastupující čísla z nějakého oboru
  - konstanta – konkrétní čísla vystupující ve výrazech
- aritmetika vs algebra
  - aritmetika: řeckého původu (umění s čísly)
  - algebra: arabské الجبر (al-jabr)
    (~ "obnova zničených částí")

    velmi obecný pojem: zde zejména elementární algebra, tj. "aritmetika s proměnnými"

Příklady:

$$\underbrace{\frac{x\sqrt{x-2}}{x+3},\quad \frac{|x+7|}{|x-7|},\quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,x^5 y^{\frac{1}{2}},\quad \sin^2 x+\cos^2 x}_{\text{výrazy}}$$

$-\quad (x-)\ ,\quad \frac{1}{\ }\ ,\quad x\cdot/$

- nejsou výrazy – matematicky nemají smysl

Poznámka: Požadavek matematického smyslu výrazu vede na nutnost stanovit podmínky. Typicky se jedná o vyloučení dělení nulou a dodržení definičních oborů funkcí ve výrazu.

Postupně budeme do algebraických výrazů přidávat funkce, které probereme, zatím se podíváme na:

- zlomky
- mocniny a odmocniny
- polynomy
- pár užitečných vzorečků

3.1 Zlomky

- zlomek (lomený výraz) označuje podíl dvou výrazů.

Vyjadřuje podíl z celku.

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{čitatel} \\ \leftarrow \text{jmenovatel} \end{matrix}$$

Matematicky je zlomek ekvivalentní dělení

$\Rightarrow$ jmenovatel <u>nesmí</u> být roven 0.

dělení 0 nemá smysl: $\frac{a}{b} = c \iff a = b \cdot c$

Předp. $a \neq 0$

$b = 0 \Rightarrow a = 0 \cdot c = 0$
$\forall c$ $\rightarrow$ SPOR ↯

navíc c neurčit.

<u>Pravidla pro počítání se zlomky</u>

- sčítání (odečítání):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\frac{p}{b} \pm c\frac{p}{d}}{p}$$

, kde $p = p(b,d)$ je nějaký společný násobek čísel b a d.

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $b,d \neq 0$

- řešíme převedením na společného jmenovatele
- viděli jsme pro $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, pojem společného násobku lze s přimhouřením oka rozšířit i do $\mathbb{R}$.
- optimální volba: nejmenší společný násobek

Příklad:

- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 6}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$
- $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{\cancel{a}\cdot b + a}{a \cdot b} = \frac{b+a}{a\cdot b}$
- $\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$

- násobení

čitatel s čitatelem, jmenovatel s jmenovatelem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b \cdot d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$
$$b, d, \neq 0$$

Příklad: $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{42}$

- dělení

dělit zlomkem znamená násobit převrácenou hodnotou: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Příklad: $\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-1)(x-1)} : \frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-3)}\cdot(x+2)}{(x-1)\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-3)}} = \frac{x+2}{x-1}$

Poznámka: - krácení: pokud je v čitateli a jmenovateli stejné číslo, mohu ho „krátit".

$$\frac{a\cdot \cancel{b}}{c \cdot \cancel{b}} = \frac{a}{c}$$

- rozšíření: zlomek mohu vynásobit zlomkem typu $1 = \frac{a}{a}$. Nezměním tak jeho hodnotu

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a\cdot c}{b \cdot c}$$

3.2 Mocniny a odmocniny

mocninou rozumíme zkrácený zápis pro opakované násobení:

$$a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ krát}} \qquad a \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{N}$$

Čteme "a na r-tou", "r-tá mocnina a"

a … mocněnec/základ, r … mocnitel/exponent

Odsud můžeme vyvodit i řadu vlastností, $a, b \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}$

Věta 3.1. počítání s mocninami

1) $a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\text{-krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s\text{-krát}} = a^{r+s}$

2) $(a \cdot b)^r = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}_{r\text{-krát}} = a^r \cdot b^r$

3) $\dfrac{a^r}{a^s} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r}}{\underbrace{\cancel{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{s}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r-s} = a^{r-s}$ (zde $r > s$, lze i obráceně, $a \neq 0$)

Z předchozího lze zavést

4) $\dfrac{1}{a^s} = a^{-s}$, neboť pak platí konzistentně s 1)

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \cdot a^{-s} = a^{r-s} \qquad a \neq 0$$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \underbrace{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a}{b}}_{r} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{r}} = \dfrac{a^r}{b^r} \qquad b \neq 0$

6) $(a^r)^s = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{r\text{ krát}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \ldots a)}_{r\text{ krát}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{r}}^{s} = a^{r \cdot s}$

Poznámka: - $a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

lze dokázat, zatím to přijměte.

- $1^r = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Z}$ (dokonce $\forall r \in \mathbb{R}$)

zřejmé

- $a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- 0^0 ... nelze jednoznačně definovat, v různých kontextech různě.

v kombinatorice často $0^0 = 1$

Poznámka: - mocniny lze zavést i pro reálné (komplexní) exponenty; pro počítání platí stejná pravidla

Definice

r-tou odmocninou čísla a rozumíme číslo, jehož r-tou mocninou je číslo a.

$$\sqrt[r]{a} = x \iff x^r = a$$

Věta 3.2 Počítání s odmocninami (lze odvodit z definice odmocniny a Věty 3.1)

1) $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}} \qquad \left[\left(a^{\frac{1}{r}}\right)^r = a^{\frac{1}{r}\cdot r} = a^1 = a\right]$

2) $\sqrt[r]{a\cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} \qquad \left[\sqrt[r]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}} \cdot b^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a}\,\sqrt[r]{b}\right]$

3) $\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} \qquad \left[\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{a^{1/r}}{b^{1/r}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}\right]$

4) $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r\cdot s]{a} \qquad \left[\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r\cdot s}} = \sqrt[r\cdot s]{a}\right]$

5) $\left(\sqrt[s]{a}\right)^r = \sqrt[s]{a^r}$; $\left[\left(\sqrt[s]{a}\right)^r = a^{\frac{r}{s}} = \left(a^r\right)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}\right]$

Poznámka: Těchto pravidel se užívá při praktických výpočtech s mocninami a odmocninami. Je nutné je znát, lepší je jim rozumět.

Příklad: $\sqrt{14400} = \sqrt{144\cdot 100} = \sqrt{144}\cdot\sqrt{100} = 12\cdot 10 = 120$

$x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^5 - 6x^{\frac{5}{3}} - 9x\sqrt[3]{x}\right) = 3\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^5 - 6\cdot x^{\frac{5}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}} - 9x\sqrt[3]{x}\cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= 3\cdot x^{\frac{17}{3}} - 6\cdot x^{\frac{7}{3}} - 9x^{\frac{6}{3}}$

Pozor: $a^r + b^r \neq (a+b)^r$

Kdo se domnívá, že ano, nechť mi předloží formální důkaz.

Poznámka: v podmínkách u odmocnin se často uvádí požadavek, aby argument byl nezáporný, tj.

$\sqrt[n]{x}$ $\quad x \geq 0$.

pro lichá přirozená n není důvod zakazovat $x<0$, neboť lichá odmocnina je dobře definovaná

např. $\sqrt[3]{-8} = -2$, protože $(-2)^3 = -8$

výraz $\sqrt[2]{-4}$ není na R definovaný.

3.3 Polynomy a algebraické zlomky

Definice: Polynomem n-tého stupně nazýváme ~~ten~~ výraz:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \; i = 0, \dots n$$

$$a_n \neq 0.$$

Často se značí $p(x), p_n(x), \dots$ $n = \text{st}\, p(x)$ .. „stupeň"

Poznámka: · Speciální případy

$n=0$: a_0 $p_0(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ - konstanta

$n=1$: $p(x) = a_0 + a_1 x$ lineární dvojčlen binom

$n=2$: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ kvadratický trojčlen

$n=3$ kubický

· Polynom lze zkráceně zapsat jako

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Operace s polynomy

p, q .. polynomy stupně n a m

· sčítání a odčítání: sčítáme/odčítáme pouze členy se stejnou mocninou.

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

rozšíření pro polynomy různého stupně je zřejmé.

násobení:

podle distributivního zákona: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$a,b,c\in\mathbb{R}$

tj. $p(x)\cdot q(x)=(a_n x^n+\dots a_0)\cdot(b_m x^m+\dots b_0)=$

$$=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}$$

jinými slovy: každý člen s každým

Příklad: $(x-1)\cdot(x^2-2x+3)=x^3-2x^2+3x-x^2+2x-3=x^3-3x^2+5x-3$

Zkuste si rozmyslet pomocí zápisu s $\sum$.

<u>dělení</u>

obtížné, vynecháme.

Definice: Číslo a se nazývá kořen polynomu, jestliže platí

$$p(a)=0$$

Věta 3.3 Každý polynom st $n\geq 1$ s komplexními koeficienty má alespoň kořen. (Základní věta algebry)

Důsledek věty: Každý polynom můžeme zapsat jako součin tzv. kořenových činitelů, (důkaz na požádání)

tj. $p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

kde x_i, $i=1,n$ jsou kořeny polynomu p a st $p=n$.

Rozklad polynomů

Obecně můžeme polynom zapsat pomocí součinu dvou polynomů nižšího stupně a zbytku,

$$p(x) = q(x)\, r(x) + s(x)$$

p, q, r, s jsou polynomy

$$\text{st. } p(x) = \text{st } q(x) + \text{st } r(x)$$

$$\text{st } s(x) \leq \text{st. } p(x)$$

Pokud $s(x) = 0$, říkáme, že polynom $p(x)$ je dělitelný polynomem $q(x)$ a $r(x)$

Polynom můžeme rozložit na součin

a) dělením – tomu se pokusíme vyhnout

b) nalezením kořenů a zápisem jakožto součinu kořenových činitelů

c) speciálními postupy: využití vzorců, doplněním na čtverec dvojčlenu

Vybrané vzorečky

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a\cdot b + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 - b^3$$

obecnější varianty

- $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$ tzv. binomická věta

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$ kombinační číslo

Kombinační čísla můžeme nalézt v „Pascalova trojúhelníku“

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$\binom{3}{2}$

$\binom{5}{3}$

např. $(x-y)^5 = x^5(-y)^0 + 5x^4(-y)^1 + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 5x(-y)^4 + x^0(-y)^5$

$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

- $$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

např. $x^5 - 1 = (x-1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Doplnění na čtverec dvojčlenu

- "čtverec" = 2. mocnina
- smyslem je vyjádřit kvadratický trojčlen

$$ax^2+bx+c$$

jako 2. mocninu dvojčlenu + zbytek, tj.

$$\bar{a}(x-\bar{b})^2+\bar{c}$$

- obecně

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{0 \text{ ... nic jsem nepřidal}}\right)+c$$

$$= a\left(\underbrace{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\sim (A^2+2AB+B^2)=(A+B)^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$A=x \quad B=\frac{b}{2a}$$

$$= \underbrace{a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}_{\text{čtverec dvojčlenu + zbytek}}$$

Mohu pokračovat

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right) = \left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2}{4a}-c}\right)\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2}{4a}-c}\right)$$

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B) \qquad = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\right)$$

Pokračování ze strany 12

$$= a \cdot \left(x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= a \cdot \left(x - \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)$$

Což je rozklad na kořenové činitele, ze kterého vidíme, že kořeny polynomu ax^2+bx+c jsou $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, což je známý vzorec.

Příklad

$$2x^2+4x-30 = 2(x^2+2x) - 30$$

$$= 2\underbrace{(x+1)^2}_{(A+B)^2} - 30 \underbrace{- 2}_{-2\cdot B^2}$$

$$= 2(x+1)^2 - 32 \quad \checkmark$$ čtverec doplněn

další rozklad: $$2\big[\underbrace{(x+1)^2}_{A^2} \underbrace{- 16}_{-B^2}\big] = 2\cdot\underbrace{(x+1+4)}_{A+B}\cdot\underbrace{(x+1-4)}_{A-B}$$

$$= 2\cdot(x-(-5))(x-3)$$

kořenové činitele; kořeny -5 a 3.