1. Množiny

Definice: Množina je soubor matematických nebo jiných navzájem různých objektů.

- prázdná množina: neobsahuje žádný prvek
- neprázdná mn.: obsahuje alespoň 1.

Poznámka: značení

množina	$A, B,$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
prvky	a, b, x, y	
~~a~~ x ~~n~~náleží ~~mn.~~ A	$x \in A$	
x nenáleží A	$x \notin A$	
prázdná množina	$\emptyset, \{\}$	

Poznámka: nejčastěji je množina zadána

a) výčtem všech prvků

$$A = \{x_1, \dots x_n\} \qquad B = \{1, 2, 3\}$$

b) stanovením charakteristických vlastností prvků

$$A = \{x \in Z;\ V(x)\}$$

Z … základní množina, "universum"

$V(x)$ … výrok o $x \in A$

Čteme: „A je množina všech prvků Z, které mají vlastnost Z."

Příklad: a) $A = \{5, 2, 1\}$
$B = \{a, b, c\}$
b) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x < 3\}$
$D = \{n \in \mathbb{N};\ 5 \mid n \wedge 11 \mid n\}$

Definice: Operace na množinách a vztahy mezi množinami

- $A \subset B$ „A je podmnožinou B", inkluse
$\iff x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B$ „A je ~~totožná~~ a B"
$\iff A \subset B \wedge B \subset A$
tedy pokud mají stejné prvky
- $A \cap B$ „průnik množin A a B"
$A \cap B = \{x \in Z;\ x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B$ „sjednocení množin A a B"
$A \cup B = \{x \in Z;\ x \in A \vee x \in B\}$
- $\bar{A}$ „doplněk A vzhledem k základní množině Z"
$\bar{A} = \{x \in Z;\ x \notin A\} = Z \setminus A$
někdy se značí A'

Poznámka: Definice průniku a sjednocení lze zobecnit pro více množin: A_i, $i = 1, \dots n$ množiny
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in Z;\ x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in Z;\ x \in A_1 \vee \dots \}$

1-2
vsuvka

Zapomenutá operace:

- $A \setminus B$ rozdíl množin A a B

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

můžete se setkat i se značením $A - B$

Poznámka: a) $\emptyset$ je podmnožinou každé množiny

b) každá množina je svou podmnožinou

c) Pokud $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že A a B jsou <u>disjunktní</u>

Definice: Počtu prvků množiny říkáme mohutnost.

"A má $n \in \mathbb{N}$ prvků." $|A| = n$

Definice: Potenční množina množiny A (značeno $P(A)$, nebo 2^A) je množina všech podmnožin A.

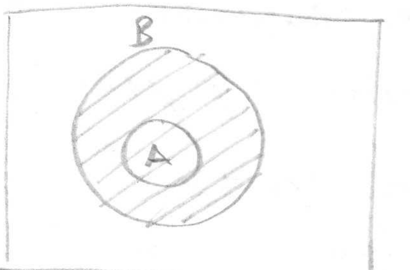
Věta 1.1: Nechť A je množina mohutnosti n. Potom $|P(A)| = 2^n$

Příklad: $A = \{1, 2, 3\}$

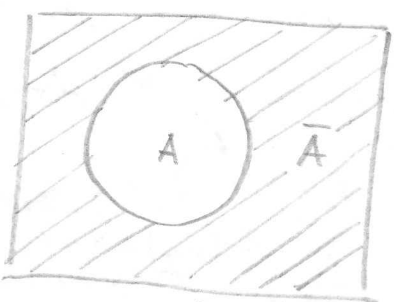
$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$|A| = 3 \qquad |P(A)| = 8 = 2^3$$

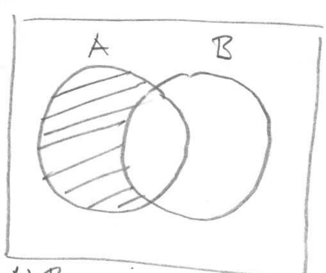
Poznámka: Vztahy mezi množinami se dobře znázorňují pomocí tzv. Vennových diagramů



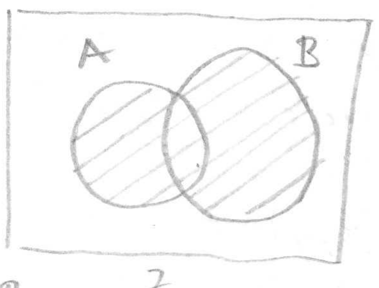
$A \subset B$ Z



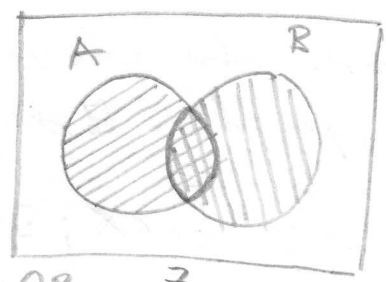
Z



$A \setminus B$ Z



$A \cup B$ Z



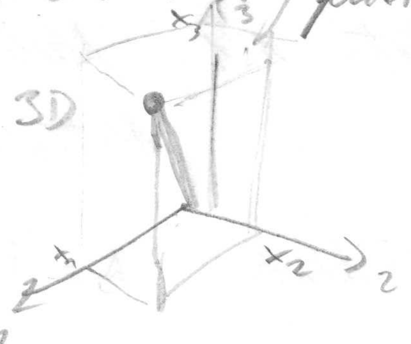
$A \cap B$ Z

Definice: Sdružení n objektů se stanoveným pořadím nazýváme uspořádaná n-tice; jednotlivé objekty se nazývají prvky nebo složky n-tice. Obvykle se značí $[x_1, \dots x_n]$, nebo $(x_1, \dots x_n)$

Definice: Kartézský součin množin A_i, $i=\overline{1,n}$ nazýváme množinu

$$A_1 \times A_2 \times \dots A_n = \{[x_1, x_2, \dots x_n];\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots x_n \in A_n\}$$

Příklad:
- $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n} \equiv \mathbb{R}^n$ – n-rozměrný Euklidovský prostor
- (x_1, x_2, x_3) souřadnice ve 3D



V dalším se omezíme na kartézský součin dvou množin A, B

$$A \times B = \{[x_1, x_2];\ x_1 \in A \wedge x_2 \in B\}$$

Definice: Podmnožinu kartézského součinu množin X, Y nazveme zobrazení F z množiny X do množiny Y, pokud platí

$$(x, y_1), (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2 .$$

tj. $F = \{(x,y) \in X \times Y;\ (x, y_1) \text{ a } (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2\}$

Značíme $F: X \longrightarrow Y$, $F(x) = y$

Definice: Definiční obor zobrazení $F: X \to Y$ je množina $x \in X$, pro která existuje $y \in Y$: $F(x) = y$.

$$D_f = \{x \in X;\ \exists y \in Y: \underset{F(x)=y}{(x,y) \in F}\}$$

Definice: Obor hodnot zobrazení $F: X \to Y$ je množina $y \in Y$, ke kterým existuje $x \in X$: $F(x) = y$

$H_F = \{y \in Y; \exists x \in X: (x, y) \in F\}$

Poznámka: - $x \in X$ se nazývá vzor a $y \in Y$ se nazývá obraz.

- zobrazení $F: X \to Y$ nemusí být definováno na celé množině X. Potom $D_F \subset X$ (ostře, ne $\subseteq$)

Definice: Vlastnosti zobrazení

Řekneme, že zobrazení $F: X \to Y$ je

- injekce (injektivní, prosté, do), jestliže různým vzorům přiřadí různé obrazy

tj. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$

- surjekce (surjektivní, na), jestliže ke každému obrazu existuje vzor.

tj. $\forall y \in Y \; \exists x \in X$: $F(x) = y$

- bijekce (bijektivní; 1-1), jestliže je zároveň injekcí a surjekcí.

Příklad: . Přiřazení barev nebo čísel závodníkům

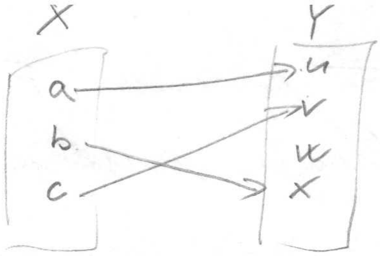
Definiční obor - množina závodníků

Obor hodnot - množina barev

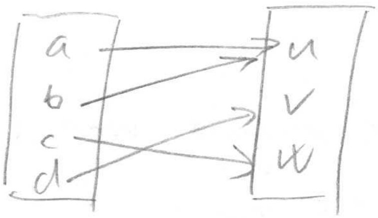
Pokud každému přiřadím max 1 barvu — zobrazení

Pokud žádnou barvu nepřidělím 2 závodníkům - injekce

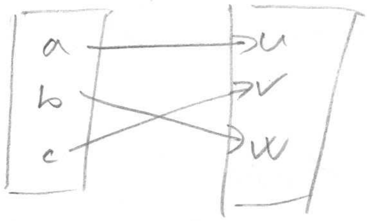
- injekce



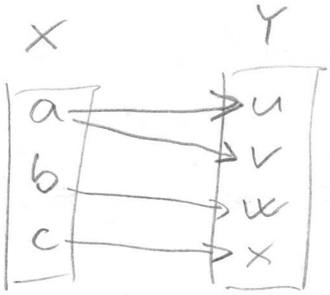
- surjekce

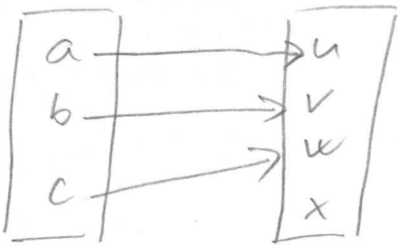


- bijekce



•





relace vs. zobrazení

Definice: Zobrazení $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazýváme reálná funkce, zobrazení $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce reálné proměnné.
Obdobně pro obor komplexních čísel $\mathbb{C}$ a různé kombinace $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.