Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost

Zlatý řez

Řekneme, že dvě čísla a a b jsou v poměru zlatého řezu, pokud jejich poměr je stejný, jako poměr většího z nich k jejich součtu. Za předpokladu $a > b > 0$ tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Pokud označíme poměr zlatého řezu $a/b = \phi$, dostaneme kvadratickou rovnici, kterou snadno vyřešíme

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 = 0, \\ \phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887, \\ \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6180339887. \end{aligned}$$

Všimněte si, že

$$\frac{1}{\phi_1} = -\phi_2$$

Fibonacciho posloupnout

Fibonacciho posloupnost je taková posloupnost čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, v níž je každé číslo dáno součtem dvou předchozích:

$$\begin{aligned} &f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ &f_0 = 1,\ f_1 = 1 \end{aligned}$$

Lze ukázat, že podíl dvou následujích čísel Fibonacciho posloupnosti konverguje právě ke poměru zlatého řezu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

Úkol

Zkuste aproximovat poměr zlatého řezu pomocí Fibonacciho posloupnosti s předem zvolenou přesností. Můžete buď využít znalosti přesného řešení, nebo odhadnout aktuální přesnost z velikosti změn v aproximaci.