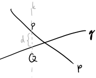
Vzdálenost mimoběžek

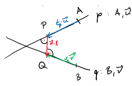
mimoběžky – přímky v $\mathbb{R}^3$, jejichž směrové vektory nejsou kolineární, ale přesto nemají žádný společný bod.



hledáme kolmici k k p i q: $k \perp p \wedge k \perp q$

Vzdálenost p a q: $|PQ|$

kde $P \in k \cap p$, $Q \in k \cap q$



$p: A, \vec{u}$

$q: B, \vec{v}$

z obrázku: $\vec{n} \perp \vec{u} \wedge \vec{n} \perp \vec{v}$

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= A + t_p \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{n} \\ Q &= B + s_q \cdot \vec{v} \end{aligned}} \; *$$

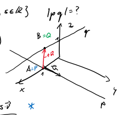
→ sada 3 rovnic o 3 neznámých

→ vzdálenost přímek p a q:
$|pq| = |l\vec{n}|$

Příklad: $p = \{[1, t, 0], t \in \mathbb{R}\}$ $q = \{[1+s, 0, 1], s \in \mathbb{R}\}$ $|pq| = ?$

$A = [1, 0, 0]$ $B = [1, 0, 1]$

$\vec{u} = (0, 1, 0)$ $\vec{v} = (1, 0, 0)$



$\vec{u} = (0, 1, 0)$

$\vec{v} = (1, 0, 0)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, -1)$ $|\vec{n}| = 1$

$$A + t\cdot\vec{u} + l\cdot\vec{n} = B + s\cdot\vec{v} \quad *$$

Q x: $1 + 0t + 0\cdot l = 1 + s \;\longrightarrow\; s = 0$

y: $0 + t + 0\cdot l = 0 \;\longrightarrow\; t = 0$

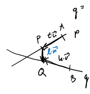
z: $0 + 0\cdot t - l = 1 \;\longrightarrow\; l = 1$

$$|pq| = |l \cdot \vec{n}| = \underline{1}$$

Příklad: $p = \{[2+2t, 1-t, 2+t], t \in \mathbb{R}\}$ $A = [2, 1, 2]$ $\vec{u} = (2, -1, 1)$

$q = \{[1-k, 3+k, 6], k \in \mathbb{R}\}$ $B = [1, 3, 6]$ $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 1)$



$A + t\vec{u} + l\vec{n} = B + k\cdot\vec{v}$

$2 + 2t - l = 1 - k$

$1 - t - l = 3 + k$

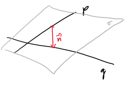
$2 + t + l = 6$

① - ③ $1 + 3t + 0 = -2 - 2k \longrightarrow t = 3$

② + ③ $3 + 0 + 0 = 9 + k \longrightarrow k = -6$

$2 + 3 + l = 6 \longrightarrow l = 1$

$$|pq| = |l \cdot \vec{n}| = |l| \cdot |\vec{n}| = 1 \cdot \sqrt{1+1+1} = \underline{\sqrt{3}} \;✓$$



Rovina σ se směrovým vektorem $\vec{n}$:

$p \subset \sigma \wedge \sigma \parallel q$ (protože $\vec{n} \perp q$)

→ umíme vzdálenost q od σ.

→ což je $|pq|$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \longrightarrow \vec{n}_\sigma = \vec{n} : p \subset \sigma \longrightarrow \sigma \parallel q \longrightarrow |pq| = |\sigma q|$

- $\vec{n} = (-1, -1, 1)$
- $\sigma: -x - y + z + d = 0$. $p \subset \sigma \Rightarrow A \in \sigma$: $-2 - 1 + 2 + d = 0$ ($A = [2,1,2]$)

$d = 1$

$\Rightarrow \sigma: -x - y + z + 1 = 0$ $(\sigma \parallel q, p \subset \sigma)$

- $|pq| = |\sigma q| = \dfrac{|\vec{n}_\sigma \cdot \vec{B} + d_\sigma|}{|\vec{n}_\sigma|} = \dfrac{|-1-3+6+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}}$ $B = [1, 3, 6]$

Koule (Sféra)

koule vs sféra ~ kruh vs kružnice

koule → 3D útvar – těleso

sféra → křivá plocha, tj. 2D útvar

sféra: „množina bodů v prostoru, které mají od středu stejnou vzdálenost."

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 : |XS| = r\}$$

↑ velké σ

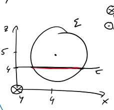
r … poloměr

S … střed $S = [m, n, o]$

rovnice: $\Sigma: (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2 = r^2$

Vzájemná poloha sféry a roviny:

$\otimes_y$ – míří od nás; $\odot_y$ – míří k nám



$\Sigma: (x-4)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9$

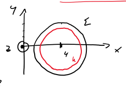
$\tau: z - 4 = 0$

↳ $z = 4$

$\tau \cap \Sigma$: $(x-4)^2 + y^2 + (4-5)^2 = 9$

$(x-4)^2 + y^2 = 8$

kružnice k o poloměru $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, leží v rovině τ, $S = [4, 0, 4]$



Dobrovolný úkol:

$\Sigma: (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$

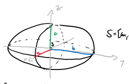
$\rho: y = 5$ $\Sigma \cap \rho = ?$

Elipsoid: charakteristická vlastnost obtížná

ale rovnice je analogická rovnici elipsy

$\Xi: \dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} + \dfrac{(z-o)^2}{c^2} = 1$

↑ velké ξ



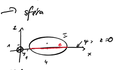
$S = [m, n, o]$

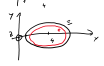
- pokud $a = b = c$
  → $(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2 = a^2$ → sféra

Příklad řezu:

$\Xi: \dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{(z-1)^2}{4} = 1$

$\psi: z = 0$





$\Xi \cap \psi$: $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{(0-1)^2}{4} = 1$

$\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{3}{4}$ $\quad / : \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{(x-4)^2}{9 \cdot \frac{3}{4}} - \dfrac{y^2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = 1$

$\dfrac{(x-4)^2}{\frac{27}{4}} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ → elipsa e v rovině $\psi = xy$

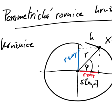
$S = [4, 0, 0]$ $a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$b = \sqrt{3}$

$a^2 = e^2 + b^2 \longrightarrow e = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{12}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Parametrická rovnice kružnice a elipsy

kružnice



$X: \left.\begin{aligned} x &= m + r\cdot\cos\varphi \\ y &= n + r\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ Param. rce kružnice

$k = \{[m + r\cdot\cos\varphi, n + r\cdot\sin\varphi], \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$

Jak získám obecnou? Vyloučením parametru:

$x = m + r\cdot\cos\varphi$

$y = n + r\cdot\sin\varphi$

$\left.\begin{aligned} x - m &= r\cdot\cos\varphi \quad /^2 \\ y - n &= r\cdot\sin\varphi \quad /^2 \end{aligned}\right\} \oplus$ $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

Příklad: Zapište kružnici k parametrickou rovnicí!

$k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 7$ $k = \{[3 + \sqrt{7}\cos\varphi, 2 + \sqrt{7}\cdot\sin\varphi], \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$

Podobně pro elipsu:

$x = m + a\cdot\cos\varphi$

$y = n + b\cdot\sin\varphi$

$e = \{[m + a\cdot\cos\varphi, n + b\cdot\sin\varphi], \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$

$x - m = a\cdot\cos\varphi$ $\quad /:a$

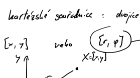
$y - n = b\cdot\sin\varphi$ $\quad /:b$

$\left.\begin{aligned} \frac{x-m}{a} &= \cos\varphi \quad ^2 \\ \frac{y-n}{b} &= \sin\varphi \quad ^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Polární a sférické souřadnice

dosud: kartézské souřadnice: dvojice (n-tice) kolmých os

Rovina: $[x, y]$ nebo $[r, \varphi]$ — polární souřadnice



$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right), & y \neq 0 \end{cases}$

Příklad:

Je dán bod $P \in \mathbb{R}^2$: $P = [r = 3, \varphi = \frac{\pi}{6}]$

Jaké jsou jeho kartézské souřadnice? $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$

$P = [3\cdot\cos\frac{\pi}{6}, 3\cdot\sin\frac{\pi}{6}] = [\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}]$

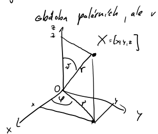
obráceně → $r = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{9} = 3$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\cdot\sin\varphi}{r\cdot\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

Sférické souřadnice

obdoba polárních, ale v $\mathbb{R}^3$



$z = r\cdot\cos\vartheta$

$x = r'\cdot\cos\varphi$

$y = r'\cdot\sin\varphi$

$r' = r\cdot\sin\vartheta$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cdot\cos\vartheta \end{aligned}}$$