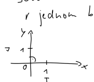
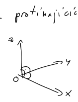
Analytická geometrie

Definice: Kartézská soustava souřadnic
· soustava kolmých přímek protínajících se v jednom bodě.

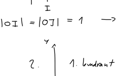


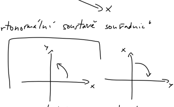
Oxy



Oxyz

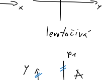
$|OI| = |OJ| = 1$ → „ortonormální soustavě souřadnic"





Bod a souřadnice

$p_1 \parallel y$
$p_2 \parallel x$

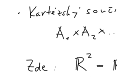


souřadnice $A = [a_1, a_2]$
$= [a_x, a_y]$

Funguje obecně:
v nD: $A = [a_1, a_2, \dots a_n]$

· Kartézský součin množin $\{A_i\}_{i=1}^{n}$
$A_1 \times A_2 \times \dots A_n = \{[a_1, a_2, \dots a_n] : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$

Zde: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Eukleidovská rovina
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -ý prostor

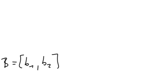


$A \in \mathbb{R}^2$

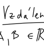
Vzdálenost bodů

$A, B \in \mathbb{R}^2$ $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$

Vzdálenost bodů A a B
$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$$



Pythagorova věta:



$c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\longrightarrow |AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

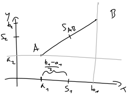
v n-dimenzích:
$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i)^2}$$

· Vzdálenost bodů AB je stejná jako délka úsečky AB

Střed úsečky

$A, B \in \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^n)$

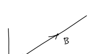
$S_1 = a_1 + \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$
$S_2 =$ — " —



Střed S_{AB} má souřadnice
$$S_{AB} = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right] \quad \left(\dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\Big)$$

Orientovaná úsečka

· = úsečka + orientace



$\overrightarrow{AB}$ … A počáteční bod
B koncový bod

Velikost $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$

Souřadnice: $\overrightarrow{AB} = [b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n]$

Vektorový prostor

Nechť: V je neprázdná množina, jejíž prvky umíme sčítat a násobit reálným číslem.

navíc: V je vůči těmto operacím uzavřená.

uzavřenost vůči +:
$x + y \in V$, $\forall x, y \in V$

uzavřenost vůči násobení číslem:
$\alpha \cdot x \in V$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Množina V se nazývá reálný vektorový prostor a její prvky vektory, pokud platí: $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

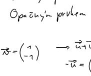
- komutativita a asociativita sčítání
  $x + y = y + x$ (kom.)
  $x + (y+z) = (x+y) + z$ (asoc.)
- asociativita násobení číslem
  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
- distributivita násobení číslem vůči sčítání vektorů
  $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- distributivita násobení čísle vůči sčítání čísel
  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Důležité vlastnosti:
- existence nulového prvku
  $\exists\, 0 \in V$: pro každý $x \in V$
  $x + 0 = 0 + x = x$
- existence opačného prvku:
  pro každý $x \in V$ existuje $y \in V$:
  $x + y = y + x = 0$ $(y = -x)$

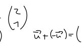
Příklady RVP:
- $\mathbb{R}$ nulový prvek: $0 \in \mathbb{R}$
  opačný prvek k x: $-x$
  $2 + 0 = 2$
  $2 + (-2) = 0$

Tvrzení: Množina všech orientovaných úseček se sčítáním a násobením číslem po složkách tvoří RVP. Nulovým prvkem $\vec{0} = [0, 0, \dots 0]$
Opačným prvkem k $\vec{x}$: $-\vec{x} = [-x_1, -x_2, \dots -x_n]$

Poznámky
- $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\longrightarrow \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
  $-\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$
- ~~"vektor je šipka"~~ ✗
  "šipka je vektor" ✓
- $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

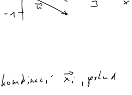


$2 \cdot \vec{u}$



- $A = [1, 2]$
  $B = [3, 1]$
  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1)$

  vázané vs. volné vektory



Definice: Lineární kombinace
V … RVP, $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{n}$, $\vec{v} \in V$

Řekneme, že $\vec{v}$ je lineární kombinací $\vec{x}_i$, pokud
$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n \qquad a_i \in \mathbb{R},\ a_i \neq 0$$

Př. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{v} = 2 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2$ $\vec{v}$ je LK $\vec{x}_i$

Definice: Lineární ne/závislost
$\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{n} \in V$, V .. RVP

Pokud je některý z vektorů $\{\vec{x}_i\}$ LK ostatních, potom říkáme, že $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{n}$ je lineárně závislá.
Pokud ne: lineárně nezávislá.

Příklad: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ neexistuje $\alpha \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
lineárně nezávislé

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$: $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
→ lineárně závislé.

Definice: Skalárním součinem (dot product) nazýváme operaci
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$
$\vec{x}, \vec{y} \in V$, V RVP.