Analytická geometrie

· Pojem: "... zabývá se vyjadřováním geometrických útvarů a vztahů mezi nimi pomocí metody souřadnic a vektorové algebry"

– tedy geometrie, ale početní

Cíle nás: popis základních objektů (většinou lineárních)
- body
- přímky (polopřímky, úsečky)
- roviny
- kružnice (elipsa)

· vyšetření vztahů:
- vzdálenosti
- vzájemná poloha
- odchylky

atd.

Připomínka: Na začátku semestru jsme zavedli pojem kartézského součinu a uspořádaných dvojic.

Definice: Kartézská soustava souřadnic je soustava navzájem kolmých přímek, které se protínají v jednom bodě ("počátku"). Na všech osách obvykle volíme stejnou jednotku.

Poznámky: • Pojmenováno po René Descartovi
latinsky Cartesius → kartézská soustava

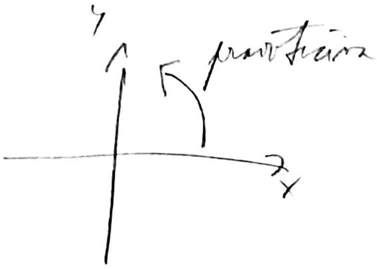
• Kartézská soustava v rovině
→ 2 kolmé osy v této rovině
Kartézská soustava souřadnic v prostoru
→ 3 navzájem kolmé osy

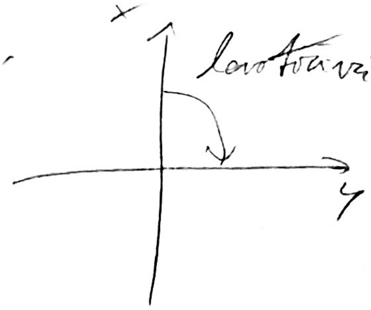
• Společný je bod = "počátek" O
osy obvykle značíme postupně x, y, (z)
soustava pak Oxy resp. Oxyz

• Na každé ose volíme jednotkový bod I (J, K...)
Pokud |OI| = |OJ| (= |OK|), hovoříme o ortonormální soustavě souřadnic

•

2. kvadrant	1. kvadrant
3. kvadrant	4 kvadrant





Bod a souřadnice

Nechť A je bod v rovině (prostoru), ve kterém je zavedena Oxy (Oxyz)

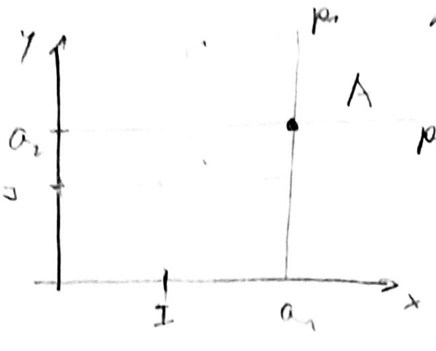
Bodem A vedeme rovnoběžky s osami: $p_1 \parallel y$, $p_2 \parallel x$

p_1 protne osu x v bodě odpovídajícím čísla $a_1 \in R$

p_2 protne osu y v bodě —— " —— $a_2 \in R$

(v prostoru obdobná konstrukce pomocí rovnoběžných rovin)

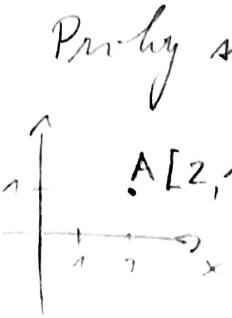
čísla $a_1, a_2 (,)$ nazýváme souřadnice bodu A vzhledem k Oxy



Poznámky:

- v n-rozměrném prostoru udáváme polohu bodu zadáním n čísel - souřadnic vzhledem k Oxy
- pak se Oxy můžeme koukat jako na kartézský součin $\underbrace{R \times R \dots \times R}_{n} = R^n$

Prvky skalárního součinu jsou uspořádané n-tice



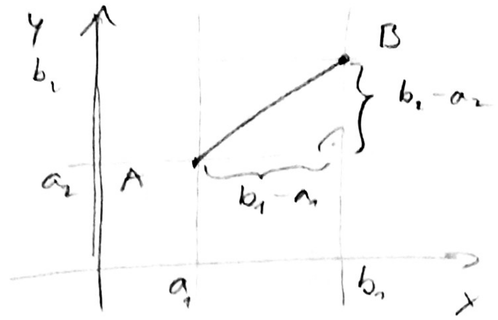
$A = [2,1]$

Vzdálenost bodů (délka úsečky)

Úsečka: nejkratší spojnice mezi dvěma body.

$A = [a_1, a_2]$

$B = [b_1, b_2]$



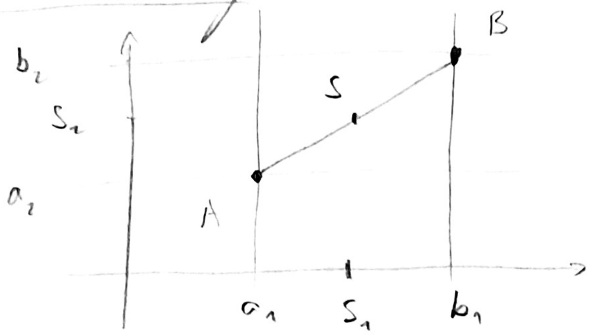
Vzdálenost z Pythagorovy věty

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$$

Stejně ve více dimenzích

$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i)^2}$$

Střed úsečky



$$S_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

S_2 obdobně

S

$$S = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

Orientovaná úsečka

úsečka + orientace. Značíme $\overrightarrow{AB}$

A počáteční bod

B koncový bod

body (A, B) tvoří uspořádanou dvojici

Velikost orientované úsečky $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$

Reprezentujeme n-ticí souřadnic $\overrightarrow{AB} = [b_1-a_1, b_2-a_2, \ldots b_n-a_n]$

Kreslíme jako šipku

Definice. Vektorový prostor

Nechť V je neprázdná množina, mezi jejímiž prvky je definováno sčítání (*) a násobení skalárním číslem. Pokud platí:

- $\exists 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$

  existence nulového prvku (vektoru)

- $\forall x \in V \; \exists y \in V : x + y = y + x = 0$

  existence opačného prvku (vektoru)

- sčítání je asociativní a komutativní

  tj. $\forall x, y, z \in V \quad x + y = y + x$

  $x + (y + z) = (x + y) + z$

- asociativita pro násobení vektoru číslem

  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \quad (\alpha \cdot (\beta \cdot x)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

- distributivita násobení vzhledem ke sčítání vektorů

  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

- distributivita násobení vzhledem ke sčítání čísel

  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

- invariance vektoru při násobení jednotkovým číselným prvkem (tj. 1)

  $\forall x \in V : \; 1 \cdot x = x$

Potom V nazýváme reálným vektorovým prostorem a jeho prvky vektory.

(*) Předpokládáme uzavřenost V vůči sčítání vektorů a násobení číslem uzavřená, tj.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a $\forall x, y \in V$:

$\alpha \cdot x \in V$

$x + y \in V$

Tvrzení: Množina všech orientovaných úseček se sčítáním a po složkách tvoří reálný a násobením vektorový prostor.

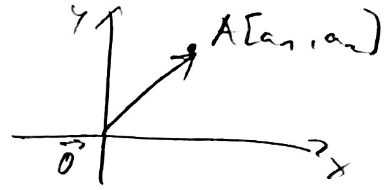
Nulový prvek je $\vec{o} = [0, 0, \dots 0]$

Opačný prvek k $\vec{x}$ je $-\vec{x} = [-x_1, x_2, \dots x_n]$

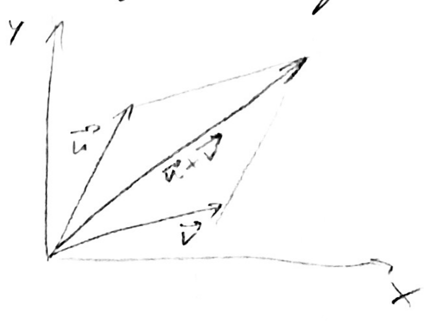
Poznámky:

- Tvrzení "vektor je šipka" je nesprávné, Ale "šipka je vektor" už je správné.
- Orientované úsečky tak umíme sčítat a násobit číslem a dostáváme nové orientované úsečky.
- Bod můžeme chápat jako orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku

zápis $A = [a_1, a_2]$ $\vec{OA}$:



- odteď budeme mluvit o vektorech a budeme mít na mysli orientované úsečky
- Graficky vektory sčítáme doplněním na rovnoběžník



- V této kapitole $V = \mathbb{R}^n$

zejména $n = 2, 3$

Definice lineární kombinace

V vektorový prostor, $\vec{x}, \vec{x}_i \in V$

Pokud existují $a_i \in \mathbb{R}$ tak, že

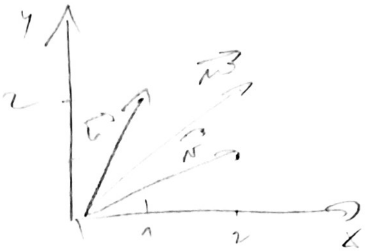
$$\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i$$

říkáme, že vektor $\vec{x}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{x}_i$

Definice: $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n \in V$ jsou vektory. Pokud je některý z vektorů $\{x_i\}$ lineární kombinací ostatních, říkáme, že jsou lineárně závislé.

V opačném případě říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Poznámka: v n-rozměrném vektorovém prostoru existuje pouze max. n lineárně nezávislých vektorů.



$$\vec{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}0 & -3 & -2\\ 1 & 0 & \frac{2}{3}\end{array}\right)$$

- v n-rozměrném prostoru:

  libovolná množina n lineárně nezávislých vektorů se nazývá <u>báze</u>.

  Každý vektor v tomto prostoru pak můžu vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Skalární součin a úhel mezi vektory

Definice: Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ nazýváme operaci

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1\cdot y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Poznámky:

- „skalární" je od slova skalár = číslo
  výsledkem je číslo $\Rightarrow$ skalární součin
- Velikost vektoru lze spočítat pomocí skalárního součinu

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$$

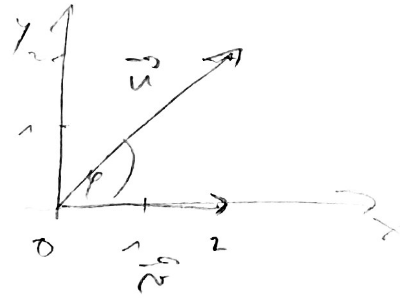
Tvrzení: Vztah mezi skalárním součinem a úhlem

$\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$$

φ ... je úhel, který vektory svírají.

Příklad:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4+0} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot 0}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\cos\frac{\pi}{4}}$$

Poznámky:

- kolmé vektory $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$
- říkáme, že vektory jsou ortogonální

Volný a vázaný vektor

- orientované úsečky jsme zavedli jako $\vec{AB} = B - A$

Pokud budeme trvat na umístění orientované úsečky (vektoru) v jejím počátečním bodě, hovoříme o *vázaném vektoru*.

Oproti tomu množinu všech rovnoběžných orientovaných úseček stejné velikosti potom označujeme jako *volný vektor*.

Většinou budeme mít na mysli volný vektor.

- Mezi bázemi preferujeme takové, ve kterých jsou všechny vektory navzájem kolmé – ortogonální.

→ "ortogonální báze"

Pokud navíc mají všechny velikost 1, hovoříme o "ortonormální bázi"

Příklad: OG báze v $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Lepší: $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$

ON báze v $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

tzv. kanonická báze (nejlepší)