

Mocniny komplexních čísel

Uvažujme posloupnost $x^{n+1} = x_n^2$. Vezmeme-li nějaké reálné číslo $-1 < x_0 < 1$, bude posloupnost konvergovat k nule, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Naopak pokud $|x_0| > 1$, posloupnost bude narůstat nad všechny meze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$$

Komplexní číslo z má reálnou a imaginární složku

$$z = a + bi,$$

kde i je tzv. imaginární jednotka definovaná vztahem $i^2 = -1$. Můžeme jej ovšem zapsat i v "polárních souřadnicích", tj. pomocí vzdálenosti od počátku $|z|$ a úhlu ϕ

$$z = a + bi = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Mocnina komplexního čísla se chová takto (tzv. Moivreova věta):

$$z^n = (a + bi)^n = |z|^n e^{i\phi \cdot n} = |z|^n [\cos(\phi \cdot n) + i \sin(\phi \cdot n)].$$

Pokud do posloupnosti x_n místo reálného čísla dosadíme komplexní, bude se to chovat podobně, tj. pro $|z_0| < 1$ bude posloupnost s každou další mocninou blíže nule a pro $|z_0| > 1$ se bude od nuly vzdalovat.

Složitější chování ovšem vykazuje posloupnost daná předpisem

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0$$

Některá čísla utečou do nekonečna, některá do nuly a některá se nebudou chtít rozhodnout.

Napište program, který:

- sestaví pole `grid` komplexních čísel v oblasti mezi -1.5 až 0.5 (reálná část) a -1 až 1 (imaginární část) (tj. obdélník od -1.5-i do 0.5+i). Velikost pole, tedy i počet čísel v dané oblasti, nechte jako jeden z parametrů programu.
- napočítá prvních N iterací posloupnosti každé číslo v poli `grid`.
- nakreslí obrázek, ve kterém každý pixel bude odpovídat jednomu číslu z pole `grid`. Pixely odpovídající číslům, jejichž velikost po N iteracích překročila jistou mez d obarvěte jednou barvou, jinou barvou ta zbylá.

Bonus:

- Ukládejte průběžně, při které iteraci jednotlivá čísla v poli `grid` překročí mezní vzdálenost od počátku. V obrázku je pak obarvěte různě.

Doporučení

- použijte numpy
- v numpy lze komplexní pole vyrobit např. pomocí python `a = np.zeros(shape, dtype = np.complex128)`
- pro vykreslení použijte balík `matplotlib.pyplot`. Funkce `imshow` umí nakreslit pole jako jednotlivé pixely.
- velikost d počítejte jako velikost komplexního čísla, tj. funkce `np.abs`
- N stačí vzít zhruba 25