BMPI - poznámky k přednášce
v0.1

Václav Alt, Unicorn University

Podzim 2021

Obsah

Toto je přepis pracovních poznámek k přednáškám z předmětu Matematický proseminář (BMPI) na Unicorn University. Zatím tu toho moc není a v tom, co tady je, je patrně hodně chyb. Taky tady nejsou moc hezké obrázky. Postupně budu poznámky vylepšovat. Nebo alespoň doplňovat. Připomínky jsou vítány.

Kapitola 1

Analytická geometrie

1.1 Základní pojmy

Polák říká [1]:

> Analytická geometrie je založena na vyjadřování geometrických útvarů a vztahů mezi nimi pomocí metody souřadnic a vektorové algebry.

Jde tedy o geometrii, ale výhradně početně. V této kapitole nás čeká

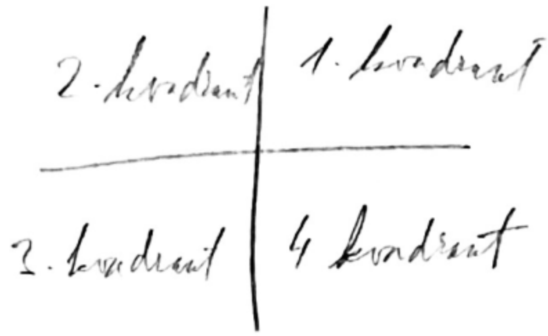
- popis základních objektů (většinou lineárních): bod, přímka, rovina, kružnice (a případne elipsa)
- vyšetřování vztahů mezi nimi: vzdálenost, vzájemná poloha, úchylky

Připomeňte si pojem kartézkého součinu a uspořádaných dvojic.

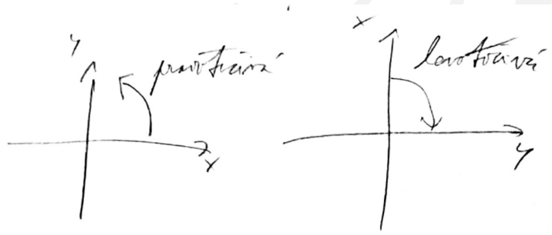
Definice 1. *Kartézská soustava souřadnic je soustava navzájem kolmých přímek, které se protínají v jednom bodě (počátku). Na všech osách obvykle volíme stejnou jednotku.*

Poznámky.

- Pojmenováno po René Descartovi (latinsky Cartesius →kartézská soustava)
- Kartézská soustava v rovině: 2 kolmé osy v této rovině.
- Kartézská soustava v prostoru: 3 navzájem kolmé osy
- Společný bod se nazývá počátek - obvykle značíme 0 nebo O
- Osy obvykle značíme postupně x, y, z
- Celou soustavu značíme Oxy, resp. $Oxyz$
- Na každé ose ovlíme jednotkový bod I (J, K,...). Pokud $|OI| = |OJ| = |OK|$, hovoříme o ortonormální soustavě.



Obrázek 1.1: Obyklé značení kvadrantů



Obrázek 1.2: Pravotočivá a levotočivá soustava

1.1.1 Bod a souřadnice

Definice 2. *Nechť A je bod v rovině (prostoru), ve kterém je zavedena kartézská soustava Oxy ($Oxyz$). Bodem A veďme rovnoběžky s osami: $p_1 \parallel y$, $p_2 \parallel x$. Přímka p_1 protne osu x v bodě odpovídajícím číslu $a_1 \in \mathbb{R}$, p_2 protne osu y v bodě odpovídajícím číslu $a_2 \in \mathbb{R}$ (v prostoru podobná konstrukce pomocí rovnoběyných rovin). Čísla a_1, a_2, … nazýváme souřadnice bodu A vzhledem k Oxy.*

Poznámky.

- v n-rozměrném prostoru udáváme polohu bodu zadáním n čísel - souřadnic.
- na Oxy… můžeme nahlížet jako na kartéský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$. Prvky skalárního součinu jsou uspořádané n-tice.

1.1.2 Vzdálenost bodů (délka úsečky)

Tvrzení 1. *Vzdálenost $|AB|$ bodů $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ je dána předpisem*

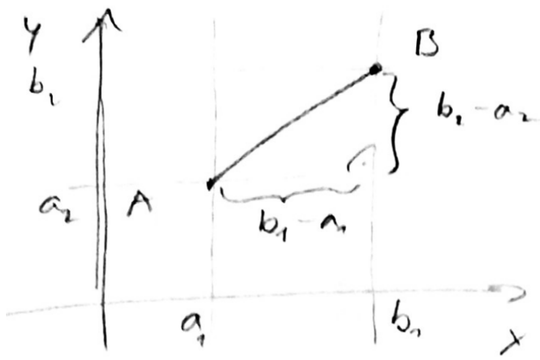
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Lze přímočaře zobecnit do n rozměrného prostoru:

$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$$

TODO: rozměrová analýza

Důkaz. Z obrázku 1.3 a Pythagorovy věty. □



Obrázek 1.3: Vzdálenost dvou bodů

1.1.3 Střed úsečky

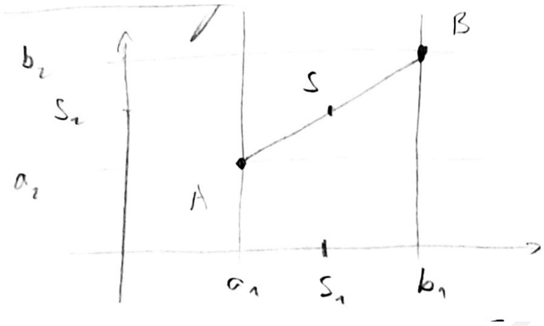
Tvrzení 2. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^n$. Střed úsečky AB má souřadnice*

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$$

Důkaz. Z obrázku 1.4 je vidět, že například souřadnice S_1 je dána výrazem

$$S_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Pro ostatní souřadnice stejně. □



Obrázek 1.4: Střed úsečky dvou bodů

1.1.4 Orientovaná úsečka, vektor

Definice 3. *Orientovaná úsečka je úsečka doplněná o orientaci. Značíme $\overrightarrow{AB}$, bodu A říkáme počáteční bod, bodu B koncový bod. Velikost orientované úsečky je stejná jako velikost odpovídající úsečky, tj. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$. Orientovanou úsečku $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ reprezentujeme n-ticí souřadnic:*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n]$$

Obvykle kreslíme jako šipku z bodu A do bodu B.

Definice 4 (Vektorový prostor). *Nechť V je neprázdná množina, jejíž prvky umíme sčítat a násobit reálným číslem. Předpokládejme navíc, že množina V je vůči těmto operacím uzavřená, tj.*

- *uzavřenost vůči sčítání*

$$x + y \in V,\ \forall x, y \in V$$

- *uzavřenost vůči násobení*

$$\alpha x \in V,\ \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Množina V se nazývá reálný vektorový prostor, pokud platí:

- *sčítání je asociativní a komutativní, tj.*

$$(\forall x, y, z \in V)[x + y = y + x;\ x + (y + z) = (x + y) + z]$$

- *existence nulového prvku: Existuje prvek $0 \in V$ takový, že pro každý prvek $x \in V$ platí $x + 0 = 0 + x = x$. Neboli*

$$(\exists 0 \in V)(\forall x \in V)[x + 0 = 0 + x = x]$$

- *existence opačného prvku: pro každý prvek $x \in V$ existuje $y \in V$ takový, že platí $x + y = y + x = 0$. Neboli*

$$(\forall x \in V)(\exists y \in V)[x + y = y + x = 0]$$

- *násobení vektoru číslem je asociativní (na pořádí závorek nezáleží)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x]$$

- *násobení číslem je distributivní ke sčítání prvků V (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})[\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y]$$

- *násobení číslem je distributivní ke sčítání čísel (můžeme roznásobit závorku)*

$$(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})[(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x]$$

Prvky vektorového prostoru se nazývají vektory.

Tvrzení 3. *Množina všech orientovaných úseček se sčítáním a násobením po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Nulovým prvkem je $\vec{0} = [0, 0, \dots, 0]$, opačným prvkem k $\vec{x}$ je $-\vec{x}$.*

Důkaz. Stačí ověřit všechny vlastnosti vektorového prostoru - většinu splněny díky obyčejné aritmetice.

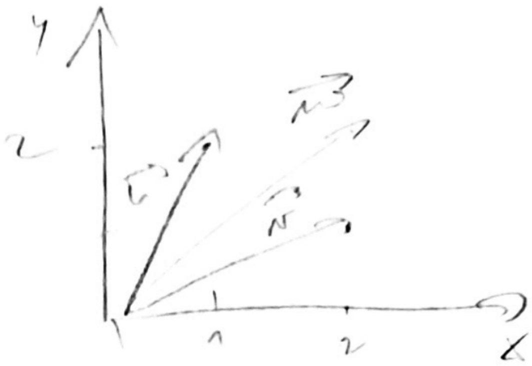
□

Poznámky.

- Tvrzení "vektor je šipka" je nesprávné, ale "šipka je vektor" už je správně.
- Orientované úsečky tedy umíme sčítat a násobit číslem a dostáváme tak nové orientované úsečky.
- Bod můžeme chápat jako orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku. Tedy $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \overrightarrow{OA}$
- Odteď budeme mluvit o vektorech a budeme mí na mysli orientované úsečky.
- Graficky můžeme orientované úsečky sčítat doplněním na rovnoběžník, viz 1.5.

Definice 5 (Lineární kombinace)**.** *Nechť V je reálný vektorový prostor a $\vec{v}, \overrightarrow{x_i} \in V,\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{x_i},\ i = 1, \dots k \in \mathbb{N}$, pokud existují reálná čísla a_i taková, že platí*

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \dots + a_k\overrightarrow{x_k} = \sum_{i=1}^{k} a_i\overrightarrow{x_i}$$



Obrázek 1.5: Střed úsečky dvou bodů

Definice 6 (Lineární ne/závislost)**.** *Nechť $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots \overrightarrow{x_k} \in V$ jsou vektory a V je reálný vektorový prostor. Pokud je některý z vektorů $\overrightarrow{x_i}$ lineární kombinací ostatních, říkáme že jsou lineárně závislé. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.*

Poznámky.
- v n-rozměrném vektorovém prostoru existuje nejvýše n lineárně nezávislých vektorů.
- v n-rozměrném vektorovém prostoru: libovolná množina n lineárně nezávislých vektorů se nazývá báze. Každý vektor v tomto prostoru pak mohu vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů.

1.1.5 Skalární součin a odchylka vektorů

Definice 7. *Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ nazýváme operaci*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Poznámky.
- "skalární" je od slova skalár neboli číslo. Výsledkem skalárního součinu je číslo.
- velikost vektoru lze spočítat pomocí skalárního součinu.

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Tvrzení 4. *Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je úměrný cosinu uhlu ϕ, jenž vektory svírají*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \phi$$

Poznámka. Pokud jsou vektory kolmé (říkáme orogonální), mají nulový skalární součin, neboť $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\phi$$

1.1.6 Dodatky

- Orientované úsečky jsme zavedli jako $\overrightarrow{AB} = B - A$. Pokud budeme trvat na umístění orientované úsečky (vektoru) v jejím počátečním bodě, hovoříme o *vázaném vektoru.*

  Oproti tomu množinu všech rovnoběžných orientovaných úseček stejné velikosti označujeme *volný vektor.* Většinu času budeme mít na mysli volný vektor.

- Mezi bázemi preferujeme takové, ve kterých jsou všechny vektory navzájem kolmé - *ortogonální.* Taková báze se kupodivu nazývá ortogonální. Pokud mají navíc všechny vektory ortogonální báze velikost 1, hovoříme o *ortonormální bázi.*

1.2 Analytická geometrie v rovině

1.3 Analytická geometrie v prostoru

1.4 Složitější úlohy

Literatura

[1] J Polák. *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, 2016.

Zatím trochu smutné, ale bude líp.