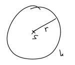
Kuželosečky

Kružnice

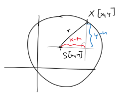


$k = \{ X \in \mathbb{R}^2 ; |XS| = r \}$

$r \in \mathbb{R}, r > 0$ ... poloměr kružnice
$S \in \mathbb{R}^2$ ... střed

$S = [m, n]$ $\quad X = [x, y]$

$k = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r \}$

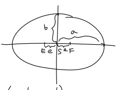


Rovnice kružnice
$k: \ (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

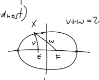
Příklad:
$k: \ x^2 - 2x + (y-2)^2 = 4$
$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 = 4$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \longrightarrow S = [1, 2], \ r = \sqrt{5}$

Elipsa:

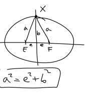
a ... hlavní poloosa (velká)
b ... vedlejší poloosa (malá)
E, F ... ohniska
$e = |ES| = |FS|$ ... excentricita (výstřednost)



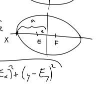
$e = \{ X \in \mathbb{R}^2 : |XE| + |XF| = 2a \}$



v = w
v + w = 2a
$\Rightarrow v = w = a$



v = a − e
w = a + e
v + w = 2a



$\longrightarrow \boxed{a^2 = e^2 + b^2}$

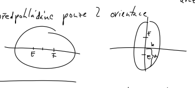
$|XE| = \sqrt{(x - E_x)^2 + (y - E_y)^2}$

Rovnice elipsy

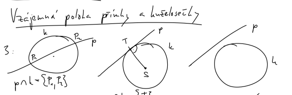
$$\boxed{e: \ \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

$S = [m, n]$

Poznámky
- $a = b \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (x-m)^2 + (y-n)^2 = a^2$
  kružnice o poloměru a
- předpokládáme pouze 2 orientace



Vzájemná poloha přímky a kuželosečky



$p \cap k = \{P_1, P_2\}$
p je sečna

$p \cap k = \{T\}$
T ... bod dotyku
p je tečna

$p \cap k = \emptyset$

Příklad: $k: (x-1)^2 + y^2 = 4$ $\quad S[1,0], r = 2$
$p: y = x + 2\sqrt{2} - 1$

Vzájemná poloha?
$(A+B)^2$
$(x-1)^2 + (x + 2\sqrt{2} - 1)^2 = 4$
$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x(2\sqrt{2} - 1) + (2\sqrt{2} - 1)^2 = 4$ $\qquad (2\sqrt{2})^2 = 8$
$2x^2 + 2x(2\sqrt{2} - 2) + 8 - 4\sqrt{2} + 1 \quad -3 = 0$
$2x^2 + 4x(\sqrt{2} - 1) + 6 - 4\sqrt{2} = 0 \qquad /:2$
$x^2 + 2x(\sqrt{2} - 1) + 3 - 2\sqrt{2} = 0$

$D = 4 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 - 4(3 - 2\sqrt{2})$
$= 4 \cdot (2 - 2\sqrt{2} + 1) - 12 + 8\sqrt{2} = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2(\sqrt{2} - 1)}{2} = 1 - \sqrt{2}$ $\qquad p: y = x + 2\sqrt{2} - 1$
$\longrightarrow y = 1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

$q: y = x + 2$
$t: y = x + 1$

$T = [1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$

AG v prostoru $= \mathbb{R}^3$

Přímka v $\mathbb{R}^3$

$p: \ A = [1, 2, -1] \quad B = [0, -3, 1]$
$\cdot \ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -5, -1)$

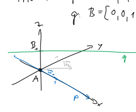
$p: \ X = A + t\vec{u}$

$p: \ x = 1 + 2t$
$\quad y = 2 - 5t$
$\quad z = -1 - t$

Vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$

- totožné
- rovnoběžné − žádný společný bod a $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$
- různoběžné − 1 společný bod
- mimoběžné − žádný společný bod a $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$

Příklad: $p: \ A = [0,0,0], \ \vec{u}_1 = (1, 0, 0)$
$q: \ B = [0, 0, 1], \ \vec{u}_2 = (1, 1, 0)$



$p: \ x = t \quad y = 0 \quad z = 0$
$q: \ x = s \quad y = s \quad z = 1$

Vzájemná poloha:
$t = s \qquad t = s = 0$
$0 = s$
$0 = 1 \longrightarrow NŘ$

$\Rightarrow$ žádný společný bod
$\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2 \Rightarrow p$ a q jsou mimoběžky

Rovina a její rovnice

- nejjednodušší, lineární, 2D geom. útvar
- obvykle značíme malým řeckým písmenem: $\sigma, \tau, \pi, \alpha, \beta$
- jednoznačně určena 3 body, které neleží v přímce

Parametrická rovnice

$\sigma: A, B, C$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\sigma: \ X = A + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

$r, s \in R$ ... parametry
$\vec{u}, \vec{v}$ směrové vektory
lineárně nezávislé

$\sigma: \ x = A_x + r u_x + s v_x$
$\quad y = A_y + r u_y + s v_y$
$\quad z = A_z + r u_z + s \cdot v_z$

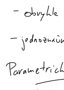
Příklad:
$\sigma: \ A = [1,3,2], \ B = [-1, 0, 1], \ C = [-3, 2, -1]$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, -3, -1)$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-4, -1, -3)$

$\sigma: \ X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

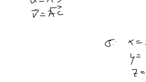
Obecná rovnice roviny

$\sigma: \ a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

$\vec{n} = (a, b, c)$
normálový vektor
d ~ vzdálenost roviny od počátku (pokud $|\vec{n}| = 1$)



$\rightarrow$ pro přímku nelze



$A, B, C \in \sigma$

$\forall \vec{w} \in \sigma: \ \vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 = \vec{n} \cdot \vec{v} \longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{w}$

Důkaz: $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (r \cdot \vec{u} + s\vec{v}) = r \cdot \vec{n}\vec{u} + s \cdot \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Příklad: $\sigma: \ x = 1 - 2r - 4s$
Vyloučení parametrů
$\quad y = 3 - 3r - s$
$\quad z = 2 - r - 3s$
$(-2) \cdot \quad (-3) \cdot$

$x - 2z = -3 + 0 \cdot r + 2s \quad (-4)$
$y - 3z = -3 + 0 \cdot r + 8s$
$\oplus$

$-4x + 8z + y - 3z = 9 + 0 \cdot s$

$\sigma: \ -4x + y + 5z - 9 = 0$ $\qquad \vec{n} = (-4, 1, 5)$

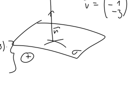
Jiná cesta: zkusíme najít $\vec{n}_\sigma = (a, b, c)$
$\vec{n}_\sigma \cdot \vec{u} = 0$
$\vec{n}_\sigma \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$-2a - 3b - c = 0$
$-4a - b - 3c = 0$

3 neznámé
2 rovnice
$\rightarrow$ 1 neznámou můžeme zvolit
např. $a = 1$

$-3b - c = 2 \quad /(-3) \cdot$
$-b - 3c = 4$
$\oplus$



$8b + 0c = -2$
$b = -\frac{1}{4}$

$c = -3b - 2$
$= +\frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$ $\qquad \longrightarrow \vec{n} = (1, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$
$-4\vec{n} = (-4, 1, 5)$

$\longrightarrow \sigma: \ -4x + y + 5z + d = 0$
$A \in \sigma \longrightarrow d = -9$

Úsekový tvar:
$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1$ $\qquad r, s, t$ ... souřadnice průsečíků s osami

Př. $\sigma: \ -\frac{4x}{9} + \frac{y}{9} + \frac{5z}{9} = 1 \quad \rightarrow r = -\frac{9}{4} \quad s = 9 \quad t = \frac{9}{5}$