Vnořování stromů

Václav Rozhoň

22. 6. 2018

Supervizorka: Tereza Klimošová
Konzultantka: Diana Piguet

Extremální teorie grafů

- Extremální teorie grafů: kolik hran v grafu vynutí určitou strukturu?

Extremální teorie grafů

- Extremální teorie grafů: kolik hran v grafu vynutí určitou strukturu?
- Mantelova věta: obsahuje-li graf na n vrcholech více než $n^2/4$ hran, nalezneme v něm trojúhelník.

Extremální teorie grafů

- Extremální teorie grafů: kolik hran v grafu vynutí určitou strukturu?
- Mantelova věta: obsahuje-li graf na n vrcholech více než $n^2/4$ hran, nalezneme v něm trojúhelník.
- Ukazuje se, že problematické je vnořování bipartitních grafů.

Extremální teorie grafů

- Extremální teorie grafů: kolik hran v grafu vynutí určitou strukturu?
- Mantelova věta: obsahuje-li graf na n vrcholech více než $n^2/4$ hran, nalezneme v něm trojúhelník.
- Ukazuje se, že problematické je vnořování bipartitních grafů.
- Vnořování stromů je důležitým speciálním případem.

Extremální teorie grafů

- Extremální teorie grafů: kolik hran v grafu vynutí určitou strukturu?
- Mantelova věta: obsahuje-li graf na n vrcholech více než $n^2/4$ hran, nalezneme v něm trojúhelník.
- Ukazuje se, že problematické je vnořování bipartitních grafů.
- Vnořování stromů je důležitým speciálním případem.

Hypotéza (Erdős, Sósová, 1963)

Každý graf s průměrným stupněm větším než $k-1$ obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Hypotéza Erdős-Sósové

Částečné výsledky:

- pro speciální stromy (cesty – Erdős, Gallai, 1959)

Hypotéza Erdős-Sósové

Částečné výsledky:

- pro speciální stromy (cesty – Erdős, Gallai, 1959)
- pro grafy neobsahující daný podgraf (C_4 – Saclé, Wozniak 1997)

Hypotéza Erdős-Sósové

Částečné výsledky:

- pro speciální stromy (cesty – Erdős, Gallai, 1959)
- pro grafy neobsahující daný podgraf (C_4 – Saclé, Wozniak 1997)
- liší-li se velikost grafu a stromu pouze o konstantu (Görlich, Żak 2016)

Hypotéza Erdős-Sósové

Částečné výsledky:

- pro speciální stromy (cesty – Erdős, Gallai, 1959)
- pro grafy neobsahující daný podgraf (C_4 – Saclé, Wozniak 1997)
- liší-li se velikost grafu a stromu pouze o konstantu (Görlich, Żak 2016)

Věta (Ajtai, Komlós, Simonovits, Szemerédi, 2018+)

Existuje k_0 takové, že hypotéza Erdős-Sósové platí pro všechna $k > k_0$.

Hypotéza Erdős-Sósové

Částečné výsledky:

- pro speciální stromy (cesty – Erdős, Gallai, 1959)
- pro grafy neobsahující daný podgraf (C_4 – Saclé, Wozniak 1997)
- liší-li se velikost grafu a stromu pouze o konstantu (Görlich, Żak 2016)

Věta (Ajtai, Komlós, Simonovits, Szemerédi, 2018+)

Existuje k_0 takové, že hypotéza Erdős-Sósové platí pro všechna $k > k_0$.

Věta (Rozhoň, 2018+)

Hypotéza platí asymptoticky pro husté grafy a stromy se sublineárním maximálním stupněm.

Hypotéza Erdős-Sósové

Věta (Rozhoň, 2018+)

Hypotéza platí asymptoticky pro husté grafy a stromy se sublineárním maximálním stupněm.

Hypotéza Erdős-Sósové

Věta (Rozhoň, 2018+)

Hypotéza platí asymptoticky pro husté grafy a stromy se sublineárním maximálním stupněm.

Věta (Rozhoň, 2018+)

Nechť $\mathcal{T}$ je třída stromů splňující $\forall T \in \mathcal{T} : \Delta(T) \in o(|T|)$. Pak každý graf G splňující $\overline{\deg}(G) = |T| + o(|G|)$ obsahuje libovolný strom z $\mathcal{T}$.

Hypotéza Erdős-Sósové

Věta (Rozhoň, 2018+)

Hypotéza platí asymptoticky pro husté grafy a stromy se sublineárním maximálním stupněm.

Věta (Rozhoň, 2018+)

Nechť $\mathcal{T}$ je třída stromů splňující $\forall T \in \mathcal{T} : \Delta(T) \in o(|T|)$. Pak každý graf G splňující $\overline{\deg}(G) = |T| + o(|G|)$ obsahuje libovolný strom z $\mathcal{T}$.

Věta (Besomi, Pavez-Signé, Stein, 2018+)

Nechť $\mathcal{T}$ je třída stromů splňující $\forall T \in \mathcal{T} : \Delta(T) \in o(\sqrt[67]{|T|})$. Pak každý graf G splňující $\overline{\deg}(G) = |T| + o(|G|)$ obsahuje libovolný strom z $\mathcal{T}$.

Zjemnění hypotézy Erdős-Sósové

Obecnější výsledek zohledňující, že některé stromy lze vnořit snáze.

Zjemnění hypotézy Erdős-Sósové

Obecnější výsledek zohledňující, že některé stromy lze vnořit snáze.

Věta (Rozhoň, 2018+)

Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Pro husté grafy platí asymptoticky následující. Je-li jejich minimální stupeň alespoň přibližně rk a obsahují-li alespoň konstantní proporci vrcholů stupně alespoň k, vnoříme libovolný strom na k vrcholech se sublineárním maximálním stupněm a jednou partitou velikosti maximálně rk.

Zjemnění hypotézy Erdős-Sósové

Obecnější výsledek zohledňující, že některé stromy lze vnořit snáze.

Věta (Rozhoň, 2018+)

Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Pro husté grafy platí asymptoticky následující. Je-li jejich minimální stupeň alespoň přibližně rk a obsahují-li alespoň konstantní proporci vrcholů stupně alespoň k, vnoříme libovolný strom na k vrcholech se sublineárním maximálním stupněm a jednou partitou velikosti maximálně rk.

Předchozí tvrzení je důsledkem pro $r = 1/2$.

Hypotéza Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Loebl, Komlós, Sósová, 1995)

Jestliže graf G obsahuje alespoň polovinu vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Hypotéza Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Loebl, Komlós, Sósová, 1995)

Jestliže graf G obsahuje alespoň polovinu vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Věta (Hladký, Komlós, Piguet, Simonovits, Stein, Szemerédi, 2017)

Pro každé $\eta > 0$ existuje k_0 takové, že pro každé $k > k_0$ platí, že libovolný graf G na n vrcholech s alespoň $(\frac{1}{2} + \eta)n$ vrcholy stupně alespoň $(1+\eta)k$ obsahuje libovolný strom na k vrcholech.

Zjemnění hypotézy Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Loebl, Komlós, Sósová, 1995)

Jestliže graf G obsahuje alespoň polovinu vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Zjemnění hypotézy Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Loebl, Komlós, Sósová, 1995)

Jestliže graf G obsahuje alespoň polovinu vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Hypotéza (Simonovits, personal communication)

Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Jestliže graf G obsahuje alespoň rn vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech s jednou partitou velikosti nejvýše rk jako podgraf.

Zjemnění hypotézy Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Loebl, Komlós, Sósová, 1995)

Jestliže graf G obsahuje alespoň polovinu vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech jako podgraf.

Hypotéza (Simonovits, personal communication)

Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Jestliže graf G obsahuje alespoň rn vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech s jednou partitou velikosti nejvýše rk jako podgraf.

Věta (Klimošová, Piguet, Rozhoň, 2018+)

Hypotéza Simonovitse platí asymptoticky pro husté grafy.

Zjemnění hypotézy Loebl-Komlós-Sósové

Hypotéza (Simonovits, personal communication)

Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Jestliže graf G obsahuje alespoň rn vrcholů stupně alespoň k, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech s jednou partitou velikosti nejvýše rk jako podgraf.

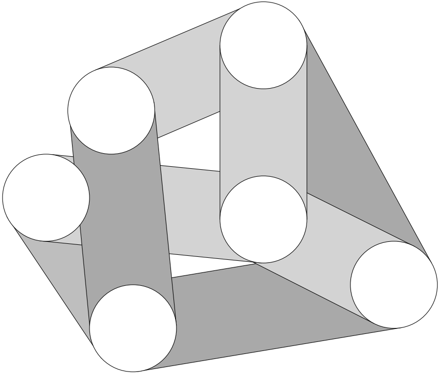
Věta (Klimošová, Piguet, Rozhoň, 2018+)

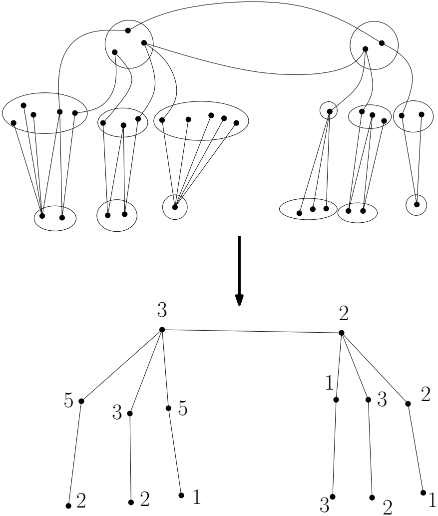
Nechť $0 \leq r \leq 1/2$. Jestliže graf G obsahuje alespoň rn vrcholů stupně alespoň $k+o(n)$, pak obsahuje libovolný strom na $k+1$ vrcholech s jednou partitou velikosti nejvýše rk jako podgraf.

Myšlenky důkazů

2) Clusterizace na mikrostromy

1) Regularity lemma





Poznámky oponenta

- *. . . Lemma 2.7 tak jak je zformulované neplatí . . .*

Lemma 2.7

Let $\{V_0, V_1, \ldots, V_m\}$ be an ε-regular partition of $V(G)$ and let $X = V_j$ for some $1 \leq j \leq m$. Then all but at most $\sqrt{\varepsilon}|X|$ vertices of a cluster X are typical w. r. t. all but at most $\sqrt{\varepsilon}m$ sets V_i, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus j$. In Chapter 4 we call such vertices of X *ultratypical*.

Poznámky oponenta

- *... Lemma 2.7 tak jak je zformulované neplatí ...*

Lemma 2.7

Let $\{V_0, V_1, \ldots, V_m\}$ be an ε-regular partition of $V(G)$ and let $X = V_j$ for some $1 \leq j \leq m$. Then all but at most $\sqrt{\varepsilon}|X|$ vertices of a cluster X are typical w. r. t. all but at most $\sqrt{\varepsilon}m$ sets V_i, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus j$. In Chapter 4 we call such vertices of X *ultratypical*.

Lemma 2.7 – správná verze

Let $\{V_0, V_1, \ldots, V_m\}$ be an ε-regular partition of $V(G)$ such that all pairs of clusters form regular pairs and let $X = V_j$ for some $1 \leq j \leq m$. Then all but at most $\sqrt{\varepsilon}|X|$ vertices of a cluster X are typical w. r. t. all but at most $\sqrt{\varepsilon}m$ sets V_i, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus j$. In Chapter 4 we call such vertices of X *ultratypical*.

Poznámky oponenta

- *Ve znění Lemmatu 2.7 je také zaveden termín "ultratypický vrchol". Bylo by vhodnější termín definovat před tímto Lemmatem.*
- *Před Proposition 2.13 je zopakován (v mírně odlišných verzích) odstavec.*
- *V angličtině se nepoužívá pro partitu bipartitního grafu termín "partite".*
- *Drobné chyby vzniklé použitím textu z připravovaných článků s jiným stylem formátování ...*