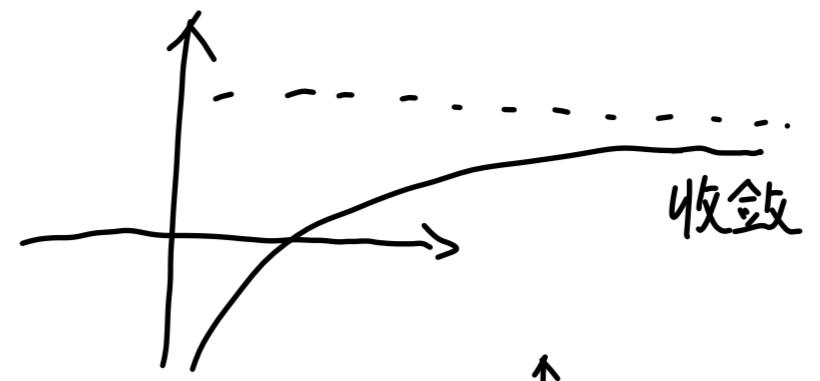
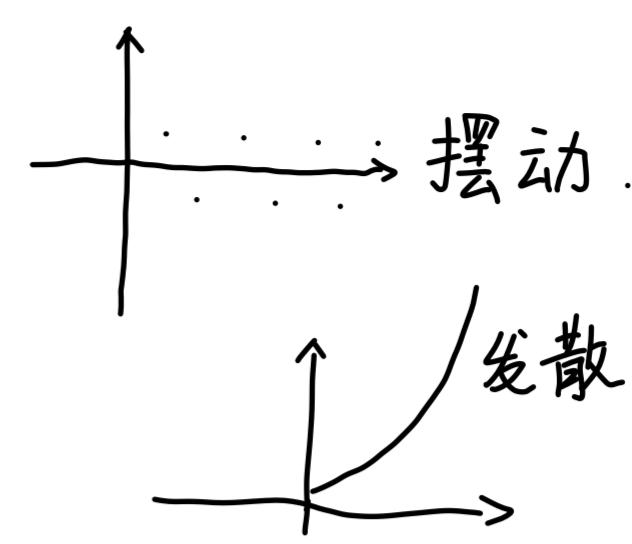


Cpt 4：无穷大与无穷小 .



§1 定义 .

⎩ 者存在 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \rightarrow x_n$ 收敛
 ⎩ 者不存在 ⎩ 摆动
 发散 \rightarrow 发散到无穷大量 .

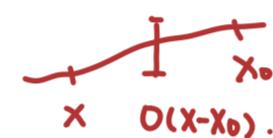


无穷小量是个极限过程，但并不是某个确切的数。

然而 0 是唯一可以被视作无穷小量的数

§2 无穷小与函数极限的关系 .

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 则 $f(x) = A + o(x - x_0)$. $\Rightarrow A + o(x) = f(x)$.
视为 x 处与 x_0 处的值的“误差”.



§3 运算性质 .

- 在同一过程中，有限个无穷小量的代数和仍是无穷小。
- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

§4 无穷大

1. 无穷大是变量。

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 不可认为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的极限存在。

3. 无穷大是特殊的无界变量，但无界变量不一定是无穷大。 $x \sin x$.

e.g. 1 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

证明： $\forall M > 0$. 使得 $|\frac{1}{x-1}| > M \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{M}$.

取 $\delta = \frac{1}{M}$ 时. $\forall x \in U^0(1, \delta)$. $|\frac{1}{x-1}| > M$ 恒成立。

得证。

§5 无穷大量与无穷小量的关系 .

在同一过程中，无穷大量的倒数为无穷小，恒不为 0 的无穷小的倒数为无穷大。

§6 渐近线 .

例： $f(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一条铅直渐近线。

$g(x) = \arctan x$. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$. 则 $y = \frac{\pi}{2}$ 是 $g(x)$ 的一条水平渐近线。

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - kx - b] = 0$ 则 $y = kx + b$ 是 $h(x)$ 的一条斜渐近线。