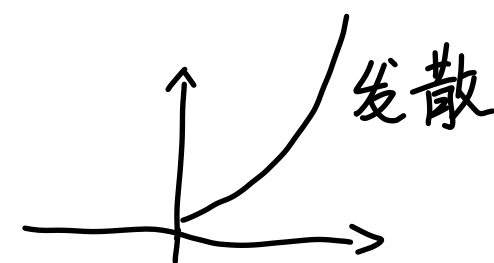
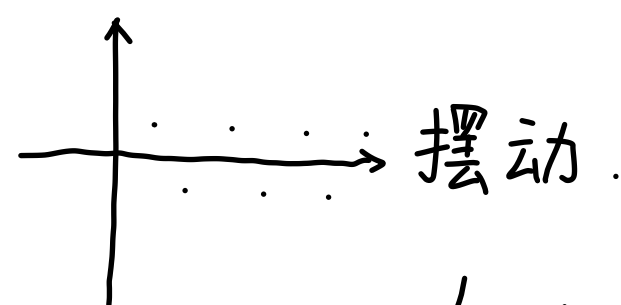
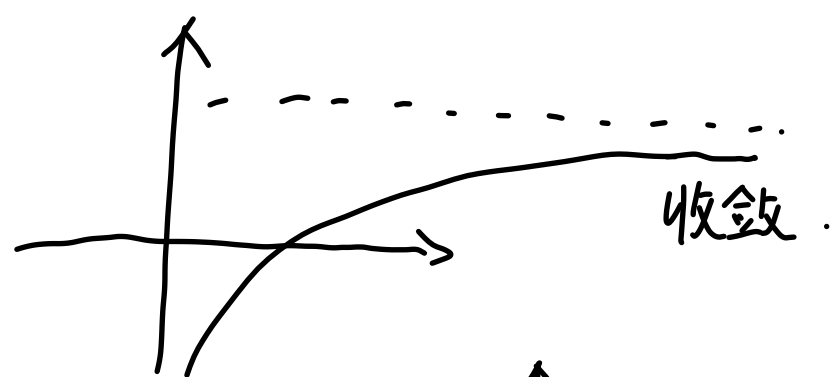


## Cpt 4: 无穷大与无穷小.

### §1 定义.

若存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \rightarrow x_n$  收敛  
若不存在  $\begin{cases} \text{摆动} \\ \text{发散} \end{cases} \rightarrow \text{发散到无穷大量}.$



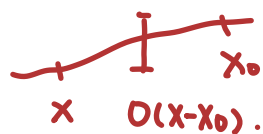
无穷小量是个极限过程, 但并不是某个确切的数.

然而 0 是唯一可以被视作无穷小量的数

### §2 无穷小与函数极限的关系.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $f(x) = A + o(x - x_0) \Rightarrow A + o(x) = f(x)$ .

视为  $x$  处与  $x_0$  处的值的“误差”.



### §3 运算性质.

1. 在同一过程中, 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小.
2. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

### §4 无穷大

1. 无穷大是变量.
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  不可认为  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的极限存在.
3. 无穷大是特殊的无界变量, 但无界变量不一定是无穷大.  $x \sin x$ .

e.g. 1 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

证明:  $\forall M > 0$ , 使得  $|\frac{1}{x-1}| > M \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{M}$ .

取  $\delta = \frac{1}{M}$  时,  $\forall x \in U^0(1, \delta)$ ,  $|\frac{1}{x-1}| > M$  恒成立.  
得证.

### §5 无穷大量与无穷小量的关系.

在同一过程中, 无穷大量的倒数为无穷小, 恒不为 0 的无穷小的倒数为无穷大.

### §6 渐近线.

例:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的一条铅直渐近线.

$g(x) = \arctan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ , 则  $y = \frac{\pi}{2}$  是  $g(x)$  的一条水平渐近线.

若  $\lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - kx - b] = 0$  则  $y = kx + b$  是  $h(x)$  的一条斜渐近线