cpt7：无穷小的比较.

§1 无穷小的比较 在同一流程下

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$. 则 β 是 α 的高阶无穷小. 记 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$ 则 β 是 α 的低阶无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C$. $C\neq0$ 则 β 是 α 的同阶无穷小.

特殊地. 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$. 则 β 是 α 的等价无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C$. $C\neq0$. 则 β 是 α^k 的同阶无穷小.

β 是 α 的 k 阶无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 不存在. 则 β 与 α 无法比较.

e.g.1 证明当 $x\to0$ 时 $\tan x-\sin x$ 是 x 的3阶无穷小.

证明：题意 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=C$. $C\neq0$

下证：$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(-\sec x\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\sec x\right)=-\frac{1}{2}$

故 $\tan x-\sin x$ 是 x^3 的同阶无穷小

定理1: β 与 α 是等价无穷小 $\Longleftrightarrow$ $\beta=\alpha+o(\alpha)$ 称 α 是 β 的主要部分.

$\frac{\alpha}{\beta}=1+o(\beta)\Rightarrow\alpha=\beta+\beta\cdot o(\beta)$.

当 $x\to0$ 时

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)$.

$x\sim e^x-1$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ $(\alpha\neq0)$.

e.g.2 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ $\rightrightarrows$ $x\to0$ 的等价无穷小.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1$.

定理2 若 $\alpha\sim\alpha'$. $\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在. 则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$

证明: 在同一过程下，不妨设 $x\to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta'}{\beta}$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot1=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

e.g.3 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(2x)^2}{\frac{x^2}{2}}=8$.

e.g.4 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)x}{x}=1$.

e.g.5 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3(2x)}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3(2x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(\sec x-1)}{(2x)^3}$

$=\frac{1}{8}\lim\limits_{x\to0}\left(-\sec x\,\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$.

e.g.6 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan5x-\cos x+1}{\sin3x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan5x-(\cos x-1)}{\sin3x}$

$\tan5x\sim5x$
$\cos x-1\sim\frac{1}{2}x^2$.
$\sin3x\sim3x$

无穷小不同阶. 无法直接抵消.
(主部不同).
只能保留误差.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x+o(x)-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x+o(x)}$.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{5+\frac{o(x)}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{o(x^2)}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}}$

$=\frac{5}{3}$.