Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

ОТЧЕТ
по расчетному заданию

«Замкнутые сети массового обслуживания»
Системный анализ и принятие решений

Работу выполнил студент

группа 33501/4 Дьячков В.В.

Преподаватель

________________ Сабонис С.С.

Санкт-Петербург
10 мая 2018 г.

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1. Техническое задание

Задана замкнутая сеть массового обслуживания, включающая $M = 4$ узла. В сети циркулирует N заявок в соответствии с матрицей передач, также заданы описания узлов как систем массового обслуживания (число каналов, интенсивность обслуживания). Необходимо:

1. Построить граф сети;
2. Определить среднее число требований, среднее число ожидающих требований, среднее время пребывания и среднее время ожидания для каждого узла;
3. Результаты оформить в итоговой таблице.

2. Исходные данные

Вариант 32

- $N = 4$
- Матрица передач:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{3}/_{4} & 0 & 0 & {}^{1}/_{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & {}^{9}/_{17} & {}^{8}/_{17} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{9}/_{14} & 0 & {}^{5}/_{14} & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 узел: система $M/M/2$, $\mu = 10$
- 2 узел: система $M/M/1$, $\mu = 3$
- 3 узел: система $M/M/2$, $\mu = 7$
- 4 узел: система $M/M/2$, $\mu = 7$

3. Замкнутая сеть массового обслуживания

3.1. Граф сети

На рис. 3.1 изображен граф сети массового обслуживания, составленный по матрице передач П.

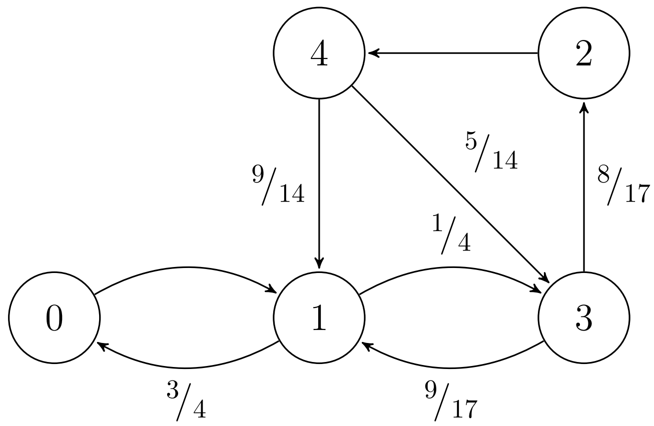

Рис. 3.1: Граф сети

3.2. Расчет узлов

Найдем коэффициенты передачи $\alpha_i = {}^{\lambda_i}/_{\lambda_0}$:

$$\begin{cases} \lambda_0 = {}^3/_4\lambda_1 \\ \lambda_1 = \lambda_0 + {}^9/_{17}\lambda_3 + {}^9/_{14}\lambda_4 \\ \lambda_2 = {}^8/_{17}\lambda_3 \\ \lambda_3 = {}^1/_4\lambda_1 + {}^5/_{14}\lambda_4 \\ \lambda_4 = \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = {}^4/_3\lambda_0 \\ \lambda_2 = {}^{56}/_{297}\lambda_0 \\ \lambda_3 = {}^{119}/_{297}\lambda_0 \\ \lambda_4 = {}^{56}/_{297}\lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = {}^4/_3 \approx 1.33 \\ \alpha_2 = {}^{56}/_{297} \approx 0.19 \\ \alpha_3 = {}^{119}/_{297} \approx 0.40 \\ \alpha_4 = {}^{56}/_{297} \approx 0.19 \end{cases}$$

Сумма $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \approx 2.11$. Обозначим $\omega_j,\ j = \overline{1, M}$ как вероятность поступления в j-й узел некоторого помеченного требования при его очередном переходе из узла в узел замкнутой сети, тогда:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{i=1}^{M} \alpha_i} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{M} \alpha_i \cdot P_{ij},\ j = \overline{1, M} \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_j = \sum\limits_{i=1}^{M} \omega_i \cdot P_{ij},\ j = \overline{1, M} \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \omega_j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \approx 1.33 \\ \alpha_2 \approx 0.19 \\ \alpha_3 \approx 0.40 \\ \alpha_4 \approx 0.19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 \approx 0.63 \\ \omega_2 \approx 0.09 \\ \omega_3 \approx 0.19 \\ \omega_4 \approx 0.09 \end{cases}$$

3.3. Возможные состояния сети

Количество возможных состояний равно $C_{N+M-1}^{N} = C_7^4 = 35$. Перечислим все возможные состояния сети:

$$\begin{aligned} S(4,4) = \{&4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002\\ &1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003,\\ &0400, 0310, 0301, 0220, 0211, 0202, 0130, 0121, 0112, 0103,\\ &0040, 0031, 0022, 0013, 0004\} \end{aligned}$$

Найдем вероятность нахождения сети в каждом из состояний по формуле:

$$P(n_1, \ldots, n_M) = \frac{1}{G_M(N)} \cdot \prod_{i=1}^{M} Z_i(n_i),$$

где $G_M(N)$ – нормирующая константа замкнутой сети с M узлами и N заявками, а Z_i и $\mu_i(j)$ определяются следующими формулами:

$$G_M(N) = \sum_{n \in S(N,M)} \prod_{i=1}^{M} Z_i(n_i); \quad Z_i(n_i) = \frac{\omega_i^{n_i}}{\prod\limits_{j=1}^{n_j} \mu_i(j)}; \quad \mu_j(k) = \begin{cases} k \cdot \mu_j, & k < m_j \\ m_j \cdot \mu_j, & k \geqslant m_j \end{cases}$$

Для указанной последовательности состояний $S(4,4)$ найденные вероятности оказались равны:

$$\begin{aligned} P = \{&0.0931, 0.0878, 0.0799, 0.0376, 0.0828, 0.0754, 0.0355, 0.0343, 0.0323, 0.0076,\\ &0.0780, 0.0710, 0.0334, 0.0324, 0.0304, 0.0072, 0.0147, 0.0139, 0.0065, 0.0015,\\ &0.0368, 0.0335, 0.0158, 0.0153, 0.0144, 0.0034, 0.0069, 0.0065, 0.0031, 0.0007,\\ &0.0032, 0.0030, 0.0014, 0.0007, 0.0002\} \end{aligned}$$

3.4. Расчет характеристик узлов

По известным вероятностям найдем среднее число заявок в сети $\overline{n_j}(N)$, среднее число заявок в очереди на обслуживание $\overline{n_j^{\text{ож}}}(N)$ и среднее число занятых приборов $\overline{n_j^{\text{обсл}}}(N)$:

$$\overline{n_j}(N) = \sum_{n \in S(N,M)} n_j \cdot P(n_1, \ldots, n_M)$$

$$\overline{n_j^{\text{ож}}}(N) = \sum_{\substack{n \in S(N,M) \\ n_j < m_j}} (n_j - m_j) \cdot P(n_1, \ldots, n_M)$$

$$\overline{n_j^{\text{обсл}}}(N) = \overline{n_j}(N) - \overline{n_j^{\text{ож}}}(N)$$

По числовым показателям узлов найдем среднее время пребывания заявки в узле и среднее время ожидания заявкой обслуживания

$$\overline{t_j}(N) = \frac{\overline{n_j}(N)}{\overline{n_j^{\text{обсл}}}(N)} \cdot \frac{1}{\mu_j}$$
$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\overline{n_j^{\text{ож}}}(N)}{\overline{n_j^{\text{обсл}}}(N)} \cdot \frac{1}{\mu_j}$$

В таблице 3.1 приведены рассчитанные показатели для каждого узла сети.

Таблица 3.1: Результаты

	1 узел	2 узел	3 узел	4 узел
Ср. число требований $\overline{n}$	1.8131	1.2552	0.6413	0.2904
Ср. число ожидающих требований $\overline{n_{\text{ож}}}$	0.3915	0.5851	0.0310	0.0032
Ср. время пребывания $\bar{t}$	0.1275	0.6244	0.1501	0.1445
Ср. время ожидания $\overline{t_{\text{ож}}}$	0.0275	0.2910	0.0073	0.0016