Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

ОТЧЕТ
по расчетному заданию

«Нелинейное программирование. Условная оптимизация»
Системный анализ и принятие решений

Работу выполнил студент

группа 33501/4 Дьячков В.В.

Преподаватель

________________ Сабонис С.С.

Санкт-Петербург
2 мая 2018 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1. Техническое задание

1. Решить задачу методом Лагранжа при заданном ограничении;
2. Решить задачу методом Била при заданных ограничениях;
3. Решить задачу методом проекции градиента при заданных ограничениях;
4. Решить задачу методом штрафных функций или методом барьерных функций при заданном ограничении;
5. Решить задачу методом возможных направлений при заданном ограничении.

2. Исходные данные

Вариант 32 Дана задача нелинейного программирования:

$$\max f(X) = \max\left(-31x_1^2 - 34x_2^2 + 4x_1x_2 + 286x_1 + 388x_2\right)$$

Заданы коэффициенты a_{ij}:

$$a_{11} = 7 \qquad a_{21} = 10 \qquad a_{31} = -1 \qquad a_{41} = 0 \qquad a_{51} = 0$$

$$a_{12} = 12 \qquad a_{22} = 8 \qquad a_{32} = 0 \qquad a_{42} = -1 \qquad a_{52} = 1$$

Заданы коэффициенты b_i:

$$b_1 = 84 \qquad b_2 = 80 \qquad b_3 = 0 \qquad b_4 = 0 \qquad b_5 = 5 \qquad b_6 = 400$$

Заданы коэффициенты d_i:

$$d_1 = 16 \qquad d_2 = 25$$

3. Решение методом Лагранжа

Решим задачу при ограничении:

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 = b_5 \Longleftrightarrow x_2 = 5 \Longleftrightarrow x_2 - 5 = 0$$

В методе Лагранжа исходная задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации – задаче поиска стационарной точки функции Лагранжа, являющийся точкой локального максимума функции $L(X, V)$ по аргументу X. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(X, V) = -31x_1^2 - 34x_2^2 + 4x_1x_2 + 286x_1 + 388x_2 + V_1\left(x_2 - 5\right)$$

Сформулируем условие стационарности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -62x_1 + 4x_2 + 286 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -68x_2 + 4x_1 + 388 + V_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial V_1} = x_2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений получим:

$$\begin{cases} x_2 = 5 \\ -62x_1 + 20 + 286 = 0 \\ -340 + 4x_1 + 388 + V_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 \approx \dfrac{286}{62} \approx 4.94 \\ V_1 \approx -67.76 \end{cases}$$

Определим матрицу Гессе $H_L(X, V)$ и убедимся в ее отрицательной определенности:

$$H_L(X, V) = \begin{pmatrix} -62 & 4 \\ 4 & -68 \end{pmatrix} = H_L$$

Критерий отрицательной определенности квадратичной формы. Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры четного порядка ее матрицы были положительны, а нечетного порядка — отрицательны.

Найдем главные миноры H_L:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -62 \end{vmatrix} = -62$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -62 & 4 \\ 4 & -68 \end{vmatrix} = 4200$$

По критерию отрицательной определенности квадратичной формы, матрица H отрицательно определена. Таким образом, в соответствии с условиями второго порядка точка (X^*, V^*) является точкой максимума $L(X, V)$ по X, а точка $X^* \approx (4.94, 5)$ – решением задачи условной оптимизации, $f(X^*) \approx 1845$.

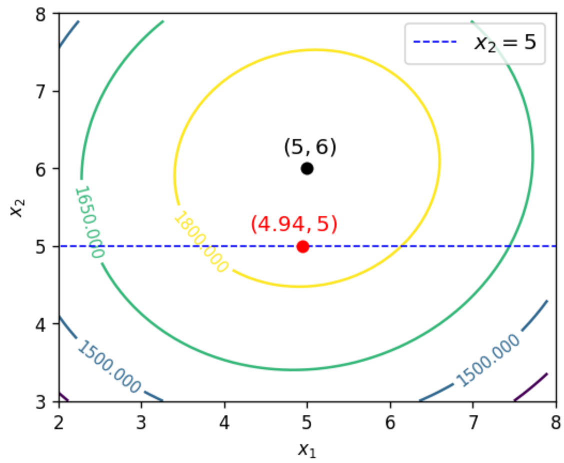

Рис. 3.1: Решение задачи методом Лагранжа

4. Необходимые условия оптимальности при линейных ограничениях

Запишем необходимые условия оптимальности Куна-Такера для задачи при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqslant b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leqslant b_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \leqslant 84 \\ 10x_1 + 8x_2 \leqslant 80 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + u_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + u_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + u_3\dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} + u_4\dfrac{\partial g_4}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + u_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} + u_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} + u_3\dfrac{\partial g_3}{\partial x_2} + u_4\dfrac{\partial g_4}{\partial x_2} = 0 \\ u_i g_i = 0, i = \overline{1,4} \\ u_i \leqslant 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -62x_1 + 4x_2 + 286 + 7u_1 + 10u_2 - u_3 = 0 \\ -68x_2 + 4x_1 + 388 + 12u_1 + 8u_2 - u_4 = 0 \\ u_1(7x_1 + 12x_2 - 84) = 0 \\ u_2(10x_1 + 8x_2) = 0 \\ u_3x_1 = 0 \\ u_4x_2 = 0 \\ u_i \leqslant 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

5. Решение методом Била

Запишем ограничения в канонической форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqslant b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leqslant b_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \leqslant 84 \\ 10x_1 + 8x_2 \leqslant 80 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x_1 + 12x_2 + x_3 = 84 \\ 10x_1 + 8x_2 + x_4 = 80 \\ x_i \geqslant 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -62x_1 + 4x_2 + 286 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -68x_2 + 4x_1 + 388 \end{cases}$$

Пусть $Б_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 84 & 80 \end{pmatrix}^T$. Заполним симплекс-таблицу для опорной точки $X^{(0)}$, записав в последнюю строку формулы для частных производных:

Таблица 5.1: Базис x_3, x_4

$X^{(0)}$	x_1	x_2	b
x_3	-7	-12	84
x_4	-10	-8	80
${}^{\partial f}/_{\partial x_j, u_j}$	$-62x_1 + 4x_2 + 286$	$-68x_2 + 4x_1 + 388$	

Базис является допустимым, так как $b \geqslant 0$, но не является оптимальным, так как $c = \begin{pmatrix} 286 & 388 \end{pmatrix} \nleqslant 0$.

Выберем как разрешающий столбец переменную x_k, соответствующую максимальному значению производной целевой функции в точке $X^{(0)}$:

$k = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \left(X^{(0)} \right) \right\} = 2 \Rightarrow x_2.$

Оценим ситуацию в опорной точке $X^{(0)}$. Найдем соотношения между приращениями свободной переменной x_2 и изменениями базисных переменных x_3 и x_4 и частной производной по x_2:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \left(X^{(0)} \right) = 0$ при $x_2 \approx 5.7$
- $x_3 = 0$ при $x_2 = 7$
- $x_4 = 0$ при $x_2 = 10$

Производная обращается в ноль раньше базисных переменных, поэтому введем в задачу новую свободную переменную:

$$u_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 17x_2 + 97 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{1}{17} (x_1 - u_1 + 97)$$

Заполним промежуточную таблицу, содержащую строку для новой переменной u_1. На пересечении u_1 и x_2 находится разрешающий элемент -68.

Таблица 5.2: Промежуточная таблица базиса x_3, x_4 и u_1

$X^{(0)} \to X^{(1)}$	x_1	x_2	b
u_1	1	**−17**	97
x_3	−7	−12	84
x_4	−10	−8	80

Произведем перерасчет в соответствии с правилом перерасчета симплекс-таблиц.

Таблица 5.3: Промежуточная таблица базиса x_2, x_3 и x_4

$X^{(0)} \to X^{(1)}$	x_1	u_1	b
x_2	−1	**1**	−97
x_3	131	−12	−264
x_4	178	−8	−584

Поделим на разрешающий элемент -17, а также выразим целевую функцию через свободные переменные и найдем частные производные:

$$f(u_1, x_1) = -31x_1^2 - \frac{2}{17}(x_1 - u_1 + 97)^2 + \frac{4x_1}{17}(x_1 - u_1 + 97) + \\ + 286x_1 + \frac{388}{17}(x_1 - u_1 + 97)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} = \dfrac{4}{17}(x_1 - u_1 + 97) - \dfrac{4x_1}{17} - \dfrac{388}{17} = -\dfrac{4u_1}{17} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = -62x_1 + \dfrac{4x_1}{17} + 286 + \dfrac{388}{17} = -\dfrac{1050x_1}{17} + \dfrac{5250}{17} \end{cases}$$

Таблица 5.4: Базис x_2, x_3 и x_4

$X^{(1)}$	x_1	u_1	b
x_2	${}^{1}/_{17}$	${}^{-1}/_{17}$	${}^{97}/_{17}$
x_3	$\mathbf{{}^{-131}/_{17}}$	${}^{12}/_{17}$	${}^{264}/_{17}$
x_4	${}^{-178}/_{17}$	${}^{8}/_{17}$	${}^{584}/_{17}$
${}^{\partial f}/_{\partial x_j, u_j}$	${}^{-1050x_1+5250}/_{17}$	${}^{-4u_1}/_{17}$	

Базис является допустимым, так как $b \geqslant 0$, но не является оптимальным, так как $c = \begin{pmatrix} {}^{5250}/_{17} & 0 \end{pmatrix} \nleqslant 0$.

Выберем как разрешающий столбец переменную x_k (u_k), соответствующую максимальному значению производной целевой функции в точке $X^{(1)}$:

$k = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \left(X^{(1)}\right) \right\} = 1 \Rightarrow x_1.$

Оценим ситуацию в опорной точке $X^{(1)}$. Найдем соотношения между приращениями свободной переменной x_1 и изменениями базисных переменных x_2, x_3 и x_4 и частной производной по x_1:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \left(X^{(1)}\right) = 0$ при $x_1 = 5$
- $x_2 = 0$ при $x_1 = 98$
- $x_3 = 0$ при $x_1 \approx 1.9237$
- $x_4 = 0$ при $x_1 \approx -3.2359$

Переменная x_3 обращается в ноль раньше всех, поэтому выберем ее как разрешающую строку и произведем перерасчет симплекс-таблицы.

Таблица 5.5: Промежуточная таблица базиса x_2, x_3 и x_4

$X^{(1)} \to X^{(2)}$	x_3	u_1	b
x_2	${}^{1}/_{17}$	${}^{119}/_{17}$	${}^{-12971}/_{289}$
x_1	$\mathbf{1}$	${}^{-12}/_{17}$	${}^{-264}/_{17}$
x_4	${}^{-178}/_{17}$	${}^{-1088}/_{289}$	${}^{-74368}/_{289}$

Поделим на разрешающий элемент -17, а также выразим целевую функцию через свободные переменные и найдем частные производные:

$$x_1 = 84 - 12x_2 - x_3,\ x_2 = \frac{1}{17}(x_1 - u_1 + 97)$$

$$17x_2 = 84 - 12x_2 - x_3 - u_1 + 97 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{29}(181 - x_3 - u_1)$$

$$x_1 = 84 - \frac{1}{29}(2172 + 12x_3 + 12u_1) - x_3 = \frac{1}{29}(264 - 17x_3 + 12u_1)$$

$$\begin{aligned} f(u_1, x_3) = &-\frac{31}{841}(264 - 17x_3 + 12u_1)^2 - \frac{34}{841}(181 - x_3 - u_1)^2 + \\ &+ \frac{4}{841}(264 - 17x_3 + 12u_1)(181 - x_3 - u_1) + \\ &+ 286(264 - 17x_3 + 12u_1) + 388(181 - x_3 - u_1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} = \dfrac{4}{841}(2191u_1 - 3174x_3 + 6940) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = -\dfrac{2}{841}(6348u_1 - 8993x_3 + 23472) \end{cases}$$

Таблица 5.6: Базис x_1, x_2 и x_4

$X^{(2)}$	x_3	u_1	b
x_2	$^{-1}/_{131}$	$^{-119}/_{131}$	$^{12971}/_{2227}$
x_1	$^{-17}/_{131}$	$^{12}/_{131}$	$^{264}/_{131}$
x_4	$^{178}/_{131}$	$^{1088}/_{2227}$	$^{74368}/_{2227}$
$^{\partial f}/_{\partial x_j, u_j}$	$^{-2(6348u_1 - 8993x_3 + 23472)}/_{841}$	$^{4(2191u_1 - 3174x_3 + 6940)}/_{841}$	

Базис является допустимым, так как $b \geqslant 0$, но не является оптимальным, так как $c = \left(^{-4694562}/_{841} \quad ^{2776360}/_{841} \right) \nleqslant 0$.

Выберем как разрешающий столбец переменную x_k (u_k), соответствующую максимальному значению производной целевой функции в точке $X^{(1)}$:

$$k = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(X^{(1)} \right) \right\} = 1 \Rightarrow u_1.$$

Оценим ситуацию в опорной точке $X^{(2)}$. Найдем соотношения между приращениями свободной переменной u_1 и изменениями базисных переменных x_1, x_2 и x_4 и частной производной по u_1:

- $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\left(X^{(2)}\right) = 0$ при $u_1 \approx 3.1679$
- $x_1 = 0$ при $u_1 \approx 23$
- $x_2 = 0$ при $u_1 \approx -6.4$
- $x_4 = 0$ при $u_1 \approx 65$

Производная обращается в ноль раньше базисных переменных, поэтому введем в задачу новую свободную переменную:

$$u_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{841}(2191u_1 - 3174x_3 + 6940)$$

Заполним промежуточную таблицу, содержащую строку для новой переменной u_1. На пересечении u_1 и u_2 находится разрешающий элемент ${}^{2191}/_{841}$.

Таблица 5.7: Промежуточная таблица базиса x_1, x_2, x_4 и u_2

$X^{(2)} \to X^{(3)}$	x_3	u_1	b
x_2	${}^{-1}/_{131}$	${}^{-119}/_{131}$	${}^{12971}/_{2227}$
x_1	${}^{-17}/_{131}$	${}^{12}/_{131}$	${}^{264}/_{131}$
x_4	${}^{178}/_{131}$	${}^{1088}/_{2227}$	${}^{74368}/_{2227}$
u_2	${}^{3174}/_{841}$	**${}^{2191}/_{841}$**	${}^{-6940}/_{841}$

Пересчитаем симплекс таблицу

Таблица 5.8: Промежуточная таблица базиса x_1, x_2, x_4 и u_1

$X^{(2)} \to X^{(3)}$	x_3	u_2	b
x_2	${}^{-379897}/_{110171}$	${}^{-119}/_{131}$	${}^{845873}/_{110171}$
x_1	${}^{1}/_{131}$	${}^{12}/_{131}$	${}^{661704}/_{110171}$
x_4	${}^{186862}/_{110171}$	${}^{1088}/_{2227}$	${}^{155389568}/_{1872907}$
u_1	${}^{-3174}/_{841}$	**1**	${}^{6940}/_{841}$

Поделим каждый элемент промежуточной таблицы на разрешающий элемент и выразим целевую функцию через u_2 и x_3.

$$f(u_2, x_3) = \frac{1}{2227}(82746u_2x_3 - 80030u_2 - 4268x_3^2 - 107230x_3 - 8929)$$

Дополним таблицу строкой, содержащей частные производные целевой функции по свободным переменным.

Таблица 5.9: Базис x_1, x_2, x_4 и u_1

$X^{(3)}$	x_3	u_2	b
x_2	${}^{-379897}/_{110171}$	${}^{-119}/_{131}$	${}^{509045}/_{110171}$
x_1	${}^{1}/_{131}$	${}^{12}/_{131}$	${}^{447691}/_{110171}$
x_4	${}^{186862}/_{110171}$	${}^{1088}/_{2227}$	${}^{155389568}/_{1872907}$
u_1	${}^{-3174}/_{841}$	${}^{841}/_{2227}$	${}^{6940}/_{841}$
${}^{\partial f}/_{\partial x_j, u_j}$	${}^{82746u_2 - 8536x_3 - 107230}/_{2227}$	${}^{82746x_3 - 80030}/_{2227}$	

Базис является допустимым, так как $b \geqslant 0$, и является оптимальным, так как $c = \begin{pmatrix} {}^{-107230}/_{2227} & {}^{-80030}/_{2227} \end{pmatrix} \leqslant 0$. Следовательно оптимальным решением при заданных ограничениях является точка $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.0636 & 4.6205 \end{pmatrix}^T$.

На рис. 5.1 изображены траектория поиска точки максимума методом проекции градиента.

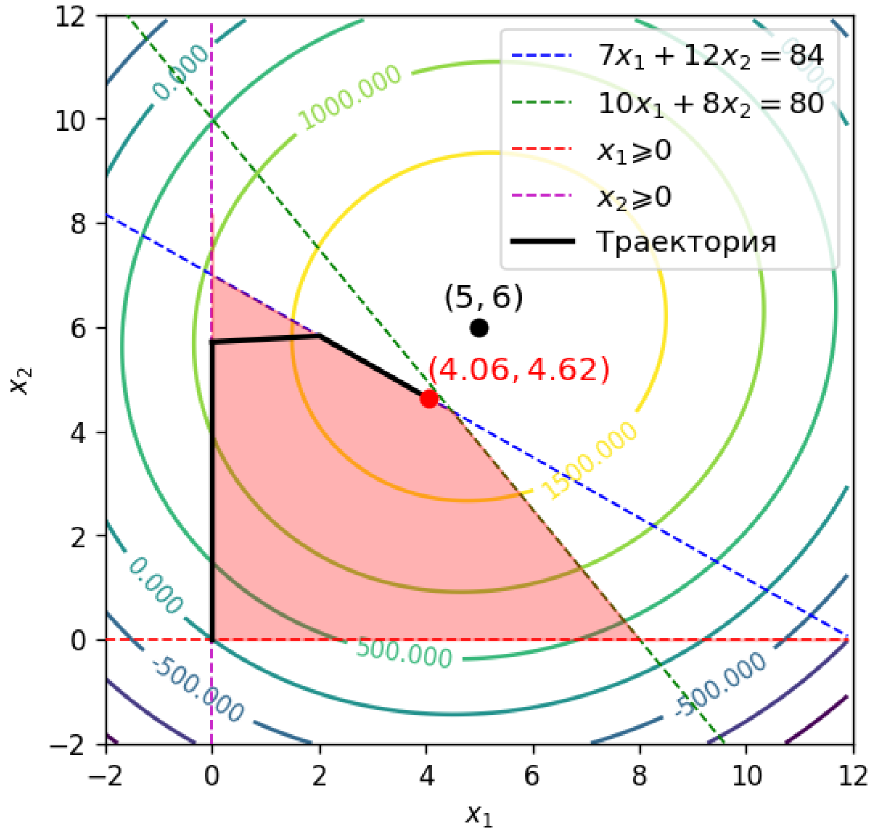

Рис. 5.1: Траектория поиска методом Била

6. Решение методом проекции градиента

Решим задачу при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqslant b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leqslant b_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \leqslant 84 \\ 10x_1 + 8x_2 \leqslant 80 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

Пусть $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Запишем в матричной форме A, b и X:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 84 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Определим градиент $f'(X)$ и матрицу Гессе H целевой функции:

$$f'(X) = \begin{pmatrix} -62x_1 + 4x_2 + 286 \\ -68x_2 + 4x_1 + 388 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -62 & 4 \\ 4 & -68 \end{pmatrix}$$

Определим матрицы активных ограничений в точке $X^{(0)}$.
Убедимся в допустимости градиентного направления:

$$Af'(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 286 \\ 388 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -286 \\ -388 \end{pmatrix} < 0$$

Следовательно

$$K^{(0)} = f'(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 286 & 388 \end{pmatrix}^T$$

Выберем длину шага $t^{(0)}$.
Найдем множество нарушаемых ограничений I_{pred}:

$$AK^{(0)} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 286 \\ 388 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6658 \\ 5964 \\ -286 \\ -388 \end{pmatrix} \Longrightarrow I_{pred} = \{1, 2\}$$

Найдем $t^{(0)}$:

$$t^* = -\frac{\left\langle f'(X^{(0)}), K^{(0)}\right\rangle}{\left\langle K^{(0)}, HK^{(0)}\right\rangle} = -\frac{\begin{pmatrix}286 & 388\end{pmatrix}\begin{pmatrix}286 & 388\end{pmatrix}^T}{\begin{pmatrix}286 & 388\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-62 & 4\\ 4 & -68\end{pmatrix}\begin{pmatrix}286\\ 388\end{pmatrix}} \approx 0.0161$$

$$t_{pred_1} = \frac{b_1 - a_1X^{(0)}}{a_1K^{(0)}} = \frac{84 - \begin{pmatrix}7 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T}{\begin{pmatrix}7 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}286\\ 388\end{pmatrix}} = \frac{84}{6658} \approx 0.0126$$

$$t_{pred_2} = \frac{b_2 - a_2X^{(0)}}{a_2K^{(0)}} = \frac{80 - \begin{pmatrix}10 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T}{\begin{pmatrix}10 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}286\\ 388\end{pmatrix}} = \frac{80}{5964} \approx 0.0134$$

Следовательно $t^{(0)} = \min\{t^*, t_{pred_1}, t_{pred_2}\} = 0.0126$.

$$X^{(1)} = X^{(0)} + t^{(0)}K^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} + 0.0126\begin{pmatrix}286\\ 388\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.6036\\ 4.8888\end{pmatrix}$$

Сформируем матрицу активны ограничений.
Определим оператор проекции и направление $K^{(1)}$.

$$A = \begin{pmatrix}7 & 12\end{pmatrix},\ f'(X^{(1)}) = \begin{pmatrix}82.132 & 69.976\end{pmatrix}^T$$

$$P = E - A^T\left(AA^T\right)^{-1}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0.2539 & 0.4352\\ 0.4352 & 0.7461\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7461 & 0.4352\\ -0.4352 & 0.2539\end{pmatrix}$$

$$K^{(1)} = Pf'(X^{(1)}) = \begin{pmatrix}0.7461 & 0.4352\\ -0.4352 & 0.2539\end{pmatrix}\begin{pmatrix}82.132\\ 69.976\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30.8251\\ -17.9769\end{pmatrix}$$

Найдем длину шага $t^{(1)}$.
Найдем множество нарушаемых ограничений I_{pred}:

$$AK^{(1)} = \begin{pmatrix}7 & 12\\ 10 & 8\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30.8251\\ -17.9769\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 164.3944\\ -30.824\\ 17.9806\end{pmatrix} \Longrightarrow I_{pred} = \{2, 4\}$$

Найдем $t^{(1)}$: $$t^* = -\frac{\left\langle f'(X^{(1)}), K^{(1)}\right\rangle}{\left\langle K^{(1)}, HK^{(1)}\right\rangle} \approx 0.0149$$

$$t_{pred_2} = \frac{b_1 - a_1X^{(1)}}{a_1K^{(1)}} \approx 0.9437, \quad t_{pred_4} = \frac{b_2 - a_2X^{(1)}}{a_2K^{(1)}} \approx 0.2718$$

Следовательно $t^{(1)} = \min\{t^*, t_{pred_2}, t_{pred_4}\} = 0.0149$.

$$X^{(2)} = X^{(1)} + t^{(1)}K^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.6036 \\ 4.8888 \end{pmatrix} + 0.0149 \begin{pmatrix} 30.8251 \\ -17.9769 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0636 \\ 4.6205 \end{pmatrix}$$

Проверим условия останова:

$$f'(X^{(2)}) = \begin{pmatrix} 52.5372 \\ 90.0637 \end{pmatrix}$$

$$K^{(1)} = Pf'(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.7461 & 0.4352 \\ -0.4352 & 0.2539 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52.5372 \\ 90.0637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = -\left(AA^T\right)^{-1} Af'(X^{(2)}) = -\left(\begin{pmatrix} 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52.5372 \\ 90.0637 \end{pmatrix} = -7.5053$$

$\Lambda \leqslant 0 \Rightarrow$ точка $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.0636 & 4.6205 \end{pmatrix}^T$ является оптимальным решением задачи при заданных ограничениях. Значение целевой функции равно $f(X^{(2)}) \approx 1792$.

На рис. 6.1 изображена траектория поиска оптимального решения при заданных ограничениях методом проекции градиента.

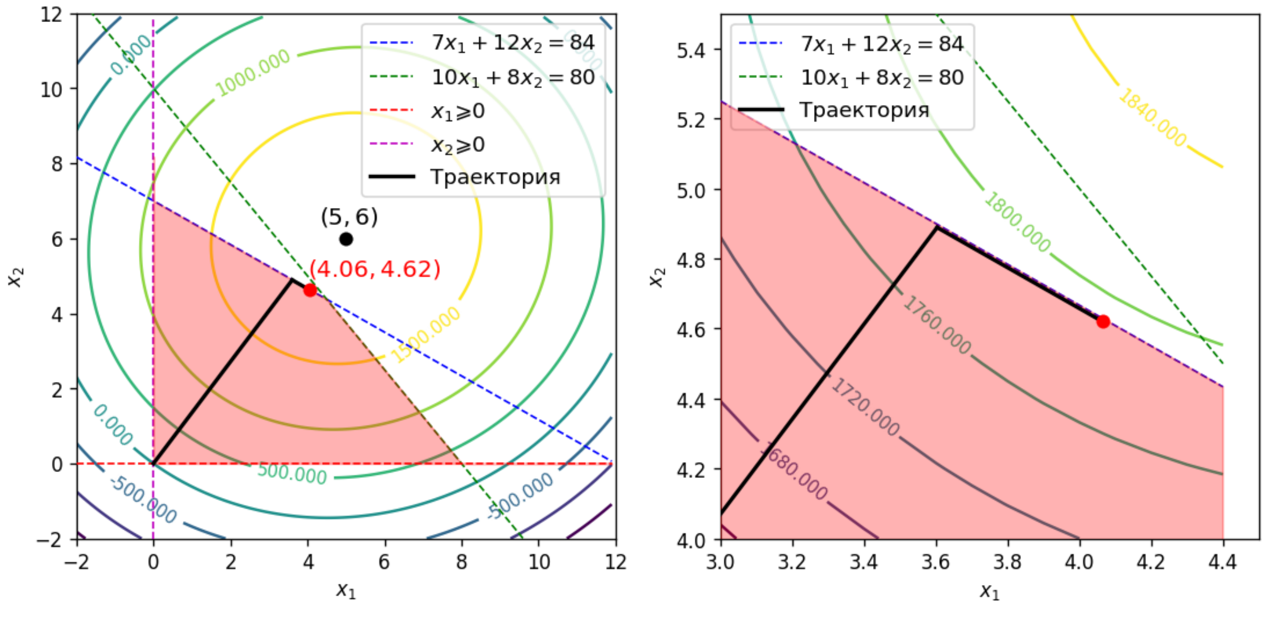

Рис. 6.1: Решение задачи методом проекции градиента

7. Необходимые условия оптимальности при квадратичных ограничениях

Запишем необходимые условия оптимальности Куна-Такера для задачи при ограничениях:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 \leqslant b_6 \Longleftrightarrow 16x_1^2 + 25x_2^2 \leqslant 400$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + u_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + u_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0 \\ u_1g_1 = 0 \\ u_1 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -62x_1 + 4x_2 + 286 + 32x_1u_1 = 0 \\ -68x_2 + 4x_1 + 388 + 59x_2u_2 = 0 \\ u_1g_1 = 0 \\ u_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

8. Решение методом штрафных функций

Решим задачу при ограничении:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 \leqslant b_6 \Longleftrightarrow 16x_1^2 + 25x_2^2 \leqslant 400$$

Обозначим ограничение функцией $g(x)$:

$$g(X) = 16x_1^2 + 25x_2^2 - 400$$

Заменим исходную задачу условной оптимизации эквивалентной ей задачей безусловной оптимизации. Для этого введем функцию штрафов $\psi(x)$ и штрафную функцию $F(x)$:

$$\psi(x) = \max\{0, x\}$$

$$F(X, \mu) = f(X) - \mu\psi(g(X))$$

В таблице 8.1 приведены значения, полученные при различных значениях коэффициента μ.

μ	x_1	x_2	$f(X)$
$1 \cdot 10^{-3}$	4.997	5.995	1 878.999
$1 \cdot 10^{-2}$	4.971	5.955	1 878.910
$1 \cdot 10^{-1}$	4.729	5.574	1 871.011
$1 \cdot 10^{0}$	3.187	3.396	1 565.475
$1 \cdot 10^{1}$	3.023	3.186	1 510.878
$1 \cdot 10^{2}$	3.023	3.186	1 510.878
$1 \cdot 10^{3}$	3.002	3.199	1 510.846
$1 \cdot 10^{4}$	2.996	3.202	1 510.826
$1 \cdot 10^{5}$	2.996	3.202	1 510.826

Таблица 8.1: Решение методом штрафных функций

На рис. 8.1 изображена траектория поиска оптимального решения при заданных ограничениях методом штрафных функций.

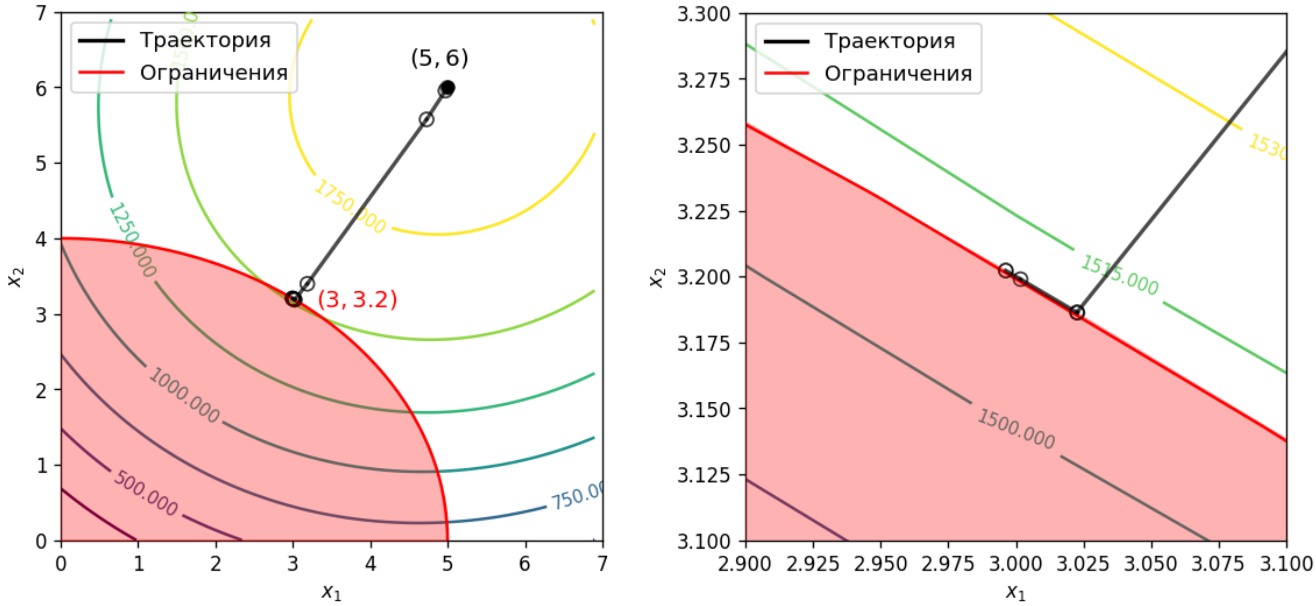

Рис. 8.1: Решение задачи методом штрафных функций

9. Решение методом возможных направлений

Решим задачу при ограничении:

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 \leqslant b_6 \iff 16x_1^2 + 25x_2^2 \leqslant 400$$

При поиске на границе области формулируется вспомогательная задача линейного программирования:

$$\begin{cases} \max u \\ \left\langle f'(X^{(i)}, K^{(i)} \right\rangle \geqslant u \\ \left\langle g_l'(X^{(i)}, K^{(i)} \right\rangle \geqslant u, l \in I \\ u \geqslant 0 \end{cases}$$

В таблице 9.1 приведены значения, полученные на каждом шаге работы алгоритма.

i	x_1	x_2	u	$f(X)$	k_1	k_2
1	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000	−0.637
2	2.774	3.328	17.274	1 506.400	2.044	2.788
3	2.956	3.212	1.000	1 508.000	1.000	−0.614
4	2.963	3.222	4.134	1 510.600	1.992	2.806
5	3.008	3.195	1.000	1 510.700	1.000	−0.609
6	3.008	3.195	0.996	1 510.900	1.981	2.812
7	3.019	3.189	1.000	1 510.900	1.000	−0.608
8	3.019	3.189	0.241	1 510.900	1.978	2.813
9	3.022	3.187	1.000	1 510.900	1.000	−0.607
10	3.022	3.187	0.058	1 510.900	1.978	2.814
11	3.022	3.187	1.000	1 510.900	1.000	−0.607
12	3.022	3.187	0.014	1 510.900	1.978	2.814
13	3.023	3.186	1.000	1 510.900	1.000	−0.607
14	3.023	3.186	0.003	1 510.900	1.000	0.607

Таблица 9.1: Решение методом возможных направлений

На рис. 9.1 изображена траектория поиска оптимального решения при заданных ограничениях методом возможных направлений.

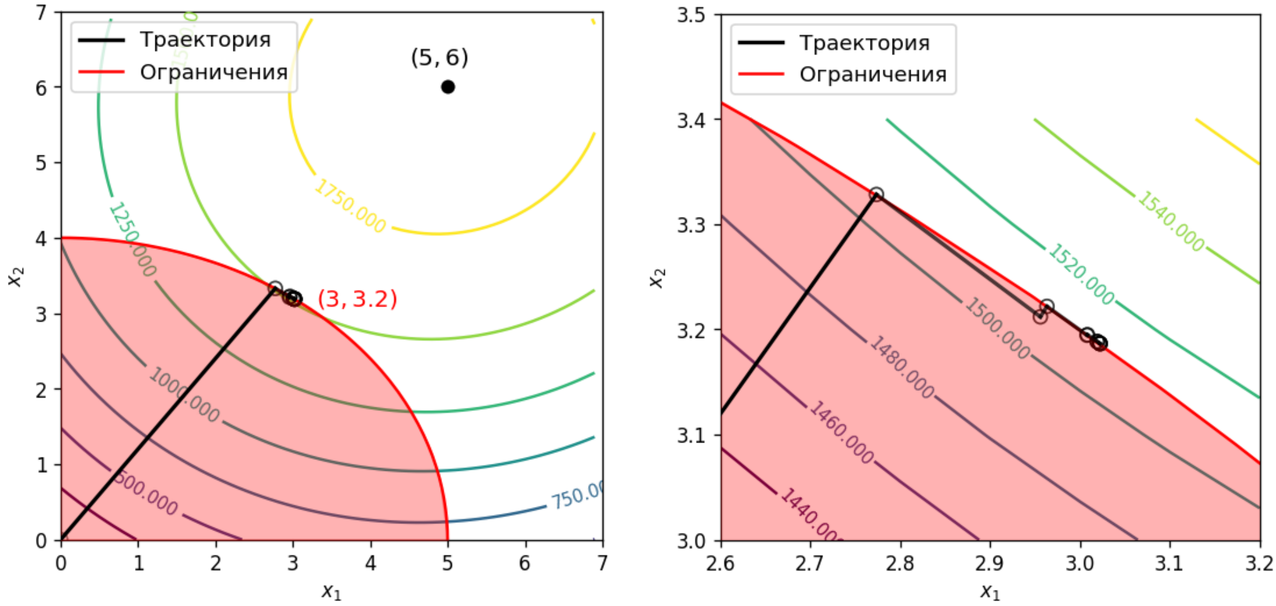

Рис. 9.1: Решение задачи методом возможных направлений