

**Tema: V.a. de tip discret, repartiția și caracteristicile lor numerice.**

1. Este dată repartiția v.a. de tip discret  $\xi$ :

$$\xi : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Se cere: 1) să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 4)$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

2. V.a.  $\xi$  reprezintă suma punctelor aparute la aruncarea unui zar "perfect" de doua ori succesiv.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[-1; 4)$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

3. V.a.  $\xi$  reprezintă produsul punctelor aparute la aruncarea unui zar "perfect" de doua ori succesiv.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[-1; 0)$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

4. V.a.  $\xi$  reprezintă numărul minim din cele doua numere de puncte aparute la aruncarea unui zar "perfect" de doua ori succesiv.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 7)$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

5. V.a.  $\xi$  reprezintă numărul maxim din cele doua numere de puncte aparute la aruncarea unui zar "perfect" de doua ori succesiv.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 3)$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

6. V.a.  $\xi$  reprezintă numărul de "steme" la aruncarea unei monede "perfecte" de trei ori succesiv.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din

intervalul  $[1; 10]$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

7.V.a.  $\xi$  reprezintă numărul bilei extrase la intamplare dintr-o cutie cu bile numerotate cu cifrele  $0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9$ .

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 7]$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

8. V.a.  $\xi$  reprezintă numărul total de "succese" înregistrate în 3 probe Bernoulli cu probabilitatea succesului  $p = 0.3$  în fiecare probă.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[-1; 1]$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

9. V.a.  $\xi$  reprezintă numărul triplat de puncte de puncte aparute la aruncarea unui zar "perfect" o singură dată.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 13]$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

10. Considerăm v.a.  $\xi$  care ia valori în funcție de rezultatele aruncării unui zar "perfect" de două ori succesiv în felul următor:  $\xi$  ia valoarea 1 dacă fata 6 apare, cel puțin, o dată; valoarea 0 dacă fata 6 nu apare deloc, dar fata 5 apare, cel puțin, o dată; valoarea  $-1$  în restul cazurilor.

Se cere: 1) să se afle și să se introducă în Sistemul Mathematica repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) funcția de repartiție și graficul ei; 3) probabilitatea ca  $\xi$  va lua valori din intervalul  $[1; 4]$ ; 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele inițiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

11. Presupunem că probabilitatea statistică ca un copil nou născut va fi băiat este egală cu 0.51. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$  care reprezintă numărul de băieți printre 1000 de copii noi născuți; 2) să se calculeze probabilitatea ca printre 10000 de copii noi născuți numărul băieților va fi cuprins între 4500 și 5500.

12. Un țintaș trage în tinta până când va nimeri în ea, probabilitatea de a nimeri fiind egală cu 0.1. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$  care reprezintă numărul total de trageri în tinta; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  va depăși valoarea 15.

13. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de bile roșii înregistrate printre 10 bile extrase la intamplare, una câte una, cu întoarcere, dintr-o cutie cu 2 bile albe și 3 bile roșii. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  va depăși valoarea 1.

14. Consideram în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de bile roșii înregistrate printre 10 bile extrase la întâmplare, una câte una, fără întoarcere, dintr-o cutie cu 200 bile albe și 300 bile roșii. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să depășească valoarea 1.

15. Presupunem că avem o sală de laborator în care avem 30 de calculatoare, din care 5 sunt nefuncționale în care fiecare student, a unei grupe de 20 de studenți, ocupă la întâmplare câte un calculator. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul studenților care vor nimeri peste calculatoare nefuncționale. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să varieze între valorile 1 și 4.

16. Considerăm aruncarea unui zar "perfect" de 10000 de ori succesiv, în calitate de v.a.  $\xi$  luând numărul de câte ori apare fața 6. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să varieze între valorile 100 și 300.

17. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de aruncări nereușite a unui zar "perfect" până la prima apariție a unui număr de puncte multiplu lui 3. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să varieze între valorile 100 și 300.

18. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de pestisori roșii înregistrați printre cei 100 de pestisori scoși la întâmplare, fără întoarcere, dintr-un acvariu enorm cu 1000 de pestisori, din care doar 10 sunt de culoare roșie. Se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să depășească valoarea 2.

19. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de PC-uri de același tip supuse unui control, unul câte unul, controlului terminându-se în momentul depistării unui calculator defect. Știind că un PC ales la întâmplare va fi defect este egală cu  $p = 0.05$ , se cere: 1) să se determine repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) să se calculeze probabilitatea ca v.a.  $\xi$  să depășească valoarea 1.

20. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul de numere ghicite, jucând cu o singură variantă la "LOTOSPORT 5 din 35". Scrieți repartiția v.a.  $\xi$ . Care este probabilitatea că, jucând cu o singură variantă la LOTOSPORT "5 din 35", nu vom fi în pierdere, adică vom câștiga ceva?

21. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul format în felul următor: dintr-o cutie cu 9 bile numerotate de la 1 la 9 sunt extrase la întâmplare, succesiv, cu întoarcere, 2 bile, formând astfel un număr din două cifre, prima cifră fiind numărul primei bile, iar cea de a doua cifră, fiind numărului celei de a doua bile extrase. 1) Determinați repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) Calculați probabilitatea ca numărul  $\xi$  să nu depășească valoarea 50.

22. Un dispozitiv electronic constă din 1000 de elemente, astfel încât fiecare element poate ieși din funcțiune, independent unul de celelalte, pe o durată de timp  $T$ , cu o singură probabilitate  $p = 5 \cdot 10^{-4}$ . Notăm prin  $\xi$  numărul total de elemente ieșite din funcțiune pe durata de timp  $T$ . 1) Aflați repartiția v.a.  $\xi$ ; 2) Calculați probabilitatea ca pe durata  $T$  să nu ieșă din funcțiune niciun element.

23. Considerăm în calitate de v.a.  $\xi$  numărul format în felul următor: dintr-o cutie cu 9 bile numerotate de la 1 la 9 sunt extrase la întâmplare, succesiv,

fara intoarcere, 2 bile, formand astfel un numar din doua cifre, prima cifra fiind numarul primei bile, iar cea de a doua cifra, fiind numarul celei de a doua bile extrase. 1) Determinati repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca numarul  $\xi$  nu va intrece valoarea 90.

24. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de aruncari a doua zaruri "perfecte " până când, prima data, *suma* punctelor aparute va fi un numar multiplu lui 3. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 1000.

25. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de "succese" la aruncarea a doua zaruri "perfecte " de 5000 de ori, considerand "succes" la fiecare aruncare faptul ca *produsul* punctelor aparute va fi un numar multiplu lui 3. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 1000.

26. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de aruncari a doua zaruri "perfecte " până când, prima data, *minimul* punctelor aparute va fi un numar multiplu lui 3. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 1000.

27. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de "succese" la aruncarea a doua zaruri "perfecte " de 5000 de ori, considerand "succes" la fiecare aruncare faptul ca *maximul* punctelor aparute va fi un numar multiplu lui 3. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 1000.

28. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de elevi care au fost depistati ca fiind infectati TBC, dintr-un numar total de 1000 de elevi supusi controlului medical , daca se stie ca de aceasta infectie este afectata 0.1% din populatie. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 100.

29. Presupunem ca un an va fi unul secetos, independent de anii precedenti, cu probabilitatea 0.05. Notam prin  $\xi$  numarul de ani nesecetosi inregistrati pana la inregistrarea pentru prima data a unui an secetos. 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 100.

30. O companie de asigurari are incheiate 10000 de polite de asigurare anuala de tip RCA. Consideram in calitate de v.a.  $\xi$  numarul total de despagubiri pe care le va plati compania pe parcursul unui an. Stiind ca probabilitatea unei avrii auto este egala cu  $p = 0.001$  : 1) Aflat repartitia v.a.  $\xi$ ; 2) Calculati probabilitatea ca valoarea lui  $\xi$  va depasi 100.

31. Numărul  $\xi$  de particule alfa emise de un gram de substanță radioactivă într-o secundă este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de particule alfa emise într-o secundă. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{într-o secundă vor fi emise nu mai mult de două particule alfa}\}$  și  $B = \{\text{într-o secundă vor fi emise cinci particule alfa}\}$ ,  $C = \{\text{într-o secundă vor fi emise mai mult de zece particule alfa}\}$ . Care este numărul de particule alfa care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 0,25$ .

32. Numărul  $\xi$  de apeluri telefonice inregistrate la Urgenta Mecicala in 24 de ore este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de apeluri telefonice inregistrate in 24 de ore. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{în 24 de ore}$

*fi inregistrate cel mult 100 de apeluri telefonice*} și  $B = \{\text{în 24 de ore vor fi inregistrate exact 100 de apeluri telefonice}\}$ ,  $C = \{\text{în 24 de ore vor fi inregistrate mai mult de 1000 de apeluri telefonice}\}$ . Aflati numărul de apeluri telefonice inregistrate în 24 de ore, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 100$ .

33. Numărul  $\xi$  de pene de curent inregistrate la un Centru de Calcul pe parcursul unui an este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de pene de curent electric inregistrate pe parcursul unui an. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{într-un an vor fi inregistrate cel mult 10 pene de curent}\}$  și  $B = \{\text{într-un an vor fi inregistrate exact 10 pene de curent}\}$ ,  $C = \{\text{într-un an vor fi inregistrate mai mult de 100 pene de curent}\}$ . Aflati numărul de pene de curent inregistrate într-un an, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 10$ .

34. Numărul  $\xi$  de erori de programare comise de un programator la elaborarea unui soft de proporții este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de erori de programare comise de programator la elaborarea unui astfel de soft. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{vor fi comise cel mult 10 erori de programare}\}$  și  $B = \{\text{vor fi comise exact 10 erori de programare}\}$ ,  $C = \{\text{numărul de erori de programare comise va varia între 100 și 500}\}$ . Aflati numărul de erori de programare comise la elaborarea unui soft de proporții, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 50$ .

35. Numărul  $\xi$  de bacterii descoperite într-o picatura de apă luată dintr-un lac este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de bacterii descoperite într-o picatura de apă. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{vor fi descoperite cel mult 10 bacterii}\}$  și  $B = \{\text{vor fi descoperite exact 10 bacterii}\}$ ,  $C = \{\text{numărul de bacterii va varia între 500 și 5000}\}$ . Aflati numărul de erori de programare comise la elaborarea unui soft de proporții, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 1000$ .

36. Numărul de accidente aviatice inregistrate anual la o anumită companie aviatică este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de accidente aviatice inregistrate anual. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{într-un an vor fi inregistrate cel mult 5 accidente}\}$  și  $B = \{\text{într-un an vor fi inregistrate exact 5 accidente}\}$ ,  $C = \{\text{numărul de accidente inregistrate într-un an va varia între 10 și 20 accidente}\}$ . Aflati numărul de accidente inregistrate într-un an, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 0.1$ .

37. Numărul de stafide descoperite într-un cozonac cu stafide ales la întâmplare dintr-o partidă de astfel de cozonaci este o v.a. cu repartiția Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numărul mediu de stafide care pot fi descoperite într-un astfel de cozonac. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{\text{vor fi descoperite cel mult 10 stafide}\}$  și  $B = \{\text{vor fi descoperite exact 10 stafide}\}$ ,  $C = \{\text{numărul de bacterii va varia între 500 și 1000}\}$ . Aflati numărul de stafide descoperite într-un cozonac cu

stafide ales la intamplare, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 10$ .

38. Numarul de grindine inregistrate pe  $m^2$  in timpul unei ploii cu grindina este o v.a. cu repartitia Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numarul mediu de grindine inregistrate pe  $m^2$ . 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{ \text{pe o suprafata de } 1 \text{ m}^2 \text{ vor fi inregistrate cel mult } 50 \text{ de grindine} \}$  și  $B = \{ \text{vor fi descoperite exact } 50 \text{ de grindine} \}$ ,  $C = \{ \text{numarul de bacterii va varia intre } 100 \text{ si } 200 \}$ . Aflati numărul de stafide descoperite într-un cozonac cu stafide ales la intamplare, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 30$ .

39. Numarul de accidente auto inregistrate in or. Chisinau in 24 de ore este o v.a. cu repartitia Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numarul mediu de accidente auto in acest interval de timp. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{ \xi \leq 5 \}$  și  $B = \{ \xi = 5 \}$ ,  $C = \{ 5 \leq \xi \leq 10 \}$ . Aflati numărul de accidente auto, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 0.5$ .

40. Numărul anual de decese printre asigurații unei companii de asigurare este o v.a. cu repartitia Poisson cu parametrul  $a$ , unde  $a$  este numarul mediu de decese anual. 1) Să se determine repartiția v.a.  $\xi$ . 2) Să se calculeze probabilitățile evenimentelor:  $A = \{ \xi \leq 10 \}$  și  $B = \{ \xi = 10 \}$ ,  $C = \{ 10 \leq \xi \leq 20 \}$ . Aflati numărul anual de decese printre asigurații unei companii de asigurare, care corespunde celei mai mari probabilități? Să se considere că  $a = 3$ .

**În problemele 41-50 avem de a face cu o v.a.  $\xi$  definită de densitatea ei de repartiție  $f(x)$ . Să cere să se determine: 1) coeficientul  $k$  și reprezentarea v.a.c.  $\xi$  în Sistemul Mathematica; 2) sa se traseze graficul d.r.  $f(x)$ ; 3) să se afle f.r.  $F(x)$  și să se traseze graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) coeficientul de variație; 8) momentele inițiale de ordinele până la 4 inclusiv; 9) momentele centrale de ordinele până la 4 inclusiv; 10) asimetria; 11) excesul; 12) probabilitatea ca v.a.  $\xi$  a lua valori din prima jumătate a intervalului de valori posibile. Funcția  $f(x)$  este dată pentru fiecare problemă aparte.**

41.

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1), x \in [1, 3], \\ 0, x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

42.

$$f(x) = \begin{cases} k(x-2), x \in [2, 4], \\ 0, x \notin [2, 4]. \end{cases}$$

43.

$$f(x) = \begin{cases} kx, x \in [0, 3], \\ 0, x \notin [0, 3]. \end{cases}$$

44.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, x \in [0, 1], \\ 0, x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

45.

$$f(x) = \begin{cases} kx^3, x \in [0, 2], \\ 0, x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

46

$$f(x) = \begin{cases} k \sin x, x \in [0, \pi/2], \\ 0, x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

47.

$$f(x) = \begin{cases} k \cos x, x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0, x \notin [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

48.

$$f(x) = \begin{cases} k \sin x, x \in [0, \pi], \\ 0, x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

49.

$$f(x) = \begin{cases} k \cos x, x \in [0, \pi/2], \\ 0, x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

50.

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, x \in [0, 4], \\ 0, x \notin [0, 4]. \end{cases}$$