1.3. Elemente de Analiză Combinatorie si exemple de aplicatii.

Analiza Combinatorie este o disciplină matematică care *studiază metodele de numarare (sau de calcul) ale tuturor combinarilor ce pot fi alcătuite din elementele unei multimi finite în baza unor reguli prestabilite.* Or, aceasta disciplina are de a face numai cu **multimi finite**.

Analiza combinatorie se bazează esenţial pe doua principii: *Principiul adunării* şi *Principiul înmulţirii.* Dacă A şi B sunt două mulţimi finite, atunci distingem două situaţii, după cum cele două mulţimi pot fi disjuncte sau nu. Evident are loc

Principiul adunării (caz disjunct) Dacă A şi B sunt mulţimi finite şi disjuncte, adică $A \cap B = \emptyset$, $card(A) = n$ şi $card(B) = m$, atunci

$$card(A \cup B) = n + m \qquad \mathbf{(1)}$$

Corolar. Daca $A_1, A_2, ..., A_k$ sunt mulţimi finite disjuncte două câte două, atunci

$$card(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} A_i) = \sum_{i=1}^{k} card A_i \quad \mathbf{(2)}$$

Principiul adunării (caz general). Dacă A şi B sunt mulţimi finite, $A, B \subseteq \Omega$, $card(A) = n$, $card(B) = m$ şi $card(A \cap B) = k$, atunci $card(A \cup B) = n + m - k$.

Demonstraţie. Folosind proprietăţile operaţiilor asupra mulţimilor, deducem că oricare ar fi mulţimile A, $B \subseteq \Omega$ avem :

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),\ B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B),$$
$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Conform principiului adunării în cazul disjunct obţinem:

$$card(A) = card(A \cap B) + card(A \cap \overline{B}), card(B) = card(A \cap B) + card(\overline{A} \cap B),$$

$$card(A \cup B) = card(A \cap B) + card(A \cap \overline{B}) + card(\overline{A} \cap B) + card(A \cap B) - card(A \cap B)$$

$$= card(A) + card(B) - card(A \cap B) = n + m - k. \ \Box$$

Exerciţiul 1. Folosind inducţia matematică deduceţi Principiul adunării pentu un număr arbitrar k de mulţimi finite $A_1, A_2, ..., A_k$.

Exemplul 1. Considerăm o grupă de studenţi despre care ştim că 20 de studenţi cunosc limba engleză, 15 limba franceză, 10 limba germană, 5 limbile engleză şi franceză, 5 limbile franceză şi germană,4 limbile engleză şi germană şi 1 student limbile engleză, franceză şi germană. Câţi studenţi sunt în grupă ?

Notând prin E, F şi G mulţimile de studenţi care posedă, respectiv, limba engleză, franceză, germană şi ţinând cont de datele problemei, deducem: $cardE = 20$, $cardF = 15$, $cardG = 10$, $card(E \cap F) = 5$, $card(E \cap G) = 4$, $card(F \cap G) = 5$, $card(E \cap F \cap G) = 1$ şi atunci

$$card(E \cup F \cup G) = card(E) + card(F) + card(G) - card(E \cap F) - \\ card(E \cap G) - card(F \cap G) + card(E \cap F \cap G) = 32.$$

Principiul înmulţirii în limbajul produsului cartezian. *Dacă* A şi B *sunt două mulţimi finite astfel încât* $card(A) = n$ şi $card(B) = m$, *atunci*

$$card(A \times B) = n \cdot m. \; \mathbf{(3)}$$

Demonstraţie. Este evident ca dacă

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_m\},$$

atunci mulţimile $A\times\ B$ şi $\{\ (i,j) \,\big|\, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ au acelaşi număr de elemente. Daca în sistemul cartezian de coordonate xOy vom plasa valorile $i = \overline{1,n}$ pe axa Ox iar valorile $j = \overline{1,m}$ pe axa Oy, atunci elementului (i,j) îi corespunde punctul (i,j) din planul xOy, având, astfel, în planul xOy o reţea de $n \cdot m$ puncte. $\square$

Pentru orice număr k de mulţimi finite, aplicând metoda inducţiei matematice, putem demonstra că are loc formula:

$$card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} cardA_i. \qquad \mathbf{(4)}$$

Demonstraţia ei se bazează esential pe faptul ca are loc egalitatea $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{i-1}) \times A_i$, $i = \overline{2,k}$,.

Principiul înmulţirii în limbajul produsului cartezian poate fi reformulat *în limbajul acţiunilor.*

Principiul înmulţirii în limbajul acţiunilor. *Dacă o acţiune poate fi realizată în k etape succesive astfel încât etapa i poate fi realizată în n_i modalităţi, $i = \overline{1,k}$, atunci această acţiune poate fi realizată în $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ modalităţi.*

Exemplul 2. Presupunem ca un safeu poate fi deschis cunoscând un cod de forma

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6 \ ,$$

unde $i_k = \overline{0,9}$, $k = \overline{1,6}$. Cu ce este egal numărul total de coduri diferite ce pot fi alcatuite in acest mod.

Multimea Ω a tuturor codurilor posibile coincide cu produsul cartezian a mulţimii $\{0,1,2,...,9\}$ de 6 ori cu ea însăşi, adică

$$\Omega = \left\{(i_1, i_2, ..., i_6) \ \mid i_k \in \{1,2,...,9\} \, , \ k = \overline{1,6}\right\}.$$

Aceasta are, conform Principiului înmulţirii în limbajul produsului cartezian,10^6 elemente.

Exemplul 3. Dacă avem informaţia ca acest cod din exemplul anterior este format din cifre diferite atunci numarul total al codurilor diferite descreşte. Într-adevăr, a forma un cod din 6 cifre diferite este echivalent cu a efectua o acţiune în 6 etape succesive, astfel încât prima etapă poate fi realizată în 10 modalităţi, cea de a doua în 9 modalităţi,etc., ultima (a şasea) în $10-(6-1) = 5$ modalităţi. Conform *Principiului înmulţirii în limbajul acţiunilor*, numărul tuturor evenimentelor elementare este egal cu $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Observam, ca, spre deosebire de exemplul anterior, aplicarea principiului inmulţirii in limbajul produsului cartezian devine defectuoasă.

Definiţia 1. Fie A o mulţime formată din n elemente diferite, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, atunci *vom numi aranjament din n elemente luate câte k orice mulţime ordonată de forma $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$ cu proprietatea că $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$, $a_{i_j} \in A$, $i_j = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$.* Evident, noţiunea are sens pentru $k = \overline{1,n}$. Mulţimea tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează cu $\mathcal{A}_n^k$, adica

$$\mathcal{A}_n^k = \left\{(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}) \ \mid i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k, \ a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,k}\right\}.$$

Definiţia 1 *Cardinalul acestei mulţimi se notează cu A_n^k şi este numărul tuturor aranjamentelor din n elemente luate câte k.*

Conform principiului înmulţirii în limbajul acţiunilor, a construi un *aranjament din n elemente luate câte k* este echivalent cu a realiza o acţiune în k

etape succesive, astfel încât prima etapă poate fi realizată în n modalităţi, cea de a doua în $n-1$ modalităţi, etc., ultima (etapa nr. k) în $n-(k-1) = n-k+1$ modalităţi. Or, numărul tuturor aranjamentelor din n elemente luate câte k este egal cu

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \textbf{(5)}$$

Prin definiţie, atunci când $k = n$, aranjamentul se numeşte *permutare de n elemente*. Deci mulţimea tutror permutărilor de n elemente notată prin $\mathbf{P}_n$ coincide cu $\mathcal{A}_n^n$, ceea ce înseamnă ca *numărul tutror permutărilor de n elemente* P_n este egal cu A_n^n, adică

$$P_n = n!. \ \textbf{(6)}$$

Definiţia 2. *Orice submulţime de forma* $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}\}$, $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$, $a_{i_j} \in A$, $i_j = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, *se numeşte combinare din n elemente luate câte k*. Evident noţiunea are sens pentru $k = \overline{1,n}$. Mulţimea tuturor combinărilor de n elemente luate câte k elemente o vom nota prin

$$\mathcal{C}_n^k = \left\{ \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}\} \mid i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k,\ a_{i_j} \in A, i_j = \overline{1,n}, j = \overline{1,k} \right\}.$$

Cardinalul acestei mulţimi îl vom nota cu $\mathbb{C}_n^k$.

Observvăm ca dintr-o *combinare din n elemente luate câte k* putem forma $k!$ *aranjamente din n elemente luate câte k*. Or, a forma un aranjament din n elemente luate câte k este echivalent cu a realiza o acţiune în două etape succesive:

1. alegem o combinare din n elemente luate câte k, etapă pentru care avem $\mathbb{C}_n^k$ modalităţi de a o efectua;

2. din această combinare, formăm un aranjament din n elemente luate câte k, etapă care se poate realiza în A_n^k modalităţi.

Rezultă că $A_n^k = k! \cdot \mathbb{C}_n^k$, adică

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \textbf{(7)}$$

Exerciţiul 2 .Demonstraţi ca daca A este o mulţime formată din n elemente diferite, atunci $Card\{\ B \mid B \subseteq A\ \} = 2^n$.

Exemplul 4. Considerăm că avem o mulţime de n elemente astfel încât n_1 elemente sunt de tipul 1, n_2 elemente sunt de tipul 2, $\cdots$, n_k elemente sunt de tipul k, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Alegem la întâmplare, unul câte unul, toate elementele mulţimii şi le aranjăm în ordinea extragerii lor. Să se calculeze cardinalul numărul total de rezultate posibile in acest experiment.

Notăm prin Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile in acest experiment. Pentru a alcătui un rezultat posibil, corespunzător acestui experiment, este suficient să realizăm o acţiune în k etape succesive.

Etapa 1: din n locuri disponibile pentru a aranja elementele extrase, alegem n_1 locuri pe care vom plasa elementele de tipul1. Această acţiune o putem realiza în $\mathbb{C}_n^{n_1}$ modalităţi;

Etapa 2: din cele $n-n_1$ locuri, disponibile dupa etapa 1 , alegem n_2 locuri pe care vom plasa elementele de tipul 2. Această acţiune o putem realiza în $\mathbb{C}_{n-n_1}^{n_2}$ modalităţi, etc.,

Etapa k: din cele $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} = n_k$ locuri, disponibile dupa etapa k, alegem n_k locuri pe care vom plasa elementele de tipul k. Această acţiune o putem realiza în $\mathbb{C}_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \mathbb{C}_{n_k}^{n_k}$ modalităţi.

Conform principiului înmulţirii, avem :

$$card(\Omega) = \mathbb{C}_n^{n_1} \cdot \mathbb{C}_{n-n_1}^{n_2} \cdot \cdots \cdot \mathbb{C}_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Formula obţinută este, de fapt, *formula de calcul pentru* $P(n_1, n_2, ..., n_k)$, *numărul permutărilor a* n *elemente, din care* n_1 *elemente sunt de tipul* 1, n_2 *elemente sunt de tipul* 2, $\cdots$, n_k *elemente sunt de tipul* k, $n_1+n_2+...+n_k = n$:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}. \qquad \mathbf{(7)}$$

Ultima mai poarta denumirea de *formula permutarilor cu repetare.*

Exemplul 7. Presupunem că avem la dispoziţie 10 cartonaşe marcate cu litere astfel: M, M, A, A, A, T, T, I, E, C. Un copil se joacă, extăgând la întâmplare câte un cartonaş şi aranjându-l în ordinea extragerii. Câte cuvinte diferite sunt posibile in acest caz?

Întrucât considerăm cartonaşele marcate la fel ca fiind de acelaşi tip, rezultă că avem 2 cartonaşe de tip M, 3 cartonaşe de tip A, 2 cartonaşe de tip T, 1 cartonaş de tip I, 1 cartonaş de tip E şi 1 cartonaş de tip C. Notăm prin Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile in acest experiment. Atunci, folosind formula dedusă mai sus, tinand cont ca rezultatul aranjării cartonaşelor in ordine extragerii lor defineste un cuvant, obtinem ca numarul cuvintelor diferite ce pot fi obtinute astfel se calculeaza dupa formula:

$$card(\Omega) = \frac{10!}{3!2!1!1!1!}$$

Exemplul 8. Presupunem că dispunem de n cutii şi r bile identice. Plasăm bilele, una câte una, la întâmplare, în una din cutii. Să se calculeze cardinalul multimii tuturor rezultatelor posibile in acest experiment.

În cele ce urmează vom reprezenta n cutii prin intermediul a $n+1$ bare verticale, iar r bilel prin intermediul a r asteriscuri. De exemplu, situaţia când 5 bile identice, fiind plasate in 3 cutii astfel încât in prima cutie nimeresc 0 bile, in cutia a doua 2 bile şi în cutia a treia 3 bile poate fi reprezentată astfel:

$$|| ** | *** |;$$

iar situaţia când toate bilele nimeresc in prima cutie poate fi reprezentată astfel:

$$| ***** ||| .$$

Or, pentru o astfel de reprezentare schematică avem nevoie de $n+1$ locuri pentru bare (pereţii cutiilor) şi r locuri pentru asteriscuri (bile). Din exemplele aduse vedem că orice repartizare concretă a r bile identice în n cutii este univoc determinata de pozitia a $n-1$ bare (pereţi) interioriare si a r asteriscuri (bile) pe cele $r+n-1$ locuri interioare, cele două bare (pereţi) exterioare rămânând de fiecare dată fixe. Drept consecinţă alegerea a $n-1$ locuri pentru bare (sau r locuri pentru asteriscuri) din totalul de $n+r-1$ locuri, poate fi făcută în $\mathbb{C}_{n+r-1}^{n-1} = \mathbb{C}_{n+r-1}^{r}$ modalităţi, $\mathbb{C}_{n+r-1}^{r}$ find cunoscut ca numărul *combinarilor din n elemente luate câte r cu repetare.*