Примером функции, удовлетворяющей теореме Ролля и имеющей в некоторой точке определённого знака бесконечную производную, является функция

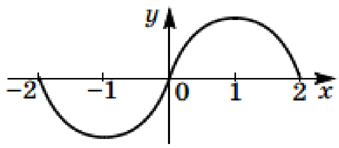

Рис. 55

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-1)^2}, 0 <= x <= 2, \\ -\sqrt{1-(x-1)^2}, -2 <= x <= 0. \end{cases} \quad (1)$$

Эта функция непрерывна на отрезке [-2, 2], дифференцируема во всех точках интервала (-2, 2), кроме точки x = 0, в которой f'(0) = $+\infty$ и f(-2) = f(2) (рис. 55). В согласии с теоремой Ролля у неё имеется точка (даже две), в которой производная равна нулю (x = ± 1). Графиком этой функции являются две полуокружности, сопряжённые в точке (0; 0).

Этот пример показывает целесообразность рассмотрения в данном случае не только функций, имеющих конечные производные, но и функций с определённого знака бесконечными производными.

Заметим, что построением соответсвующих примеров (если, конечно, это удасться сделать) и проверяют обычно в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем.

В дальнейшем мы не будем проверять необходимость условий теорем, проедоставляя это делать читателю по мере внутренней потребности.

Из теоремы Ролля следует, что если функция непрерывна на некоторм отрезке, обращается в нуль на его концах и дифференциируема во всех его внутренних точках, то существует его внутренняя точка, в которой производная обращается в нуль. Короче говоря, *между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один нуль её производной.*

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке [a, b] и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 ξ_2, что f'(ξ_1) > 0 b f'(ξ_2) < 0.

2. Привести пример функции, непрерывной на отрезке [a, b] имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), но не имеющей производной (односторонней) в точке a.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Лагранжа[1]). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и в каждой точке интервала (a, b).*

[1]Ж.-Л. Лагранж (1736-1813) - французский математик и механик.