

Effet des perturbations humaines sur l'alimentation des narvals

Yanis BEN BELGACEM, Vadim BERTRAND, Alicia LORANDI, Angélique SAILLET

Sommaire

1 Modélisation de l'effet de l'exposition sur le taux d'émission	2
1.1 Processus de Poisson	2
1.2 Régression logistique	2
1.2.1 Effet de la profondeur	3
1.2.2 Effet de l'exposition	3
1.3 Non-indépendance des observations	3
1.3.1 Utilisation de modèles mixtes	3
1.3.2 Caractère autorégressif du processus	3
1.4 Effet de médiation de la profondeur	4
1.5 Intervalles de confiance	5
1.5.1 Construction par approche Monte Carlo	5
1.5.2 Estimation de bandes de prédiction via la méthode Delta	5
2 Résultats	6
2.1 Note sur le temps d'ajustement des modèles	6
2.2 Recherche de la mémoire optimale	6
2.3 Régression double bi-exponentielle sur les coefficients autorégressifs	7
2.4 Impact de l'exposition aux perturbations sur le taux d'émission de buzz	8
2.5 Intervalles de confiance	9
2.5.1 Coefficients d'exposition	9
2.5.2 Pourcentage du taux normal d'émission de buzz	16

Les narvals sont des baleines vivant toute l'année au Groenland. Le réchauffement climatique favorise le recul des glaces sur le territoire groenlandais et ses côtes. Cela ouvre la porte au développement d'activités humaines au Groenland, et notamment des activités minières. Les biologistes se questionnent sur les effets potentiels engendrés sur les comportements des narvals.

Afin d'anticiper ces possibles modifications de comportements une étude a été conduite pendant plusieurs mois en 2018. Dans ce cadre, 8 narvals ont été équipées de capteurs permettant d'enregistrer leur profondeur de plongée, leur localisation et les sons qu'elles émettent. Les baleines ont été laissées libres de toutes perturbations pendant plusieurs jours avant d'y être exposées. Les perturbations ont pris la forme de coups de fusil tirés dans l'eau depuis un bateau afin d'imiter les ondes émises par des activités minières.

Lorsqu'elles se nourrissent, les narvals émettent des sons spécifiques appelés "buzz". À partir des sons collectés il est donc possible de déterminer quand ces baleines sont en train de manger. La distance séparant les baleines du bateau émettant une perturbation peut-elle être calculée grâce aux puces GPS placées sur les narvals. Ainsi, nous pouvons tenter de modéliser l'effet de l'exposition des perturbations humaines sur l'émission de buzz des narvals et donc indirectement sur leur alimentation.

1 Modélisation de l'effet de l'exposition sur le taux d'émission

1.1 Processus de Poisson

Les données sont collectées toutes les secondes, ainsi nous disposons des temps de collecte T_j et $T_{j+1} = T_j + \Delta$ avec $T_0 = 0$ et $\Delta = 1$ seconde. On peut considérer $N(t)$, le nombre de buzz émis entre le début de la collecte et un instant t , comme un processus stochastique pour lequel $N(0) = 0$ et donnant $N(b) - N(a)$ le nombre de buzz émis dans l'intervalle $[a, b]$.

Les processus de comptage sont classiquement représentés par un processus de Poisson : $N(t + \Delta) - N(t) \sim Pois$. Dans le cas où l'intensité λ du processus dépend de t , on parle de processus non-homogène et :

$$N(t + \Delta) - N(t) \sim Pois\left(\int_t^{t+\Delta} \lambda(u)du\right)$$

On a donc que :

$$\mathbb{P}(N(t + \Delta) - N(t) = k) = e^{-\int_t^{t+\Delta} \lambda(u)du} \frac{(\int_t^{t+\Delta} \lambda(u)du)^k}{k!}$$

En utilisant le développement limité de l'exponentielle et en considérant $\lambda(t)$ constante sur $]t, t + \Delta]$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t + \Delta) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda(t)\Delta + o(\Delta) \\ \mathbb{P}(N(t + \Delta) - N(t) = 1) &= \lambda(t)\Delta + o(\Delta) \\ \mathbb{P}(N(t + \Delta) - N(t) \geq 2) &= o(\Delta) \end{aligned}$$

Ainsi, si Δ est suffisamment petit (de l'ordre de la seconde par exemple), $o(\Delta)$ est négligeable et le processus $Y(t) := N(t + \Delta) - N(t)$ prend uniquement comme valeurs 0 ou 1. On peut alors ramener notre processus de comptage à un processus de Bernoulli : $Y(t) \sim \mathcal{B}(\lambda(t)\Delta)$, ce qui implique :

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \mathbb{P}(Y(t) = 1) = \lambda(t)\Delta \underset{\Delta=1}{=} \lambda(t)$$

1.2 Régression logistique

Nous cherchons à estimer le lien entre l'intensité d'émission de buzz et plusieurs covariables, dont le niveau d'exposition aux perturbations. Nous avons vu dans la section précédente que les variables aléatoires $Y(t)$ de notre processus de comptage sont à valeurs dans 0, 1 et que $\mathbb{P}(Y(t) = 1) = \lambda(t)$. En se plaçant

dans le cadre des modèles linéaires généralisés (GLM) il est donc possible d'exprimer la probabilité $\lambda(t)$ que $Y(t) = 1$ selon un ensemble de covariables $Z(t)$ (détailées dans la suite de cette section) en utilisant le logarithme comme fonction de lien :

$$\log(\lambda(t)) = \beta_0 + Z(t)\beta_Z$$

Ce cas particulier des GLM n'est autre que la régression logistique.

1.2.1 Effet de la profondeur

Pour se nourrir, les narvals doivent plonger profondément (plusieurs centaines de mètres), alors que le reste du temps elles restent “proche” (quelques dizaines de mètres) de la surface. Il faut donc inclure au modèle la profondeur à laquelle se trouvent les baleines quand elles émettent ou non des buzz. La relation entre l'émission de buzz et la profondeur n'étant pas linéaire, la profondeur a été remplacée par une spline cubique naturelle ayant pour noeuds les quantiles 1/3 et 2/3. Nous pouvons expliciter un peu plus l'expression précédente du modèle :

$$\log(\lambda(t)) = \beta_0 + \text{spline}(D(t))\beta_D + \dots$$

1.2.2 Effet de l'exposition

Le niveau d'exposition aux perturbations est représenté par l'inverse de la distance séparant la baleine du bateau quand un coup de feu est tiré. De même que pour la profondeur, la non-linéarité de la relation entre le niveau d'exposition et le taux d'émission de buzz est représentée par l'utilisation d'une spline cubique naturelle dont les noeuds sont les quantiles 1/3 et 2/3 des niveaux d'exposition. Le modèle incluant l'exposition s'écrit donc :

$$\log(\lambda(t)) = \beta_0 + \text{spline}(D(t))\beta_D + \text{spline}(E(t))\beta_E + \dots$$

1.3 Non-indépendance des observations

L'utilisation d'un processus de Poisson pour modéliser nos données de comptage implique l'indépendance des observations $Y(t)$. En pratique ce n'est pas le cas, aussi il faut modifier le modèle défini précédemment pour tenter de compenser cette absence d'indépendance.

1.3.1 Utilisation de modèles mixtes

Les données que nous utilisons correspondent à plusieurs individus, nous avons donc plusieurs observations par individus et celles-ci ne sont pas indépendantes. Pour palier ce défaut de modélisation et tenir compte de la spécificité des individus, nous utilisons des modèles mixtes en ajoutant un effet aléatoire b_i sur l'ordonnée à l'origine :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + \text{b}_i + \text{spline}(D_i(t))\beta_D + \text{spline}(E_i(t))\beta_E + \dots$$

où i dénote l'individu i et $b_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ l'effet aléatoire sur cet individu, σ_i^2 étant la variance intra-individu de i .

1.3.2 Caractère autorégressif du processus

De plus, l'émission d'un buzz à un instant t est corrélé à l'émission ou non de buzz aux instants précédents ; cet effet mémoire doit donc être intégré au modèle pour rendre les $Y_i(t)$ indépendants. Pour cela nous

introduisons K variables binaires d'autorégression codant l'émission d'un buzz aux instants $t - k$, $k \in \{1, \dots, K\}$. Le modèle résultant s'écrit alors :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + b_i + \text{spline}(D_i(t))\beta_D + \sum_{k=1}^K \alpha_k Y_i(t-k) + \text{spline}(E_i(t))\beta_E$$

Cette approche demande de fixer une mémoire maximale, et ainsi la valeur de K . Pour choisir la mémoire maximale optimale, nous avons fait varier K et utilisé le BIC comme mesure de la qualité des différents modèles correspondants sans inclure l'effet de l'exposition :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + b_i + \text{spline}(D_i(t))\beta_D + \sum_{k=1}^K \alpha_k Y_i(t-k)$$

Nous choisissons la mémoire maximale K_{opt} du modèle minimisant ce critère. Pour éviter de parcourir tout l'ensemble $\{K_{min}, \dots, K_{max}\}$, nous avons utilisé une démarche permettant de restreindre le pas de recherche au fur et à mesure que l'on s'approche de K_{opt} :

```

from_k ← K_min; to_k ← K_max                                ▷ Bornes de l'intervalle de recherche
M ← 10                                                       ▷ Nombre d'éléments évalués dans l'intervalle
while (to_k - from_k > 2) do          ▷ On s'arrête quand on évalué l'ensemble du voisinage du minimum
    K ← []
    BIC ← []
    for i ∈ {1, ..., M} do
        K[i] ← from_k + (i - 1) * ⌊ \frac{to_k - from_k}{M-1} ⌋           ▷ Découpage en M éléments équidistants
        ajustement du modèle  $\mathcal{M}$  avec  $K[i]$  éléments mémoire
        BIC[i] ← calcul du BIC de  $\mathcal{M}$ 
    end for
    i_opt ← argmin BIC
    K_opt ← K[i_opt]
    from_k ← K[i_opt - 1]; to_k ← K[i_opt + 1]           ▷ Mise à jour des bornes en encadrant le minimum
end while

```

Le nombre de composants autorégressifs pouvant être grand, nous avons utilisé une régression bi-exponentielle double permettant de lier le décalage mémoire et le coefficient associé :

$$BiExp(lag) = A_1 e^{-e^{lrc_1} lag} + A_2 e^{-e^{lrc_2} lag}$$

Cela permet de réduire le nombre de coefficients de K_{opt} à 4, ce qui est doublement bénéfique : le temps d'ajustement des modèles est grandement réduit et lors de la construction des intervalles de confiance de nos coefficients, l'accumulation des variances est limitée.

Le modèle complet s'exprime donc ainsi :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + b_i + \text{spline}(D_i(t))\beta_D + \sum_{k=1}^{K_{opt}} (A_1 e^{-e^{lrc_1} k} + A_2 e^{-e^{lrc_2} k}) Y_i(t-k) + \text{spline}(E_i(t))\beta_E$$

1.4 Effet de médiation de la profondeur

Il est possible que l'exposition à des perturbations conduisent les narvals à :

1. émettre moins de buzz,
2. moins plonger ou plonger moins profondément.

Mais il existe également un lien entre la profondeur d'immersion des baleines et leur production de buzz. Aussi, il se peut que l'exposition ait un lien direct sur l'émission de buzz et un lien indirect via son effet sur la profondeur.

Afin de représenter uniquement le lien direct, les coefficients des covariables autres que l'exposition sont estimés sans inclure celle-ci à partir des observations effectuées sans soumettre les animaux à des perturbations :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + b_i + \text{spline}(D_i(t))\beta_D + \sum_{k=1}^{K_{opt}} A_1 e^{-e^{lrc_1} k} + A_2 e^{-e^{lrc_2} k} Y_i(t-k)$$

Nous obtenons donc les estimations $\widehat{\beta}_D$, \widehat{A}_1 , \widehat{lrc}_1 , \widehat{A}_2 , \widehat{lrc}_2 qui sont ensuite injectées dans le modèle complet au moyen d'un terme d'"offset" :

$$\text{offset}_i(t) = \text{spline}(D_i(t))\widehat{\beta}_D + \sum_{k=1}^{K_{opt}} (\widehat{A}_1 e^{-e^{\widehat{lrc}_1} k} + \widehat{A}_2 e^{-e^{\widehat{lrc}_2} k}) Y_i(t-k)$$

Le modèle incluant l'exposition est donc reformulé ainsi :

$$\log(\lambda_i(t)) = \beta_0 + b_i + \text{offset}_i(t) + \text{spline}(E_i(t))\beta_E$$

Et les paramètres estimés $\widehat{\beta}_E$ permettront d'interpréter l'effet de l'exposition par rapport à des conditions "normales".

1.5 Intervalles de confiance

1.5.1 Construction par approche Monte Carlo

Pour se rassurer quant à l'interprétabilité des résultats obtenus il est important de construire les intervalles de confiance des estimations des coefficients associés à l'exposition aux perturbations. L'approche classique de calcul des intervalles de confiance se basant sur la seule variance estimée des coefficients d'exposition donnerait ici des résultats incorrects, la variance des coefficients de profondeur et d'autorégression ne serait alors pas prise en compte car tuée par l'utilisation de l'offset. Nous avons donc utilisée l'approche Monte-Carlo suivante :

```

 $M \leftarrow 1000$                                      ▷ Nombre de répétitions de la procédure
 $\widehat{\beta}_E \leftarrow []$ 
for  $i \in \{1, \dots, M\}$  do
     $\widehat{\beta}_D \leftarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(\beta_D), \text{Var}(\beta_D))$            ▷ Tirage aléatoire des coefficients de profondeur et autorégressifs
     $\widehat{A}_1 \leftarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(A_1), \text{Var}(A_1))$ 
     $\widehat{lrc}_1 \leftarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(lrc_1), \text{Var}(lrc_1))$ 
     $\widehat{A}_2 \leftarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(A_2), \text{Var}(A_2))$ 
     $\widehat{lrc}_2 \leftarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(lrc_2), \text{Var}(lrc_2))$ 
    calcul de l'offset avec  $\widehat{\beta}_D$ ,  $\widehat{A}_1$ ,  $\widehat{lrc}_1$ ,  $\widehat{A}_2$ ,  $\widehat{lrc}_2$ 
    ajustement du modèle  $\mathcal{M}$  en fixant l'offset
     $\widehat{\beta}_E[i] \leftarrow$  coefficients de profondeur ajustés de  $\mathcal{M}$ 
end for
 $IC_\alpha \leftarrow [Q_{\alpha/2}^{\widehat{\beta}_E}, Q_{1-\alpha/2}^{\widehat{\beta}_E}]$                                      ▷ Estimation via les quantiles empiriques

```

1.5.2 Estimation de bandes de prédiction via la méthode Delta

Une fois les coefficients d'exposition $\widehat{\beta}_E$ estimés nous pouvons prédire le taux d'émission de buzz sur l'ensemble d'un intervalle de niveau d'exposition aux perturbations. Afin d'associer une bande de confiance à la prédiction moyenne nous avons appliqué la méthode Delta.

Tout d'abord, d'après le Théorème Central Limite on a : $\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ avec $\widehat{\beta}$ les coefficients estimés du modèle et Σ leur variance.

Etant donné que nous utilisons une régression logistique, le taux d'émission est lié aux coefficients du modèle via la relation $\lambda(t) = \exp(X(t)\beta) := f(\beta)$. Ce qui donne pour le gradient de la fonction f : $\nabla f(\beta) = Xf(\beta)$.

Ainsi, quand on applique la méthode Delta on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(f(\widehat{\beta}) - f(\beta)) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \nabla f(\beta)^T \Sigma \nabla f(\beta)) \\ \Leftrightarrow \sqrt{n}(\widehat{\lambda(t)} - \lambda(t)) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda(t)^2 X(t)^T \Sigma X(t)) \\ &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \widehat{\lambda(t)}^2 X(t)^T \widehat{\Sigma} X(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\widehat{\lambda(t)} \sqrt{X(t)^T \widehat{\Sigma} X(t)}} (\widehat{\lambda(t)} - \lambda(t)) &\rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Et on en déduit la bande de confiance au niveau α :

$$IC_\alpha(\lambda(t)) = [\widehat{\lambda(t)} \pm q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}} \frac{\widehat{\lambda(t)} \sqrt{X(t)^T \widehat{\Sigma} X(t)}}{\sqrt{n}}]$$

2 Résultats

2.1 Note sur le temps d'ajustement des modèles

Le temps d'ajustement des modèles, et en particulier des modèles mixtes, augmente fortement lorsque que le nombre de paramètres à ajuster augmentent.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 1 cette augmentation est linéaire pour les modèles classiques, alors que pour les modèles mixtes celle-ci est quadratique.

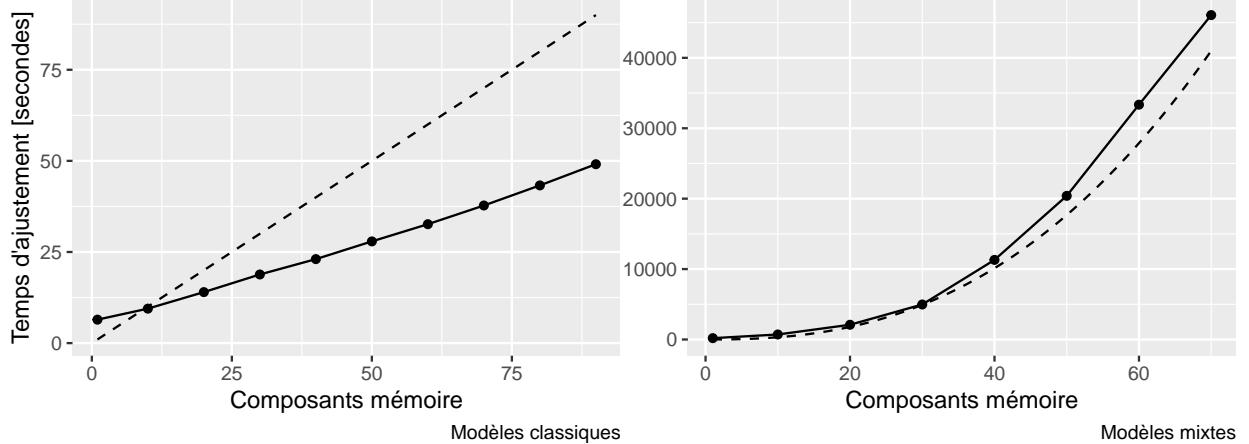


Figure 1: Temps d'ajustement (en secondes) des modèles en fonction de la mémoire maximum.

2.2 Recherche de la mémoire optimale

Le temps d'ajustement des modèles mixtes étant nettement plus important que ceux des modèles sans effets aléatoires, nous avons dans un premier temps exclu ces effets du modèle sans exposition pour estimer la mémoire optimale. Nous avons choisi pour la recherche $K_{min} = 1$, $K_{max} = 300$, $M = 10$ Nous obtenons

une mémoire optimale de 60 secondes. La figure 2 permet de voir que cet optimal semble bien correspondre à un minimum global.

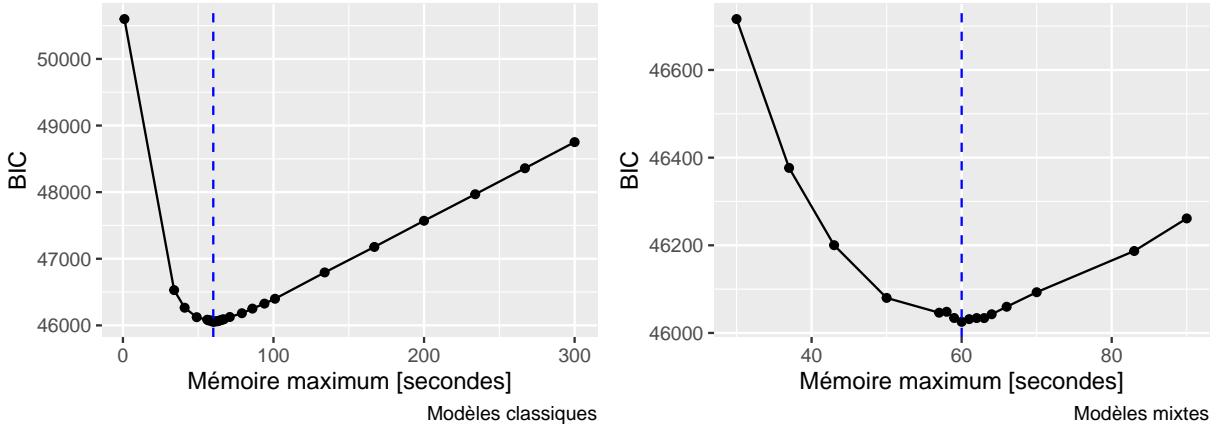


Figure 2: BIC en fonction de la mémoire maximum.

Cela nous a permis de restreindre tout de suite l'ensemble de recherche initial à $K_{min} = 1$, $K_{max} = 300$ quand nous avons considéré le modèle incluant les effets aléatoires. De même que précédemment, nous obtenons une mémoire optimale de 60 secondes et la figure 2 nous laisse penser qu'il s'agit d'un optimum global.

2.3 Régression double bi-exponentielle sur les coefficients autorégressifs

La figure 3 permet de comparer la régression double bi-exponentielle et les composantes de la mémoire ajustées pour un décalage maximum de 60. Nous pouvons constater que l'ajustement par la double bi-exponentielle est très fidèle aux 60 coefficients initiaux.

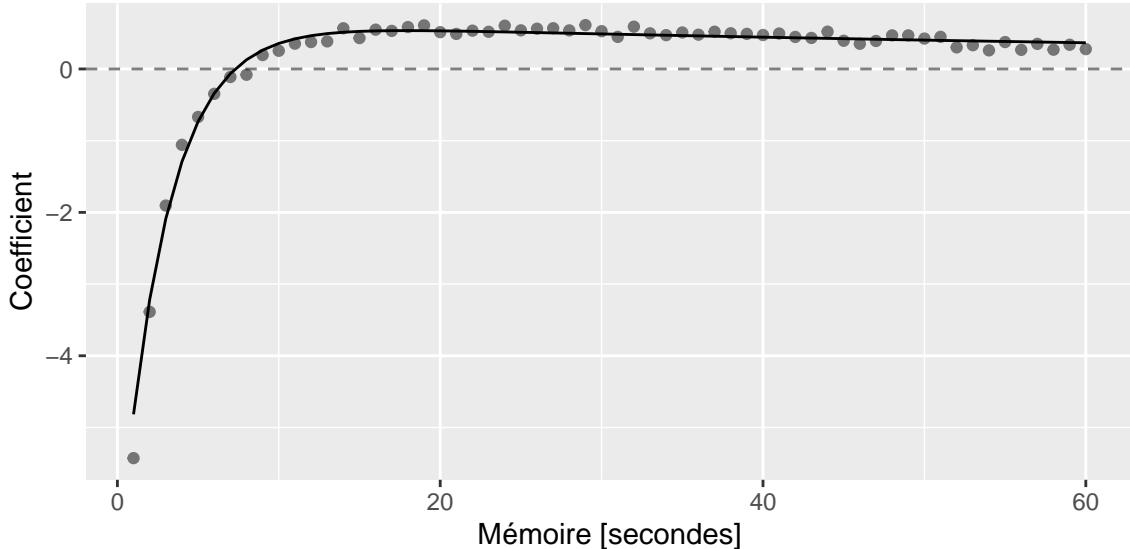


Figure 3: Régression bi-exponentielle des coefficients autorégressifs.

Les 4 coefficients obtenus suite à la régression double bi-exponentielle sont présentés dans la table 1. Nous pouvons noter que leurs erreurs standard sont faibles, ce qui est cohérent avec la validation visuelle de la régression.

Table 1: Coefficients autorégressifs obtenus par régression bi-exponentielle

	moyenne	erreur standard	p-valeur
A_1	-7.7413301	0.3287556	0
lrc_1	-1.0545001	0.0407916	0
A_2	0.6544679	0.0427976	0
lrc_2	-4.6329847	0.1880983	0

2.4 Impact de l'exposition aux perturbations sur le taux d'émission de buzz

La table 2 expose les coefficients associés à l'exposition du modèle mixte. Interpréter les valeurs des coefficients liés à des splines étant peu pertinent, nous préférons nous référer à la lecture de la figure 4 sur laquelle nous représentons les estimations du modèle pour le taux d'émission de buzz selon la distance avec le bateau. Il apparaît alors clairement que plus le bateau est loin, plus le taux d'émission de buzz est élevé.

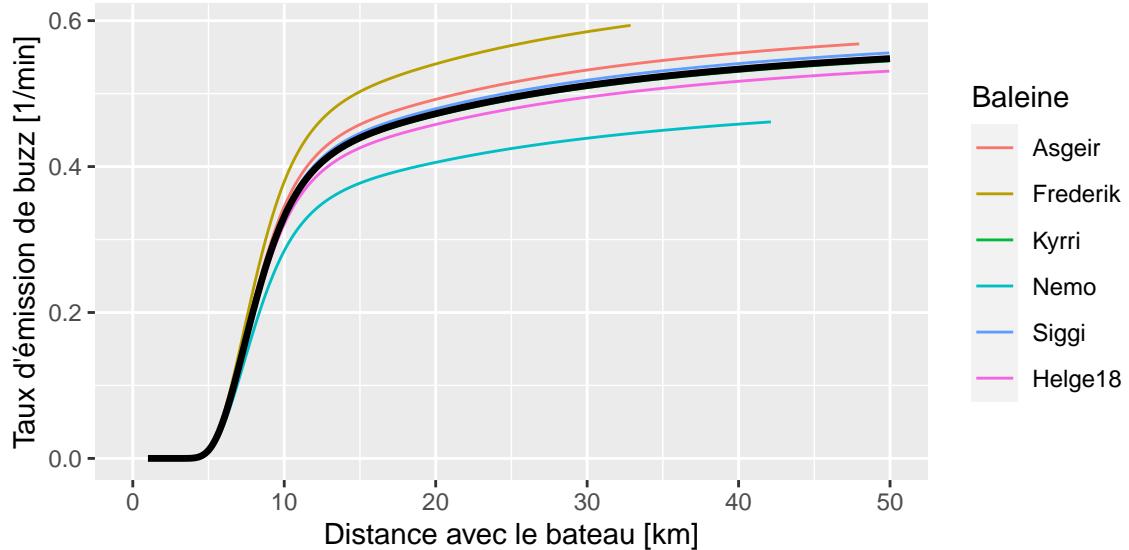


Figure 4: Evolution du taux d'émission de buzz selon la distance au bateau.

Table 2: Coefficients d'exposition.

	moyenne	erreur standard	p-valeur
β_{E_1}	-1.145812	0.0021544	0
β_{E_2}	-58.872353	0.0543014	0
β_{E_3}	-112.790469	0.1069174	0

La figure 5 présente plusieurs graphiques utiles pour valider visuellement le modèle : nous sommes satisfaits de l'absence de corrélation entre les résidus constatée sur les deux premiers et du comportement gaussien visible sur le dernier.

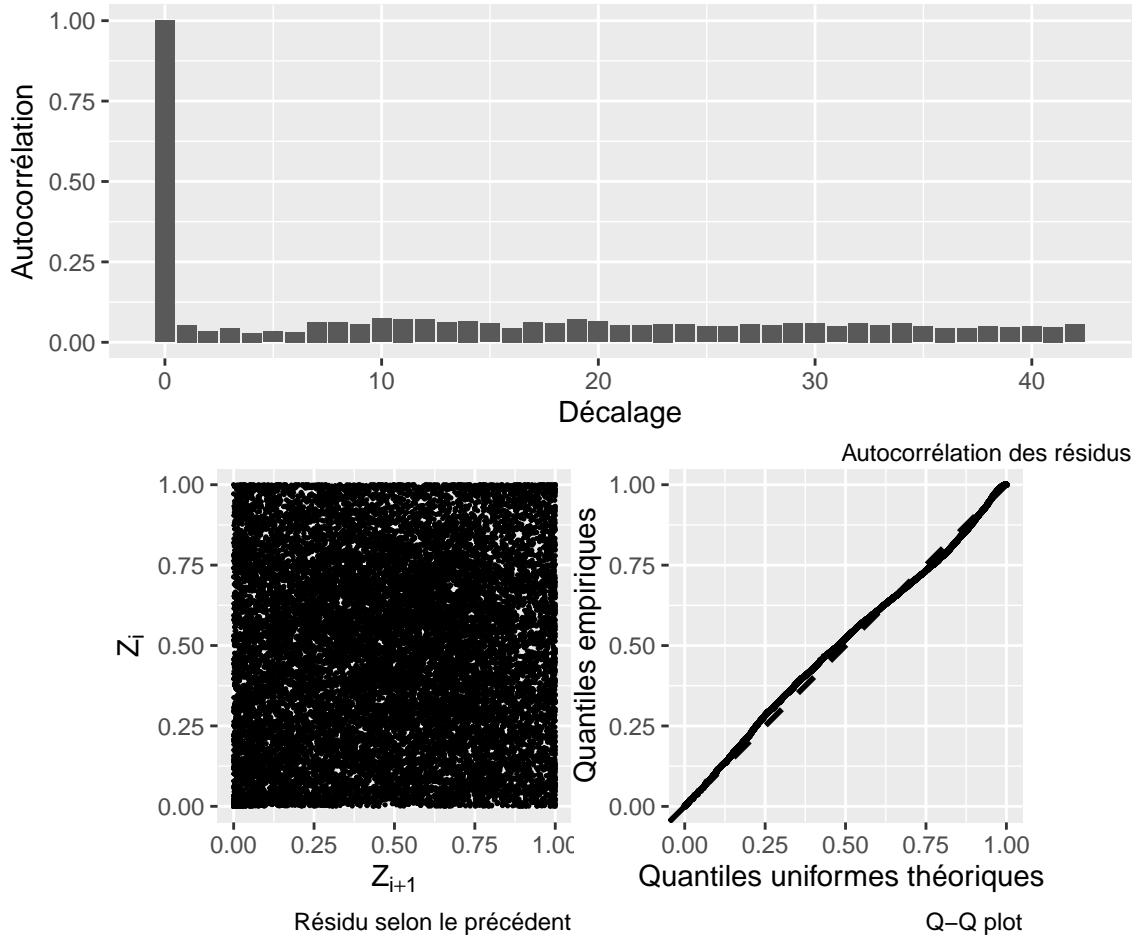


Figure 5: Validation graphique du modèle.

2.5 Intervalles de confiance

2.5.1 Coefficients d'exposition

2.5.1.1 Utilisation de lois normales univariées Dans un premier temps, nous avons considéré que les coefficients autorégressifs et de profondeur suivaient chacun une loi normale centrée sur leur estimation moyenne et avec une variance égale au carré de leur erreur standard. Nous avons donc 4 lois normales univariées pour les coefficients de la régression double bi-exponentielle et 4 autres pour la spline sur la profondeur.

Sur la figure 6 nous avons représenté les courbes des fonctions double bi-exponentielles ainsi générées. Nous pouvons voir que leurs allures semblent toujours suivre celle de la régression initiale.

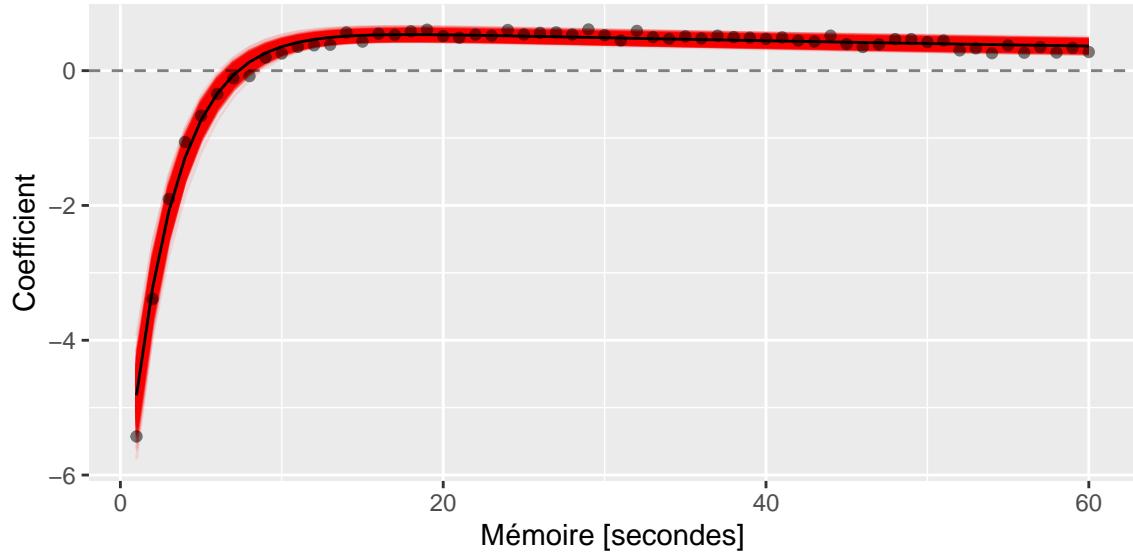


Figure 6: Variation des coefficients autorégressif selon des lois normales univariées.

Nous avons fait de même avec les coefficients de profondeur, et nous pouvons remarquer sur la figure 7 que cette fois-ci l'allure de certaines courbes s'éloignent sensiblement de l'interpolation moyenne.

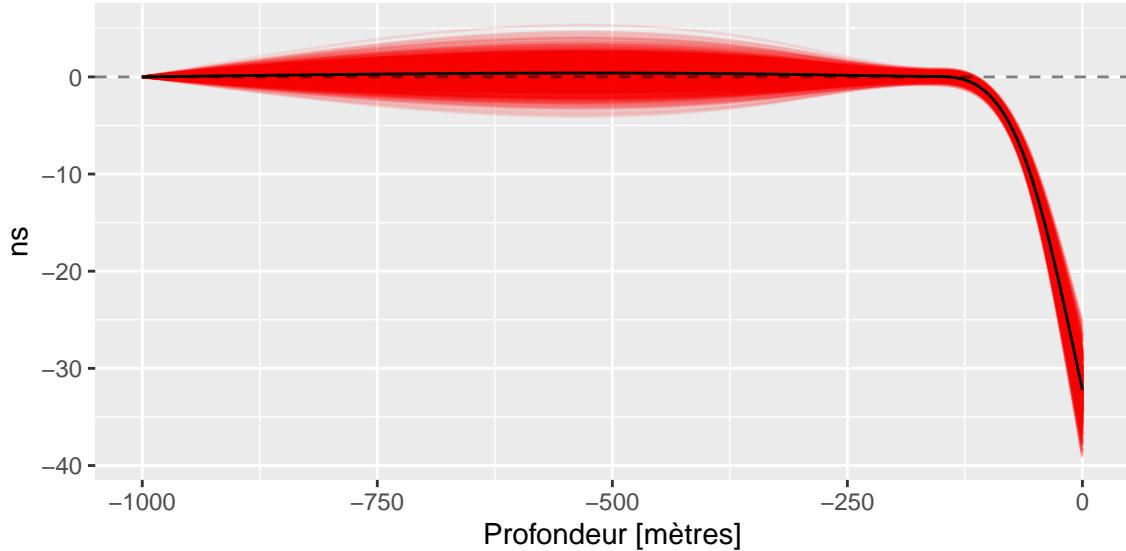


Figure 7: Variation des coefficients de profondeur selon des lois normales univariées.

Les intervalles de confiance calculés avec la procédure Monte Carlo sont donnés sur la table 3. Nous avons également affiché les valeurs médianes des intervalles de confiance calculés à chaque répétition sur la base de la variation des coefficients d'exposition uniquement. Il est flagrant que les intervalles Monte Carlo sont bien plus larges et ne permettent en aucun cas de conclure sur un effet de l'exposition sur le taux d'émission de buzz.

Table 3: Intervalles de confiance dans le cas de normales univariées.

	Monte Carlo		Erreur standard	
	inf	sup	inf	sup
β_0	-6.441511	-2.968321	-4.638673	-4.494102
β_{E_1}	-11.898716	11.294079	-1.430436	-1.422075
β_{E_2}	-152.959472	1.047762	-56.014702	-55.803478
β_{E_3}	-306.428946	11.706679	-106.846662	-106.430830

La figure 8 donne une représentation graphique de ces intervalles (en rouge les “MC” et en bleu les “SE”), ainsi que des distributions des coefficients.

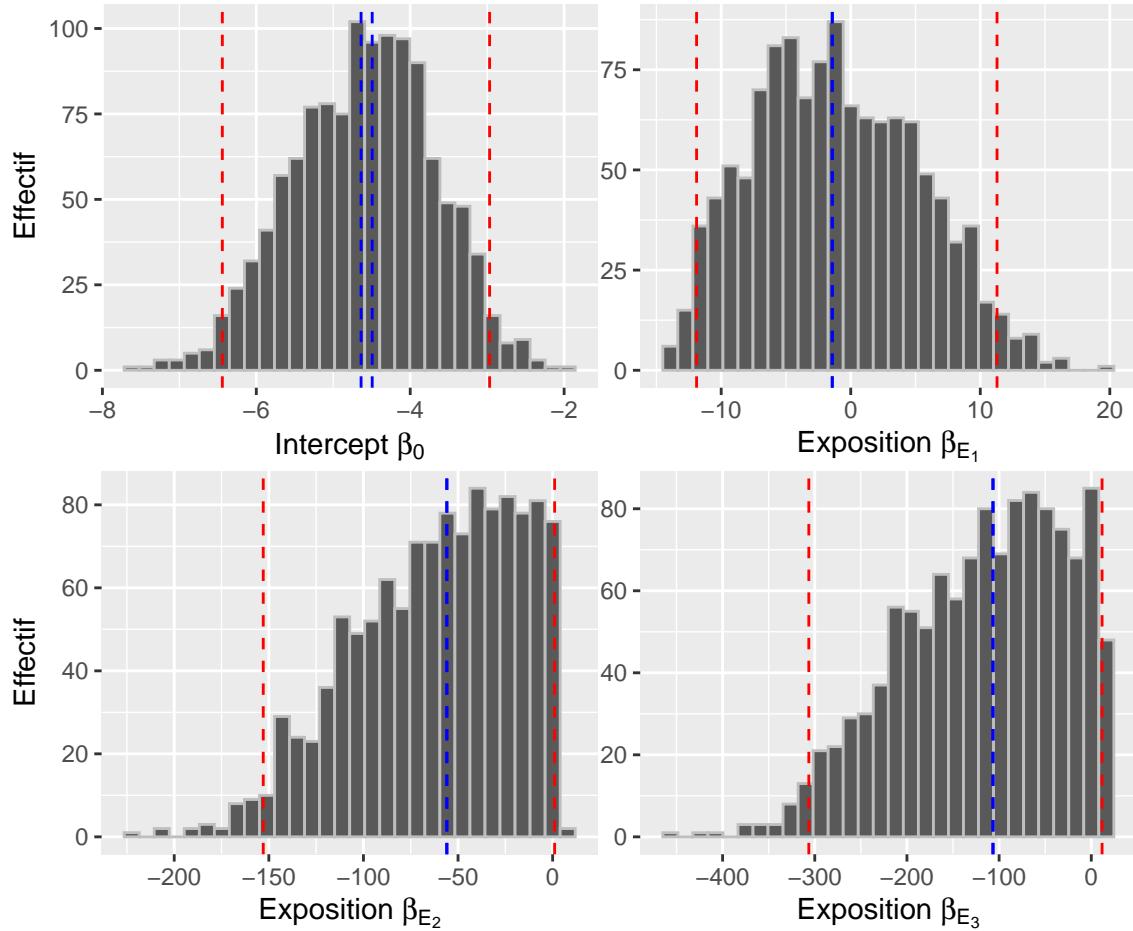


Figure 8: Intervalles de confiance dans le cas de normales univariées.

2.5.1.2 Utilisation d'une loi normale multivariée L'une des explications aux très larges intervalles de confiance observés dans la section précédente pourrait être que nous avons accumulé les variances des coefficients sans tenir compte des probables covariances existant entre les coefficients. Afin de corriger cela nous avons répété l'approche décrite précédemment, mais en tirant les coefficients dans des lois normales multivariées (une pour les coefficients de la régression double bi-exponentielle et une pour les coefficients de la spline) toujours centrées sur les estimations moyennes, mais ayant des matrices de variance-covariance non

diagonales. Dorénavant nous avons donc une loi normale multivariée pour les coefficients de la régression double bi-exponentielle et une autre pour la profondeur, les deux étant de dimension 4.

La figure 9 montre que la régression biexponentielle initiale est encore plus fidèlement suivie qu'auparavant.

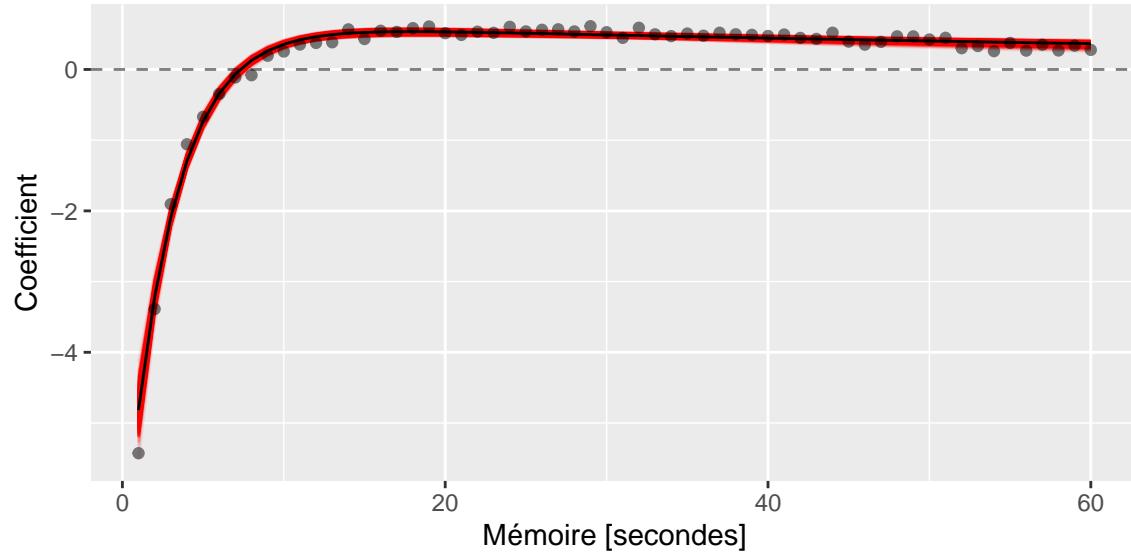


Figure 9: Variation des coefficients autorégressifs selon une loi normale multivariée.

Et surtout, comme nous pouvons le voir sur la figure 10, il en va de même pour la profondeur, alors que précédemment les tirages donnaient des courbes fortement éloignées de celle attendue.

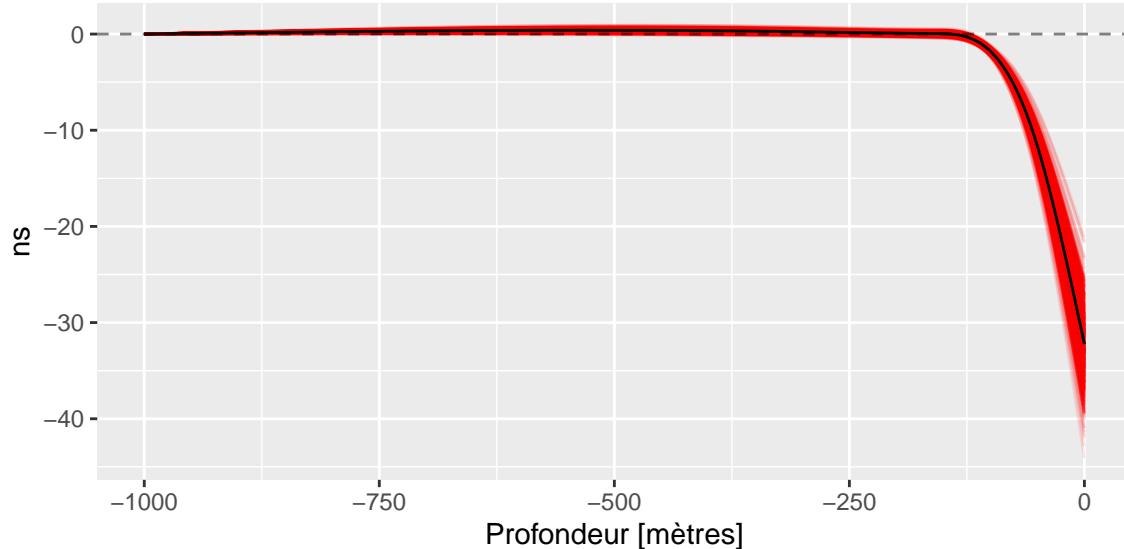


Figure 10: Variation des coefficients de profondeur selon une loi normale multivariée.

Sur la table 4 nous pouvons constater que les intervalles de confiance estimés en utilisant des lois normales multivariées sont nettement plus petits et peuvent conduire à conclure sur un effet de l'exposition sur le taux d'émission de buzz.

Table 4: Intervalles de confiance dans le cas de normales multivariées.

	Monte Carlo		Erreur standard	
	inf	sup	inf	sup
β_0	-4.887771	-4.273240	-4.631902	-4.497720
β_{E_1}	-1.971359	-0.480328	-1.237372	-1.228926
β_{E_2}	-64.614962	-52.023774	-58.309579	-58.096519
β_{E_3}	-124.492842	-98.741635	-111.627518	-111.208774

Nous pouvons également voir sur la figure 11 que les distributions semblent normales, contrairement à celles observées avec les lois univariées.

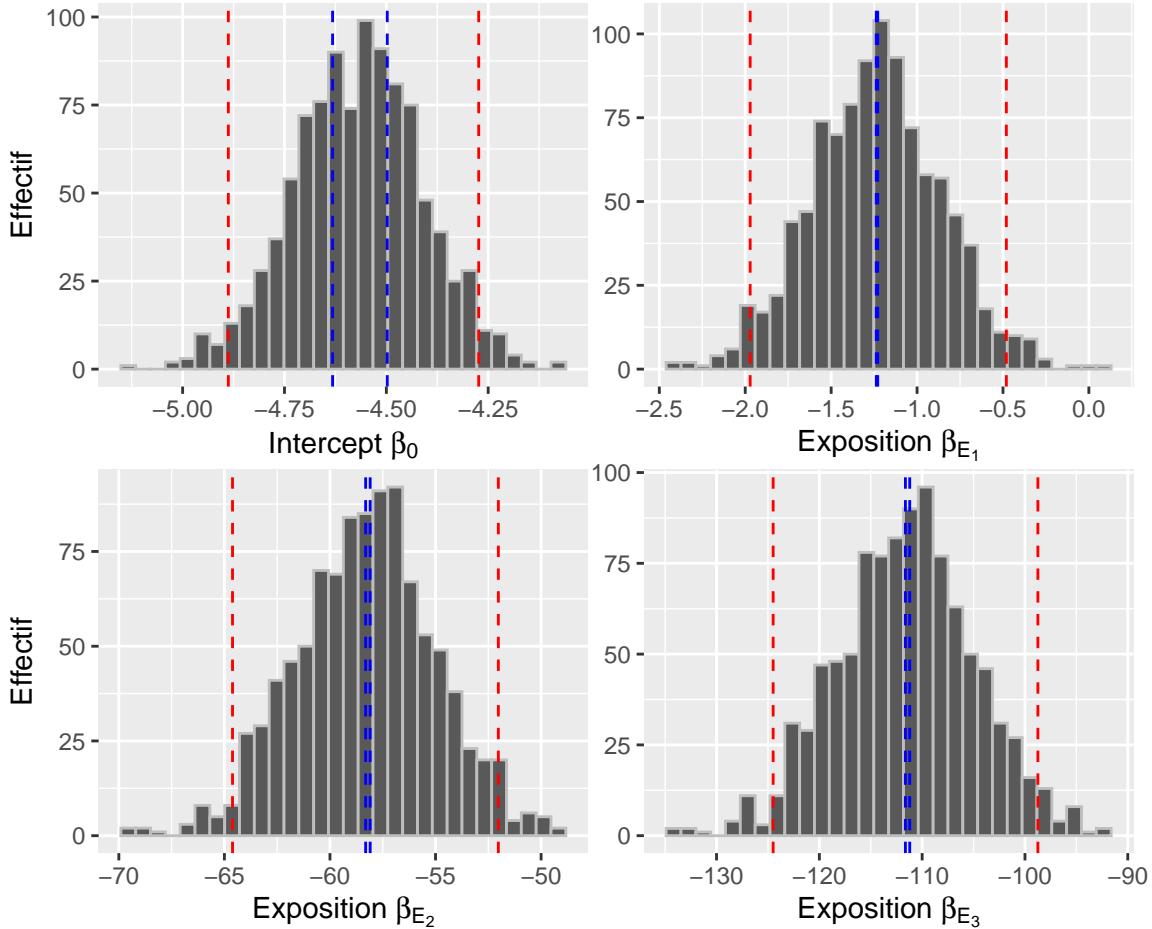


Figure 11: Intervalles de confiance dans le cas de normales multivariées.

2.5.1.3 Variance-covariance des coefficients autorégressifs Bien que plus intéressante, la procédure que nous avons mise en place se base sur la matrice de variance-covariance des coefficients de la régression double bi-exponentielle, ce qui signifie que nous ne captions pas directement la variabilité du phénomène autorégressif mais plutôt celle de la régression double bi-exponentielle. Pour palier cette approximation nous avons tenté d'estimer la matrice de variance-covariance des coefficients autorégressifs, à nouveau par une procédure Monte Carlo. Cette fois-ci nous répétons 1000 fois le tirage des 60 coefficients de mémoire à partir d'une loi normale multivariée et à chaque fois nous ajustons une régression double bi-exponentielle sur les 60

coefficients tirés ; finalement nous pouvons obtenir les estimations moyennes des coefficients de la double bi-exponentielle, ainsi que la matrice de variance-covariance associée. Nous reprenons enfin la procédure Monte Carlo employée dans la section précédente avec le vecteur de moyennes et la matrice de variance-covariance obtenus.

Nous pouvons contrôler sur la figure 12 que les régressions double bi-exponentielles obtenues restent cohérentes.

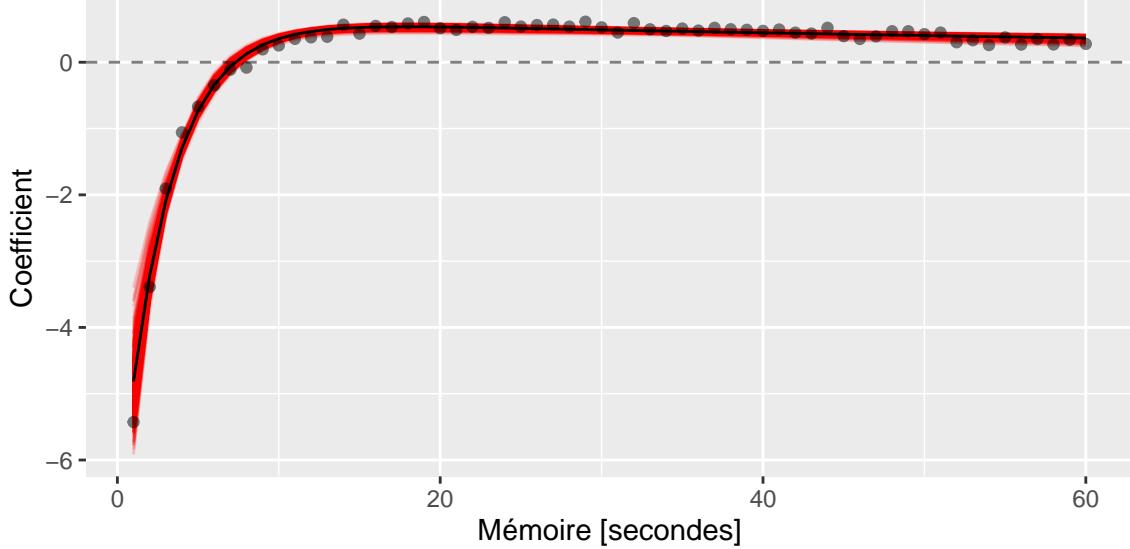


Figure 12: Variation des coefficients autorégressif selon une loi normale multivariée estimée par Monte Carlo.

La table 5 et la figure 13 permettent de vérifier que bien que les intervalles calculés ainsi sont légèrement plus grands que les précédents, ils permettent toujours d'interpréter les coefficients d'exposition ajustés par le modèle.

Table 5: Intervalles de confiance dans le cas d'une normale multivariée estimée par Monte Carlo.

	Monte Carlo		Erreur standard	
	inf	sup	inf	sup
β_0	-4.865849	-4.2754368	-4.645331	-4.510474
β_{E_1}	-1.981092	-0.4261478	-1.122103	-1.113660
β_{E_2}	-65.140058	-51.9494486	-59.342551	-59.127834
β_{E_3}	-125.571605	-98.5452180	-113.695413	-113.273788

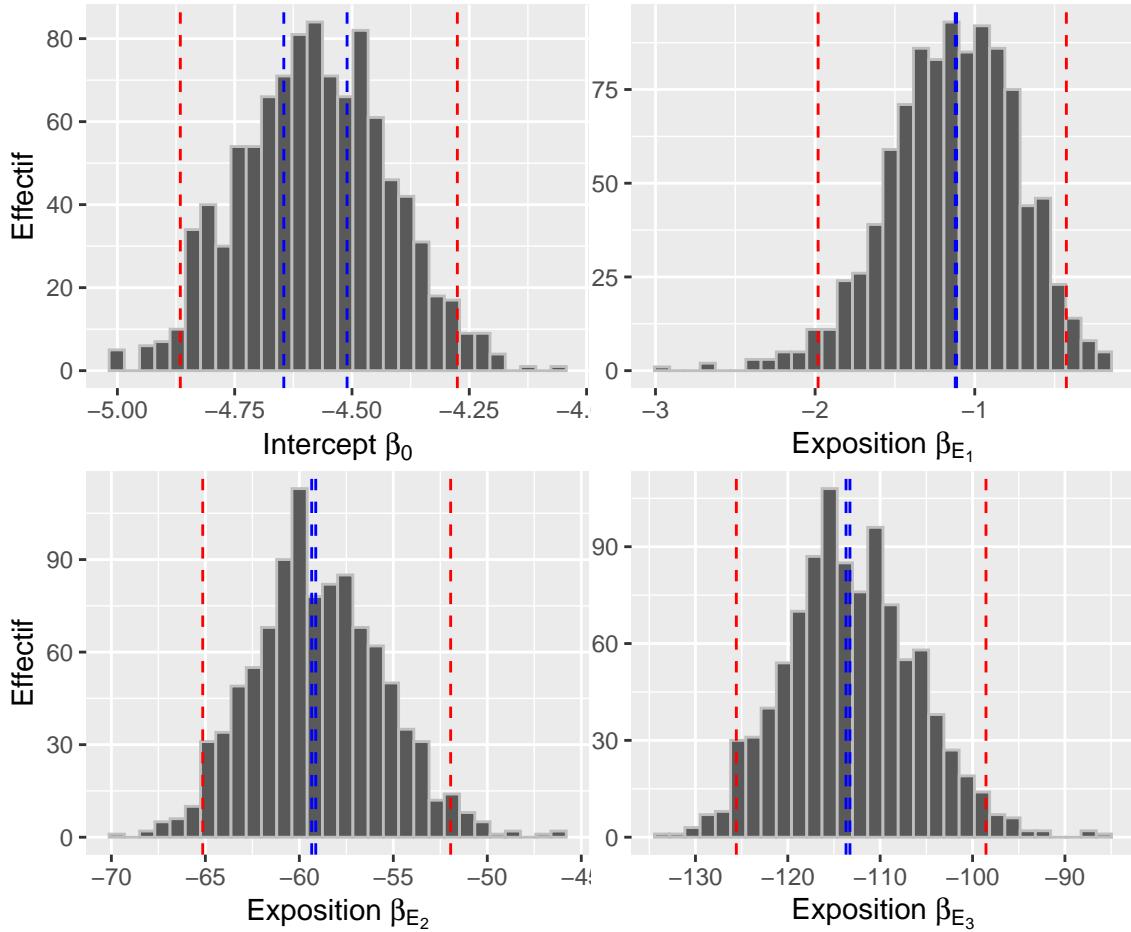


Figure 13: Intervalles de confiance dans le cas d'une normale multivariée estimée par Monte Carlo.

2.5.1.4 Sans passer par la régression biexponentielle L'intérêt de la régression biexponentielle était de :

1. réduire le temps d'ajustement des modèles linéaires,
2. éviter d'accumuler les variances des 60 coefficients de mémoire.

En fixant les coefficients autorégressifs, avoir 4 ou 60 coefficients pour la mémoire n'importe plus ; et en utilisant une loi normale multivariée, nous devrions également ne plus accumuler directement les variances des coefficients. Ainsi, nous avons tenté de nous passer de la régression double bi-exponentielle, et donc de tirer les 60 coefficients mémoire et les 4 coefficients de profondeur directement dans une seule loi normale multivariée.

Nous pouvons voir sur la table 6 et la figure 14 qu'avec cette approche plus directe, les intervalles de confiance sont quasiment identiques à ceux obtenus dans la section 2.5.1.2, et même plus petit pour l'ordonnée à l'origine.

Table 6: Intervalles de confiance dans le cas d'une loi normale multivariée sans double bi-exponentielle.

	Monte Carlo		Erreur standard	
	inf	sup	inf	sup
β_0	-4.877449	-4.2607168	-4.654712	-4.512880
β_{E_1}	-1.782223	-0.5655889	-1.186667	-1.178238
β_{E_2}	-64.410381	-52.0926295	-58.180603	-57.969085
β_{E_3}	-124.003446	-99.0561959	-111.400643	-110.983884

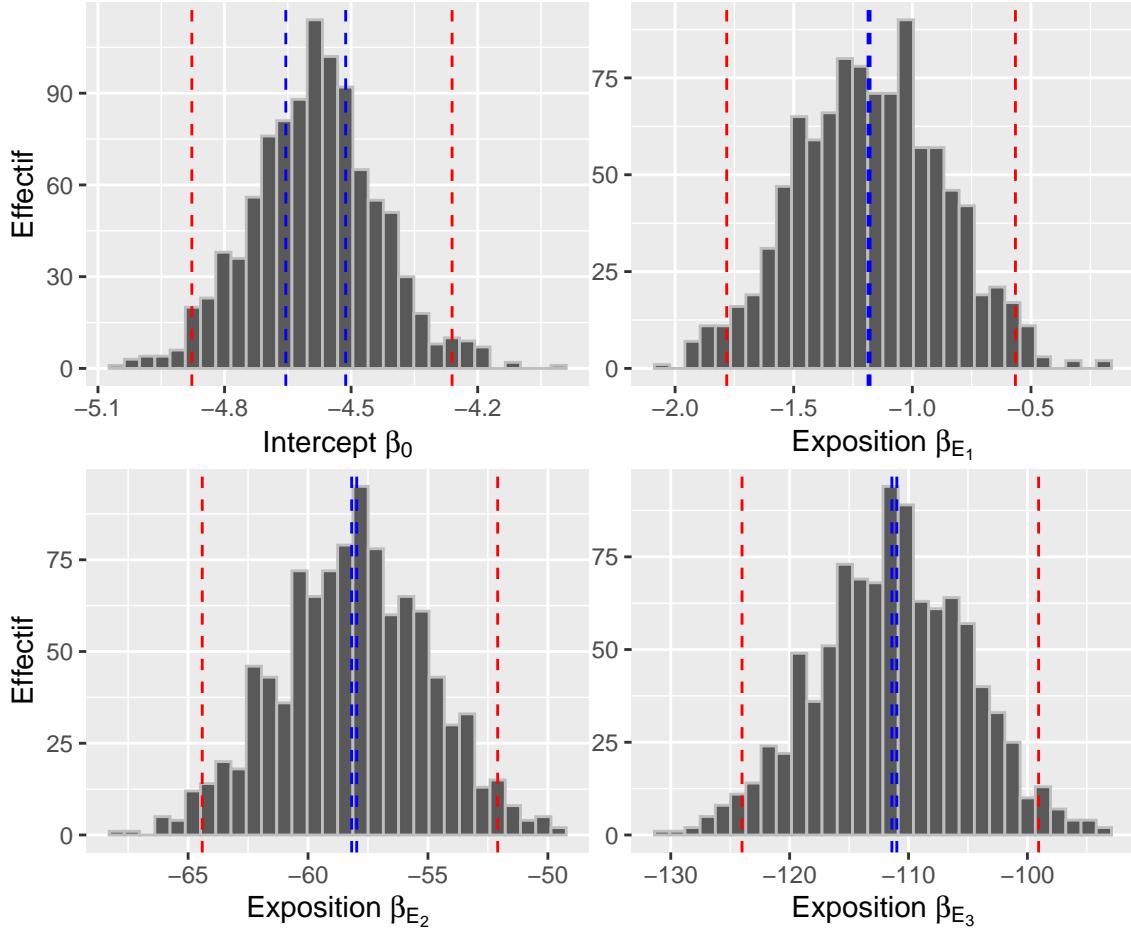


Figure 14: Intervalles de confiance dans le cas d'une loi normale multivariée sans double bi-exponentielle.

2.5.2 Pourcentage du taux normal d'émission de buzz

Il est rassurant de voir que les intervalles de confiance des coefficients d'exposition obtenus par Monte Carlo restent raisonnablement petits, cependant comme évoqué précédemment, il n'est pas possible de lier une augmentation ou une diminution du taux d'émission de buzz en fonction de la distance avec le bateau à partir de leur valeur. C'est pourquoi nous avions représenté graphiquement cette évolution sur la figure 4, mais cette visualisation ne proposait pas d'intervalle de confiance ou de bande de prédition.

Nous avons employé la méthode Delta décrite dans la section 1.5.2 pour construire une bande de confiance autour de l'estimation du pourcentage du taux normal d'émission de buzz en fonction de la profondeur. Ce

pourcentage est obtenu en faisant le rapport entre l'intensité estimée avec et sans perturbation. La figure 15 permet de voir que la bande de confiance tracée en rouge est fine. Nous sommes donc confiants dans la lecture de la courbe qui illustre que soumis à des perturbations à une distance inférieure à 15 kilomètres, les narvals commencent à émettre nettement moins de buzz que dans des conditions normales. Afin de comparer l'approche de la méthode Delta, nous avons utilisé la fonction *predictInterval* du package **merTools**. Celle-ci permet d'obtenir une bande de prédition pour des modèles mixtes par une approche Monte Carlo. Comme nous pouvons le voir sur la figure 15, la bande obtenue ainsi (tracée en bleu) suit la même forme que celle de la méthode Delta.

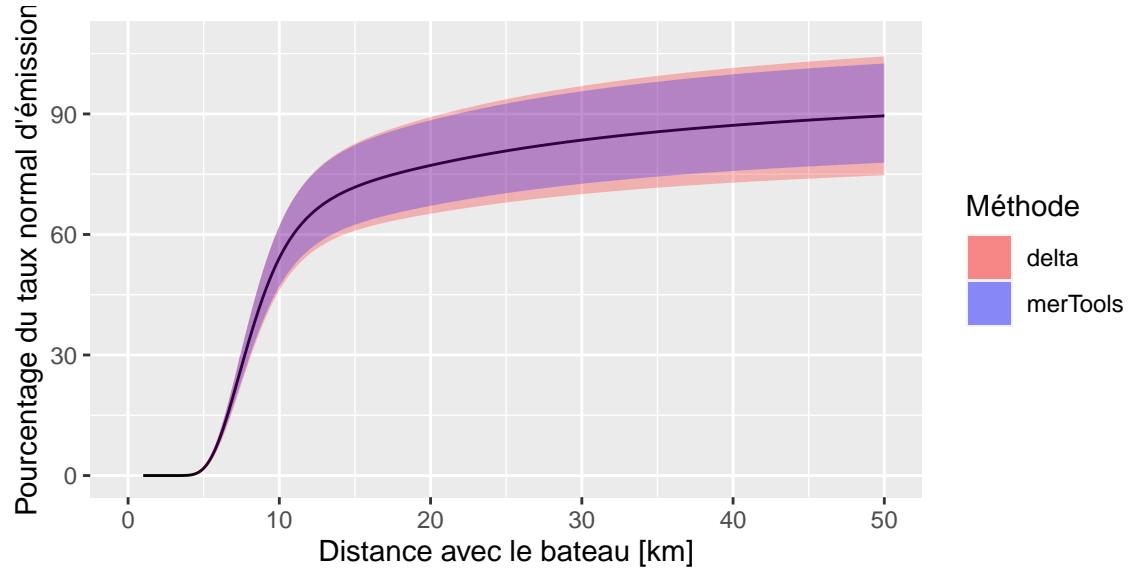


Figure 15: Pourcentage du taux normal d'émission de buzz selon la distance au bateau.