

# Modélisation de l'information contenue dans les défenses des narvals dans le but d'estimer leur durée de vie

Yanis BEN BELGACEM, Vadim BERTRAND, Angélique SAILLET

## Sommaire

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Modèle sinusoïdal</b>                                       | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Estimation des paramètres à partir d'un algorithme SAEM</b> | <b>4</b>  |
| 2.1      | Algorithme EM . . . . .  | 4         |
| 2.2      | Simulation de $\xi_x$ . . . . .                                | 5         |
| 2.2.1    | Identifiabilité . . . . .                                      | 5         |
| 2.2.2    | Algorithme MCMC . . . . .                                      | 7         |
| 2.2.3    | Algorithme SMC . . . . .                                       | 8         |
| 2.3      | Algorithme SAEM . . . . .                                      | 8         |
| <b>3</b> | <b>Simulation &amp; résultats</b>                              | <b>10</b> |
| 3.1      | Estimation de $\xi_x$ par MCMC . . . . .                       | 10        |
| 3.2      | Estimation de $\xi_x$ par SMC . . . . .                        | 12        |
| 3.3      | SAEM . . . . .   | 12        |
| 3.4      | Plan d'expérience . . . . .                                    | 14        |
|          | <b>Références</b>  | <b>16</b> |

Comme nous avons pu le voir précédemment, le narval est une espèce de cétacés vivant dans l’océan Arctique. Ces animaux d’une durée de vie moyenne de 50 ans, possèdent deux dents. Chez les femelles, les dents restent à l’intérieur de la boîte crânienne, tandis que pour les mâles, la canine gauche s’allonge et prend la forme d’une corne, comme le montre la Figure 1. Elle commence à pousser au travers de la lèvre supérieure gauche dès l’âge d’un an lors de la puberté et croît jusqu’à la maturité sexuelle, entre 8 et 9 ans. Cette défense torsadée possède des fonctionnalités et propriétés uniques dans la nature. Elle contient des millions de terminaisons nerveuses, ce qui en fait un organe de sensoriel très développé [1].



Figure 1: Vue de face d’un narval et de sa dent. [2]

Certains chercheurs danois, comme Eva Garde, s’intéressent plus particulièrement à l’étude de cette défense. Leur objectif est d’estimer la durée de vie du narval à travers l’information contenue dans cette dent. Pour mener cette étude, plusieurs découpes latérales des dents d’animaux décédés ont été réalisées. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 2, ces découpes se présentent sous la forme d’une séquence de sillons ou de couches et détiennent plusieurs types d’informations. En effet, nous remarquons la présence de marqueurs saisonniers sur les sillons au cours de la croissance des dents. Ces derniers créent des motifs sinusoïdaux. La fréquence et la forme de ces sinusoïdes varient d’une année à l’autre selon la variabilité de la durée ou de l’intensité des saisons [3]. L’information portée par les motifs à l’intérieur des défenses est donc logiquement liée à la durée de vie de l’animal.

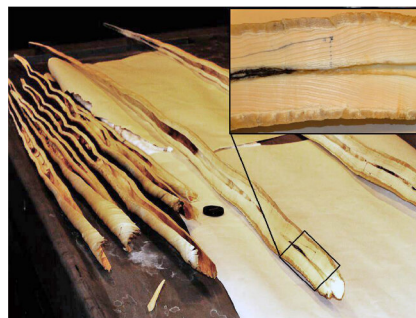


Figure 2: Présentation de l’allure d’une section en longueur d’une dent de narval. [3]

Le premier objectif pour cette problématique est le choix d’un modèle sinusoïdal pouvant représenter l’information contenue dans la dent de l’animal. À partir de cette forme de modèle et d’observations, le deuxième objectif sur lequel nous allons nous concentrer est celui de l’estimation des paramètres du modèle

sinusoïdal. Nous présentons donc dans les parties suivantes, le modèle envisagé ici ainsi que notre démarche d'estimation de ces paramètres à partir d'un algorithme SAEM.

## 1 Modèle sinusoïdal

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les motifs sinusoïdaux observés sont le reflet de la variabilité des saisons, ainsi ce motif n'est pas répété identiquement en fonction du temps. Ces variations complexifient donc la modélisation de cette information.

Les observations le long de la défense sont notées  $Y_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , avec la position correspondante sur la dent notée  $x_i$ . Le modèle est le suivant :

$$Y_i = f(x_i, \varphi) + \varepsilon_i$$

avec  $\varepsilon_i$  un bruit aléatoire suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance  $\omega^2$ .

La fonction de régression  $f(x, \varphi)$  est une fonction périodique sinusoïdale telle que :

$$f(x, \varphi) = A \sin(g(x) + b) + B \sin(2g(x) + 2b + \frac{\pi}{2})$$

avec

$$g(x) = ax + \xi_x$$

et finalement  $\xi_x$ , un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck, tel que :

$$d\xi_x = -\beta \xi_x dx + \sigma dW_x$$

Dont la solution est donnée par :

$$\xi_{x+\Delta} = \xi_x \psi + \int_x^{x+\Delta} \sigma e^{\beta(s-x)} dW_s$$

de sorte que la densité de transition soit définie telle que :

$$p(\xi_{x+\delta} | \xi_x) = \mathcal{N}(\xi_x \psi, \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - \psi^2))$$

Dans ce cadre, l'objectif est donc d'estimer les paramètres  $\theta$  :

- $\varphi = (A, B, a, b)$ ,
- $\omega$ ,
- $\psi = e^{-\beta\Delta}$ , où  $\Delta$  est l'intervalle de temps entre deux observations,
- $\gamma^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - \psi^2)$ .

Une réalisation de ce modèle est présentée sur la Figure 3.

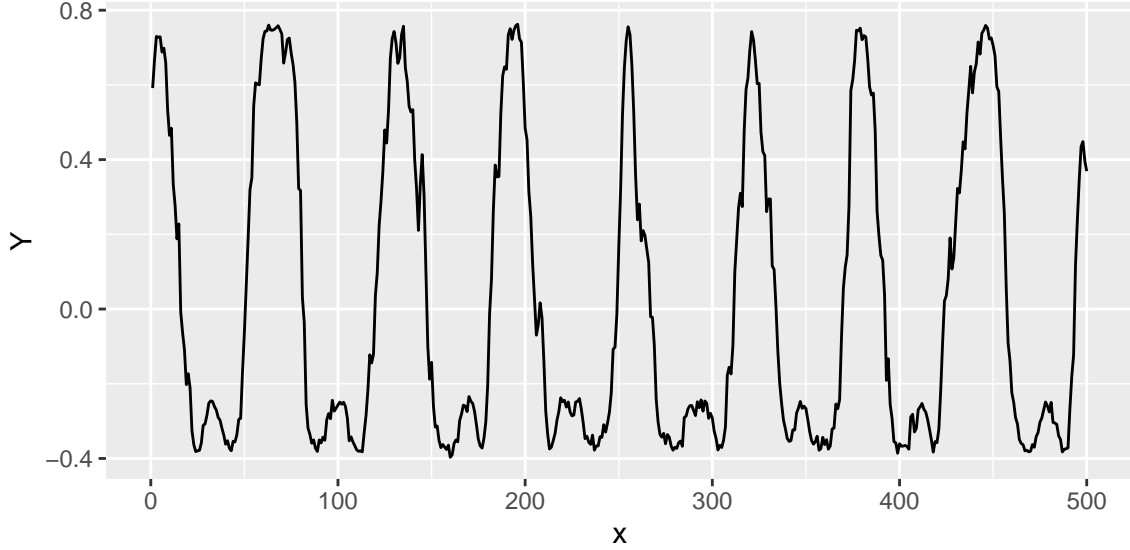


Figure 3: Simulation des observations  $Y$ , avec les paramètres suivants :  $A = 0.5$ ,  $B = -0.25$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega = 0.01$  et  $\delta = 1$ .

## 2 Estimation des paramètres à partir d'un algorithme SAEM

Afin d'estimer les paramètres  $\theta$  du modèle présenté dans la partie précédente, nous avons implémenté une procédure reposant sur l'algorithme SAEM. Nous allons d'abord présenter le principe d'un algorithme EM, puis celui de son approximation stochastique : l'algorithme SAEM. Durant sa présentation, nous détaillerons les algorithmes MCMC et SMC avant de présenter l'algorithme complet. Nous présenterons ensuite, dans une dernière partie, la simulation ainsi que les résultats obtenus par les algorithmes MCMC et SMC, plus largement par l'algorithme SAEM et finalement par le plan d'expérience mis en place.

### 2.1 Algorithme EM

L'algorithme EM est basé sur la log-vraisemblance complète du modèle qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\log L(Y, \xi, \theta) &= \sum_{i=1}^n \log p(Y_i | \xi_i) + \sum_{i=1}^n \log p(\xi_i | \xi_{i-1}) + \log p(\xi_1) \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - f(x_i, \varphi))^2}{2\omega^2} - \frac{n}{2} \log(\omega^2) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \xi_{i-1}\psi)^2}{\frac{\sigma^2}{\beta}(1 - \psi^2)} - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - \psi^2)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - f(x_i, \varphi))^2}{2\omega^2} - \frac{n}{2} \log(\omega^2) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \xi_{i-1}\psi)^2}{2\gamma^2} - \frac{n}{2} \log(\gamma^2)
\end{aligned}$$

Pour chaque itération  $k$ , l'algorithme EM procède aux deux étapes suivantes, étant donné la valeur courante des paramètres  $\theta^k$ .

- étape E : calcul de  $Q(\theta, \theta^k)$ , l'espérance de la log-vraisemblance du modèle,
- étape M : actualisation des paramètres  $\theta^{k+1} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^k)$ .

Pour actualiser les paramètres, nous avons besoin des statistiques exhaustives. Ces statistiques sont obtenues à partir du théorème de factorisation [?] et contiennent toute l'information de la vraisemblance. Leurs définitions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} S_1(\xi_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i(\xi_i), \varphi))^2 \\ S_2(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} \xi_i \\ S_3(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2 \\ S_4(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \end{aligned}$$

L'actualisation des paramètres dépend directement de ces statistiques.

## 2.2 Simulation de $\xi_x$

Dans notre cas, la distribution conditionnelle  $p(\xi|Y; \theta^k)$  n'est pas explicite en raison de la non-linéarité de notre fonction de régression  $f(x, \varphi)$ . Nous pouvons donc utiliser un algorithme MCMC ou un algorithme SMC pour simuler selon cette distribution.

### 2.2.1 Identifiabilité

Afin de justifier l'intérêt de l'utilisation d'un algorithme MCMC ou SMC, nous nous sommes intéressé à l'identifiabilité du modèle sinusoïdal. Nous pouvons observer sur la Figure 4 une trajectoire du processus  $\xi_x$  cible ainsi que trois autres simulations de trajectoire du processus  $\xi_x$  pour des valeurs de paramètres fixées, obtenues selon le procédé suivant :

```

ξ ← (0, ξ2, ..., ξn)
for i ∈ {1, ..., n} do
    ξi = ξi-1 * ψ + εξ, avec εξ ~ N(0, γ2)
end for

```

▷ Initialisation de la première valeur

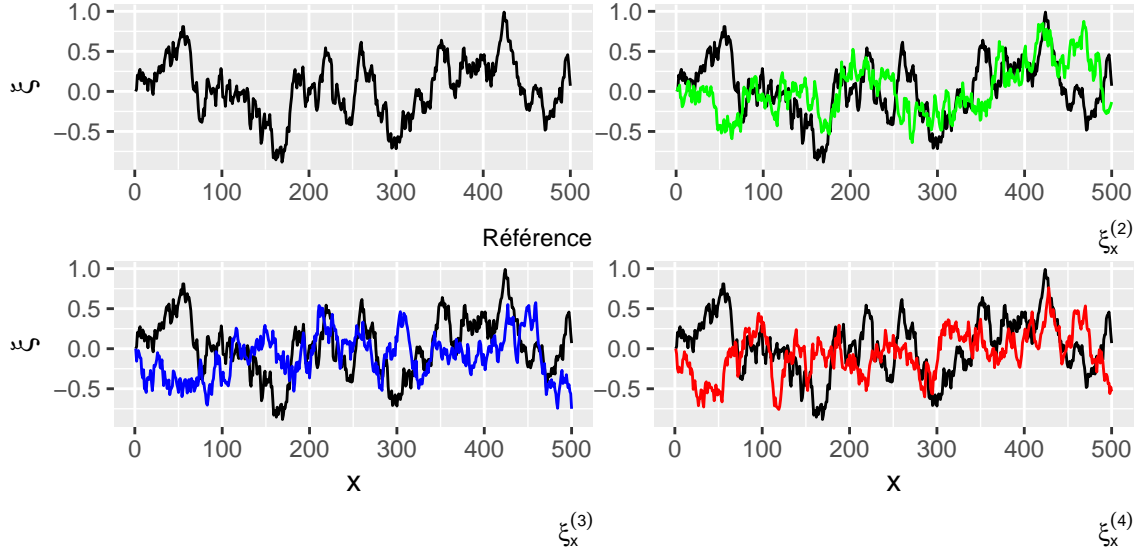


Figure 4: Présentation d’une trajectoire du processus  $\xi_x$  cible selon certains paramètres (en noir) et de trois autres trajectoires de ce processus simulées à partir des mêmes paramètres (en vert, bleu et rouge).

Nous observons sur la Figure 4 que plusieurs réalisations du processus  $\xi$  conduisent à des trajectoires sensiblement différentes. Ce résultat a un impact direct sur les observations  $Y$  puisque comme nous pouvons le voir sur la Figure 5, les observations  $Y$  correspondant à des réalisations différentes ne collent pas parfaitement à la distribution cible. Effectivement, la variabilité de simulation du paramètre  $\xi$  entraîne une variabilité sur les observations  $Y$  qui se traduit par un décalage avec la distribution cible. Les observations de  $Y$  sont donc sensibles à la trajectoire du processus  $\xi_x$  associé.

Nous ne pouvons donc pas nous contenter de tirer une réalisation de  $\xi_k$  dans l’étape de simulation de notre algorithme, c’est pour cette raison que nous avons intégré à l’algorithme SAEM une étape MCMC ou SMC.

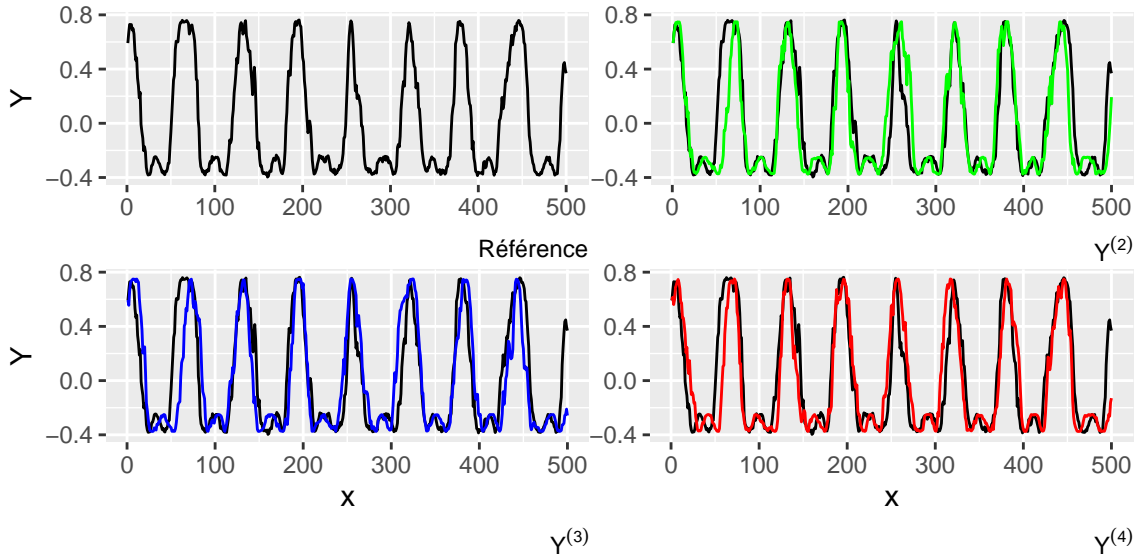


Figure 5: Distributions des  $Y$  calculées à partir des trajectoires de  $\xi_x$  présentées sur la Figure ??fig:sim-xis).

### 2.2.2 Algorithme MCMC

L'objectif de cet algorithme MCMC (Markov Chain Monte Carlo) est de simuler une trajectoire du processus  $\xi_x$  à partir des observations  $Y_i$  ainsi que des paramètres  $\gamma^2$ ,  $\psi$  et  $\omega^2$ . L'algorithme programmé est plus précisément un algorithme de Gibbs - Metropolis Hasting avec marche aléatoire.

Effectivement, après l'initialisation d'une trajectoire  $\xi_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , l'algorithme procède à M itérations. La trajectoire du processus simulée peut donc s'écrire  $\xi_M = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Plus précisément, pour chaque itération k, on calcule pour chaque position  $x_i$ , une valeur courante candidate  $\xi_c$  avec une marche aléatoire :  $\xi_c = \xi_k - 1 + N(0, \delta_i^2)$ . Cela introduit un nouveau paramètre  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  contrôlant la variance de la marche aléatoire. Pour chacun de ses candidats, une log-probabilité d'acceptation est calculée de la façon suivante :

$$\log(\alpha) = \min(\log(\frac{L(Y, \xi_c)}{L(Y, \xi_{k-1})}), 1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \log(\frac{L(Y, \xi_c)}{L(Y, \xi_{k-1})}) &= \log(L(Y, \xi_c)) - \log(L(Y, \xi_{k-1})) \\ &= -\frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\varphi(\xi_c))^2 - \frac{1}{2\frac{\gamma^2}{2}} \sum_{i=1}^n (\xi_c - \xi_{k-1}\psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\varphi(\xi_{k-1}))^2 + \frac{1}{2\frac{\gamma^2}{2}} \sum_{i=1}^n (\xi_{k-1} - \xi_{k-2}\psi)^2 \end{aligned}$$

À partir de la valeur de cette log-probabilité ainsi que d'une réalisation d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 0 et 1, le candidat est soit rejeté, soit accepté, auquel cas, il remplace la valeur considérée à l'itération  $k - 1$ .

De plus, nous avons choisi de rendre le paramètre  $\delta$  adaptatif en fonction du taux d'acceptation  $acc\_rate_i$  pour chaque point au fil des itérations  $k$ . Cela ajoute donc une étape d'actualisation à l'algorithme précédent, ce qui donne finalement l'Algorithme 1 :

---

**Algorithm 1** Algorithme MCMC de simulation d'une trajectoire du processus  $\xi_x$ .

---

```
 $\delta \leftarrow (\delta_1, \dots, \delta_n)$  ▷ Initialisation du delta adaptatif
 $\delta_{AR} \leftarrow 0.1$  ▷ Pas d'évolution du delta adaptatif
 $acc\_rate \leftarrow (acc\_rate_1, \dots, acc\_rate_n)$  ▷ Initialisation du vecteur de taux d'acceptation
 $acc\_rate_{target} \leftarrow 0.23$  ▷ Taux d'acceptation visé
for  $k \in \{1, \dots, M\}$  do
  for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
     $\xi_c = \xi_k - 1 + N(0, \delta_i^2)$  ▷ Simulation de la valeur courante de  $\xi$ 
     $log\alpha = \min(\log(\frac{L(Y, \xi_c)}{L(Y, \xi_{k-1})}), 1)$  ▷ Calcul de la probabilité d'acceptation
     $u \sim U[0, 1]$  ▷ Tirage d'une réalisation de loi uniforme
    if  $\log u \leq \log \alpha$  then
       $\xi_k = \xi_c$ 
    else
       $\xi_k = \xi_{k-1}$ 
    end if
     $acc\_rate_i \leftarrow$  mise à jour du taux d'acceptation
    if  $acc\_rate_i < acc\_rate_{target} * (1 - .1)$  then
       $\delta_i \leftarrow \delta_i * (1 - delta_{AR})$  ▷ Réduction du delta adaptatif
    else if  $acc\_rate_i > acc\_rate_{target} * (1 + .1)$  then
       $\delta_i \leftarrow \delta_i * (1 + delta_{AR})$  ▷ Augmentation du delta adaptatif
    end if
  end for
end for
```

---

### 2.2.3 Algorithme SMC

## 2.3 Algorithme SAEM

L'introduction d'une étape MCMC ou SMC conduit à la version stochastique de l'algorithme EM, à savoir l'algorithme SAEM. Cet algorithme utilise les étapes de l'algorithme EM auxquelles s'ajoute une étape d'approximation stochastique.

Effectivement, pour chaque itération  $k$ , les étapes sont les suivantes :

- étape E : simulation d'une nouvelle trajectoire de  $\xi^k$  à l'aide d'un algorithme MCMC considérant  $p(\xi|Y; \theta^k)$  comme une distribution stationnaire,
- étape SA : approximation stochastique des statistiques exhaustives :

$$\begin{aligned} s_1^k &= s_1^{k-1} + \alpha_k(S_1(\xi^k) - s_1^{k-1}) \\ s_2^k &= s_2^{k-1} + \alpha_k(S_2(\xi^k) - s_2^{k-1}) \\ s_3^k &= s_3^{k-1} + \alpha_k(S_3(\xi^k) - s_3^{k-1}) \\ s_4^k &= s_4^{k-1} + \alpha_k(S_4(\xi^k) - s_4^{k-1}) \end{aligned}$$

- étape M : actualisation de  $\theta^k$ , à partir des formules suivantes qui utilisent les statistiques exhaustives  $s^k$  :



$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}^k &= \arg \min_{\varphi} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i(\xi_i^k), \varphi))^2 \\
\widehat{\psi}^k &= \frac{s_2^k}{s_3^k} \\
\widehat{\omega}^2 &= s_1^k \\
\widehat{\gamma}^2 &= \frac{1}{n} (\widehat{\psi}^2 s_3^k - 2\widehat{\psi}^k s_2^k + s_4^k)
\end{aligned}$$

Au principe général d'un algorithme SAEM à  $Q$  itérations, nous avons ajouté deux hyper-paramètres  $M_{max}$  &  $\alpha_{min}$  :

- Pour chaque itération  $q$  de l'algorithme SAEM, au moins une itération de l'algorithme MCMC est effectuée. Afin de pouvoir améliorer les performances au début de notre algorithme, nous avons décidé de fixer ce nombre d'itérations à 5 pour les  $M_{max}$  premières itérations du SAEM, puis ensuite l'algorithme n'accomplit plus qu'une seule itération du MCMC. Le paramètre  $M_{max}$  est donc un hyper-paramètre de l'algorithme SAEM à choisir au préalable.
- Le deuxième paramètre concerne l'approximation stochastique effectuée pour chacune des itérations  $q$ . Effectivement, durant les premières itérations les approximations sont relativement éloignées de la valeur cible et donc sensiblement différentes entre elles. Au contraire, dans les dernières itérations, étant donné le phénomène de convergence que nous devons observer, les approximations sont censées être plus proches de la valeur cible et également entre elles. Afin de prendre en compte ce phénomène, nous faisons varier la valeur du paramètre de mémoire  $\alpha$  permettant de tenir compte des valeurs précédemment estimées au fil des itérations à partir du paramètre  $\alpha_{min}$  de la façon suivante :
  - dans un premier temps  $\alpha = 1$  pour les  $\alpha_{min}$  premières itérations, ce qui permet, d'appliquer la formule complète d'approximation,
  - puis, pour les  $(Q - \alpha_{min})$  dernières itérations, les alphas sont calculés de la façon suivante :

$$\alpha_{\alpha_{min}:Q} = \frac{1}{l}, \text{ avec } l = 1 : (Q - \alpha_{min})$$

Ainsi le paramètre  $\alpha$  décroît au fil des itérations à partir de la  $\alpha_{min}$ <sup>ième</sup> itération. Cette procédure permet de réduire l'importance du terme associé à  $\alpha$  et d'augmenter donc l'influence de la valeur précédente pour ces itérations-là.

En prenant en compte ces deux paramètres supplémentaires, l'algorithme se présente comme l'Algorithme 2 :

---

**Algorithm 2** Algorithmme SAEM complet

---

```

 $s_1 \leftarrow (s_1^1, \dots, s_1^Q)$ 
 $s_2 \leftarrow (s_2^1, \dots, s_2^Q)$ 
 $s_3 \leftarrow (s_3^1, \dots, s_3^Q)$ 
 $s_4 \leftarrow (s_4^1, \dots, s_4^Q)$ 
 $\widehat{\varphi} \leftarrow (\widehat{\varphi}^1, \dots, \widehat{\varphi}^Q)$ 
 $\widehat{\psi} \leftarrow (\widehat{\psi}^1, \dots, \widehat{\psi}^Q)$ 
 $\widehat{\omega}^2 \leftarrow (\widehat{\omega}^{2^1}, \dots, \widehat{\omega}^{2^Q})$ 
 $\widehat{\gamma}^2 \leftarrow (\widehat{\gamma}^{2^1}, \dots, \widehat{\gamma}^{2^Q})$ 
 $\alpha \leftarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_Q)$  ▷ Initialisation du paramètre d'approximation  $\alpha$ 
 $\alpha_{1:\alpha_{min}} \leftarrow 1$  ;  $\alpha_{\alpha_{min}:Q} \leftarrow \frac{1}{l^{0.8}}$  avec  $l = 1 : (Q - \alpha_{min})$ 
 $M \leftarrow (M_1, \dots, M_Q)$  ▷ Initialisation du nombre d'itérations du MCMC
 $M_{1:M_{max}} \leftarrow 5$  ;  $M_{M_{max}+1:Q} \leftarrow 1$ 
for  $q \in \{1, \dots, Q\}$  do
▷ Etape E
 $\xi^q \leftarrow \text{MCMC (cf Algorithmme 1) avec } M = M_q \text{ itérations et } \theta^{q-1}, \text{ pour récupérer une trajectoire de } \xi$ 
▷ Etape SA
 $S_1 \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i(\xi^q), \varphi))^2$  ▷ Calcul des statistiques exhaustives
 $S_2 \leftarrow \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^q \xi_i^q$ 
 $S_3 \leftarrow \sum_{i=1}^n (\xi_{i-1}^q)^2$ 
 $S_4 \leftarrow \sum_{i=1}^n (\xi_i^q)^2$ 
▷ Mise à jour des approximations stochastiques
 $s_1^q \leftarrow s_1^{q-1} + \alpha_q (S_1(\xi^q) - s_1^{q-1})$ 
 $s_2^q \leftarrow s_2^{q-1} + \alpha_q (S_2(\xi^q) - s_2^{q-1})$ 
 $s_3^q \leftarrow s_3^{q-1} + \alpha_q (S_3(\xi^q) - s_3^{q-1})$ 
 $s_4^q \leftarrow s_4^{q-1} + \alpha_q (S_4(\xi^q) - s_4^{q-1})$ 
▷ Etape M
 $\widehat{\varphi}^q \leftarrow \arg \min_{\varphi} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i(\xi_i^q), \varphi))^2$  ▷ Actualisation de  $\theta^q$ 
 $\widehat{\psi}^q \leftarrow \frac{s_2^q}{s_3^q}$ 
 $\widehat{\omega}^{2^q} \leftarrow s_1^q$ 
 $\widehat{\gamma}^{2^q} \leftarrow \frac{1}{n} (\widehat{\psi}^{2^q} s_3^q - 2\widehat{\psi}^q s_2^q + s_4^q)$ 
end for
```

---

### 3 Simulation & résultats

[Phrase d'introduction a la partie]

#### 3.1 Estimation de $\xi_x$ par MCMC

Nous avons, dans un premier temps, testé l'efficacité de l'algorithme MCMC programmé indépendamment de l'algorithme SAEM. Pour ce faire, nous avons fixé les valeurs des paramètres :  $A = 0.5$ ,  $B = -0.25$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega = 0.01$  et  $\delta = 1$ . Ces valeurs ont été utilisées pour simuler une trajectoire de  $\xi_x$  cible avec une distribution  $Y$  associée selon le modèle sinusoïdal. L'algorithme MCMC a été réalisé avec  $M = 150$  itérations et obtient, à partir de ces mêmes valeurs de paramètres et des observations  $Y$ , les résultats présentés sur la Figure 6.

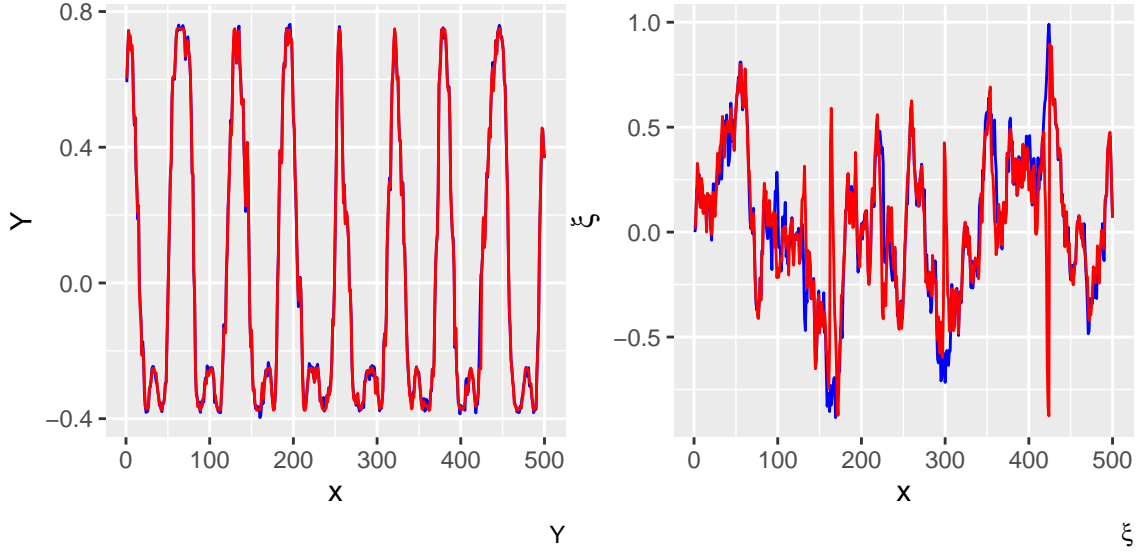


Figure 6: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\xi$  obtenue par l'algorithme MCMC et la distribution  $Y$  qui l'utilise (en rouge).

La trajectoire de  $\xi_x$  obtenue par le MCMC (en rouge) est très proche de celle à l'origine des observations  $Y$ . Nous remarquons cependant que quelques points de  $\xi$  sont très mal approchés par l'algorithme. Effectivement pour plusieurs positions  $x_i$ , la distance entre la valeur originelle de  $\xi_i$  et la valeur estimée par l'algorithme semble grande. Cependant, ces différences n'influencent que très peu l'allure du signal  $Y$ , qui reste très satisfaisant. Afin de comprendre la raison de ces erreurs, nous nous sommes intéressés au comportement du  $\delta_i$  au fil des itérations, relativement à celui du taux d'acceptation  $acc\_rate_i$  pour un des points concernés. Nous avons comparé leur évolution pour la position  $x_i$  où l'erreur est maximale et celle où elle est minimale.

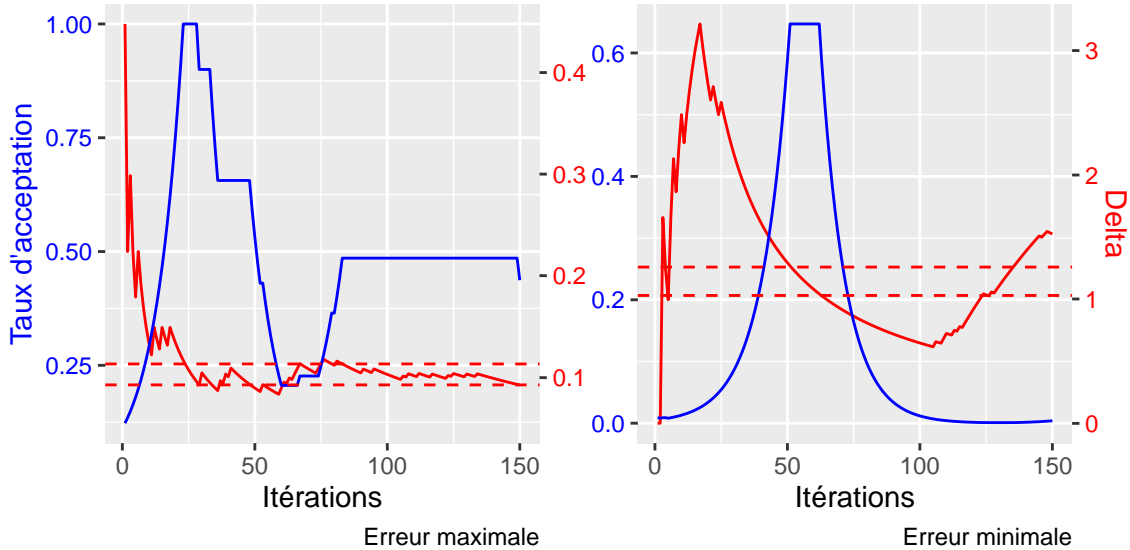


Figure 7: Distributions du taux d'acceptation et du delta adaptatif au fil des itérations pour deux positions différentes : celle pour laquelle l'erreur d'estimation est maximale et celle où elle est minimale.

Nous pouvons voir sur la Figure 7, que dans les deux cas, le delta adaptatif évolue correctement. Effective-

ment le taux d'acceptation est premièrement supérieur à la borne supérieure de notre seuil ce qui entraîne l'augmentation de  $\delta$ . Cette augmentation permet alors au taux de diminuer et donc de rentrer dans nos deux bornes de seuil, et  $\delta$  stagne durant cette période. Le taux d'acceptation devient ensuite trop bas, et alors la valeur de  $\delta$  diminue afin de le faire augmenter à nouveau. Nous remarquons seulement que, dans le cas concernant l'erreur maximale, l'évolution du taux d'acceptation est moins rapide que dans le cas de l'erreur minimale, par exemple il atteint l'intervalle de seuil environ vers la 40<sup>ième</sup> itération contre environ la 20<sup>ième</sup> pour le point où l'erreur est minimale. Cela entraîne une valeur maximale de  $\delta$  bien plus élevée, d'environ 1.6 contre 0.3. Malgré cette observation, nous n'identifions pas la source de ces points aberrants. Cependant, étant donné que ceux-ci n'impactent pas l'estimation de la distribution des observations  $Y$ , l'algorithme MCMC programmé reste selon nous satisfaisant.

### 3.2 Estimation de $\xi_x$ par SMC

### 3.3 SAEM

En gardant l'objectif d'estimer optimalement les paramètres utilisés pour obtenir une réalisation des observations  $Y$  cibles, nous avons effectué  $Q = 500$  itérations de l'algorithme SAEM présenté précédemment. Les paramètres  $\alpha_{min}$  et  $M_{max}$  ont été fixés après plusieurs tests et analyses graphiques aux valeurs suivantes :  $\alpha_{min} = 90$  et  $M_{max} = 20$ , ce qui correspond à des valeurs retrouvées régulièrement dans la littérature. La trajectoire de  $\xi_x$  obtenue après les itérations ainsi que les observations  $Y$  l'utilisant sont présentés sur la Figure 8. Nous observons sur cette figure un léger décalage pour les premières positions de la trajectoire de  $\xi_x$  estimée. Malgré ce décalage, les deux courbes sont assez proches et nous retrouvons ce résultat pour la distribution de  $Y$ .

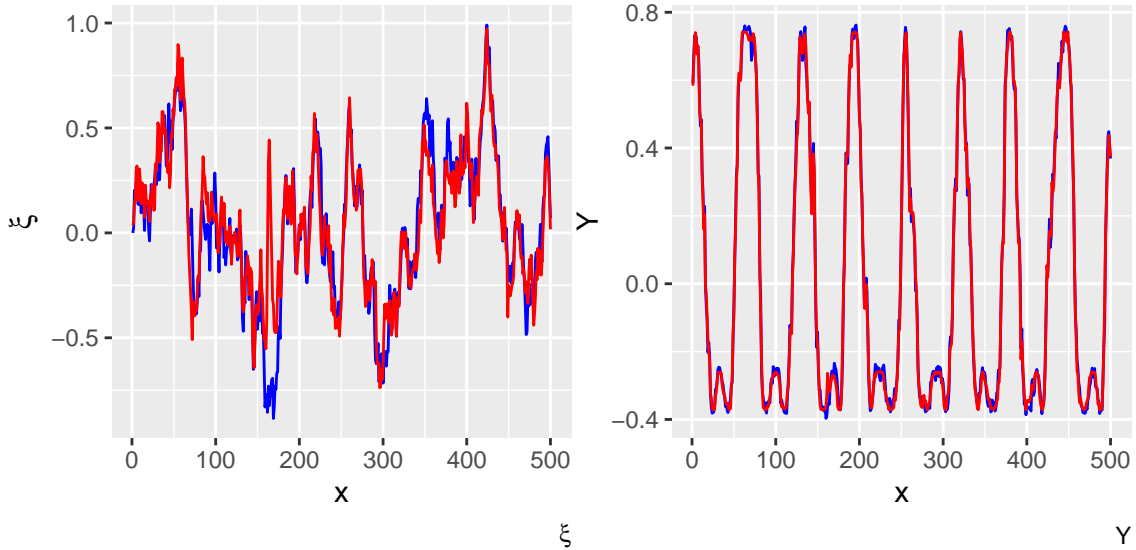


Figure 8: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\xi$  obtenue par l'algorithme SAEM et la distribution  $Y$  qui l'utilise (en rouge).

Concernant l'estimation des autres paramètres du modèle, les chaînes de Markov obtenues au fil des itérations pour les coefficients  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\gamma$  sont présentées sur la Figure 9. Nous avons fait le choix d'initialiser ces 3 valeurs à 0.5 pour la première itération. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, les chaînes des paramètres  $\omega$  et  $\psi$  convergent correctement vers les vraies valeurs des paramètres. Cependant, celle du paramètre  $\gamma$  semble converger plus doucement ce qui entraîne une légère surestimation de ce paramètre.

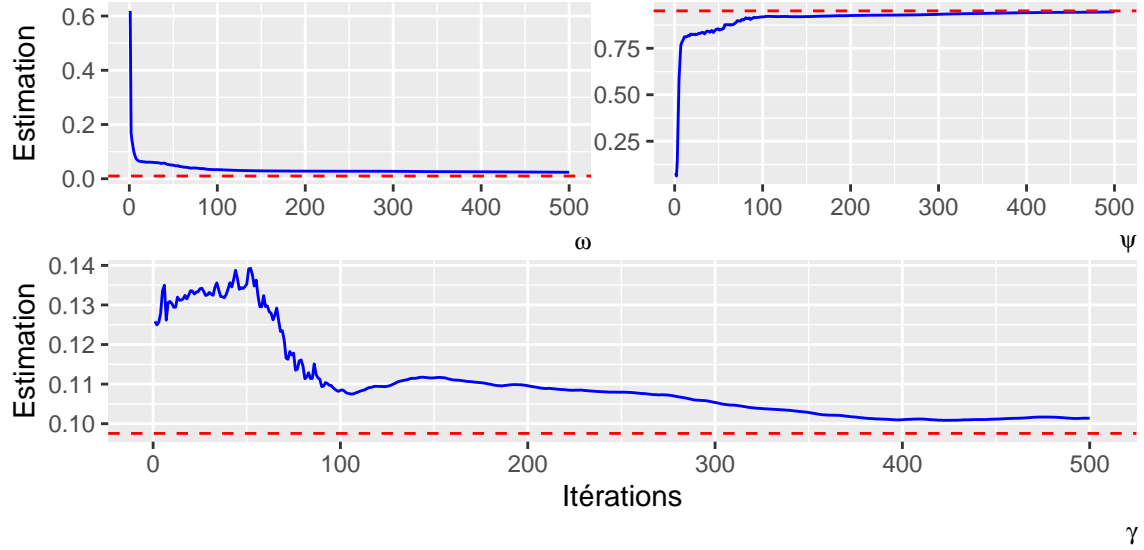


Figure 9: Présentation de l'estimation des coefficients  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\gamma$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

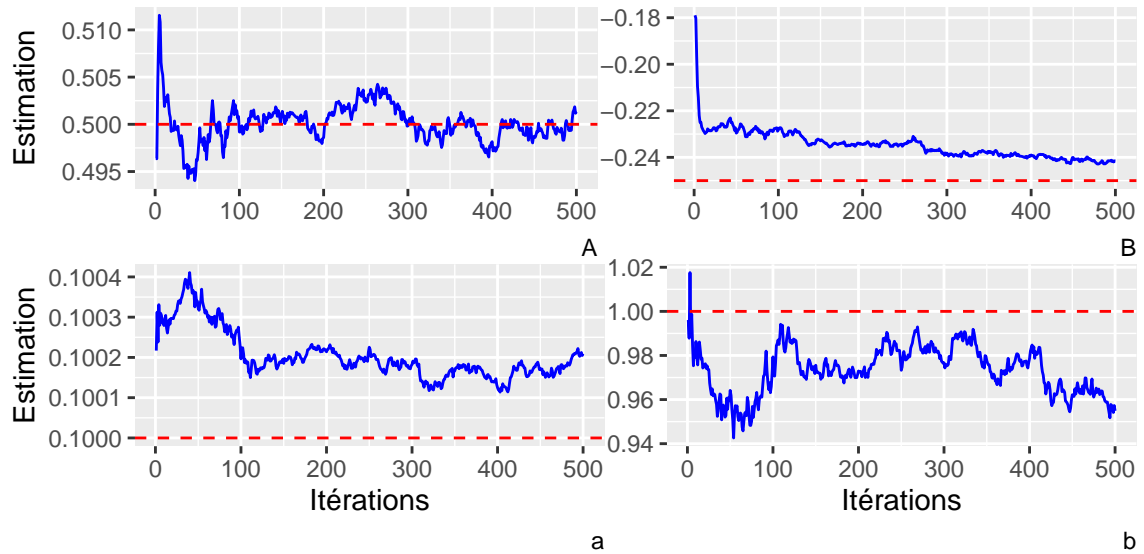


Figure 10: Présentation de l'estimation des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $a$  et  $b$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

Afin de favoriser la convergence de l'algorithme, les paramètres  $A$  et  $B$  ont été initialisés selon une réalisation de loi uniforme définie entre  $-\max(|Y|) - \omega$  et  $\max(|Y|) + \omega$ . Cette initialisation prend du sens quant à la définition du modèle sinusoïdal. Dans le même objectif, le paramètre  $a$  a été initialisé comme [initialisation de  $a$  à préciser] et le paramètre  $b$ , en fonction de l'initialisation de  $a$  comme [initialisation de  $b$  à préciser]. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 10, les estimations des coefficients  $A$  et  $B$  convergent normalement vers la valeur attendue des paramètres. Nous observons, cependant, que bien que très proche de la "vraie" valeur, l'estimation du paramètre  $a$  ne converge pas à proprement parler. Pour finir, l'estimation de  $b$  semble plus difficile à accomplir : nous ne remarquons pas de convergence vers la valeur attendue et l'estimation

finale apparaît éloignée de la valeur fixée initialement.

Les estimations faites par l'algorithme sont donc satisfaisantes pour les paramètres  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  et  $a$ . Il n'arrive cependant pas à estimer convenablement le paramètre  $b$ .

### 3.4 Plan d'expérience

Afin de se rendre compte de la variation de nos estimateurs vis-à-vis de la valeur initiale, nous avons effectué un plan d'expérience. En effet, notre objectif est d'estimer nos paramètres sur un grand nombre d'itérations, afin d'analyser leurs variations autour des valeurs fixées. Les paramètres à estimer sont  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$ , ainsi que  $\gamma$ ,  $\psi$  et  $\omega$ . Nous avons choisi d'effectuer  $M = 1000$  estimations de chacun de ces paramètres, et de calculer la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne ( $RMSE$ ), l'erreur absolue en pourcentage ( $APE$ ) et sa moyenne ( $MAPE$ ), à partir des formules suivantes :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{M}}$$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^M APE_i}{M}$$

$$APE_i = \frac{\hat{\theta}_i - \theta}{\theta}$$

Avec  $\hat{\theta}$  les paramètres estimés et  $\theta$  le paramètre initial fixé.

Nous avons également utilisé le plan d'expérience pour comparer les résultats obtenus en utilisant une étape MCMC ou une étape SMC pour estimer  $\xi_x$ .

Puisque l'estimation de chacun de nos paramètres doit se rapprocher et varier autour de notre valeur initiale, nous devrions avoir des estimations  $\hat{\theta}$  autour de nos  $\theta$ , soit des erreurs moyennes relativement proches de 0. À partir des résultats obtenus par les 1000 itérations, nous avons représenté sur la Figure 11 les boxplots des  $APE$  pour chacun des 7 paramètres.

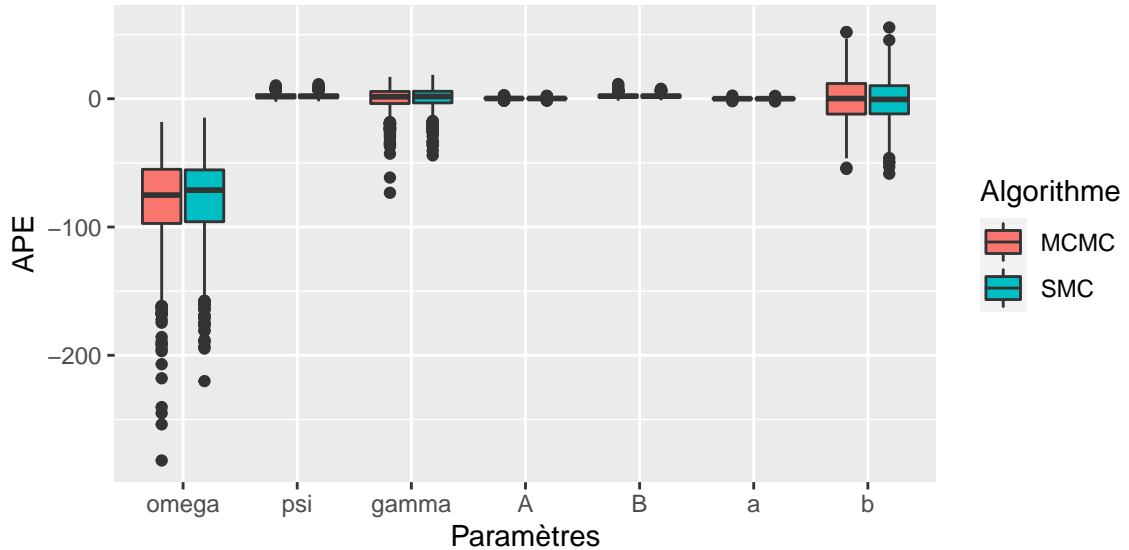


Figure 11: Boxplot des  $APE$  de chacun des paramètres.

Comme attendu, les  $APE$  varient autour 0 pour tous nos paramètres hormis  $\omega$ . En effet,  $\omega$  semble être sous-estimé et avoir une variation plus grande. Cependant, nous pouvons penser que cette variation est due

au fait que la valeur de  $\omega$  initiale de 0.01 est faible, ce qui rend sa source de bruit difficile à distinguer des autres, plus importantes.

Table 1: Valeurs attendues, estimées en moyenne et erreurs associées de chacun des paramètres, en utilisant une étape MCMC dans l’algorithme SAEM.

|                | $\omega$ | $\psi$ | $\gamma$ | A     | B      | a     | b      |
|----------------|----------|--------|----------|-------|--------|-------|--------|
| $\theta$       | 0.010    | 0.951  | 0.098    | 0.500 | -0.250 | 0.100 | 1.000  |
| $\hat{\theta}$ | 0.018    | 0.932  | 0.097    | 0.499 | -0.245 | 0.100 | 0.999  |
| MAPE           | 79.859   | 2.143  | 6.153    | 0.486 | 2.100  | 0.467 | 13.911 |
| RMSE           | 0.009    | 0.026  | 0.008    | 0.003 | 0.006  | 0.001 | 0.173  |

Table 2: Valeurs attendues, estimées en moyenne et erreurs associées de chacun des paramètres, en utilisant une étape SMC dans l’algorithme SAEM.

|                | $\omega$ | $\psi$ | $\gamma$ | A     | B      | a     | b      |
|----------------|----------|--------|----------|-------|--------|-------|--------|
| $\theta$       | 0.010    | 0.951  | 0.098    | 0.500 | -0.250 | 0.100 | 1.000  |
| $\hat{\theta}$ | 0.018    | 0.932  | 0.097    | 0.499 | -0.245 | 0.100 | 1.008  |
| MAPE           | 78.282   | 2.132  | 5.972    | 0.473 | 2.137  | 0.476 | 13.313 |
| RMSE           | 0.008    | 0.026  | 0.008    | 0.003 | 0.006  | 0.001 | 0.169  |

Au regard des Tables 1 et 2, il convient de relativiser l’erreur réalisée sur le paramètre  $\omega$  : la valeur attendue est 0.01 et celle estimée en moyenne est égale à 0.018. La *MAPE* peut sembler élevée, mais encore une fois, il faut observer qu’en valeur absolue les estimations sont proches de la valeur à estimer, comme l’indique la *RMSE*. Nous pouvons noter que c’est bien le paramètre  $b$  dont l’estimation est la plus éloignée de la valeur attendue, ce qui rejoint les observations faites à partir des Figures 9 et 10.

Finalement, les versions MCMC et SMC donnent des estimations extrêmement similaires. Peut-être qu’il serait possible d’améliorer encore les résultats de version SMC en jouant sur ses hyper-paramètres, mais cette démarche serait très coûteuse en temps de calcul, et potentiellement sensible aux choix des valeurs fixées des paramètres de la simulation.

## Références

- [1] Wikipedia contributors. *Narval*. 2022. URL: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Narval> (visited on 02/02/2023).
- [2] Jean-Pierre Sylvestre. *Dans l'Arctique canadien avec la licorne de mer*. 2018. URL: [https://www.peuple-animal.com/article,lecture,1160\\_\\_dans-l-arctique-canadien-avec-la-licorne-de-mer.html](https://www.peuple-animal.com/article,lecture,1160__dans-l-arctique-canadien-avec-la-licorne-de-mer.html) (visited on 02/02/2023).
- [3] Peter Bondo. *The narwhal's tusk reveals its past living conditions*. 2021. URL: <https://phys.org/news/2021-03-narwhal-tusk-reveals-conditions.html> (visited on 02/02/2023).