

# Modélisation de l'information contenue dans les défenses des narvals dans le but d'estimer leur durée de vie

Yanis BEN BELGACEM, Vadim BERTRAND, Angélique SAILLET

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Modèle sinusoïdal</b>	<b>3</b>
1.1	Identifiabilité . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Estimation des paramètres à partir d'un algorithme SAEM</b>	<b>6</b>
2.1	Algorithme EM . . . . .	6
2.2	Simulation de $\xi_x$ . . . . .	7
2.2.1	Algorithme MCMC . . . . .	7
2.2.2	Algorithme SMC . . . . .	8
2.3	Algorithme SAEM . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Simulation &amp; résultats</b>	<b>12</b>
3.1	Estimation de $\xi_x$ par MCMC . . . . .	12
3.2	Estimation de $\xi_x$ par SMC . . . . .	13
3.3	Estimation de $\theta$ par SAEM . . . . .	14
3.3.1	Avec une étape MCMC . . . . .	14
3.3.2	Avec une étape SMC . . . . .	16
3.3.3	Plan d'expérience . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
	<b>Références</b>	<b>22</b>

Comme nous avons pu le voir précédemment, le narval est une espèce de cétacés vivant dans l’océan Arctique. Ces animaux d’une durée de vie moyenne de 50 ans, possèdent deux dents. Chez les femelles, les dents restent à l’intérieur de la boîte crânienne, tandis que pour les mâles, la canine gauche s’allonge et prend la forme d’une corne, comme le montre la Figure 1. Elle commence à pousser au travers de la lèvre supérieure gauche dès l’âge d’un an lors de la puberté et croît jusqu’à la maturité sexuelle, entre 8 et 9 ans. Cette défense torsadée possède des fonctionnalités et propriétés uniques dans la nature. Elle contient des millions de terminaisons nerveuses, ce qui en fait un organe sensoriel très développé [1].



Figure 1: Vue de face d’un narval et de sa dent. [2]

Certains chercheurs danois, comme Eva Garde, s’intéressent plus particulièrement à l’estimation de la durée de vie des narvals via l’information contenue dans cette dent. Pour mener cette étude, plusieurs découpes latérales des dents d’animaux décédés ont été réalisées. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 2, ces découpes se présentent sous la forme d’une séquence de sillons ou de couches comportant des marqueurs saisonniers au cours de la croissance des dents. Ces derniers créent des motifs sinusoïdaux. La fréquence et la forme de ces sinusoides varient d’une année à l’autre selon la variabilité de la durée ou de l’intensité des saisons [3]. L’information portée par les motifs à l’intérieur des défenses est donc logiquement liée à la durée de vie de l’animal.



Figure 2: Présentation de l’allure d’une section en longueur d’une dent de narval. [3]

Le premier objectif pour cette problématique est le choix d’un modèle sinusoïdal pouvant représenter l’information contenue dans la dent de l’animal. À partir de cette forme de modèle et d’observations, le deuxième objectif sur lequel nous allons nous concentrer est celui de l’estimation des paramètres du modèle sinusoïdal. Nous présentons donc dans les parties suivantes, le modèle envisagé, notre démarche d’estimation de ces paramètres à partir d’un algorithme SAEM et les résultats obtenus sur des données simulées.

# 1 Modèle sinusoïdal

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les motifs sinusoïdaux observés sont le reflet de la variabilité des saisons, ainsi ce motif n'est pas répété identiquement en fonction du temps. Ces variations complexifient donc la modélisation de cette information.

Les observations le long de la défense sont notées  $Y_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , avec la position correspondante sur la dent notée  $x_i$ . Le modèle est le suivant :

$$Y_i = f(x_i, \varphi) + \varepsilon_i$$

avec  $\varepsilon_i$  un bruit aléatoire suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance  $\omega^2$ .

La fonction de régression  $f(x, \varphi)$  est une fonction périodique sinusoïdale telle que :

$$f(x, \varphi) = A \sin(g(x) + b) + B \sin(2g(x) + 2b + \frac{\pi}{2})$$

avec

$$g(x) = ax + \xi_x$$

et finalement  $\xi_x$ , un processus aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck, tel que :

$$d\xi_x = -\beta \xi_x dx + \sigma dW_x$$

Dont la solution est donnée par :

$$\xi_{x+\Delta} = \xi_x \psi + \int_x^{x+\Delta} \sigma e^{\beta(s-x)} dW_s$$

de sorte que la densité de transition est :

$$p(\xi_{x+\Delta} | \xi_x) = \mathcal{N}(\xi_x \psi, \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - \psi^2))$$

Dans ce cadre, l'objectif est donc d'estimer les paramètres  $\theta$  :

- $\varphi = (A, B, a, b)$ ,
- $\omega$ ,
- $\psi = e^{-\beta\Delta}$ , où  $\Delta$  est l'intervalle de temps entre deux observations,
- $\gamma^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - \psi^2)$ .

Une réalisation de ce modèle est présentée sur la Figure 3.

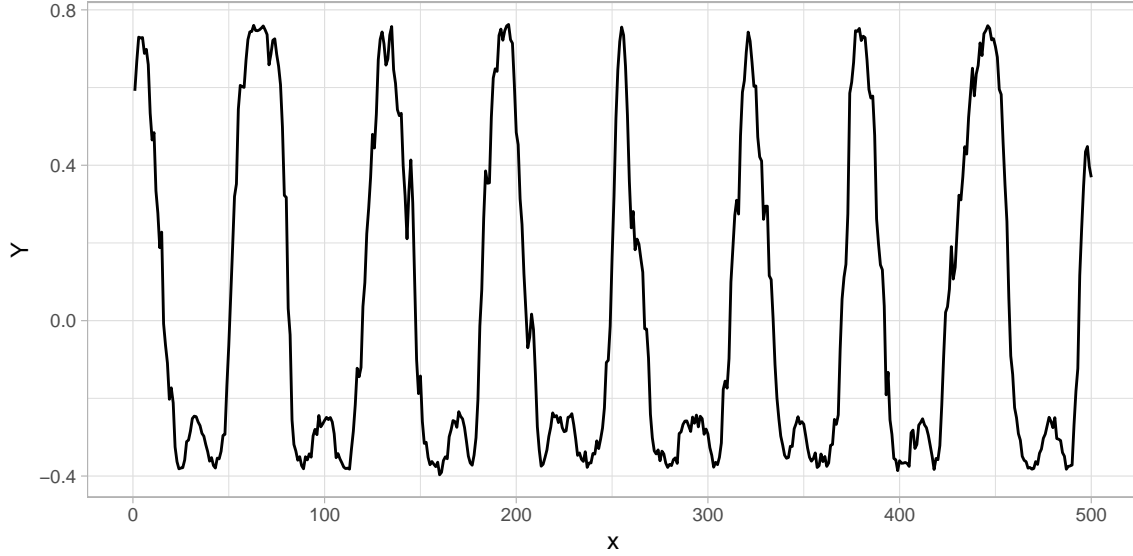


Figure 3: Simulation des observations  $Y$ , avec les paramètres suivants :  $A = 0.5$ ,  $B = -0.25$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega = 0.01$  et  $\delta = 1$ .

## 1.1 Identifiabilité

Afin de justifier l'intérêt de l'estimation des paramètres du modèle, nous nous sommes intéressé à son identifiabilité. Nous pouvons observer sur la Figure 4 une trajectoire du processus  $\xi_x$  cible ainsi que trois autres simulations de trajectoire du processus  $\xi_x$  pour des valeurs de paramètres  $\psi$  et  $\gamma$  variant, obtenues selon le procédé suivant :

```

 $\xi_{1:n} \leftarrow 0$ 
for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
     $\xi_i = \xi_{i-1} * \psi + \epsilon_\xi$ , avec  $\epsilon_\xi \sim N(0, \gamma^2)$ 
end for

```

▷ Initialisation de la première valeur

Nous observons sur la Figure 4 que les différentes réalisations du processus  $\xi_x$  conduisent à des trajectoires différentes. Comme attendu au regard de l'expression du processus, la modification de  $\psi$  impacte la valeur moyenne de  $\xi_x$ , et  $\gamma$  sa variance.

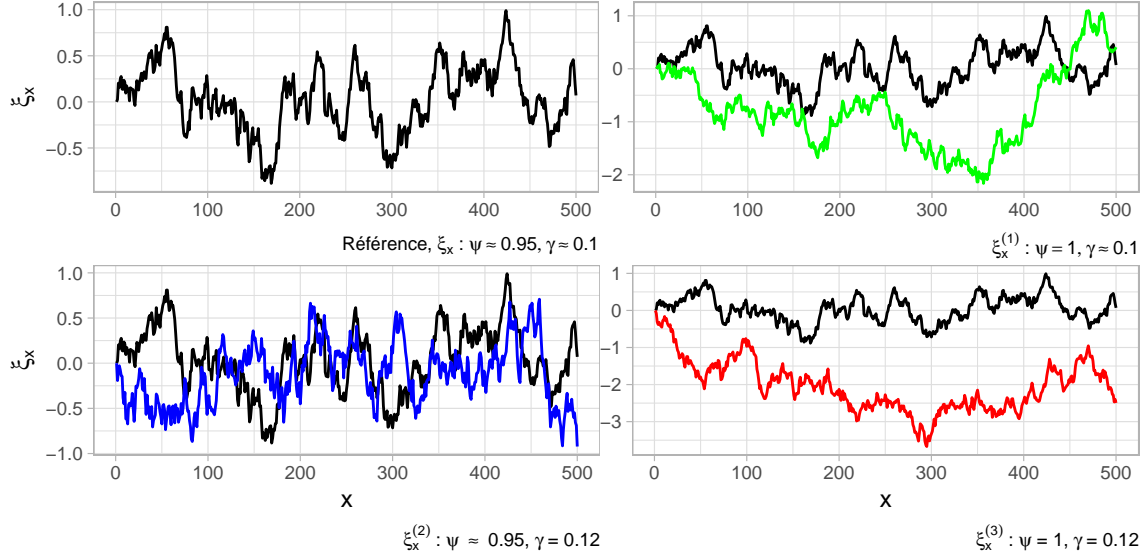


Figure 4: Présentation d'une trajectoire du processus  $\xi_x$  cible (en noir) et de trois autres trajectoires de ce processus simulées à partir de valeurs différentes de  $\psi$  et  $\gamma$  (en vert, bleu et rouge).

Ce résultat a un impact direct sur les observations  $Y$  puisque, comme nous pouvons le voir sur la Figure 5, les observations  $Y$  correspondant à des réalisations  $\xi_x$  pour des valeurs de  $\psi$  et  $\gamma$  différentes ne collent pas du tout à la distribution cible. De plus, une variation des paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $a$ , et  $b$  entraîne une différence encore plus forte :  $A$  et  $B$  jouant sur l'amplitude de la sinusoïde,  $a$  sur sa pulsation et  $b$  sur son décalage de phase.

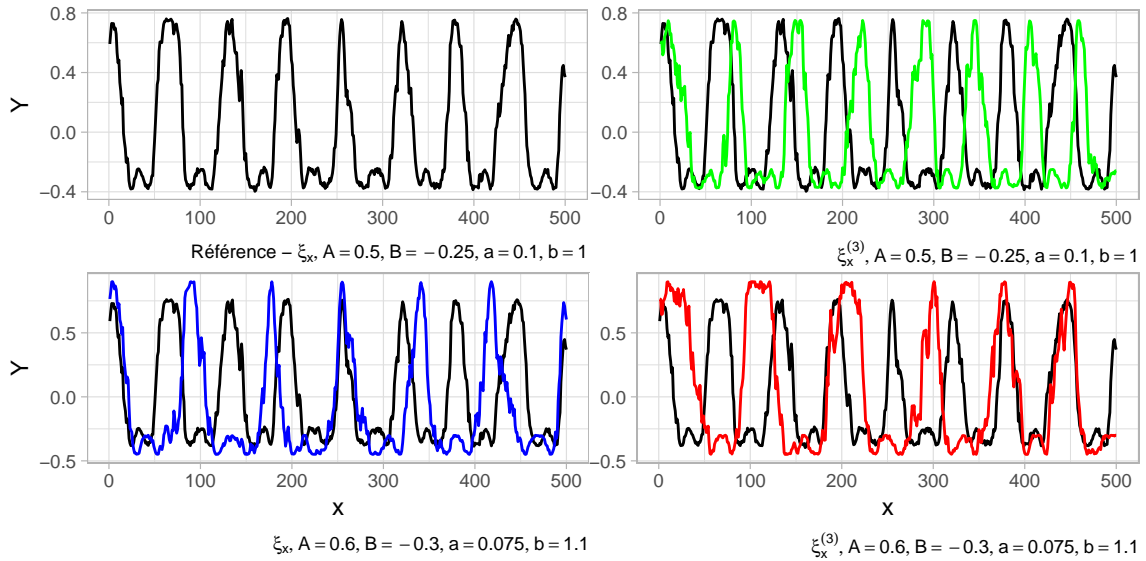


Figure 5: Distributions  $Y$  pour différentes trajectoires de  $\xi_x$  et différentes valeurs de  $A, B, a, b$  (en vert, bleu et rouge).

Les observations de  $Y$  sont sensibles à la trajectoire du processus  $\xi_x$  associé, ainsi qu'aux paramètres  $A, B, a, b$ . Le modèle sinusoïdal semble donc identifiable.

## 2 Estimation des paramètres à partir d'un algorithme SAEM

Afin d'estimer les paramètres  $\theta$  du modèle présenté dans la partie précédente, nous avons implémenté une procédure reposant sur l'algorithme SAEM. Nous allons d'abord présenter le principe d'un algorithme EM [4], puis celui de son approximation stochastique : l'algorithme SAEM [5]. Nous détaillerons les étapes MCMC [6] et SMC [7] avant de présenter l'algorithme complet.

### 2.1 Algorithme EM

L'algorithme EM est basé sur la log-vraisemblance complète du modèle qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \log L(Y, \xi_x, \theta) &= \sum_{i=1}^n \log p(Y_i | \xi_i) + \sum_{i=1}^n \log p(\xi_i | \xi_{i-1}) + \log p(\xi_1) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - f(x_i, \varphi))^2}{2\omega^2} - \frac{n}{2} \log(\omega^2) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \xi_{i-1}\psi)^2}{\frac{\sigma^2}{\beta}(1 - \psi^2)} - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - \psi^2)\right) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - f(x_i, \varphi))^2}{2\omega^2} - \frac{n}{2} \log(\omega^2) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \xi_{i-1}\psi)^2}{2\gamma^2} - \frac{n}{2} \log(\gamma^2)
 \end{aligned}$$

Pour chaque itération  $k$ , l'algorithme EM procède aux deux étapes suivantes, étant donné la valeur courante des paramètres  $\theta^{(k)}$ .

- étape E : calcul de  $Q(\theta, \theta^{(k)})$ , l'espérance conditionnelle de la log-vraisemblance du modèle :  $Q(\theta, \theta^{(k)}) \leftarrow E[\log L(Y, \xi, \theta) | Y; \theta^{(k)}]$
- étape M : actualisation des paramètres  $\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta, \theta^{(k)})$ .

Pour actualiser les paramètres, nous avons besoin de leurs statistiques exhaustives contenant toute l'information de la vraisemblance. En remarquant que la vraisemblance complète du modèle appartient à la famille exponentielle, nous obtenons les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_1(\xi_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i(\xi_i), \varphi))^2 \\
 S_2(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} \xi_i \\
 S_3(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2 \\
 S_4(\xi_i) &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2
 \end{aligned}$$

L'actualisation des paramètres dépend directement de ces statistiques.

## 2.2 Simulation de $\xi_x$

Dans notre cas, la distribution conditionnelle  $p(\xi_x|Y; \theta^{(k)})$  n'est pas explicite en raison de la non-linéarité de notre fonction de régression  $f(x, \varphi)$ . Nous pouvons donc utiliser un algorithme MCMC ou un algorithme SMC pour simuler selon cette distribution.

### 2.2.1 Algorithme MCMC

L'objectif de cet algorithme MCMC (Markov Chain Monte Carlo) est de simuler une trajectoire du processus  $\xi_x$  à partir des observations  $Y$  ainsi que des paramètres  $\theta$ . L'algorithme programmé est plus précisément un algorithme de Gibbs - Metropolis Hasting avec marche aléatoire.

Effectivement, après l'initialisation d'une trajectoire  $\xi^{(0)} = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ , l'algorithme procède à  $M$  itérations. La trajectoire du processus simulée peut donc s'écrire  $\xi^{(M)} = (\xi_1^{(M)}, \dots, \xi_n^{(M)})$ .

Plus précisément, pour chaque itération  $k$ , on calcule pour chaque position  $x_i$ , une valeur courante candidate  $\xi_c$  avec une marche aléatoire :  $\xi_i^{(c)} = \xi_i^{(k-1)} + N(0, \delta_i^2)$ . Cela introduit un nouveau paramètre  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  contrôlant la variance de la marche aléatoire. Pour chacun de ses candidats, une log-probabilité d'acceptation est calculée de la façon suivante :

$$\log(\alpha) = \min(\log\left(\frac{L(Y, \xi^{(c)})}{L(Y, \xi^{(k-1)})}\right), 1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{L(Y, \xi^{(c)})}{L(Y, \xi^{(k-1)})}\right) &= \log(L(Y, \xi^{(c)})) - \log(L(Y, \xi^{(k-1)})) \\ &= -\frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\varphi(\xi^{(c)}))^2 - \frac{1}{2\frac{\gamma^2}{2}} \sum_{i=1}^n (\xi^{(c)} - \xi^{(k-1)}\psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - f_\varphi(\xi^{(k-1)}))^2 + \frac{1}{2\frac{\gamma^2}{2}} \sum_{i=1}^n (\xi^{(k-1)} - \xi^{(k-2)}\psi)^2 \end{aligned}$$

À partir de la valeur de cette log-probabilité ainsi que d'une réalisation d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 0 et 1, le candidat est soit rejeté, soit accepté, auquel cas, il remplace la valeur considérée à l'itération  $k - 1$ .

De plus, nous avons choisi de rendre le paramètre  $\delta$  adaptatif en fonction du taux d'acceptation  $acc\_rate_i$  pour chaque point au fil des itérations  $k$ . Cela ajoute donc une étape d'actualisation à l'algorithme précédent, ce qui donne finalement l'Algorithme 1 :

---

**Algorithm 1** Algorithme MCMC de simulation d'une trajectoire du processus  $\xi_x$ .

---

```
 $\xi_{1:n} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation du processus  
 $\delta_{1:n} \leftarrow 0.05$  ▷ Initialisation du delta adaptatif  
 $\delta_{AR} \leftarrow 0.1$  ▷ Pas d'évolution du delta adaptatif  
 $acc\_rate_{1:n} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation du vecteur de taux d'acceptation  
 $acc\_rate_{target} \leftarrow 0.23$  ▷ Taux d'acceptation visé  
for  $k \in \{1, \dots, M\}$  do  
  for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do  
     $\xi^{(c)} \leftarrow \xi$   
     $\xi_i^{(c)} \sim \xi_i + \mathcal{N}(0, \delta_i^2)$  ▷ Simulation du candidat pour  $\xi_i$   
     $\alpha_{log} \leftarrow \min(\log(\frac{L(Y, \xi^{(c)})}{L(Y, \xi)}), 1)$  ▷ Calcul de la probabilité d'acceptation  
     $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$  ▷ Tirage d'une réalisation de loi uniforme  
    if  $\log u \leq \alpha_{log}$  then  
       $\xi \leftarrow \xi^{(c)}$   
    end if  
     $acc\_rate_i \leftarrow$  mise à jour du taux d'acceptation  
    if  $acc\_rate_i < acc\_rate_{target} * (1 - 0.1)$  then  
       $\delta_i \leftarrow \delta_i * (1 - \delta_{AR})$  ▷ Réduction du delta adaptatif  
    else if  $acc\_rate_i > acc\_rate_{target} * (1 + 0.1)$  then  
       $\delta_i \leftarrow \delta_i * (1 + \delta_{AR})$  ▷ Augmentation du delta adaptatif  
    end if  
  end for  
end for  
 $\hat{\xi}_x \leftarrow \xi$ 
```

---

## 2.2.2 Algorithme SMC

Comme pour l'algorithme MCMC, l'algorithme SMC (Sequential Monte-Carlo) - ou filtre particulaire - a pour objectif de simuler une trajectoire de  $\xi_x$  à partir des observations  $Y$  et des paramètres  $\theta$ .

Cependant son fonctionnement est assez différent : plutôt que d'accepter ou de rejeter un candidat pour chaque instant du processus selon un rapport de vraisemblance comme le fait l'approche MCMC, le SMC propose pour chaque instant  $P$  réalisations (les particules) selon les  $P$  estimations réalisées à l'instant précédent et associe à chacune des nouvelles réalisations un poids égale à la probabilité d'observer la valeur de  $Y$  à l'instant courant conditionnellement à la réalisation simulée. Il est alors possible de tirer avec remise parmi les particules en utilisant les poids normalisés comme probabilités de tirage et de conserver ainsi les particules permettant d'observer avec les plus fortes probabilités  $Y$ . Une fois que le dernier instant du processus est atteint, il suffit de tirer un index selon les derniers poids calculés pour obtenir une trajectoire du processus. L'Algorithme 2 détaille chacune de ces étapes :



---

**Algorithm 2** Algorithme SMC pour la simulation d'une trajectoire du processus  $\xi_x$ .

---

```

 $w_{1:P} \leftarrow 1/P$  ▷ Initialisation des poids associés aux particules
 $\xi_c^{(1:P)} \leftarrow 0$  ▷ Initialisation des particules au premier instant du processus
 $\xi_{1:n} \leftarrow \xi_c$  ▷ Initialisation des trajectoires du processus
for  $i \in \{2, \dots, n\}$  do
  for  $j \in \{1, \dots, P\}$  do
     $\xi_c^{(j)} \sim \xi_{i-1}^{(j)} * \psi + \mathcal{N}(0, \gamma^2)$  ▷ Simulation d'une valeur courante selon  $\xi_{i-1}^{(j)}$ 
     $w_j \leftarrow P(Y_i | f(i, \xi_c^{(j)}))$  ▷ Poids égale à la probabilité de  $Y_i$  conditionnellement à  $\xi_c^{(j)}$ 
  end for
  for  $j \in \{1, \dots, P\}$  do
     $w_j \leftarrow \frac{w_j}{\sum_{k=1}^P w_k}$  ▷ Normalisation
  end for
  for  $j \in \{1, \dots, P\}$  do
     $idx \leftarrow$  tirage probabiliste d'une particule en fonction des poids  $w$ 
     $\xi_i^{(j)} \leftarrow \xi_c^{(idx)}$  ▷ Conservation de la particule  $idx$ 
  end for
end for
 $idx \leftarrow$  tirage probabiliste d'une trajectoire en fonction des poids  $w$ 
 $\hat{\xi}_x \leftarrow \xi^{(idx)}$ 

```

---

## 2.3 Algorithme SAEM

L'introduction d'une étape MCMC ou SMC conduit à la version stochastique de l'algorithme EM, à savoir l'algorithme SAEM. Cet algorithme utilise les étapes de l'algorithme EM auxquelles s'ajoute une étape d'approximation stochastique.

Effectivement, pour chaque itération  $k$ , les étapes sont les suivantes :

- étape E : simulation d'une nouvelle trajectoire de  $\xi^{(k)}$  à l'aide d'un algorithme MCMC considérant  $p(\xi | Y; \theta^{(k)})$  comme une distribution stationnaire,
- étape SA : approximation stochastique des statistiques exhaustives :

$$\begin{aligned}
s_1^{(k)} &= s_1^{(k-1)} + \alpha_k (S_1(\xi^{(k)}) - s_1^{(k-1)}) \\
s_2^{(k)} &= s_2^{(k-1)} + \alpha_k (S_2(\xi^{(k)}) - s_2^{(k-1)}) \\
s_3^{(k)} &= s_3^{(k-1)} + \alpha_k (S_3(\xi^{(k)}) - s_3^{(k-1)}) \\
s_4^{(k)} &= s_4^{(k-1)} + \alpha_k (S_4(\xi^{(k)}) - s_4^{(k-1)})
\end{aligned}$$

- étape M : actualisation de  $\theta^k$ , à partir des formules suivantes qui utilisent les statistiques exhaustives  $s^{(k)}$  :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{(k)} &= \arg \min_{\varphi} \sum_{i=1}^n \left( Y_i - f(x_i(\xi_i^{(k)}), \varphi) \right)^2 \\
\hat{\psi}^{(k)} &= \frac{s_2^{(k)}}{s_3^{(k)}} \\
\widehat{\omega^2}^{(k)} &= s_1^{(k)} \\
\widehat{\gamma^2}^{(k)} &= \frac{1}{n} (\widehat{\psi^2}^{(k)} s_3^{(k)} - 2\hat{\psi}^{(k)} s_2^{(k)} + s_4^{(k)})
\end{aligned}$$

Au principe général d'un algorithme SAEM à  $Q$  itérations, nous avons ajouté deux hyper-paramètres  $M_{max}$  &  $\alpha_{min}$  :

- Pour chaque itération  $q$  de l'algorithme SAEM, au moins une itération de l'algorithme MCMC ou SMC est effectuée. Dans le cas de l'utilisation d'une étape MCMC, afin de pouvoir améliorer les performances au début de notre algorithme, nous avons décidé de fixer ce nombre d'itérations à 5 pour les  $M_{max}$  premières itérations du SAEM, puis ensuite l'algorithme n'accomplit plus qu'une seule itération du MCMC. Le paramètre  $M_{max}$  est donc un hyper-paramètre de l'algorithme SAEM à choisir au préalable.
- Le deuxième paramètre concerne l'approximation stochastique effectuée pour chacune des itérations  $q$ . Effectivement, durant les premières itérations les approximations sont relativement éloignées de la valeur cible et donc sensiblement différentes entre elles. Au contraire, dans les dernières itérations, étant donné le phénomène de convergence que nous devons observer, les approximations sont censées être plus proches de la valeur cible et également entre elles. Afin de prendre en compte ce phénomène, nous faisons varier la valeur du paramètre de mémoire  $\alpha$  permettant de tenir compte des valeurs précédemment estimées au fil des itérations à partir du paramètre  $\alpha_{min}$  de la façon suivante :
  - dans un premier temps  $\alpha = 1$  pour les  $\alpha_{min}$  premières itérations, ce qui permet, d'appliquer la formule complète d'approximation,
  - puis, pour les  $(Q - \alpha_{min})$  dernières itérations, les alphas sont calculés de la façon suivante :

$$\alpha_{\alpha_{min}:Q} = \frac{1}{l^{0.8}}, \text{ avec } l = 1 : (Q - \alpha_{min})$$

Ainsi le paramètre  $\alpha$  décroît au fil des itérations à partir de la  $\alpha_{min}$ <sup>ième</sup> itération. Cela permet de réduire l'importance du terme associé à  $\alpha$  et d'augmenter donc l'influence de la valeur précédente pour ces itérations-là. Le choix de la puissance au dénominateur dans l'expression des  $\alpha_{\alpha_{min}:Q}$  n'est pas complètement anodin. Les résultats théoriques sur la convergence de l'algorithme SAEM vers un optimum local reposent en partie sur les 2 hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty \\
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} < \infty
\end{aligned}$$

Cela implique  $0.5 < p \leq 1$ , d'où notre choix de  $p = 0.8$ .

L'Algorithme 3 résume l'ensemble de cette procédure SAEM :

---

**Algorithm 3** Algorithmme SAEM complet
 

---

```

 $s_1 \leftarrow (s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(Q)})$ 
 $s_2 \leftarrow (s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(Q)})$ 
 $s_3 \leftarrow (s_3^{(1)}, \dots, s_3^{(Q)})$ 
 $s_4 \leftarrow (s_4^{(1)}, \dots, s_4^{(Q)})$ 
 $\widehat{\varphi} \leftarrow (\widehat{\varphi}^{(1)}, \dots, \widehat{\varphi}^{(Q)})$ 
 $\widehat{\psi} \leftarrow (\widehat{\psi}^{(1)}, \dots, \widehat{\psi}^{(Q)})$ 
 $\widehat{\omega^2} \leftarrow (\widehat{\omega^2}^{(1)}, \dots, \widehat{\omega^2}^{(Q)})$ 
 $\widehat{\gamma^2} \leftarrow (\widehat{\gamma^2}^{(1)}, \dots, \widehat{\gamma^2}^{(Q)})$ 
 $\alpha_{1:\alpha_{min}-1} \leftarrow 1$  ;  $\alpha_{\alpha_{min}:Q} \leftarrow \frac{1}{l^{0.8}}$  avec  $l = 1 : (Q - \alpha_{min} + 1)$  ▷ Initialisation du paramètre mémoire
 $M_{1:M_{max}} \leftarrow 5$  ;  $M_{M_{max}+1:Q} \leftarrow 1$  ▷ Initialisation du nombre d'itérations du MCMC
for  $q \in \{2, \dots, Q\}$  do
▷ Etape E
 $\xi^{(q)} \leftarrow \xi$  avec  $\theta^{(q-1)}$ , par  $M = M_q$  itérations MCMC (Algorithme 1), ou par SCM (Algorithme 2)
▷ Etape SA
 $S_1 \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i(\xi_i^{(q)}), \varphi))^2$  ▷ Calcul des statistiques exhaustives
 $S_2 \leftarrow \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^{(q)} \xi_i^{(q)}$ 
 $S_3 \leftarrow \sum_{i=1}^n (\xi_{i-1}^{(q)})^2$ 
 $S_4 \leftarrow \sum_{i=1}^n (\xi_i^{(q)})^2$ 
▷ Mise à jour des approximations stochastiques
 $s_1^{(q)} \leftarrow s_1^{(q-1)} + \alpha_q (S_1(\xi^{(q)}) - s_1^{(q-1)})$ 
 $s_2^{(q)} \leftarrow s_2^{(q-1)} + \alpha_q (S_2(\xi^{(q)}) - s_2^{(q-1)})$ 
 $s_3^{(q)} \leftarrow s_3^{(q-1)} + \alpha_q (S_3(\xi^{(q)}) - s_3^{(q-1)})$ 
 $s_4^{(q)} \leftarrow s_4^{(q-1)} + \alpha_q (S_4(\xi^{(q)}) - s_4^{(q-1)})$ 
▷ Etape M
 $\widehat{\varphi}^{(q)} \leftarrow \arg \min_{\varphi} \sum_{i=1}^n \left( Y_i - f(x_i(\xi_i^{(q)}), \varphi) \right)^2$  ▷ Actualisation de  $\theta^{(q)}$ 
 $\widehat{\psi}^{(q)} \leftarrow \frac{s_2^{(q)}}{s_3^{(q)}}$ 
 $\widehat{\omega^2}^{(q)} \leftarrow s_1^{(q)}$ 
 $\widehat{\gamma^2}^{(q)} \leftarrow \frac{1}{n} (\widehat{\psi}^{(q)} s_3^{(q)} - 2 \widehat{\psi}^{(q)} s_2^{(q)} + s_4^{(q)})$ 
end for

```

---

A chaque itération de l'algorithme, les paramètres  $A, B, a, b = \varphi$  sont estimés en minimisant les moindres carrés non linéaires. Sous  $\mathbf{R}$ , cela se fait au moyen de la fonction `nls` qui nécessite des valeurs initiales des paramètres à estimer. Afin de favoriser la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton utilisé pour la résolution du problème des moindres carrés non linéaires, nous avons tenu compte de l'influence des paramètres  $A$  et  $B$  sur l'amplitude de  $Y$  en les initialisant selon une réalisation de loi uniforme  $\mathcal{U}(-\max(|Y|) - \omega, \max(|Y|) + \omega)$ . Dans le même objectif, puisque le paramètre  $a$  est lié à la pulsation de la sinusoïde, il est initialisé selon  $\hat{a} = 2 * \pi * f_{max}$  où  $f_{max}$  est la fréquence de  $Y$  avec la plus grande densité spectrale. Ce choix d'initialisation s'est avéré indispensable pour résoudre le problème des moindres carrés non linéaires. Le paramètre  $b$  influe lui sur le décalage de phase de la sinusoïde, nous pouvons donc aider l'algorithme en l'initialisant par  $\hat{b} = (7 * \pi / 8) - x_0 * \hat{a}$  où  $x_0$  correspond au plus petit  $x_i$  pour lequel  $Y$  est nul et  $\hat{a}$  à la définition précédente. Par ailleurs, nous avons fait le choix d'initialiser  $\widehat{\omega}, \widehat{\psi}, \widehat{\gamma}$  à 0.5 pour la première itération.

### 3 Simulation & résultats

Dans cette dernière partie, nous présentons les résultats d'estimation de  $\xi_x$  par les algorithmes MCMC et SMC ; et plus largement de l'ensemble de coefficients  $\theta$  par l'algorithme SAEM, ainsi que du plan d'expérience mis en place pour les valider.

#### 3.1 Estimation de $\xi_x$ par MCMC

Nous avons, dans un premier temps, testé l'efficacité de l'algorithme MCMC programmé indépendamment de l'algorithme SAEM. Pour ce faire, nous avons fixé les valeurs des paramètres :  $A = 0.5$ ,  $B = -0.25$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\omega = 0.01$  et  $\delta = 1$ . Ces valeurs ont été utilisées pour simuler une trajectoire de  $\xi_x$  cible avec une distribution  $Y$  associée selon le modèle sinusoïdal. L'algorithme MCMC a été réalisé avec  $M = 150$  itérations et obtient, à partir de ces mêmes valeurs de paramètres et des observations  $Y$ , les résultats présentés sur la Figure 6.

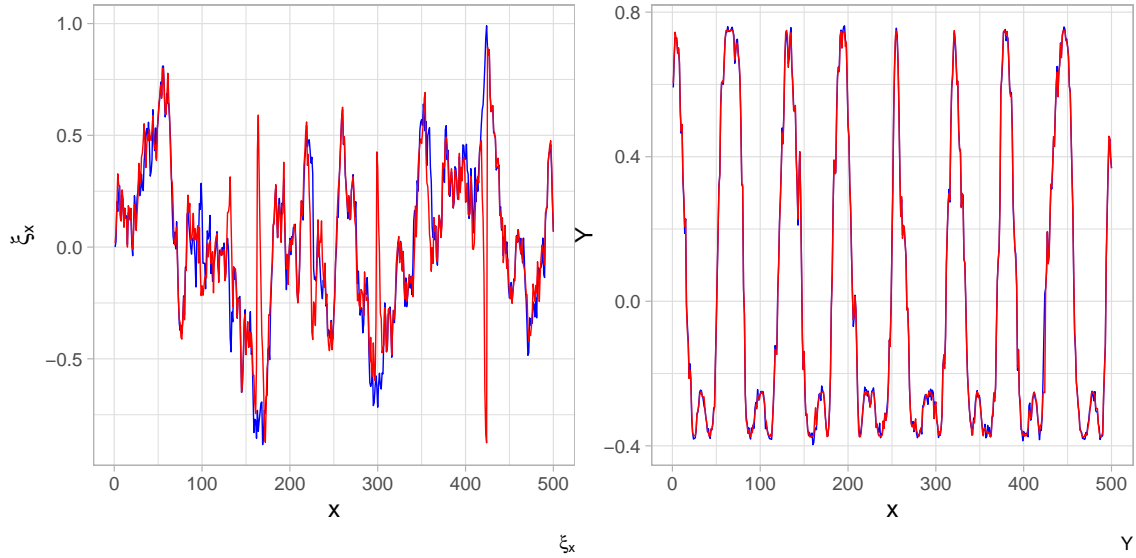


Figure 6: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi_x$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\hat{\xi}_x$  obtenue par l'algorithme MCMC et la distribution  $\hat{Y}$  qui l'utilise (en rouge).

La trajectoire de  $\xi_x$  obtenue par le MCMC (en rouge) est très proche de celle à l'origine des observations  $Y$ . Nous remarquons cependant que quelques points de  $\xi_x$  sont très mal approchés par l'algorithme. Effectivement pour plusieurs positions  $x_i$ , la distance entre la valeur originelle de  $\xi_i$  et la valeur estimée par l'algorithme semble grande. Cependant, ces différences n'influencent que très peu l'allure du signal  $Y$ , qui reste très satisfaisant. Afin de comprendre la raison de ces erreurs, nous nous sommes intéressés au comportement du  $\delta_i$  au fil des itérations, relativement à celui du taux d'acceptation  $acc\_rate_i$  pour un des points concernés. Nous avons comparé leur évolution pour la position  $x_i$  où l'erreur est maximale et celle où elle est minimale.

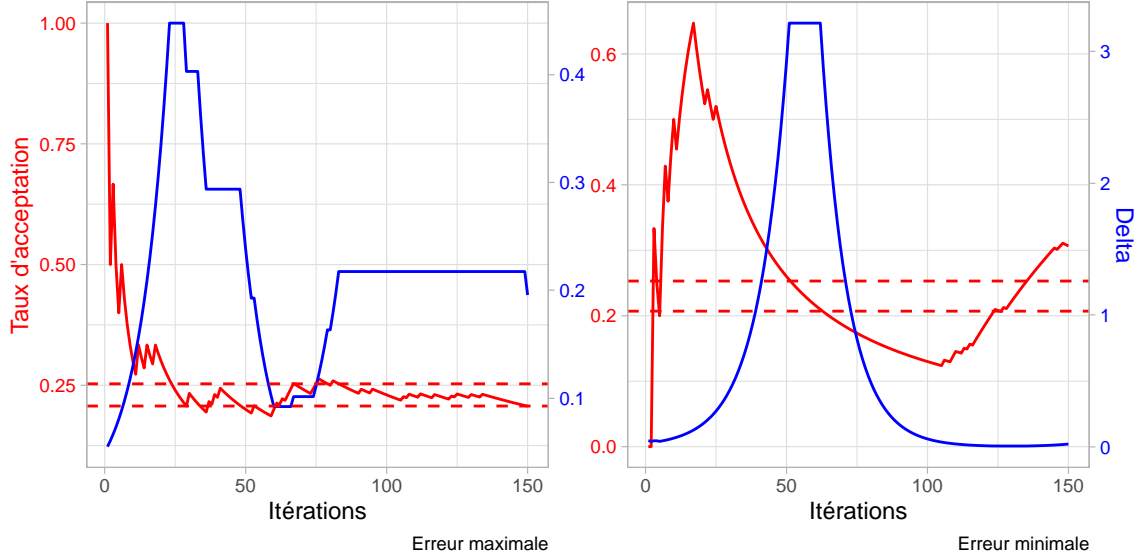


Figure 7: Distributions du taux d'acceptation et du delta adaptatif au fil des itérations pour deux positions différentes : celle pour laquelle l'erreur d'estimation est maximale et celle où elle est minimale.

Nous pouvons voir sur la Figure 7, que dans les deux cas, le delta adaptatif évolue correctement. Effectivement le taux d'acceptation est premièrement supérieur à la borne supérieure de notre seuil ce qui entraîne l'augmentation de  $\delta$ . Cette augmentation permet alors au taux de diminuer et donc de rentrer dans nos deux bornes de seuil, et  $\delta$  stagne durant cette période. Le taux d'acceptation devient ensuite trop bas, et alors la valeur de  $\delta$  diminue afin de le faire augmenter à nouveau. Nous remarquons seulement que, dans le cas concernant l'erreur maximale, l'évolution du taux d'acceptation est moins rapide que dans le cas de l'erreur minimale, par exemple il atteint l'intervalle de seuil environ vers la 40<sup>ième</sup> itération contre environ la 20<sup>ième</sup> pour le point où l'erreur est minimale. Cela entraîne une valeur maximale de  $\delta$  bien plus élevée, d'environ 1.6 contre 0.3. Malgré cette observation, nous n'identifions pas la source de ces points aberrants. Cependant, étant donné que ceux-ci n'impactent pas l'estimation de la distribution des observations  $Y$ , l'algorithme MCMC programmé reste selon nous satisfaisant.

### 3.2 Estimation de $\xi_x$ par SMC

Nous avons repris la trajectoire  $\xi_x$  à estimer dans la partie précédente et nous cette fois-ci tenté de la générer par notre algorithme SMC en utilisant  $P = 500$  particules.

La Figure 8 permet de constater que cette approche semble plus précise que la MCMC : les points aberrants ont disparu et l'allure de  $\xi_x$  est bien reconstruite.

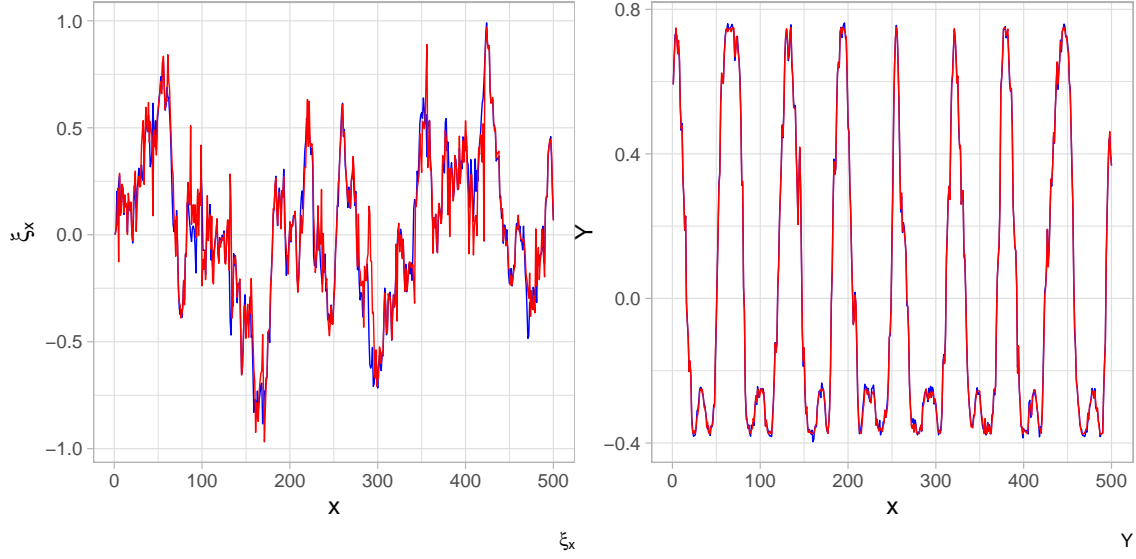


Figure 8: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi_x$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\hat{\xi}_x$  obtenue par l'algorithme SMC et la distribution  $\hat{Y}$  qui l'utilise (en rouge).

### 3.3 Estimation de $\theta$ par SAEM

La validation de l'échantillonnage de  $\xi_x$  par MCMC ou SMC n'était qu'une étape, l'objectif global étant l'estimation de l'ensemble des paramètres  $\theta$ . Nous avons donc ensuite observé le comportement de l'algorithme SAEM présenté précédemment. Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus pour la reconstruction d'un échantillon simulé avec une étape MCMC ou une étape SMC, puis la synthèse d'un plan d'expérience réalisé avec 1000 échantillons simulés.

#### 3.3.1 Avec une étape MCMC

Pour la version MCMC nous avons réalisé  $Q = 500$  itérations de l'algorithme SAEM et après plusieurs tests et analyses graphiques,  $\alpha_{min}$  a été fixé à 90 et  $M_{max}$  à 20, ce qui correspond à des ordres de grandeur régulièrement employés dans la littérature. La trajectoire de  $\hat{\xi}_x$  obtenue après les 500 itérations de SAEM ainsi que les observations  $\hat{Y}$  correspondantes sont présentés sur la Figure 9. Nous observons sur cette figure que la reconstruction du processus  $\xi_x$  initial est un peu moins bonne que celle réalisée en connaissant les paramètres  $\theta$  du modèle sinusoïdal, ce à quoi nous nous attendions. L'estimation de  $\xi_x$  demeure cependant très correcte et, conjointement à l'estimation des paramètres  $\theta$ , permet une reconstruction fidèle de  $Y$ .

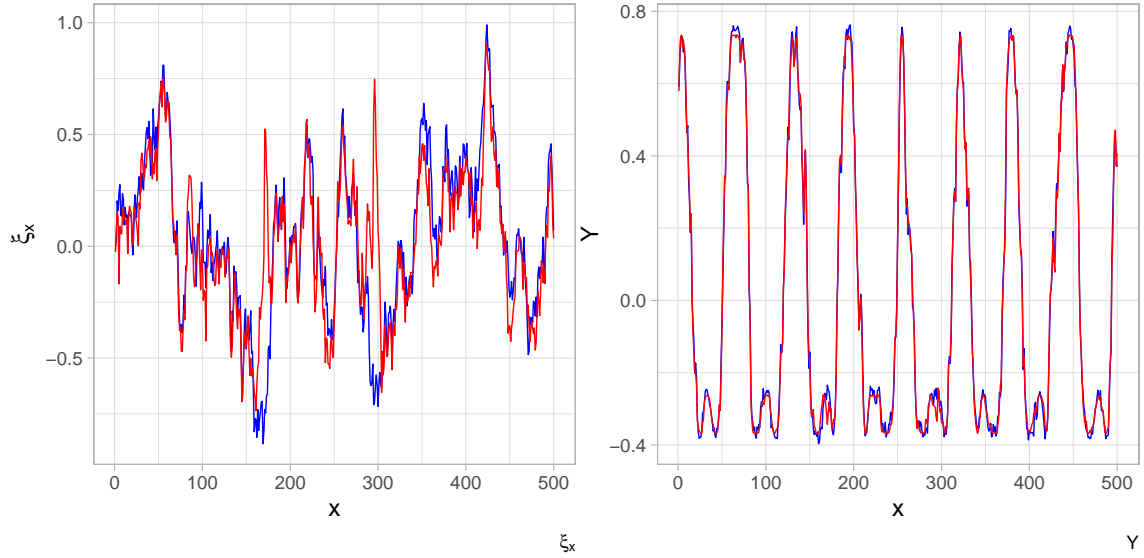


Figure 9: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi_x$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\xi_x$  obtenue par l'algorithme SAEM et la distribution  $Y$  qui l'utilise (en rouge).

La Figure 10 présente justement les valeurs estimées au fil des itérations pour  $\omega, \psi, \gamma$ . Comme nous pouvons le voir sur cette figure, les paramètres  $\omega$  et  $\psi$  convergent correctement vers les vraies valeurs des paramètres. Cependant, celle du paramètre  $\gamma$  ne converge pas exactement vers la valeur attendue et est légèrement surestimée.

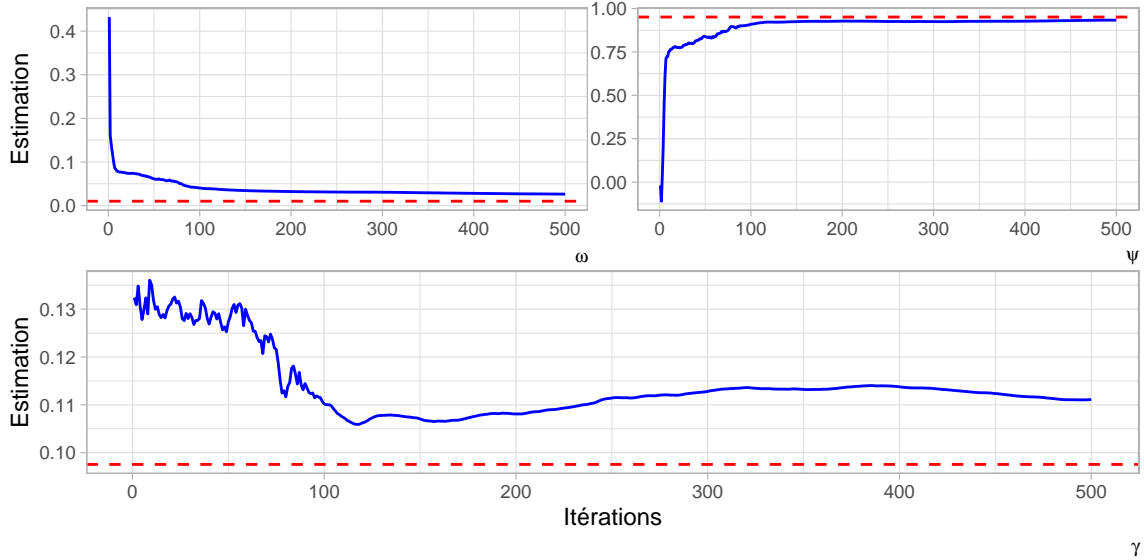


Figure 10: Présentation de l'estimation des coefficients  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\gamma$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

Comme nous pouvons le voir sur la Figure 11, l'estimation du coefficient  $A$  converge assez normalement vers 0.5. Bien qu'elle se rapproche de  $-0.25$ , celle de  $B$  semble avoir du mal à converger réellement et stagne au-dessus de ce que nous souhaiterions. Par ailleurs, nous observons, que l'estimation du paramètre  $a$  est très proche de la "vraie" valeur, mais nous ne voyons pas de convergence à proprement parler. Pour finir,

l'estimation de  $b$  semble plus difficile à accomplir : nous ne remarquons pas de convergence vers la valeur attendue et l'estimation finale apparaît un peu éloignée de la valeur fixée initialement.

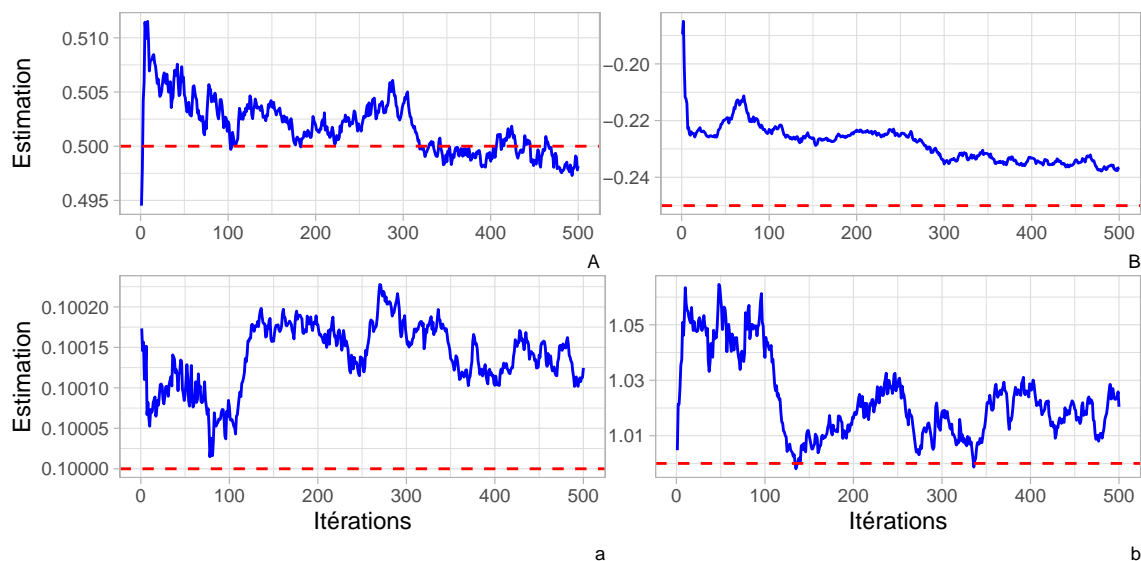


Figure 11: Présentation de l'estimation des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $a$  et  $b$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

### 3.3.2 Avec une étape SMC

Comme nous pouvons le voir sur les Figures 13 et 14, l'utilisation d'une étape SMC accélère sensiblement la convergence de  $\hat{\theta}$ , aussi nous avons utilisé seulement  $Q = 100$  itérations de l'algorithme SAEM et nous avons diminué  $\alpha_{min}$  à 25. L'étape SMC implique  $P = 500$  particules.

La Figure 12 montre que cette version de SAEM permet une reconstruction de  $\xi_x$  légèrement meilleure que la version MCMC, comme lorsque nous estimions  $\hat{\xi}_x$  en fixant les paramètres  $\theta$ . Cela conduit à une reconstruction finale  $\hat{Y}$  également très proche de  $Y$ .



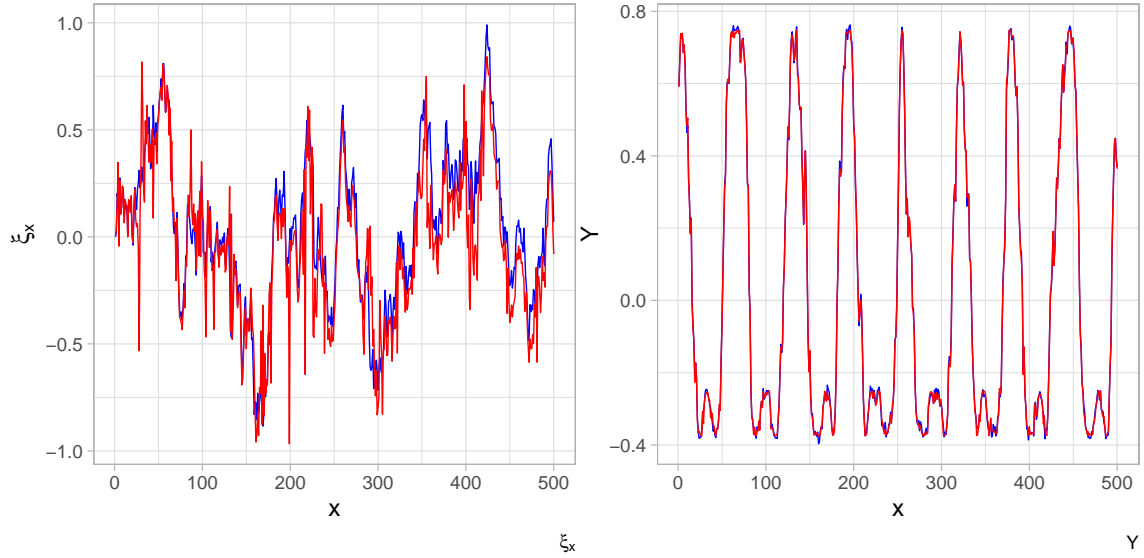


Figure 12: Superposition de la distribution  $Y$  cible et de la trajectoire  $\xi_x$  réellement utilisée (en bleu) ainsi que de la trajectoire de  $\xi_x$  obtenue par l'algorithme SAEM et la distribution  $Y$  qui l'utilise (en rouge).

En revanche la Figure 13 suggère que les estimations  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\gamma}$  sont moins bonnes que précédemment : la convergence se fait vers des valeurs respectivement inférieure et supérieure à celles attendues.  $\hat{\omega}$  semble elle mieux estimée.

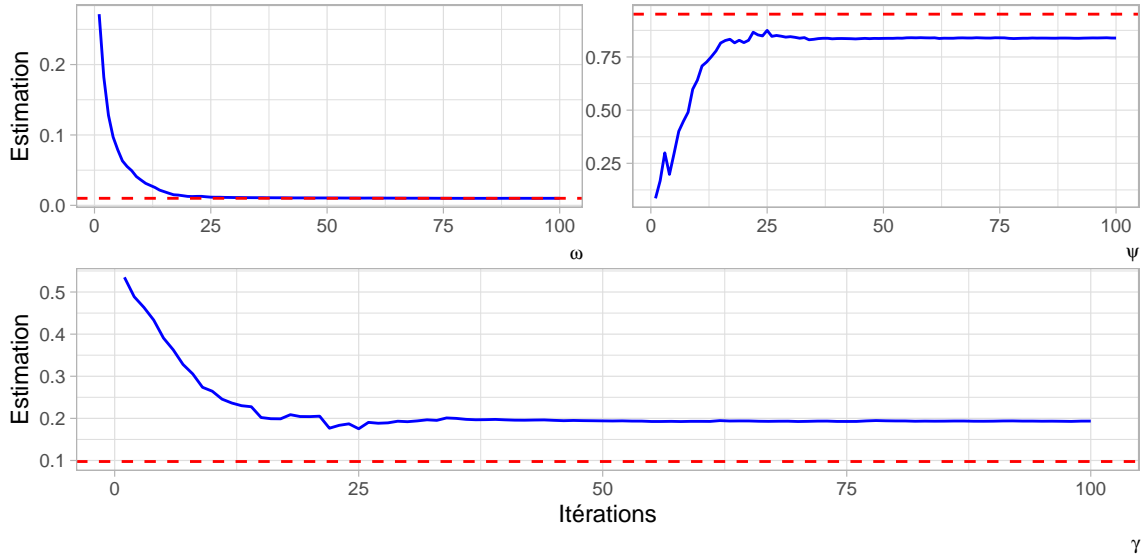


Figure 13: Présentation de l'estimation des coefficients  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\gamma$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

Enfin, la Figure 14 indique que les paramètres  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{b}$  convergent mieux vers les valeurs fixées des paramètres avec la version SMC de l'algorithme. Le paramètre  $\hat{a}$  ne converge toujours pas réellement et est un peu plus éloigné qu'avec l'utilisation d'une étape MCMC, mais l'estimation reste très bonne.

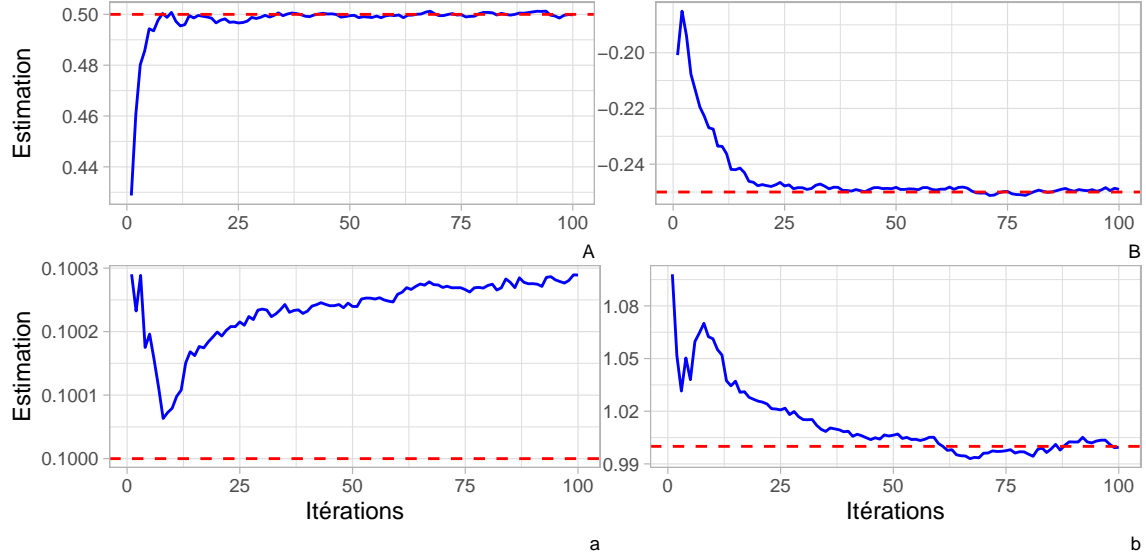


Figure 14: Présentation de l'estimation des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $a$  et  $b$  par l'algorithme SAEM, ainsi que des droites représentant la valeur cible de ces paramètres (en rouge).

### 3.3.3 Plan d'expérience

Les estimations de  $\theta$  et  $\xi_x$  comportent une part d'aléatoire, ainsi afin d'évaluer les performances de notre algorithme SAEM il convient de répéter un grand nombre de fois ces estimations à partir de réalisations de  $\xi_x$  différentes. En effet, notre objectif est d'estimer nos paramètres sur un grand nombre d'itérations, afin d'analyser leurs variations autour des valeurs fixées. Nous avons choisi d'effectuer  $M = 1000$  estimations de chacun des paramètres  $\gamma, \psi, \omega, A, B, a, b$ , et de calculer la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne ( $RMSE$ ), l'erreur en pourcentage ( $PE$ ) et sa moyenne en valeur absolue ( $MAPE$ ), à partir des formules suivantes :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{M}}$$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^M |PE_i|}{M}$$

$$PE_i = \frac{\hat{\theta}_i - \theta}{\theta}$$

Avec  $\hat{\theta}$  les paramètres estimés et  $\theta$  les paramètres initiaux.

Nous avons également utilisé ce plan d'expérience pour comparer les résultats obtenus en utilisant une étape MCMC ou une étape SMC pour estimer  $\xi_x$ .

Puisque l'estimation de chacun de nos paramètres doit se rapprocher de notre valeur initiale, nous devrions avoir des estimations  $\hat{\theta}$  autour de nos  $\theta$ , soit des  $PE$  relativement proches de 0. À partir des résultats obtenus pour les 1000 itérations, nous avons représenté sur la Figure 15 les boxplots des  $PE$  pour chacun des 7 paramètres et pour les deux méthodes de simulation de  $\xi_x$ .

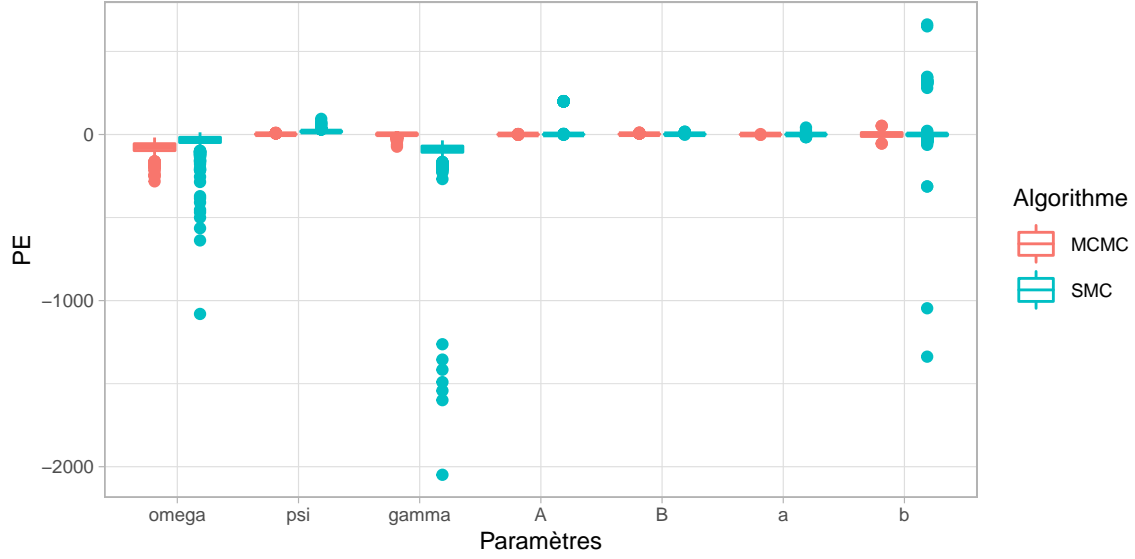


Figure 15: Boxplot des  $PE$  des 1000 estimations de chacun des paramètres.

Nous pouvons remarquer qu’avec la version MCMC d’estimation de  $\xi_x$ , hormis  $\omega$ , les  $PE$  de l’ensemble des paramètres varient autour de 0. En effet,  $\omega$  semble être sous-estimé et avoir une variation plus grande. Nous pouvons penser que cette variation est due au fait que la valeur de  $\omega$  initiale de 0.01 est faible, ce qui rend sa source de bruit difficile à distinguer des autres, plus importantes, qui sont elles bien estimées.

En revanche, il semblerait qu’avec la méthode SMC d’estimation de  $\xi_x$ , l’estimation de  $\omega$  est meilleure, mais celles de  $\psi$  et  $\gamma$  est nettement moins bonne. L’erreur réalisée sur l’estimation des paramètres  $A, B, a, b$  paraît similaire pour les deux approches d’estimation de  $\xi_x$ . Cependant, nous remarquons que les estimations des paramètres via la méthode SMC varient plus et sont parfois très éloignées de la valeur réelle. En effet,  $\omega$  et  $\gamma$  sont parfois sous-estimés de manière excessive sur certaines simulations, tandis que  $b$  est parfois fortement sur-estimé ou sous-estimé.

Table 1: Valeurs attendues, estimées en moyenne et erreurs associées de chacun des paramètres, en utilisant une étape MCMC dans l’algorithme SAEM.

	$\omega$	$\psi$	$\gamma$	A	B	a	b
$\theta$	0.010	0.951	0.098	0.500	-0.250	0.100	1.000
$\hat{\theta}$	0.018	0.932	0.097	0.499	-0.245	0.100	0.999
MAPE	79.859	2.143	6.153	0.486	2.100	0.467	13.911
RMSE	0.009	0.026	0.008	0.003	0.006	0.001	0.173

Au regard de la Table 1, il convient de relativiser l’erreur réalisée sur le paramètre  $\omega$  avec la méthode MCMC : la valeur attendue est 0.01 et celle estimée en moyenne est égale à 0.014. La  $MAPE$  peut sembler élevée, mais encore une fois, il faut observer qu’en valeur absolue les estimations sont proches de la valeur à estimer, comme l’indique la  $RMSE$ . Nous pouvons noter que c’est bien le paramètre  $b$  dont l’estimation est la plus éloignée de la valeur attendue, ce qui rejoint les observations faites à partir des Figures ?? et ??.

Table 2: Valeurs attendues, estimées en moyenne et erreurs associées de chacun des paramètres, en utilisant une étape SMC dans l’algorithme SAEM.

	$\omega$	$\psi$	$\gamma$	A	B	a	b
$\theta$	0.010	0.951	0.098	0.500	-0.250	0.100	1.000
$\hat{\theta}$	0.014	0.773	0.197	0.478	-0.246	0.100	0.980
MAPE	40.939	18.723	101.959	4.579	1.752	0.453	16.310
RMSE	0.007	0.188	0.158	0.145	0.006	0.002	0.766

La Table 2 confirme les observations visuelles : la *MAPE* des paramètres  $\psi$  et  $\gamma$  augmentent fortement en estimant  $\xi_x$  via un SMC par rapport à la méthode MCMC, tandis que celle du paramètre  $\omega$  diminue légèrement et que pour les autres paramètres nous n’observons pas de réelle différence.

Au regard de ces résultats, la version MCMC semble être à privilégier par rapport à la SMC. Cependant, nous avons noté que l’implémentation en **R** de l’algorithme avec l’étape SMC est bien plus rapide que celle avec l’étape MCMC : les 1000 répétitions du plan d’expérience SMC ont été exécutées en un peu moins de 15 minutes, contre plus d’une heure pour le MCMC. Nous avons identifié plusieurs raisons à cela :

- la convergence plus rapide de l’algorithme SAEM-SMC permettant de réduire le nombre d’itérations de 500 à 100,
- la possibilité de vectoriser l’ensemble des opérations sur les  $P$  particules de SMC, alors que les répétitions du MCMC doivent être réalisées séquentiellement.

Il pourrait donc être intéressant de tenter d’améliorer l’implémentation du SMC, et notamment en proposant une autre simulation des particules au temps  $i$ , ne dépendant pas uniquement des particules au temps  $i - 1$  mais également des observations  $Y_{1:i}$ .

## 4 Conclusion

Les narvals possèdent une grande dent avec des capacités sensorielles très développées. Cette dent comporte des sillons, apparaissant au cours de leur croissance et créant des motifs sinusoïdaux variants avec les saisons. Elle pourrait ainsi être utile pour approximer la durée de vie des baleines.

Notre objectif était donc d’estimer les paramètres  $\theta$  d’une sinusoïde  $Y$  perturbée par un bruit gaussien et un processus d’Ornstein-Uhlenbeck  $\xi_x$  au moyen d’un algorithme SAEM. Nous avons proposé deux implémentations de l’algorithme SAEM, l’une estimant le processus  $\xi_x$  par une étape MCMC et l’autre par une étape SMC.

Nous avons comparé les reconstructions  $\hat{\xi}_x$  et  $\hat{Y}$  et les estimations des paramètres  $\hat{\theta}$  données par les deux versions. Visuellement, les reconstructions de  $\hat{Y}$  sont très semblables et très satisfaisantes. Celle de  $\hat{\xi}_x$  proposée par l’algorithme SAEM-SMC est apparue légèrement meilleure que celle de SAEM-MCMC, les deux demeurant tout à fait fidèles à la réalisation originale du processus. L’estimation des paramètres  $\hat{\theta}$  a donné des résultats assez différents entre les deux approches. Certains des paramètres sont mieux approchés par la version SAEM-MCMC, d’autres par la version SAEM-SMC.

Pour juger plus rigoureusement les estimations des paramètres du modèle sinusoïdal, nous avons répété 1000 fois chacune des deux procédures SAEM et nous nous sommes intéressés aux distributions des erreurs réalisées ainsi qu’à leurs moyennes. L’algorithme SAEM-MCMC s’est alors révélé plus stable que le SAEM-SMC car souffrant d’une moins grande variance dans l’estimation des paramètres.

Cependant, le SAEM-SMC converge nettement plus rapidement que la version MCMC et son implémentation étant vectorisable, il demande un temps de calcul environ 5 fois moins important. Cela suggère qu’il pourrait être intéressant de tenter d’améliorer l’échantillonnage des particules générées par l’étape SMC pour perfectionner l’estimation des paramètres du modèle, tout en bénéficiant du temps de calcul restreint de l’algorithme SAEM-SMC.

Enfin, nous avons manipulé uniquement des données simulées, il reste donc à confronter les deux versions de l'algorithme à des données réelles, probablement plus bruitées !

## Références

- [1] Wikipedia contributors. *Narval*. 2022. URL: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Narval> (visited on 02/02/2023).
- [2] Jean-Pierre Sylvestre. *Dans l'Arctique canadien avec la licorne de mer*. 2018. URL: [https://www.peuple-animal.com/article,lecture,1160\\_dans-l-arctique-canadien-avec-la-licorne-de-mer.html](https://www.peuple-animal.com/article,lecture,1160_dans-l-arctique-canadien-avec-la-licorne-de-mer.html) (visited on 02/02/2023).
- [3] Peter Bondo. *The narwhal's tusk reveals its past living conditions*. 2021. URL: <https://phys.org/news/2021-03-narwhal-tusk-reveals-conditions.html> (visited on 02/02/2023).
- [4] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. “Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm”. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39.1 (1977), pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x>. eprint: <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x>. URL: <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x>.
- [5] Bernard Delyon, Marc Lavielle, and Eric Moulines. “Convergence of a Stochastic Approximation Version of the EM Algorithm”. In: *The Annals of Statistics* 27.1 (1999), pp. 94–128. URL: <http://www.jstor.org/stable/120120> (visited on 02/21/2023).
- [6] Estelle Kuhn and Marc Lavielle. “Coupling a stochastic approximation version of EM with an MCMC procedure”. In: *ESAIM: Probability and Statistics* 8 (2004), pp. 115–131. DOI: [10.1051/ps:2004007](https://doi.org/10.1051/ps:2004007). URL: <http://www.numdam.org/articles/10.1051/ps:2004007/>.
- [7] Sophie Donnet and Adeline Samson. “Using PMCMC in EM algorithm for stochastic mixed models: theoretical and practical issues”. In: *Journal de la société française de statistique* 155.1 (2014), pp. 49–72. URL: [http://www.numdam.org/item/JSFS\\_2014\\_\\_155\\_1\\_49\\_0/](http://www.numdam.org/item/JSFS_2014__155_1_49_0/).