Svuotamento di un gas sovrassaturo ad opera di un cluster supercritico

Leonardo Pozzati

14 Luglio 2015

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Outline

1. Introduzione al fenomeno analizzato
   - Modello di riferimento: lattice gas con dinamica di Kawasaki
2. Due modelli per studiare la crescita supercritica
3. I risultati nuovi ottenuti in questo lavoro

Equilibrio metastabile

Equilibrio caratterizzato da un tempo di vita molto più lungo di quello di un generico stato eccitato, ma comunque finito.

Metastabilià: un approccio dinamico

Equilibrio metastabile

Equilibrio caratterizzato da un tempo di vita molto più lungo di quello di un generico stato eccitato, ma comunque finito.

Il punto di vista sulla metastabilità

- Consideriamo la metastabilità come un problema dinamico:
  - dato un sistema fisico con hamiltoniana H e spazio delle configurazioni $\mathcal{X}$
  - studiamo la convergenza all'equilibrio di una catena di Markov, definita sullo spazio delle configurazioni in modo che la misura stazionaria, a cui la catena converge, coincida con la misura di Gibbs.

Lattice gas

Il modello conservativo di riferimento

- Sia $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$ un reticolo quadrato finito, centrato nell'origine e con condizioni periodiche al bordo;

Il modello conservativo di riferimento

- Sia $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$ un reticolo quadrato finito, centrato nell'origine e con condizioni periodiche al bordo;
- a ogni sito $\underline{x} \in \Lambda_\beta$ si associ una variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$, che assume i valori 0 o 1;

Il modello conservativo di riferimento

- Sia $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$ un reticolo quadrato finito, centrato nell'origine e con condizioni periodiche al bordo;
- a ogni sito $\underline{x} \in \Lambda_\beta$ si associ una variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$, che assume i valori 0 o 1;
- a una generica configurazione $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}_{\Lambda_\beta} = \{ 0, 1 \}^{|\Lambda_\beta|}$ del gas reticolare si associ l'energia

$$H(\boldsymbol{\eta}) = -U \sum_{(\underline{x},\underline{y}) \in \Lambda^*_\beta} \eta(\underline{x})\eta(\underline{y})$$

Il modello conservativo di riferimento

- Sia $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$ un reticolo quadrato finito, centrato nell'origine e con condizioni periodiche al bordo;
- a ogni sito $\underline{x} \in \Lambda_\beta$ si associ una variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$, che assume i valori 0 o 1;
- a una generica configurazione $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}_{\Lambda_\beta} = \{\, 0, 1 \,\}^{|\Lambda_\beta|}$ del gas reticolare si associ l'energia

$$H(\,\boldsymbol{\eta}) = -U \sum_{(\underline{x},\underline{y}) \in \Lambda_\beta^*} \eta(\underline{x})\eta(\underline{y})$$

  - Λ_β^* indica l'insieme dei legami in Λ_β

Lattice gas

Il modello conservativo di riferimento

- Sia $\Lambda_\beta \subset \mathbb{Z}^2$ un reticolo quadrato finito, centrato nell'origine e con condizioni periodiche al bordo;
- a ogni sito $\underline{x} \in \Lambda_\beta$ si associ una variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$, che assume i valori 0 o 1;
- a una generica configurazione $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}_{\Lambda_\beta} = \{\, 0, 1 \,\}^{|\Lambda_\beta|}$ del gas reticolare si associ l'energia

$$H(\boldsymbol{\eta}) = -U \sum_{(\underline{x},\underline{y}) \in \Lambda^*_\beta} \eta(\underline{x})\eta(\underline{y})$$

  - Λ^*_β indica l'insieme dei legami in Λ_β
  - $U > 0$ caratterizza l'energia di legame tra primi vicini.

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho|\Lambda_\beta|$$

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho|\Lambda_\beta|$$

Osservazione sui volumi Λ_β

Perché ci siano particelle dobbiamo scegliere $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$.

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho|\Lambda_\beta|$$

Osservazione sui volumi Λ_β

Perché ci siano particelle dobbiamo scegliere $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$.

Regime metastabile di Kawasaki

$$|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$$

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho |\Lambda_\beta|$$

Osservazione sui volumi Λ_β

Perché ci siano particelle dobbiamo scegliere $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$.

Regime metastabile di Kawasaki

$$|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}, \quad \Delta \in (U, 2U)$$

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho |\Lambda_\beta|$$

Osservazione sui volumi Λ_β

Perché ci siano particelle dobbiamo scegliere $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$.

Regime metastabile di Kawasaki

$$|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}, \quad \Delta \in (U, 2U), \quad \beta \to \infty$$

Regime metastabile di Kawasaki

- Per questo modello, fissiamo una densità in Λ_β

$$\rho = \frac{1}{|\Lambda_\beta|} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_\beta} \eta(\underline{x}) = \boxed{e^{-\Delta\beta} \qquad \text{con } \Delta > 0}$$

a cui corrisponde un numero di particelle in Λ_β

$$N = \rho|\Lambda_\beta|$$

Osservazione sui volumi Λ_β

Perché ci siano particelle dobbiamo scegliere $|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}$.

Regime metastabile di Kawasaki

$$|\Lambda_\beta| = e^{\Theta\beta}, \quad \Delta \in (U, 2U), \quad \beta \to \infty \ , \quad N = e^{(\Theta-\Delta)\beta} \to \infty.$$

Dinamica di Kawasaki

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

Dinamica di Kawasaki

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

- Definiamo la catena Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sul modello:

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

- Definiamo la catena Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sul modello:
  - ad ogni legame $b = (\underline{x}, \underline{y}) \in \Lambda_\beta^*$, associamo un campanello che suona a tempi esponenzialmente dirtribuiti

Dinamica di Kawasaki

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

- Definiamo la catena Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sul modello:
  - ad ogni legame $b = (\underline{x}, \underline{y}) \in \Lambda_\beta^*$, associamo un campanello che suona a tempi esponenzialmente dirtribuiti
  - quando suona il campanello associato a b, consideriamo la configurazione $\boldsymbol{\eta}^b$ con le particelle scambiate rispetto al legame b

Dinamica di Kawasaki

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

- Definiamo la catena Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sul modello:
  - ad ogni legame $b = (\underline{x}, \underline{y}) \in \Lambda^*_\beta$, associamo un campanello che suona a tempi esponenzialmente dirtribuiti
  - quando suona il campanello associato a b, consideriamo la configurazione $\boldsymbol{\eta}^b$ con le particelle scambiate rispetto al legame b
  - questa nuova configurazione $\boldsymbol{\eta}^b$ è accettata con una probabilità proporzionale al fattore di Boltzmann

Dinamica di Kawasaki

Conseguenza di lavorare con volumi $\Lambda_\beta = e^{\Theta\beta}$

L'interesse verso volumi $|\Lambda_\beta|$ esponenziali in β
comporta la scelta di una dinamica stocastica a tempi continui.

- Definiamo la catena Markov $(\boldsymbol{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sul modello:
  - ad ogni legame $b = (\underline{x}, \underline{y}) \in \Lambda_\beta^*$, associamo un campanello che suona a tempi esponenzialmente dirtribuiti
  - quando suona il campanello associato a b, consideriamo la configurazione $\boldsymbol{\eta}^b$ con le particelle scambiate rispetto al legame b
  - questa nuova configurazione $\boldsymbol{\eta}^b$ è accettata con una probabilità proporzionale al fattore di Boltzmann

$$\boxed{e^{-\beta[H(\boldsymbol{\eta}^b)-H(\boldsymbol{\eta})]_+}}$$

Relazione con il modello di Ising

- Tra la variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$ e la variabile di spin $\sigma(\underline{x})$ del modello di Ising con interazione di coppia J e campo esterno h

$$\boxed{\eta(\underline{x}) = \frac{1+\sigma(\underline{x})}{2}}$$

Relazione con il modello di Ising

- Tra la variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$ e la variabile di spin $\sigma(\underline{x})$ del modello di Ising con interazione di coppia J e campo esterno h

$$\boxed{\eta(\underline{x}) = \frac{1 + \sigma(\underline{x})}{2}}$$

- La descrizione del comportamento metastabile di questo modello conservativo, nel limite termodinamico, è approssimabile in termini grancanonici, con hamiltoniana

$$H_\lambda(\boldsymbol{\eta}) = H(\boldsymbol{\eta}) - \lambda N$$

Relazione con il modello di Ising

- Tra la variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$ e la variabile di spin $\sigma(\underline{x})$ del modello di Ising con interazione di coppia J e campo esterno h

$$\boxed{\eta(\underline{x}) = \frac{1 + \sigma(\underline{x})}{2}}$$

- La descrizione del comportamento metastabile di questo modello conservativo, nel limite termodinamico, è approssimabile in termini grancanonici, con hamiltoniana

$$H_\lambda(\boldsymbol{\eta}) = H(\boldsymbol{\eta}) - \lambda N \qquad \text{se } \rho = e^{\lambda\beta}$$

Relazione con il modello di Ising

- Tra la variabile di occupazione $\eta(\underline{x})$ e la variabile di spin $\sigma(\underline{x})$ del modello di Ising con interazione di coppia J e campo esterno h

$$\boxed{\eta(\underline{x}) = \frac{1+\sigma(\underline{x})}{2}}$$

- La descrizione del comportamento metastabile di questo modello conservativo, nel limite termodinamico, è approssimabile in termini grancanonici, con hamiltoniana

$$H_\lambda(\boldsymbol{\eta}) = H(\boldsymbol{\eta}) - \lambda N \qquad \text{se } \rho = e^{\lambda\beta}$$

- In particolare, se $\lambda = -\Delta$ si ottiene la corrispondenza sui parametri

$$\boxed{J = U/2} \qquad \boxed{h = 2U - \Delta}$$

Scelta del parametro Δ

Osservazione

La scelta $\Delta \in (U, 2U)$ è collegata alla presenza di una lunghezza critica per la crescita di una goccia della stabile.

Scelta del parametro Δ

Osservazione

La scelta $\Delta \in (U, 2U)$ è collegata alla presenza di una lunghezza critica per la crescita di una goccia della stabile.

- Per capirlo, sfruttiamo il rapporto con il modello di Ising

Scelta del parametro Δ

Osservazione

La scelta $\Delta \in (U, 2U)$ è collegata alla presenza di una lunghezza critica per la crescita di una goccia della stabile.

- Per capirlo, sfruttiamo il rapporto con il modello di Ising

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -J \sum_{(\underline{x},\underline{y}) \in \Lambda_L^*} \sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y}) - h \sum_{\underline{x} \in \Lambda_L} \sigma(\underline{x})$$

Scelta del parametro Δ

Osservazione

La scelta $\Delta \in (U, 2U)$ è collegata alla presenza di una lunghezza critica per la crescita di una goccia della stabile.

- Per capirlo, sfruttiamo il rapporto con il modello di Ising

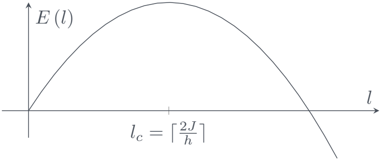
$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -J \sum_{(\underline{x},\underline{y}) \in \Lambda_L^*} \sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y}) - h \sum_{\underline{x} \in \Lambda_L} \sigma(\underline{x})$$

- Per l'energia $E(l)$ di una goccia quadrata $\sigma_{\ell \times \ell}$ di spin positivi immersa in un mare di spin negativi, che indichiamo con $\ominus$, si ha

$$E(l) = H(\sigma_{l \times l}) - H(\ominus) = 4Jl - hl^2.$$

Scelta del parametro Δ

- L'energia della goccia $\sigma_{\ell\times\ell}$ di spin positivi ha un andamento parabolico con un massimo per $l_c = \lceil \frac{2J}{h} \rceil$



Osservazione: significato fisico di ℓ_c

Il superamento della taglia critica implica che l'energia di volume della goccia di spin positivi prevale sul termine di superficie e la sua crescita è energeticamente favorita.

Scelta del parametro Δ

- Per la corrispondenza vista tra i due modelli, si ricava la taglia critica per il lattice gas

$$\boxed{\ell_c = \frac{U}{2U - \Delta}}$$

Scelta del parametro Δ

- Per la corrispondenza vista tra i due modelli, si ricava la taglia critica per il lattice gas

$$\boxed{\ell_c = \frac{U}{2U - \Delta}}$$

La scelta di Δ implica una taglia critica non banale

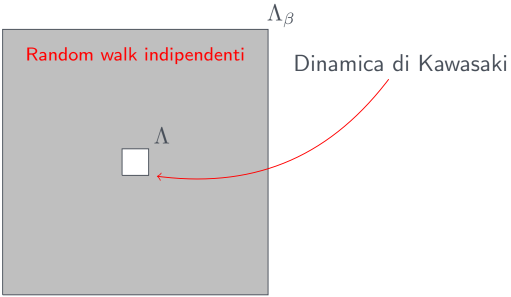
$$\boxed{\Delta \in (U, 2U) \Longrightarrow \ell_c \in (1, \infty)}$$

Modello semplificato per la nucleazione

- Vediamo i risultati rigorosi noti per la nucleazione della fase stabile in un modello semplificato

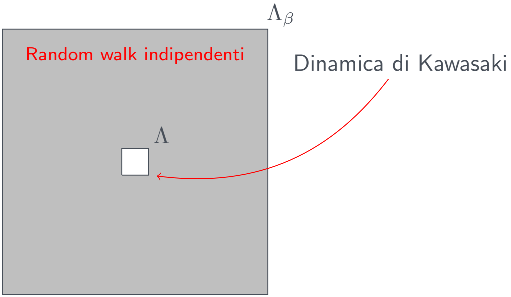
Modello semplificato per la nucleazione

- Vediamo i risultati rigorosi noti per la nucleazione della fase stabile in un modello semplificato



Modello semplificato per la nucleazione

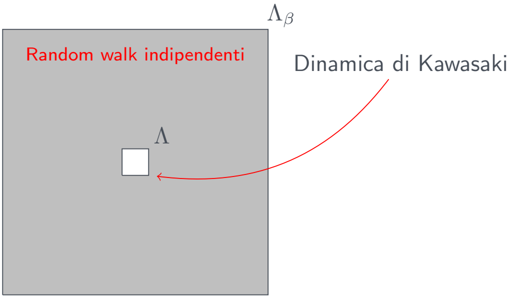
- Vediamo i risultati rigorosi noti per la nucleazione della fase stabile in un modello semplificato



- All'interno di Λ, manteniamo la dinamica di Kawasaki;

Modello semplificato per la nucleazione

- Vediamo i risultati rigorosi noti per la nucleazione della fase stabile in un modello semplificato



- All'interno di Λ, manteniamo la dinamica di Kawasaki;
- all'esterno di Λ, l'interazione di coppia viene rimossa e la dinamica del gas è modellizata in termini di random walk indipendenti.

Modello semplificato per la nucleazione

Bontà della descrizione in termini di I.R.W.

La validità della modellizzazione in termini di random walk indipendenti è garantita dai risultati di un lavoro di ricerca che riguarda l'approssimazione della dinamica di Kawasaki per un gas rarefatto.

Modello semplificato per la nucleazione

Bontà della descrizione in termini di I.R.W.

La validità della modellizzazione in termini di random walk indipendenti è garantita dai risultati di un lavoro di ricerca che riguarda l'approssimazione della dinamica di Kawasaki per un gas rarefatto.

- Per questo modello, consideriamo le due configurazioni di riferimento

$$\blacksquare = \{\, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X} : \eta(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Lambda \,\},$$
$$\square = \{\, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X} : \eta(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Lambda \,\}.$$

Modello semplificato per la nucleazione

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Bontà della descrizione in termini di I.R.W.

La validità della modellizzazione in termini di random walk indipendenti è garantita dai risultati di un lavoro di ricerca che riguarda l'approssimazione della dinamica di Kawasaki per un gas rarefatto.

- Per questo modello, consideriamo le due configurazioni di riferimento

$$\blacksquare = \{\, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X} : \eta(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Lambda \,\},$$
$$\square = \{\, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X} : \eta(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Lambda \,\}.$$

- Infine, immaginiamo di avere una condizione iniziale in cui la scatola Λ è vuota.

Risultati noti sulla nucleazione

Fissiamo $\Delta \in (\frac{3}{2}U, 2U)$, con $U/(2U-\Delta)$ non intero.
Poniamo quindi $\ell_c = \lceil U/(2U-\Delta) \rceil$ e sia $\lim_{\beta\to\infty}(1/\beta)|\Lambda_\beta| = \infty$

Risultati noti sulla nucleazione

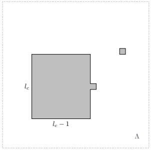
Fissiamo $\Delta \in (\frac{3}{2}U, 2U)$, con $U/(2U-\Delta)$ non intero.
Poniamo quindi $\ell_c = \lceil U/(2U-\Delta) \rceil$ e sia $\lim_{\beta\to\infty}(1/\beta)|\Lambda_\beta| = \infty$

- I cluster $\ell_1 \times \ell_2$ quadrati o quasi quadrati sono destinati a crescere solo se il loro lato minore è maggiore di ℓ_c.

Risultati noti sulla nucleazione

Fissiamo $\Delta \in (\frac{3}{2}U, 2U)$, con $U/(2U-\Delta)$ non intero.
Poniamo quindi $\ell_c = \lceil U/(2U-\Delta) \rceil$ e sia $\lim_{\beta\to\infty}(1/\beta)|\Lambda_\beta| = \infty$

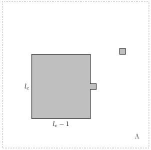
- I cluster $\ell_1 \times \ell_2$ quadrati o quasi quadrati sono destinati a crescere solo se il loro lato minore è maggiore di ℓ_c.
- Esiste una configurazione critica per la transizione $\square \to \blacksquare$ in Λ, la cui forma è



Risultati noti sulla nucleazione

Fissiamo $\Delta \in (\frac{3}{2}U, 2U)$, con $U/(2U-\Delta)$ non intero.
Poniamo quindi $\ell_c = \lceil U/(2U-\Delta) \rceil$ e sia $\lim_{\beta\to\infty}(1/\beta)|\Lambda_\beta| = \infty$

- I cluster $\ell_1 \times \ell_2$ quadrati o quasi quadrati sono destinati a crescere solo se il loro lato minore è maggiore di ℓ_c.
- Esiste una configurazione critica per la transizione $\square \to \blacksquare$ in Λ, la cui forma è



- Il terzo risultato riguarda il tempo di rilassamento all'equilibrio. Una volta superata la configurazione critica, il raggiungimento della fase stabile avviene in tempi relativamente brevi.

Crescita supercritica: un problema aperto

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Non esiste una descrizione rigorosa

- A differenza del modello di Ising, per il quale si hanno risultati rigorosi in molti regimi, la conservatività del modello comporta difficoltà aggiuntive:

Crescita supercritica: un problema aperto

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Non esiste una descrizione rigorosa

- A differenza del modello di Ising, per il quale si hanno risultati rigorosi in molti regimi, la conservatività del modello comporta difficoltà aggiuntive:
  - ad esempio, l'effetto di spogliamento del gas ad opera del cluster comporta l'impossibilità di disaccoppiare la dinamica e descrivere la crescita supercritica con una teoria semplice.

Cosa ci interessa maggiormente

Siamo interessati a capire il comportamento del gas.

Semplificazioni del modello

Cosa ci interessa maggiormente

Siamo interessati a capire il comportamento del gas.

Semplifichiamo il problema iniziale

- Il gas viene descritto in termini di random walk indipendenti, semplici e simmetrici su un reticolo bidimensionale Λ_L, con condizioni periodiche al bordo.

Semplificazioni del modello

Cosa ci interessa maggiormente

Siamo interessati a capire il comportamento del gas.

Semplifichiamo il problema iniziale

- Il gas viene descritto in termini di random walk indipendenti, semplici e simmetrici su un reticolo bidimensionale Λ_L, con condizioni periodiche al bordo.
- Al centro di questo reticolo, sistemiamo una trappola che simula la goccia, trascurandone sia l'aspetto geometrico sia quello dinamico.

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;
  - per $t > 0$, le dinamica delle particelle è quella di random walk indipendenti, semplici e simmetrici;

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;
  - per $t > 0$, le dinamica delle particelle è quella di random walk indipendenti, semplici e simmetrici;
  - nel centro del reticolo c'è un sito particolare:

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;
  - per $t > 0$, le dinamica delle particelle è quella di random walk indipendenti, semplici e simmetrici;
  - nel centro del reticolo c'è un sito particolare:
    - se un random walk arriva su questo sito, resta intrappolato

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;
  - per $t > 0$, le dinamica delle particelle è quella di random walk indipendenti, semplici e simmetrici;
  - nel centro del reticolo c'è un sito particolare:
    - se un random walk arriva su questo sito, resta intrappolato
    - se la trappola è popolata, ha una probabilità finita $p_{\mathsf{e}} \in [0, 1]$ di riemettere una singola particella con probabilità $1/4$ su ognuno dei suoi primi vicini.

Modello particellare

- È un modello particellare con una dinamica stocastica:
  - per $t = 0$, distribuiamo in modo uniforme N particelle sui siti di un reticolo Λ_L con condizioni periodiche al bordo;
  - per $t > 0$, le dinamica delle particelle è quella di random walk indipendenti, semplici e simmetrici;
  - nel centro del reticolo c'è un sito particolare:
    - se un random walk arriva su questo sito, resta intrappolato
    - se la trappola è popolata, ha una probabilità finita $p_e \in [0, 1]$ di riemettere una singola particella con probabilità $1/4$ su ognuno dei suoi primi vicini.

Abbiamo bisogno di un secondo modello

La simulazione numerica del comportamento di questo modello è molto complessa: serve un secondo modello che aiuti nelle simulazioni.

Modello a matrice di densità

- Definiamo sul reticolo Λ_L una funzione $\rho(\underline{x}, t)\colon \Lambda_L \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

Modello a matrice di densità

- Definiamo sul reticolo Λ_L una funzione $\rho(\underline{x}, t) \colon \Lambda_L \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$
  - Per $t = 0$, scegliamo due numeri reali $\tilde{\rho}_\circ < \rho$ e inizializziamo $\rho(\underline{x}, t)$

$$\rho(\underline{x}, 0) = \begin{cases} \tilde{\rho}_\circ & \text{se } \underline{x} = \underline{0}, \\ \tilde{\rho} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Definiamo sul reticolo Λ_L una funzione $\rho(\underline{x}, t) \colon \Lambda_L \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$
  - Per $t = 0$, scegliamo due numeri reali $\tilde{\rho}_\circ < \rho$ e inizializziamo $\rho(\underline{x}, t)$

$$\rho(\underline{x}, 0) = \begin{cases} \tilde{\rho}_\circ & \text{se } \underline{x} = \underline{0}, \\ \tilde{\rho} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  - Per $t > 0$, l'evoluzione temporale dipende dal sito

$$\rho(\underline{x}, t+1) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{x}' \neq \underline{0} \\ |\underline{x}' - \underline{x}|_L = 1}} \frac{\rho(\underline{x}', t)}{4} + \frac{\tilde{\rho}_\circ}{4} & \text{se } |\underline{x}|_L = 1, \\ \displaystyle\sum_{|\underline{x}' - \underline{x}|_L = 1} \frac{\rho(\underline{x}', t)}{4} & \text{se } |\underline{x}|_L > 1. \end{cases}$$

Modello a matrice di densità

- Definiamo sul reticolo Λ_L una funzione $\rho(\underline{x}, t) \colon \Lambda_L \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$
  - Per $t = 0$, scegliamo due numeri reali $\tilde{\rho}_\circ < \rho$ e inizializziamo $\rho(\underline{x}, t)$

$$\rho(\underline{x}, 0) = \begin{cases} \tilde{\rho}_\circ & \text{se } \underline{x} = \underline{0}, \\ \tilde{\rho} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  - Per $t > 0$, l'evoluzione temporale dipende dal sito

$$\rho(\underline{x}, t+1) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{x}' \neq \underline{0} \\ |\underline{x}' - \underline{x}|_L = 1}} \frac{\rho(\underline{x}', t)}{4} + \frac{\tilde{\rho}_\circ}{4} & \text{se } |\underline{x}|_L = 1, \\ \displaystyle\sum_{|\underline{x}' - \underline{x}|_L = 1} \frac{\rho(\underline{x}', t)}{4} & \text{se } |\underline{x}|_L > 1. \end{cases}$$

$$\rho(\underline{0}, t+1) = N - \sum_{\underline{x} \neq \underline{0}} \rho(\underline{x}, t+1) \qquad \text{con } N = \tilde{\rho}|\Lambda_L|$$

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

Relazione tra i due modelli

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

  - Per $t = 0$, segue dalla distribuzione uniforme delle N particelle nel reticolo

Relazione tra i due modelli

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

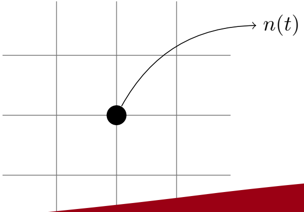
  - Per $t = 0$, segue dalla distribuzione uniforme delle N particelle nel reticolo
  - Per $t > 0$, si può ragionare come segue

Relazione tra i due modelli

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

  - Per $t = 0$, segue dalla distribuzione uniforme delle N particelle nel reticolo
  - Per $t > 0$, si può ragionare come segue

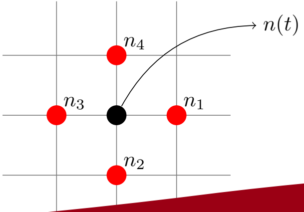


Relazione tra i due modelli

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

  - Per $t = 0$, segue dalla distribuzione uniforme delle N particelle nel reticolo
  - Per $t > 0$, si può ragionare come segue

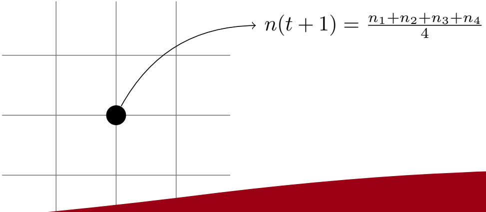


Relazione tra i due modelli

- Il modello deterministico è il "valore aspettato" di quello stocastico. Se indichiamo con $n(\underline{x}, t)$ il numero di particelle del sito $\underline{x}$ al tempo t, abbiamo

$$\mathbb{E}[n(\underline{x}, t)] = \rho(\underline{x}, t) \quad \forall\, \underline{x} \in \Lambda_L, t \in \mathbb{N}_0.$$

  - Per $t = 0$, segue dalla distribuzione uniforme delle N particelle nel reticolo
  - Per $t > 0$, si può ragionare come segue



Osservabili

Per studiare il cluster

- $n_\circ(t)$ particelle intrappolate al tempo t

Per studiare il cluster

- $n_{\circ}(t)$ particelle intrappolate al tempo t
- $n_{\ell}(t)$ particelle libere al tempo t

Osservabili

Per studiare il cluster

- $n_\circ(t)$ particelle intrappolate al tempo t
- $n_\ell(t) = N - n_\circ(t)$ particelle libere al tempo t

Osservabili

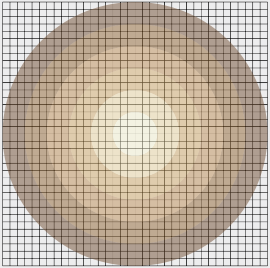
Per studiare il cluster

- $n_\circ(t)$ particelle intrappolate al tempo t
- $n_\ell(t) = N - n_\circ(t)$ particelle libere al tempo t

Per studiare il gas: comportamento diffusivo del random walk

$$\mathbb{P}\{\, \underline{S}_{2n} = \underline{x} \,\} \begin{cases} = O(n^{-1}), & \text{se } |\underline{x}|^2 < n, \\ \leq O(n^{-1} e^{-\frac{|x|^2}{2n}}), & \text{se } |\underline{x}|^2 \geq n. \end{cases}$$

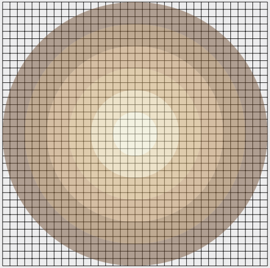
Strategia per lo studio del gas



- Scelgo un intero ℓ divisore del semilato L e ricopro il reticolo Λ_L con L/ℓ corone Ξ_i,

Osservabili

Strategia per lo studio del gas



- Scelgo un intero ℓ divisore del semilato L e ricopro il reticolo Λ_L con L/ℓ corone Ξ_i,
- analizzo le densità medie $\delta(i,t)$ delle corone in funzione del tempo.

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{\, \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \leq i\,\ell \,\}, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{ \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \leq i\,\ell \}, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

- Il modello stocastico richiede una media sul tempo

$$\Theta_\tau = [1 + (\tau - 1)\Delta, \tau\Delta] \bigcap \mathbb{N}^+ \quad \forall \tau \in \mathbb{N}^+$$

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{\, \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \leq i\,\ell \,\}, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

- Il modello stocastico richiede una media sul tempo

$$\Theta_\tau = [1 + (\tau - 1)\Delta, \tau\Delta] \bigcap \mathbb{N}^+ \quad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^+$$

- La densità della i-esima corona al tempo $\tau\Delta$ è data da

Osservabili

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{\, \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \le i\,\ell \,\}\,, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

- Il modello stocastico richiede una media sul tempo

$$\Theta_\tau = [1 + (\tau - 1)\Delta, \tau\Delta] \bigcap \mathbb{N}^+ \quad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^+$$

- La densità della i-esima corona al tempo $\tau\Delta$ è data da

$$\delta(i, \tau\Delta)_{\mathsf{m.d.}} = \frac{1}{|\Xi_i|} \sum_{\underline{x}\,\in\,\Xi_i} \rho(\underline{x}, \tau\Delta)$$

Osservabili

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{\, \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \leq i\,\ell \,\}, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

- Il modello stocastico richiede una media sul tempo

$$\Theta_\tau = [1 + (\tau - 1)\Delta, \tau\Delta] \bigcap \mathbb{N}^+ \quad \forall\, \tau \in \mathbb{N}^+$$

- La densità della i-esima corona al tempo $\tau\Delta$ è data da

$$\delta(i, \tau\Delta)_{\text{m.d.}} = \frac{1}{|\Xi_i|} \sum_{\underline{x} \in \Xi_i} \rho(\underline{x}, \tau\Delta)$$

$$\delta(i, \tau\Delta)_{\text{r.w.}} = \frac{1}{|\Xi_i|} \frac{1}{\Delta} \sum_{t \in \Theta_\tau} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{\, \underline{S}_k(t) \in \Xi_i \,\}}$$

Osservabili

Definizioni rigorose

- Le corone Ξ_i corrispondono agli insiemi disgiunti

$$\Xi_i = \{\, \underline{x} \in \Lambda_L : (i-1)\ell < |\underline{x}| \leq i\,\ell \,\}, \quad i = 1, \ldots, L/\ell.$$

- Il modello stocastico richiede una media sul tempo

$$\Theta_\tau = [1 + (\tau - 1)\Delta, \tau\Delta] \bigcap \mathbb{N}^+ \quad \forall \tau \in \mathbb{N}^+$$

- La densità della i-esima corona al tempo $\tau\Delta$ è data da

$$\delta(i, \tau\Delta)_{\mathsf{m.d.}} = \frac{1}{|\Xi_i|} \sum_{\underline{x} \in \Xi_i} \rho(\underline{x}, \tau\Delta)$$

$$\delta(i, \tau\Delta)_{\mathsf{r.w.}} = \frac{1}{|\Xi_i|} \frac{1}{\Delta} \sum_{t \in \Theta_\tau} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{\, \underline{S}_k(t) \in \Xi_i \,\}}$$

- continua a valere la relazione tra i due modelli.

Taratura dei parametri del modello

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

Taratura dei parametri del modello

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone

Taratura dei parametri del modello

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone
  - numero statisticamente rilevante di punti nelle corone;

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone
  - numero statisticamente rilevante di punti nelle corone;
  - numero di corone che permetta un'analisi spaziale dettagliata.

Taratura dei parametri del modello

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone
  - numero statisticamente rilevante di punti nelle corone;
  - numero di corone che permetta un'analisi spaziale dettagliata.
- Scelta dell'intervallo Δ tra misure consecutive

Taratura dei parametri del modello

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone
  - numero statisticamente rilevante di punti nelle corone;
  - numero di corone che permetta un'analisi spaziale dettagliata.
- Scelta dell'intervallo Δ tra misure consecutive
  - minimizzare la dispersione dei random walk tra due misure consecutive;

Taratura dei parametri del modello

Obiettivo della taratura

Ottenere una descrizione dettagliata del gas, nello spazio e nel tempo, minimizzando le incertezze sulle medie spaziotemporali del modello stocastico.

- Scelta del passo ℓ delle corone
  - numero statisticamente rilevante di punti nelle corone;
  - numero di corone che permetta un'analisi spaziale dettagliata.
- Scelta dell'intervallo Δ tra misure consecutive
  - minimizzare la dispersione dei random walk tra due misure consecutive;
  - trascurare le incertezze dovute alle medie temporali.

Configurazioni simulate

- Reticoli Λ_L di semilato $L = 50, 60, \ldots, 250, 500, 1000.$

Configurazioni simulate

- Reticoli Λ_L di semilato $L = 50, 60, \ldots, 250, 500, 1000.$
- Densità iniziali $\tilde{\rho} = 2^{-i}$, per $i = 1, \ldots, 15.$

Configurazioni simulate

Configurazioni simulate

- Reticoli Λ_L di semilato $L = 50, 60, \ldots, 250, 500, 1000$.
- Densità iniziali $\tilde{\rho} = 2^{-i}$, per $i = 1, \ldots, 15$.
- Trappola completamente assorbente e inizialmente vuota.

Comportamento per tempi piccoli

- Guardiamo il numero $n_{\circ}(t)$ di particelle intrappolate

Comportamento per tempi piccoli

- Guardiamo il numero $n_\circ(t)$ di particelle intrappolate

$$\boxed{n_\circ(t) = \tilde{\rho} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_L} \mathbb{P}_{\underline{x}} \{ \tau_o < t \}}$$

Comportamento per tempi piccoli

- Guardiamo il numero $n_\circ(t)$ di particelle intrappolate

$$\boxed{n_\circ(t) = \tilde{\rho} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_L} \mathbb{P}_{\underline{x}} \{ \tau_o < t \}}$$

i) trascuriamo le particelle per cui $|\underline{x}| > \sqrt{t}$, per via del comportamento diffusivo;

Comportamento per tempi piccoli

- Guardiamo il numero $n_\circ(t)$ di particelle intrappolate

$$n_\circ(t) = \tilde{\rho} \sum_{\underline{x} \in \Lambda_L} \mathbb{P}_{\underline{x}} \{ \tau_o < t \}$$

i) trascuriamo le particelle per cui $|\underline{x}| > \sqrt{t}$, per via del comportamento diffusivo;

ii) nel regime temporale $c^2 < t \ll |\Lambda_L|$, con $c \simeq 20$

Comportamento per tempi piccoli

- Guardiamo il numero $n_\circ(t)$ di particelle intrappolate

$$\boxed{n_\circ(t) = \tilde{\rho} \sum_{\underline{x}\in\Lambda_L} \mathbb{P}_{\underline{x}}\{\, \tau_o < t \,\}}$$

i) trascuriamo le particelle per cui $|\underline{x}| > \sqrt{t}$, per via del comportamento diffusivo;

ii) nel regime temporale $c^2 < t \ll |\Lambda_L|$, con $c \simeq 20$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\underline{x}}\{\, \tau_o < t \,\} \sim 1 - \ln|\underline{x}|^2 / \ln t}$$

Comportamento per tempi piccoli

- Per $n_o(t)$ a tempi piccoli, si ottiene

Comportamento per tempi piccoli

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

- Per $n_o(t)$ a tempi piccoli, si ottiene

$$n_o(t) \simeq \sum_{|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho} - \sum_{c<|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho} \, \frac{\ln|\underline{x}|^2}{\ln t}$$

Comportamento per tempi piccoli

- Per $n_o(t)$ a tempi piccoli, si ottiene

$$
\begin{aligned}
n_o(t) &\simeq \sum_{|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho} - \sum_{c<|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho}\,\frac{\ln|\underline{x}|^2}{\ln t} \\
&\simeq \pi\tilde{\rho}t - \left[\frac{4\pi\tilde{\rho}}{\ln t}\frac{r^2}{2}\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)\right]_c^{\sqrt{t}} \\
&\simeq \frac{\pi\tilde{\rho}t}{\ln t}
\end{aligned}
$$

Comportamento per tempi piccoli

- Per $n_o(t)$ a tempi piccoli, si ottiene

$$n_o(t) \simeq \sum_{|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho} - \sum_{c<|\underline{x}|<\sqrt{t}} \tilde{\rho}\, \frac{\ln|\underline{x}|^2}{\ln t}$$
$$\simeq \pi\tilde{\rho}t - \left[\frac{4\pi\tilde{\rho}}{\ln t}\frac{r^2}{2}\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)\right]_c^{\sqrt{t}}$$
$$\simeq \frac{\pi\tilde{\rho}t}{\ln t}$$

$$\boxed{\frac{n_o(t)\ln t}{t} \simeq \pi\tilde{\rho}}$$

Comportamento per tempi piccoli

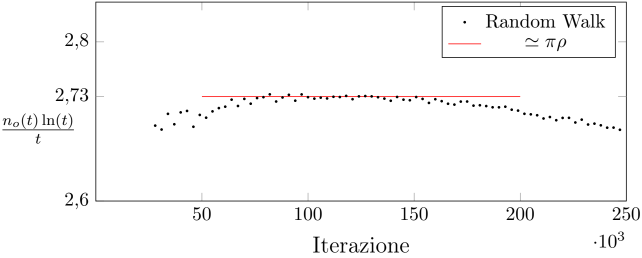
- La relazione $\frac{n_o(t)\ln t}{t} \simeq \pi\tilde{\rho}$ è stata verificata su ognuna delle configurazioni precedentemente illustrate.

Comportamento per tempi piccoli

- La relazione $\frac{n_o(t)\ln t}{t} \simeq \pi\tilde{\rho}$ è stata verificata su ognuna delle configurazioni precedentemente illustrate.
- Un esempio dell'andamento costante di $n_o(t)\ln t/t$, nel caso di semilato $L = 250$ e densità iniziale unitaria, è dato da

ROMA TRE UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

- La relazione $\frac{n_o(t)\ln t}{t} \simeq \pi\tilde{\rho}$ è stata verificata su ognuna delle configurazioni precedentemente illustrate.
- Un esempio dell'andamento costante di $n_o(t)\ln t/t$, nel caso di semilato $L = 250$ e densità iniziale unitaria, è dato da



Comportamento per tempi lunghi

- Nel regime di tempi lunghi $t \gg |\Lambda_L|$, l'attenzione si è rivolta al numero di particelle ancora libere nel reticolo

$$n_\ell(t) = N - n_o(t)$$

Comportamento per tempi lunghi

- Nel regime di tempi lunghi $t \gg |\Lambda_L|$, l'attenzione si è rivolta al numero di particelle ancora libere nel reticolo

$$n_\ell(t) = N - n_o(t)$$

- Un random walk partito da un generico sito del reticolo ha una probabilità finita di arrivare nell'origine per tempi $t \simeq L^2 \ln L$

Comportamento per tempi lunghi

- Nel regime di tempi lunghi $t \gg |\Lambda_L|$, l'attenzione si è rivolta al numero di particelle ancora libere nel reticolo

$$n_\ell(t) = N - n_o(t)$$

- Un random walk partito da un generico sito del reticolo ha una probabilità finita di arrivare nell'origine per tempi $t \simeq L^2 \ln L$
- Il numero di random walk ancora liberi nel reticolo dopo tempi multipli di $L^2 \ln L$ decade esponenzialmente

$$\boxed{n_\ell(t) = N e^{-Bt}}$$

Comportamento per tempi lunghi

- Nel regime di tempi lunghi $t \gg |\Lambda_L|$, l'attenzione si è rivolta al numero di particelle ancora libere nel reticolo

$$n_\ell(t) = N - n_o(t)$$

- Un random walk partito da un generico sito del reticolo ha una probabilità finita di arrivare nell'origine per tempi $t \simeq L^2 \ln L$
- Il numero di random walk ancora liberi nel reticolo dopo tempi multipli di $L^2 \ln L$ decade esponenzialmente

$$\boxed{n_\ell(t) = N e^{-Bt}}$$

B è l'inverso del tempo caratteristico e dipende unicamente dal semilato reticolare L secondo la legge

$$\boxed{B = \frac{B_o}{L^2 \ln L} \qquad \text{con } B_o \text{ costante.}}$$

Comportamento per tempi lunghi

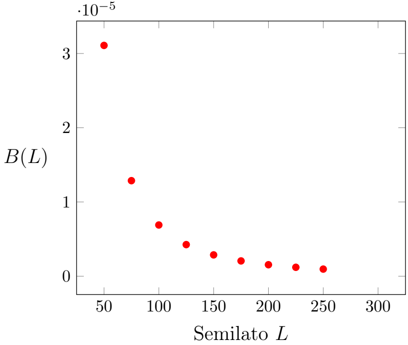
Per ricavare la costante B_o è più comodo lavorare con il logaritmo

$$\ln[n_\ell(t)] = N - B\,t$$

Comportamento per tempi lunghi

Per ricavare la costante B_o è più comodo lavorare con il logaritmo

$$\ln[n_\ell(t)] = N - B\,t$$

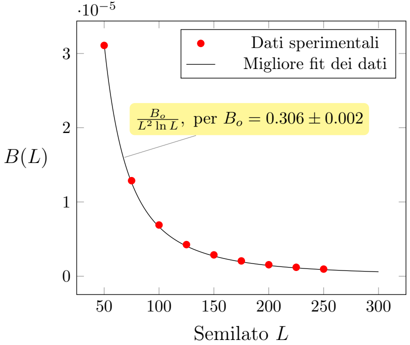


- Si fissa una densità iniziale di riferimento $\tilde{\rho}$ e, al variare del semilato, con un fit lineare si ricavano i $B(L)$ sperimentali

Comportamento per tempi lunghi

Per ricavare la costante B_o è più comodo lavorare con il logaritmo

$$\ln[n_\ell(t)] = N - B\,t$$



- Si fissa una densità iniziale di riferimento $\tilde{\rho}$ e, al variare del semilato, con un fit lineare si ricavano i $B(L)$ sperimentali
- Con un secondo fit tra questi punti e l'andamento teorico di $B(L)$, si ricava

$$B_o = 0.306 \pm 0.002$$

Regime dei tempi intermedi

Regime dei tempi intermedi: risultati nuovi

I risultati nuovi contenuti in questo lavoro riguardano la caratterizzazione del comportamento del gas nel regime dei tempi intermedi, per il quale non si hanno ancora risultati rigorosi su questo fenomeno.

Tempi intermedi: effetto di svuotamento

- Il destino del gas, per tempi lunghi, è uno svuotamento esponenziale.

Tempi intermedi: effetto di svuotamento

- Il destino del gas, per tempi lunghi, è uno svuotamento esponenziale.
- Analizziamo la propagazione al suo interno dell'informazione della presenza della trappola:

Tempi intermedi: effetto di svuotamento

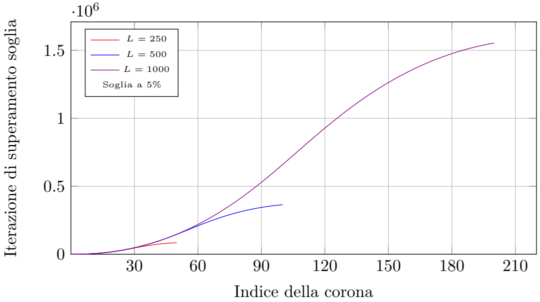
- Il destino del gas, per tempi lunghi, è uno svuotamento esponenziale.
- Analizziamo la propagazione al suo interno dell'informazione della presenza della trappola:
  - fissiamo una soglia di svuotamento rispetto alla densità iniziale

Tempi intermedi: effetto di svuotamento

- Il destino del gas, per tempi lunghi, è uno svuotamento esponenziale.
- Analizziamo la propagazione al suo interno dell'informazione della presenza della trappola:
  - fissiamo una soglia di svuotamento rispetto alla densità iniziale
  - analizziamo i tempi in cui le corone superano questa soglia

Tempi intermedi: effetto di svuotamento

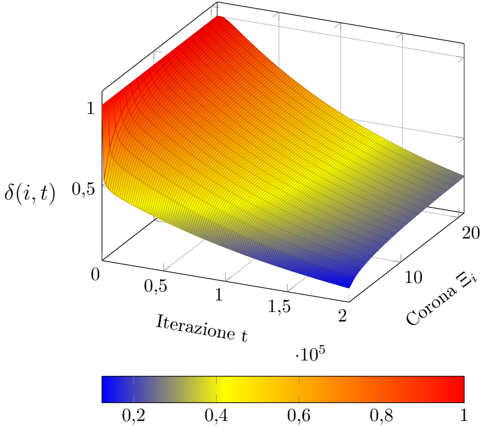
- Il destino del gas, per tempi lunghi, è uno svuotamento esponenziale.
- Analizziamo la propagazione al suo interno dell'informazione della presenza della trappola:
  - fissiamo una soglia di svuotamento rispetto alla densità iniziale
  - analizziamo i tempi in cui le corone superano questa soglia



Tempi intermedi: superficie di densità

- Successivamente, sono stati analizzati gli andamenti delle densità in funzione dello spazio e del tempo.

- Successivamente, sono stati analizzati gli andamenti delle densità in funzione dello spazio e del tempo.



Fattorizzazione delle densità

Congettura di fattorizzazione delle densità

Si basa sull'analogia con l'equazione del calore,
di cui il modello deterministico è una versione su un reticolo discreto.

Fattorizzazione delle densità

Congettura di fattorizzazione delle densità

Si basa sull'analogia con l'equazione del calore,
di cui il modello deterministico è una versione su un reticolo discreto.

- Se la densità $\delta(i,t)$ si fattorizza nel prodotto di una funzione spaziale e una temporale, abbiamo

$$\delta(i,t) = g(i) \cdot h(t) \Longrightarrow \ln[\delta(i,t)] = \ln[g(i)] + \ln[h(t)]$$

Fattorizzazione delle densità

Congettura di fattorizzazione delle densità

Si basa sull'analogia con l'equazione del calore,
di cui il modello deterministico è una versione su un reticolo discreto.

- Se la densità $\delta(i,t)$ si fattorizza nel prodotto di una funzione spaziale e una temporale, abbiamo

$$\delta(i,t) = g(i) \cdot h(t) \Longrightarrow \ln[\delta(i,t)] = \ln[g(i)] + \ln[h(t)]$$

- Fissiamo il tempo e calcoliamo la differenza del logaritmo della densità per due indici di corona $i \neq j$

$$\ln[\delta(i,\bar{t}\,)] - \ln[\delta(j,\bar{t}\,)] = \ln[g(i)] - \ln[g(j)] = \Delta_{i,j}$$

Fattorizzazione delle densità

Congettura di fattorizzazione delle densità

Si basa sull'analogia con l'equazione del calore,
di cui il modello deterministico è una versione su un reticolo discreto.

- Se la densità $\delta(i,t)$ si fattorizza nel prodotto di una funzione spaziale e una temporale, abbiamo

$$\delta(i,t) = g(i) \cdot h(t) \Longrightarrow \ln[\delta(i,t)] = \ln[g(i)] + \ln[h(t)]$$

- Fissiamo il tempo e calcoliamo la differenza del logaritmo della densità per due indici di corona $i \neq j$

$$\ln[\delta(i,\bar{t}\,)] - \ln[\delta(j,\bar{t}\,)] = \ln[g(i)] - \ln[g(j)] = \Delta_{i,j}$$

- L'indipendenza dal tempo delle quantità $\Delta_{i,j}$ suggerisce il modo naturale di verificare la congettura.

Verifica della fattorizzazione

- La verifica della fattorizzazione è stata effettuata su tutto l'insieme di configurazioni simulate numericamente. I risultati possono essere riassunti come segue:
  - l'andamento temporale delle $\ln \delta(i, t)$ è di tipo lineare su tutte le corone.

Verifica della fattorizzazione

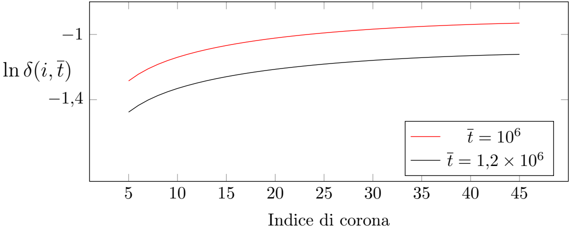
- La verifica della fattorizzazione è stata effettuata su tutto l'insieme di configurazioni simulate numericamente. I risultati possono essere riassunti come segue:
  - l'andamento temporale delle $\ln \delta(i,t)$ è di tipo lineare su tutte le corone.
    Il fit lineare di questi andamenti ha mostrato che queste rette sono parallele, dando una prima conferma per la congettura.

Verifica della fattorizzazione

- La verifica della fattorizzazione è stata effettuata su tutto l'insieme di configurazioni simulate numericamente. I risultati possono essere riassunti come segue:
  - l'andamento temporale delle $\ln \delta(i,t)$ è di tipo lineare su tutte le corone.
    Il fit lineare di questi andamenti ha mostrato che queste rette sono parallele, dando una prima conferma per la congettura.
  - La seconda conferma è stata data dall'analisi degli andamenti a tempo fissato.

Verifica della fattorizzazione

- La verifica della fattorizzazione è stata effettuata su tutto l'insieme di configurazioni simulate numericamente. I risultati possono essere riassunti come segue:
  - l'andamento temporale delle $\ln \delta(i, t)$ è di tipo lineare su tutte le corone.
    Il fit lineare di questi andamenti ha mostrato che queste rette sono parallele, dando una prima conferma per la congettura.
  - La seconda conferma è stata data dall'analisi degli andamenti a tempo fissato.



Ricostruzione dei fattori

È possibile ricostruire i due fattori a meno di una costante di normalizzazione, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale alle differenze dei logaritmi.

Ricostruzione dei fattori

È possibile ricostruire i due fattori a meno di una costante di normalizzazione, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale alle differenze dei logaritmi.

- Per il fattore spaziale, si ha

$$\frac{g(i)}{g(i_0)} = \exp\left\{\frac{1}{(t_\mathsf{f} - t_0)} \sum_{j=i_0}^{i} \sum_{\tau=t_0}^{t_\mathsf{f}} \left[\ln \delta(j+1,\tau) - \ln \delta(j,\tau)\right]\right\}$$

Ricostruzione dei fattori

È possibile ricostruire i due fattori a meno di una costante di normalizzazione, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale alle differenze dei logaritmi.

- Per il fattore spaziale, si ha

$$\frac{g(i)}{g(i_0)} = \exp\left\{\frac{1}{(t_\mathsf{f} - t_0)} \sum_{j=i_0}^{i} \sum_{\tau=t_0}^{t_\mathsf{f}} \left[\ln\delta(j+1,\tau) - \ln\delta(j,\tau)\right]\right\}$$

- Per il fattore temporale, si ha

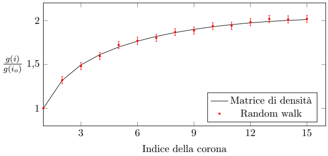
$$\frac{h(t)}{h(t_0)} = \exp\left\{\frac{1}{(i_\mathsf{f} - i_0)} \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{j=i_0}^{i_\mathsf{f}} \left[\ln\delta(j,\tau+1) - \ln\delta(j,\tau)\right]\right\}.$$

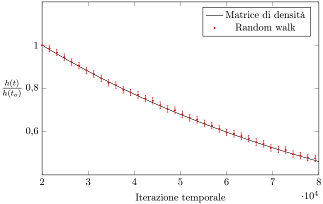
Esempio di ricostruzione dei due fattori

- Concludiamo questa analisi con un esempio di ricostruzione dei due fattori, nel caso di semilato $L = 75$, densità iniziale $\tilde{\rho} = 2^{-8}$, $i_0 = 1$, $t_0 = 2 \times 10^4$ e $t_f = 8 \times 10^4$

Esempio di ricostruzione dei due fattori

- Concludiamo questa analisi con un esempio di ricostruzione dei due fattori, nel caso di semilato $L = 75$, densità iniziale $\tilde{\rho} = 2^{-8}$, $i_0 = 1$, $t_0 = 2 \times 10^4$ e $t_f = 8 \times 10^4$





Ringraziamenti

Grazie per l'attenzione!