УДК 517.984

АБСОЛЮТНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА[1]

А. И. Иванов, О. И. Петров

394006, Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т.
Поступила в редакцию **.11.20** г.

В статье вводится и изучается новое понятие – абсолютная логарифмическая норма, – которое имеет много общего с классическим определением логарифмической нормы, данным С. М. Лозинским.

Ключевые слова: логарифмическая норма, устойчивость по Ляпунову, теория Перрона-Фробениуса неотрицательных матриц.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$ - матрица и $\lambda_1(\mathbf{A}), \lambda_2(\mathbf{A}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{A})$ $(m \leq n)$ полный набор попарно различных собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ (спектр sp $\mathbf{A}$). Введём следующие числовые характеристики спектра

$$\text{spa}\ \mathbf{A} = \max_{1\leq i\leq m} \text{Re}\ \lambda_i(\mathbf{A}), \text{spr}\ \mathbf{A} = \max_{1\leq i\leq m} |\lambda_i(\mathbf{A})| \tag{1}$$

Первая из формул (1.1) называется *спектральной абсциссой матрицы* $\mathbf{A}$, а вторая – хорошо известный её *спектральный радиус*. Отметим, что всегда $|\text{spa}\,\mathbf{A}| \leq \text{spr}\,\mathbf{A}$.

2. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА (МОДУЛЬ) ВЕКТОРА

Отметим простые свойства абсолютной величины вектора, напоминающие свойства нормы (сравни с [4, с. 127-129])

1^0 $|\mathbf{x}| \geq \mathbf{0}$,
2^0 $|\mathbf{x}| = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
3^0 $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$ $(c \in \mathbb{C})$,
4^0 $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (неравенство треугольника).

Из этих свойств вытекает обратное неравенство треугольника

$$|x-y| \geq ||x| - |y|| \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, No 16-01-00197.

Лемма 1. *Для произвольных комплексных чисел x и h справедлива формула*

$$\lim_{0<t\to 0}\frac{|x+th|-|x|}{t}=\begin{cases}\mathrm{Re}\frac{x\overline{h}}{|x|}, & \text{если } x\neq 0;\\ |h|, & \text{если } x=0,\end{cases} \tag{3}$$

(где в верхней строке формулы (3) черта – это черта комплексного сопряжения).

Теорема 1 *Дифференциал Гато* $[\mathbf{x},\mathbf{h}] : \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^n$ *обладает следующими свойствами:*

1^0 $|[\mathbf{x},\ \mathbf{h}]|\leq|\mathbf{h}|,\ [\mathbf{0},\ \mathbf{h}]=|\mathbf{h}|$;

2^0 $[\mathbf{x},\ c\mathbf{h}]=c[\mathbf{x},\mathbf{h}]$ *при* $c\geq 0$,

$[\mathbf{x},\ c\mathbf{h}]=-c[\mathbf{x},-\mathbf{h}]$ *при* $c\geq 0$,

3^0 $[\mathbf{x},\mathbf{h}+\mathbf{k}]\leq[\mathbf{x},\ \mathbf{h}]+[\mathbf{x},\ \mathbf{k}]$ (*полуаддитивность*);

4^0 $[\mathbf{x},\mathbf{h}]+[\mathbf{x},-\mathbf{h}]\geq\mathbf{0}$ $(=[\mathbf{x},\mathbf{0}])$.

По одной из формул получим

$$[\mathbf{e}_j,\mathbf{A}\mathbf{e}_j]=\begin{pmatrix}|a_{1j}|\\ \cdots\\ \mathrm{Re}\ a_{jj}\\ \cdots\\ |a_{nj}|\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \cdots\\ c_{jj}\\ \cdots\\ c_{nj}\end{pmatrix},$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-1}|\mathbf{A}|^k}{k!}+\frac{|\mathbf{I}+t\mathbf{A}|-|\mathbf{I}|}{t}\leq\mathbf{C}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-1}\mathbf{C}^k}{k!}$$

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{m-1}E_k\right)=\dim E_m=n. \tag{4}$$

$$imC+\ker C=\mathbb{C}^n \tag{5}$$

Литература

[1] *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. – М. : Наука, 1966.

[2] *Лозинский С. М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. 1958. № 5. С. 52 – 90.