1524. Распределение оценок

В экзаменационный период студент сдал *n* предметов, за которые в сумме получил *t* баллов. Наименьший балл, при котором ставится зачет по каждому предмету, равен *p*. Вам следует подсчитать количество способов, которыми студент мог получить баллы на экзаменах. Например, если *n* = 3, *t* = 34 и *p* = 10, то баллы по трем предметам могли распределиться следующими способами:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Предмет 1** | **Предмет 2** | **Предмет 3** |
| 1 | 14 | 10 | 10 |
| 2 | 13 | 11 | 10 |
| 3 | 13 | 10 | 11 |
| 4 | 12 | 11 | 11 |
| 5 | 12 | 10 | 12 |
| 6 | 11 | 11 | 12 |
| 7 | 11 | 10 | 13 |
| 8 | 10 | 11 | 13 |
| 9 | 10 | 10 | 14 |
| 10 | 11 | 12 | 11 |
| 11 | 10 | 12 | 12 |
| 12 | 12 | 12 | 10 |
| 13 | 10 | 13 | 11 |
| 14 | 11 | 13 | 10 |
| 15 | 10 | 14 | 10 |

Студент может сдать сессию 15 способами.

**Вход.** Первая строка содержит количество тестов. Каждый тест содержит в одной строке три числа *n*, *t* и *p*, значения каждого из которых не больше 70.

**Выход.** Для каждого теста вывести количество способов, которыми студент может сдать экзамен. Ответ всегда является знаковым 32-битовым целым числом.

|  |  |
| --- | --- |
| **Пример входа** | **Пример выхода** |
| 2  3 34 10  3 34 10 | 15  15 |

РЕШЕНИЕ

**динамическое программирование**

Анализ алгоритма

Количество способов, которыми студент может сдать экзамен, равно количеству разложений числа *t* – *n*\**p* на *n* неотрицательных слагаемых.

Обозначим через f(*n*, *k*) количество разбиений числа *n* на *k* неотрицательных слагаемых. Если при разбиении числа *n* на *k* неотрицательных слагаемых последнее (*k* - ое) слагаемое равно *i* (0  *i*  *n*), то далее число *n* – *i* следует разбить на *k* – 1 слагаемых, что можно совершить f(*n* – *i*, *k* – 1) способами. Поскольку 0  *i*  *n*, то общее число разбиений f(*n*, *k*) равно f(*n*, *k* – 1) + f(*n* – 1, *k* – 1) + f(*n* – 2, *k* – 1) + … f(1, *k* – 1) + f(0, *k* – 1). Или то же самое что

f(*n*, *k*) = 

Очевидно, что f(*n*, 1) = 1, так как количество способов разбить число *n* на одно слагаемое равно единице (этим слагаемым будет само число *n*). Имеет место соотношение f(0, *k*) = 1, так как единственным разложением числа 0 на *k* слагаемых будет 0 = 0 + 0 + … + 0 (*k* раз). Заведем массив m, в котором положим m[*k*, *n*] = f(*n*, *k*), 1  *k*, *n*  100. Индексы массива m и функции f переставлены для удобства программирования: очередная *k* - ая строка массива m пересчитывается через предыдущую (*k* – 1) - ую строку. Временная оценка алгоритма O(*n*2).



Заметим, что

f(*n*, *k*) = f(*n*, *k* – 1) + ( f(*n* – 1, *k* – 1) + f(*n* – 2, *k* – 1) + … f(1, *k* – 1) + f(0, *k* – 1) ) =

= f(*n*, *k* – 1) + f(*n* – 1, *k*)

То есть m[*k*, *n*] = m[*k*, *n* – 1] + m[*k* – 1, *n*]:



Задача имеет также комбинаторное решение через сочетания с повторениями. Если f(*n*, *k*) равно количеству разбиений числа *n* на *k* неотрицательных слагаемых, то

f(*n*, *k*) =  = 

**Пример**

Для *n* = 20 и *k* = 2 существует 21 разбиение: 0 + 20, 1 + 19, 2 + 18, ..., 19 + 1, 20 + 0.

Для начальных значений *n*, *k* таблица m[*k*, *n*] имеет вид:



По формуле сочетаний с повторениями имеем: f(20, 2) =  =  = 21.

Рассмотрим тест *n* = 4, *t* = 21 и *p* = 2. Необходимо найти количество разложений числа *t* – *n*\**p* = 21 – 4 \* 2 = 13 на 4 неотрицательных слагаемых. Оно равно

f(13, 4) =  =  =  = 560