Дисциплина: Численные методы
Лабораторное задание №2

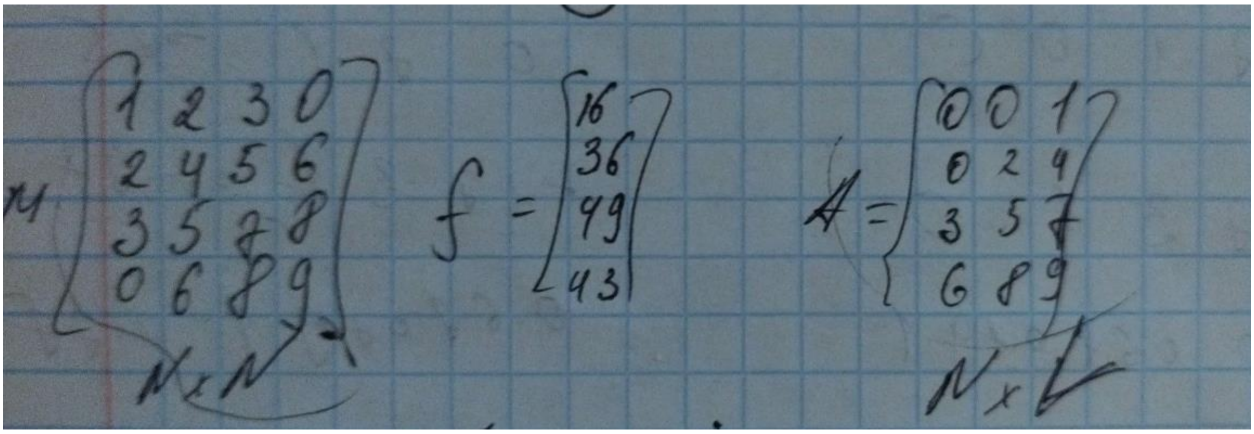
Отчёт
Тема: «Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами специального вида»

Выполнил:
студент 3 курса 61 группы
Вафин А.Р.

Проверила:
старший преподаватель
Фролова О.А.

1. Постановка задачи

Для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричными ленточными матрицами, необходимо использовать метод Гаусса, применяя схему единственного деления. Этот подход адаптирован к структуре матрицы специального вида.



Основная процедура предназначена для решения системы линейных уравнений с использованием метода Гаусса с учетом симметричной ленточной структуры матрицы.

Входные параметры

- **N** — размерность системы (количество уравнений).
- **L** — половина ширины ленты матрицы (количество элементов в левой части ленты).
- **A** — массив размерности N×L , содержащий нижнюю часть ленточной матрицы системы.
- **f** — вектор правой части системы, размерность N.

Выходные параметры

- **x** — вектор решений системы, размерность N.

Процедура выполняет преобразование исходной ленточной матрицы и вектора f с использованием метода Гаусса (схема единственного деления), учитывая ленточную структуру для повышения эффективности.

2. Метод решения

Метод решения:

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на основе метода Гаусса с использованием схемы единственного деления состоит из двух этапов:

1. **Прямой ход**
   Прямой ход заключается в приведении исходной системы к системе с треугольной матрицей, где на главной диагонали находятся единицы. Обычно движение происходит сверху вниз, но в данном случае прямой ход выполняется **снизу вверх**.
   - На каждом шаге снизу вверх выполняется исключение неизвестных, начиная с последних строк.
   - В процессе преобразований образуется **нижнетреугольная матрица**, которая содержит элементы ленты матрицы слева от главной диагонали.
   - Для повышения эффективности хранения данных используется массив размерности N×L, который содержит только элементы ленты.
1. **Обратный ход**
   Обратный ход осуществляется для вычисления вектора решений системы.
   - В отличие от классического метода Гаусса, обратный ход начинается **с первой переменной** и движется вниз по системе.
   - Решения вычисляются последовательно методом подстановки, начиная с верхней строки преобразованной системы.

Особенности реализации для ленточных матриц

- Для экономии памяти хранятся только элементы нижней части ленты матрицы.
- Исключения выполняются только для элементов, входящих в диапазон ленты.
- На этапе обратного хода используются те же элементы, которые были вычислены в процессе прямого хода.

Такой подход позволяет эффективно решать СЛАУ для матриц специального вида, сокращая затраты памяти и времени за счет использования ленточной структуры данных.

Формулы для решения СЛАУ с симметричной ленточной матрицей методом Гаусса (схема единственного деления)

Нормализация строки k: если строка k представлена как:

$A[k] = [a_{k,k-L+1}, a_{k,k-L+2}, \dots, a_{k,k-1}, a_{k,k}]$, где $a_{k,k}$ — элемент главной диагонали

а соответствующий элемент правой части — f_k, то нормализация строки выполняется по формулам:

$a_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}} \ \forall \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{f_k} = \frac{\boldsymbol{f_k}}{a_{k,k}}$

Исключение влияния строки k на строку k - *1:*

Для строки k - *1*, имеющей вид:

$$A[k-1] = [a_{k-1,k-m-1}, \dots, a_{k-1,k-2}, a_{k-1,k-1}, a_{k-1,k}]$$

исключение выполняется по формулам:

1) для элементов строки:

$$A[k-1][j] = A[k-1][j] - A[k-1][m] * A[k][j], \qquad \forall j, \text{где } j < m$$

2) для правой части:

$$f_{k-1} = f_{k-1} - A[k-1][m] * f_k$$

Обратный ход: $x_1 = f_1$; $x_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} * x_j$, $i = 2 \div N$

4. Результаты вычислительных экспериментов

Оценим погрешности решений систем с разными параметрами.

Замечание: каждый тест выполнялся программой по 20 раз.

Часть 1

№ теста	Размерность системы	Отношение L/N	Средняя относительная погрешность решения
1	10	1/10	1.79558e-05
2	10	1/N	0.000196094
3	400	1/10	0.00192609
4	400	1/N	0.00094917

Часть 2

№ теста	Размерность системы	Средняя относительная погрешность решения
1	10	9.8042e-05
2	100	0.000393949

Часть 3

№ теста	Порядок k	Размерность системы	Отношение L/N	Средняя относительная погрешность решения
1	2	200	0.35	3.69529e-11
2	4	200	0.35	1.15453e-09
3	6	200	0.35	1.44485e-07