

1. Постановка задачи

Метод обратных итераций определения пары с минимальным по модулю собственным значением симметричной матрицы простой структуры.

Вариант 4.

Указание. Для решения линейной системы уравнений использовать метод Халецкого решения СЛАУ с ленточными матрицами.

Входные параметры основной процедуры:

N – размерность матрицы;

A – двумерный массив размерности $N \times N$;

ε_λ – точность определения собственного значения;

ε_g – точность определения собственного вектора;

M – максимально допустимое число итераций.

Выходные параметры основной процедуры:

IER – код завершения;

λ – минимальное по модулю собственное значение;

x – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ ;

K – число выполненных итераций;

r – мера точности полученной пары (λ, x) .

Требуется написать алгоритм нахождения минимального по модулю собственного значения и собственного вектора, соответствующего минимальному собственному значению.

Если для решения системы уравнений с матрицей A применяется один из методов LU разложения матрицы A , то один раз найденное LU разложение используется в дальнейшем.

Необходимо написать тест для средней оценки точности собственных значений, собственных векторов, меры точности, числа итераций.

При записи погрешностей используются 2–3 значащие цифры, не более.

2. Теоретическая часть

Зная собственные вектора и собственные значения симметричная матрица может быть получена через перемножение матриц, вам понадобятся следующие формулы и свойства:

Симметричная матрица — это матрица, у которой транспонированная матрица равна исходной: $A = A^T$.

Если матрица P состоит из собственных векторов по столбцам, а матрица D содержит собственные значения на диагонали и нули вне диагонали, то симметричная матрица A может быть выражена как $A = PDP^{(-1)}$, где:

P — матрица, содержащая собственные векторы по столбцам.

D — матрица, содержащая собственные значения на диагонали и нули вне диагонали.

$P^{(-1)}$ — обратная матрица к матрице P .

Теперь приведем формулы для объяснения этого процесса:

1. Пусть P — матрица с собственными векторами по столбцам:

$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, где каждый v_i является собственным вектором.

2. Пусть D — диагональная матрица с собственными значениями:

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, где λ_i — собственные значения.

3. Тогда произведение $PDP^{(-1)}$ будет иметь вид:

$PDP^{(-1)} = [v_1, v_2, \dots, v_n] * [[\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n]]$

4. Это даст нам симметричную матрицу A :

$A = PDP^{(-1)}$,

Таким образом, через умножение матриц P (содержащей собственные векторы), D (содержащей собственные значения на диагонали), и $P^{(-1)}$ (обратной матрицы P) можно получить симметричную матрицу A .

Ниже приведено несколько методов определения собственных значений λ и собственных векторов x для симметричных матриц $A \in R_{n \times n}$. Рассмотрение только симметричных матриц объясняется двумя причинами. Во-первых, такие матрицы очень просто устроены с точки зрения спектральной задачи (все собственные значения действительны), во-вторых, симметричные матрицы часто возникают в инженерных расчетах. Кроме того, оставим в стороне случаи кратных собственных значений или совпадения их модулей. Будем считать, что собственные значения пронумерованы в порядке возрастания их модулей.

Степенной метод (метод прямых итераций)

Степенной метод приспособлен для нахождения наибольшего по модулю собственного значения λ_n и соответствующего ему собственного вектора x_n . Пусть $x^{(0)}$ – произвольный вектор из R_n . Вычисления итерационного процесса ведутся по схеме

$$\begin{cases} v^{(k)} = x^{(k)} / \|x^{(k)}\| \\ x^{(k+1)} = A v^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

с попутным вычислением чисел

$$\sigma^{(k)} = v^{(k)^T} x^{(k+1)}. \quad (2.1.3)$$

Показано что

$$\begin{cases} \sigma^{(k)} \rightarrow \lambda_n \\ v^{(k)} \rightarrow \pm x_n \end{cases}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.1.4)$$

Замечание 1. Во всех приведенных методах берутся евклидовы нормы

Замечание 2. Если x_1, x_2, \dots, x_n – ортонормированный базис, составленный из собственных векторов матрицы A , то вектор начального приближения $x^{(0)}$ разложим по этому базису:

$$x(0) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i.$$

В степенном методе предполагается, что $\xi_n = -x_n^T x^{(0)} \neq 0$, т. е. что $x^{(0)}$ не ортогонален x_n .

Замечание 3. Скорость сходимости (2.1.2) зависит от отношения $\left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|$:

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)} &= \lambda_n \left[1 + O \left(\left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^{2k} \right) \right] \\ v^{(k)} &= \left(\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} \right)^k \frac{\xi_n}{|\xi_n|} \left[x_n + O \left(\left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Если $\left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|$ отношение близко к единице, то сходимость медленная.
Последовательность $\sigma^{(k)}$

всегда сходится быстрее, чем последовательность векторов $v^{(k)}$.

Метод обратных итераций

Если матрица A невырожденная, то наибольшее по модулю собственное значение матрицы $A^{(-1)}$ будет равно $1/\lambda_1$. Итерационная схема (2.1.2), примененная к матрице $A^{(-1)}$, имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} / \|\mathbf{x}^{(k)}\| \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = A^{-1}\mathbf{v}^{(k)} \Leftrightarrow A\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

причем $\sigma^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)T} \mathbf{x}^{(k+1)} \rightarrow 1/\lambda_1$, $\mathbf{v}^{(k)} \rightarrow \pm \mathbf{x}_1$ при $k \rightarrow \infty$. На каждом итерационном шаге вектор $\mathbf{x}^{(k+1)}$ находится как решение системы линейных уравнений $A\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)}$

Замечание 1. Скорость сходимости итерационного процесса (с8) зависит от отношения $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{1}{\lambda_1} \left[1 + O\left(\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{2k} \right) \right], \\ \mathbf{v}^{(k)} &= \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \right)^k \frac{\xi_1}{|\xi_1|} \left[\mathbf{x}_1 + O\left(\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^k \right) \right] \rightarrow \pm \mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Замечание о построении тестовых матриц для решения спектральных задач. Для того чтобы составить симметричную матрицу размерности N , имеющую заранее известные собственные значения, можно поступить следующим образом.

Пусть $\Lambda = (\lambda_i) \text{diag}$ – диагональная матрица размерности $N \times N$,

λ_i – собственные значения конструируемой матрицы A ,

ω – случайным образом сгенерированный и пронормированный вектор

($|\omega| = 1$) размерности N . Образуем с помощью вектора (столбца) ω матрицу Хаусхолдера:

$$H = E - 2\omega\omega^T,$$

являющуюся симметричной и ортогональной. Тогда в качестве тестируемой матрицы можно взять матрицу

$$A = H\Lambda H^T,$$

у которой все собственные значения (элементы диагонали матрицы Λ) и все соответствующие им собственные векторы (столбцы матрицы H) известны.

Замечание о выходе из итерационного процесса в степенном методе (варианты 1–9).

Итерационный процесс прекращается, если:

- достигнуты требуемые точности определения собственного значения и собственного вектора;
- число итераций превысило максимально допустимое значение.

Предполагается, что требуемая точность ε_λ для собственного значения достигнута, если модуль разности двух последовательных приближений стал меньше ε_λ . Аналогично считается, что точность ε_ξ для собственного вектора получена, если абсолютное значение угла между двумя векторами, являющимися последовательными приближениями собственного вектора, меньше ε_ξ . Если брать одинаковые значения ε_λ , ε_ξ , то точность для собственных значений достигается, вообще говоря, быстрее, чем для собственных векторов. Поэтому, несмотря на то, что собственное значение получено с заданной точностью, итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности собственного вектора.

Замечание о выходном параметре r – мере точности решения спектральной задачи (варианты 1–9).

Под мерой точности понимается максимальное по модулю отклонение компоненты вектора $Ax - \lambda x$ от нуля, т. е. первая норма вектора $Ax - \lambda x$.

Замечание о средней оценке точности, о среднем числе итераций.

Как и в предыдущих заданиях, средняя оценка точности, среднее число итераций – это среднее арифметическое соответствующих значений ряда подобных испытаний. Каждый ряд испытаний состоит не менее чем из 10 испытаний.

Напомним, что в записи оценки точности используются 2–3 значащие цифры, не более.

Замечание об обязательных вычислительных экспериментах в вариантах 1–9. Результаты тестирования представляются в виде таблицы.

№ теста	Размерность системы N	Диапазон значений λ	Точность ($\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\xi$)	Ср. оценка точности собств. значений	Ср. оценка точности собств. векторов	Средняя мера точности r	Среднее число итераций
1

Тестирование проводится для симметричных матриц простой структуры размерности 10, 30, 50, имеющих собственные значения в диапазонах $-2 \div 2$, $-50 \div 50$ с разностью 10^{-5} , 10^{-8} . Минимальное количество строк таблицы равно 12.

3. Алгоритм

ШАГ 1

Генерируем симметричную матрицу.

Функция `GeneratorSymmetricMatrixWithEigenVectorsAndValues` генерирует симметричную матрицу размера `size` с заданным диапазоном собственные вектора и значения.

Минимальное и максимальное значение для собственных значений передаются в `lambdaMin` и `lambdaMax` соответственно. Если они не заданы, то используются значения `min` и `max`.

Алгоритм:

1. Инициализировать переменные `lambdaMin` и `lambdaMax`.
2. Создать генератор случайных чисел.
3. Заполнить массив `_eigenValuesData` случайными значениями в пределах от `lambdaMin` до `lambdaMax`.
4. Заполнить массив `_eigenVectorsData` случайными значениями в пределах от `min` до `max`.
5. Вычислить симметричную матрицу `_symmetricMatrix` как произведение матриц `_eigenVectorsData` и `_eigenValuesData`.
6. Вычислить обратную матрицу `_inverseEigenVectorsData` для `_eigenVectorsData`.
7. Вычислить `_symmetricMatrix` как произведение `_symmetricMatrix`, `_inverseEigenVectorsData` и `size`.

Функция multiply вычисляет произведение двух матриц matrix1 и matrix2 размера size.

Алгоритм:

1. Создать матрицу result размера size x size, заполненную нулями.
2. Для каждого i от 0 до size-1 выполнить следующее:
 - а. Для каждого j от 0 до size-1 выполнить следующее:
 - і. Для каждого k от 0 до size-1 выполнить следующее:
 1. Добавить в $result[i][j]$ произведение $matrix1[i][k]$ и $matrix2[k][j]$.
3. Вернуть матрицу result.

Функция inverseMatrix вычисляет обратную матрицу A^{-1} для заданной матрицы A методом Гаусса-Жордана.

Алгоритм:

1. Получить размер матрицы A как n.
2. Создать расширенную матрицу augmentedMatrix размера $n \times 2n$, заполненную нулями.
3. Заполнить первые n столбцов augmentedMatrix значениями из матрицы A.
4. Заполнить последние n столбцов augmentedMatrix единицами на диагонали.
5. Для каждого i от 0 до $n-1$ выполнить следующее:
 - а. Получить pivot как элемент $augmentedMatrix[i][i]$.
 - б. Для каждого j от 0 до $2n-1$ выполнить следующее:
 - і. Разделить $augmentedMatrix[i][j]$ на pivot.
 - с. Для каждого j от 0 до $n-1$ выполнить следующее:
 - і. Если j не равно i , то получить factor как элемент $augmentedMatrix[j][i]$.
 - іі. Для каждого k от 0 до $2n-1$ выполнить следующее:
 1. Вычесть из $augmentedMatrix[j][k]$ произведение factor на $augmentedMatrix[i][k]$.
6. Создать матрицу inverse размера $n \times n$, заполненную нулями.
7. Заполнить матрицу inverse элементами из последних n столбцов augmentedMatrix.
8. Вернуть матрицу inverse.

ШАГ 2

Передать матрицу в метод для нахождения минимального по модулю собственного значения и собственного вектора.

Входные данные:

- `_size` - размер квадратной симметричной матрицы `_symmetricMatrix`;
- `_symmetricMatrix` - матрица размером `_size` x `_size`, представленная в виде вектора векторов типа `double`, содержащая элементы матрицы;
- `_givenEigenvectorsE` - заданная точность для собственных векторов;
- `_givenEigenValuesE` - заданная точность для собственных значений;
- `_maxIterationsNumber` - максимальное число итераций при поиске собственных значений и векторов.

Выходные данные:

- `_firstMinEigenValue` - первое минимальное по модулю собственное значение матрицы `_symmetricMatrix`;
- `_eigenVectorByFirstMinEigenValue` - собственный вектор, соответствующий первому минимальному по модулю собственному значению матрицы `_symmetricMatrix`;
- `_IterationsNumber` - количество выполненных итераций алгоритма поиска собственных значений и векторов;
- `_resultedEigenvectorsE` - фактическая погрешность для собственных векторов;
- `_resultedEigenValuesE` - фактическая погрешность для собственных значений;
- `r` — мера точности полученной пары
(`_firstMinEigenValue` , `_eigenVectorByFirstMinEigenValue`)

Значения `_firstMinEigenValue`, `_eigenVectorByFirstMinEigenValue`, `_IterationsNumber`, `_resultedEigenvectorsE` и `_resultedEigenValuesE` вычисляются внутри функции `Solve()`. Значение `r` вычисляется после выполнения функции `Solve()`.

Алгоритм:

1. Инициализировать переменные x_rand , k , q , $qPrev$, $maxVecE$, $system$.
2. Заполнить вектор x_rand случайными числами в пределах от -10 до 10.
3. Пока не достигнут критерий остановки
($_resultedEigenValuesE > _givenEigenValuesE$ или $|maxVecE| > _givenEigenVectorsE$) и
 k меньше $_maxIterationsNumber$,
выполнять следующее:
 - a. Нормализовать вектор x_rand с помощью функции `normalizeVector`.
 $V = x_rand$
 - b. Решить систему линейных уравнений $system$ для вектора v , полученного на предыдущем шаге.
 - c. Если система успешно решена, то обновить x_rand как полученное решение.
 - d. Сохранить прошлое значение q в $qPrev$.
Вычислить произведение между векторами v^T и x_rand и сохранить его в q .
 - e. Вычислить первое минимальное собственное значение как $1/q$.
 - f. Вычислить максимальную по модулю разность между элементами векторов v и $_eigenVectorByFirstMinEigenValue$ и сохранить ее в $maxVecE$.
 - g. Обновить $_resultedEigenVectorsE$, $_resultedEigenValuesE$ и $_eigenVectorByFirstMinEigenValue$.
 - h. Увеличить k на 1.
4. Вычислить вектор $_R$ как произведение матрицы $_symmetricMatrix$ и $_eigenVectorByFirstMinEigenValue$, вычесть из него произведение $_firstMinEigenValue$ и вектора $_eigenVectorByFirstMinEigenValue$.
5. Вычислить максимальное значение вектора $_R$ и сохранить его в r .

Функция `normalizeVector` нормализует заданный вектор путем деления каждого элемента на длину вектора.

Алгоритм:

1. Вычислить сумму квадратов элементов вектора `vector`.
2. Вычислить длину вектора `magnitude` как корень из суммы квадратов элементов.
3. Создать новый вектор `normalizedVector` размера, равного размеру вектора `vector`.
4. Для каждого элемента вектора `vector` выполнить следующее:
 - а. Разделить элемент на длину вектора и добавить результат в `normalizedVector`.
5. Вернуть `normalizedVector`.

Результаты тестирования

№ теста	Раз- мер	λ диапа- зон	E	Ср оценка собственного значения	Ср оценка собственного вектора	Ср. r	Ср. Кол-во Итераций
1	10	-2:2	1.0e-05	5.811e-06	2.466e-06	-3.919e-07	162
2	10	-2:2	1.0e-08	5.890e-09	5.121e-09	-1.505e-09	91
3	10	-50:50	1.0e-05	6.519e-07	7.751e-06	-5.556e-05	31
4	10	-50:50	1.0e-08	2.564e-09	7.328e-09	-1.974e-08	84
5	30	-2:2	1.0e-05	5.893e-06	2.391e-06	-1.076e-07	21
6	30	-2:2	1.0e-08	4.279e-09	5.406e-09	-5.363e-10	81
7	30	-50:50	1.0e-05	3.038e-06	6.852e-06	-1.844e-05	97
8	30	-50:50	1.0e-08	2.329e-09	6.063e-09	-1.000e-08	116
9	50	-2:2	1.0e-05	6.229e-06	4.982e-07	-2.907e-08	28
10	50	-2:2	1.0e-08	6.902e-09	2.375e-09	-1.614e-10	57
11	50	-50:50	1.0e-05	3.275e-06	6.561e-06	-7.576e-06	30
12	50	-50:50	1.0e-08	3.026e-09	6.843e-09	-8.250e-09	46