Отчёт

Тема: «Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами специального вида»

Выполнил:

студент 3 курса 62 группы

Вафин А.Р.

Проверила:

преподаватель

Фролова О.А.

**1. Постановка задачи**

Составить программу для решения систем уравнений с матрицей специального вида:

Систему уравнений задают векторы: *b* – главная побочная диагональ, *a* – нижняя побочная кодиагональ, *c* – верхняя побочная кодиагональ, *p* – 1-ая (самая верхняя) строка, *q* – n-ая (самая нижняя) строка, *f* – столбец свободных членов. Матрица состоит из *n* строк.

Будет считать, что все делители отличны от нуля и система определена.

**2. Теоретическая часть**

Будем использовать формулу для оценки относительной погрешности:

где – приближённое значение, полученное после применения метода решения приближённого значения при условии, что правая часть соответствует системе с единичным решением;

где – полученное решение, – точное решение, *q* – число, выбранное с учётом особенностей системы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \* | \* | \* | \* | \* | \* |
|  |  |  | \* | \* | \* |
|  |  | \* | \* | \* |  |
|  | \* | \* | \* |  |  |
| \* | \* | \* |  |  |  |
| \* | \* | \* | \* | \* | \* |

рис.1 Исходное состояние матрицы

**Шаг 1.**

Процесс заключается в том, чтобы пройтись циклом по строкам с 2-й по (n-1)-ю, стремясь привести элементы на главной диагонали к единицам. Для этого каждая строка делится на соответствующий коэффициент b\_i​. Затем умножаем полученную строку на коэффициенты, которые соответствуют элементам столбцов текущей строки (обозначены как q, p), и складываем её с верхней строкой, нижней строкой и следующей за ней. Это позволяет занулить элементы выше и ниже текущего элемента на главной диагонали. В процессе вычитания строк друг из друга, в последнем столбце (который не содержит свободных членов) формируются определённые коэффициенты, которые мы сохраняем в массиве r для дальнейшего использования. В результате этого шага получаем промежуточную структуру, аналогичную изображению на рисунке 2.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \* | 0 | 0 | 0 | 0 | \* |
|  |  |  | \* | 1 | \* |
|  |  | \* | 1 | 0 | \* |
|  | \* | 1 | 0 |  | \* |
| \* | 1 | 0 |  |  | \* |
| \* | 0 | 0 | 0 | 0 | \* |

рис.2 Состояние матрицы после шага №1

**Шаг 2.**

На этом этапе наша цель — полностью привести главную диагональ к единицам и занулить элементы в левом верхнем и правом нижнем углах матрицы. Для этого:

1. Сначала делим первую строку p на коэффициент, который стоит при n-м элементе, чтобы в массиве b на первой позиции оказалась единица.
2. Затем умножаем эту строку на коэффициент q\_n​ и вычитаем её из последней строки. Это приведёт к тому, что в правом нижнем углу появится ноль.
3. Далее, делим последнюю строку на коэффициент q1, чтобы на главной диагонали в самом конце появилась единица.
4. Используя полученную строку, преобразуем элемент p1​ в ноль.

После выполнения этих операций результат будет соответствовать изображению на рисунке 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  |  |  | \* | 1 | \* |
|  |  | \* | 1 |  | \* |
|  | \* | 1 |  |  | \* |
| \* | 1 |  |  |  | \* |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

рис.3 Состояние матрицы после шага №2

**Шаг 3.**

На этом шаге наша задача — избавиться от лишних коэффициентов в правом столбце матрицы. Для этого:

1. Вычитаем первую строку, в которой единица находится только в nnn-м месте, умноженную на соответствующие коэффициенты из массива rrr, из всех последующих строк.

Таким образом, мы устраняем ненужные элементы в правом столбце и получаем результат, который изображён на рисунке 4.

Осталось найти значения вектора ответа. Для этого:

1. Первый и последний элементы вектора можно найти напрямую, приравняв их к соответствующим элементам столбца свободных членов.
2. Остальные элементы вектора считаются следующим образом: начиная с первого, подставляем уже найденные значения векторных элементов в уравнения для следующего элемента. Процесс идёт снизу вверх, где для каждого x\_i (i=2, n-1) используется найденный ранее элемент x\_i-1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  |  |  | \* | 1 | 0 |
|  |  | \* | 1 |  | 0 |
|  | \* | 1 |  |  | 0 |
| \* | 1 |  |  |  | 0 |
| 1 |  |  |  |  | 0 |

рис.4 Состояние матрицы после шага №3

**4. Тестирование**

Оценим погрешность систем с разными размерами и разными диапазонами коэффициентов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ теста** | **Размерность системы** | **Диапазон значений элементов матрицы** | **Средняя относительная погрешность системы** | **Среднее значение оценки точности** |
| 1 | 10\*10 | (-10; 10) | 6.54369e-05 | 4.59667e-05 |
| 2 | 10\*10 | (-100; 100) | 3.82582e-04 | 2.18455e-05 |
| 3 | 10\*10 | (-1000; 1000) | 1.44624e-03 | 1.51929e-05 |
| 4 | 100\*100 | (-10; 10) | 8.16305e-04 | 1.79174e-04 |
| 5 | 100\*100 | (-100; 100) | 4.84138e-02 | 1.07766e-03 |
| 6 | 100\*100 | (-1000; 1000) | 2.62642e-02 | 4.60973e-03 |
| 7 | 1000\*1000 | (-10; 10) | 1.58646e-02 | 1.93924e-02 |
| 8 | 1000\*1000 | (-100; 100) | 1.41713e-01 | 1.18103e-01 |
| 9 | 1000\*1000 | (-1000; 1000) | 3.2028e-01 | 3.24175e-01 |