Дисциплина: Численные методы

Лабораторное задание **№2**

Отчёт

Тема: «Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами специального вида»

Выполнил:

студент 3 курса 62 группы

Подольский И.А.

Проверила:

старший преподаватель

Фролова О.А.

**1. Постановка задачи**

Применить алгоритм метода Гаусса (схема единственного деления) для решения СЛАУ с симметричными ленточными матрицами. систем уравнений с матрицей специального вида:

*N \* N N \* L*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **\*** | **\*** | **\*** |  |  |  |  |  |
| **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |  |  |  |  |
| **\*** | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |  |  |  |
|  | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |  |  |
|  |  | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |  |
|  |  |  | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |
|  |  |  |  | **\*** | **\*** | **\*** | **\*** |
|  |  |  |  |  | **\*** | **\*** | **\*** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | **\*** |
| 0 | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |
| **\*** | **\*** | **\*** |

Входные параметры основной процедуры:  
N, L – размерность системы и половина ширины ленты матрицы;  
А – массив размерности N \* L содержащий нижнюю часть ленты матрицы исходной системы уравнений;  
f – вектор правой части системы размерности *N*.  
Выходные параметры основной процедуры:  
x – вектор решения размерности *N*.

**2. Метод решения**

**Схемой единственного деления** метода Гаусса называют алгоритм  
решения систем линейных уравнений, состоящий из двух частей – прямого хода и обратного хода.  
Прямой ход – это приведение системы к системе с верхней треугольной матрицей с единицами на главной диагонали. Обратный ход — непосредственное определение вектора неизвестных из полученной системы  
уравнений с треугольной матрицей.

В нашем случае мы изменим метод Гаусса. А именно: изменим направления прямого и обратного хода. Если в прямом ходе мы будем проходить снизу вверх, а не сверху вниз, как это принято, в результате будет образовываться нижнетреугольная матрица, в которой как раз и будут содержаться элементы, стоящие левее элементов главной диагонали, с которыми мы и должны работать по условию. Решение системы (обратный ход) находится аналогично — методом подстановки, но начиная с первой переменной.

По условию задания нам необходимо хранить элементы ленты в массиве размерности *N \* L.*

**Формулы:**

Нормализация строки *k*: если строка *k* представлена как:

, где — элемент главной диагонали

а соответствующий элемент правой части — , то нормализация строки выполняется по формулам:

**∀**

Исключение влияния строки *k* на строку *k - 1:*

Для строки *k - 1*, имеющей вид:

исключение выполняется по формулам:

1) для элементов строки:

2) для правой части:

Обратный ход:

**3. Основные процедуры**

Рассмотрим алгоритм на примере:

*N =* 4*, L =* 3

*M* **=** f = *A* =

Основные этапы алгоритма:

1) Прямой ход (снизу вверх, N раз)

1.1) Делим текущую строку на коэффициент стоящий на главной диагонали обычной матрицы данной строки, предварительно сохранив элементы, стоящие справа от него (далее они понадобятся для операций со строками).

*A* = *f* =

1.2) Вычитаем текущую строку, умноженную на соответствующий ранее сохранённый коэффициент, из следующих выше стоящих строк.

*A* = *f* **=**

Операции прямого хода проделываем со всеми строками, начиная с нижней и заканчивая верхней. Промежуточные результаты выполнения алгоритма после каждой итерации строки:

*A* = *f* =

*A* **=** *f* **=**

*A* **=** *f* **=**

2) Обратный ход (сверху вниз)

Последний результат работы алгоритма (см. выше) можно представить в виде обычной ленточной матрицы:

Пользуясь формулами обратного хода мы получаем значения вектора X - решения системы:

**4. Результаты вычислительных экспериментов**

Оценим погрешности решений систем с разными параметрами.

Замечание: каждый тест выполнялся программой по 20 раз.

Вычислительный эксперимент №1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № теста | Размерность системы | Отношение L/N | Средняя относительная погрешность решения |
| 1 | 10 | 1/10 | 1.68147e-05 |
| 2 | 10 | 1/N | 6.8016e-05 |
| 3 | 500 | 1/10 | 0.00085558 |
| 4 | 500 | 1/N | 0.00102203 |

Вычислительный эксперимент №2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № теста | Размерность системы | Средняя относительная погрешность решения |
| 1 | 10 | 0.000917668 |
| 2 | 100 | 0.000255953 |

Вычислительный эксперимент №3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № теста | Порядок k | Размерность системы | Отношение L/N | Средняя относительная погрешность решения |
| 1 | 2 | 200 | 0.35 | 2.91021e-10 |
| 2 | 4 | 200 | 0.35 | 9.27195e-07 |
| 3 | 6 | 200 | 0.35 | 0.010545 |