ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра вычислительной математики

Метод дифференциальной прогонки решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Учебно-методическое пособие

Специальность 010501 (010200)

Воронеж 2006

Утверждено научно-методическим Советом факультета прикладной математики, информатики и механики 20.02.06, протокол №6.

Составители: Корзунина В.В., Шабунина З.А., Шаруда Д.В.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре вычислительной математики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 и 4 курсов дневного и вечернего отделений.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. Преимущества метода дифференциальной прогонки

В курсе «Численные методы» при рассмотрении методов решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, непременно рассматривается редукция двухточечной краевой задачи к двум задачам Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Теоретически это идеальный по своей красоте и простоте метод. Тем не менее, при численном определении решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка чаще всего используют методы типа дифференциальной прогонки, в которых решаются задачи Коши для линейных уравнений первого порядка три и даже четыре раза.

Ниже на простом примере мы попытаемся прояснить эту ситуацию. Сначала рассмотрим редукцию двухточечной краевой задачи для линейного уравнения второго порядка к двум задачам Коши.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''(x) = p(x)y(x) + q(x), \quad x \in [a;b] \tag{1.1}$$

и нам требуется найти его решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$y'(a) - k_1 y(a) = A \tag{1.2}$$

$$y'(b) + k_2 y(b) = B \tag{1.3}$$

Будем считать, что $p(x)$, $q(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, причем $p(x) > 0$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ и, по крайней мере, одно из этих чисел отлично от нуля. Тогда, согласно методу редукции /1/ к двум задачам Коши, решение уравнения (1.1) ищем в виде линейной комбинации

$$y(x) = c \cdot u(x) + v(x), \tag{1.4}$$

где $u(x)$ – ненулевое решение соответствующего однородного уравнения:

$$u''(x) = p(x)u(x), \tag{1.5}$$

$v(x)$ – некоторое решение данного неоднородного уравнения

$$v''(x) = p(x)v(x) + q(x) \tag{1.6}$$

Потребуем, чтобы функция $y(x)$, определяемая формулой (1.4), где c произвольно, являлась не только решением уравнения (1.1), но и удовлетворяла первому краевому условию (1.2). Используя это краевое условие, будем иметь:

$$cu'(a) + v'(a) - k_1[cu(a) + v(a)] = A$$

или

$$c[u'(a) - k_1 u(a)] + [v'(a) - k_1 v(a) - A] = 0 \tag{1.7}$$

Для того, чтобы равенство (1.7) было справедливо при любых c, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при c обращался в нуль, т.е. должны быть выполнены равенства:

$$u'(a) - k_1 u(a) = 0 \tag{1.8}$$

$$v'(a) - k_1 v(a) = A \tag{1.9}$$

Для обеспечения равенств (1.8), (1.9) достаточно положить

$$u(a) = m, \qquad u'(a) = k_1 m, \tag{1.10}$$

где постоянная m отлична от нуля,

$$v(a) = 0, \qquad v'(a) = A \tag{1.11}$$

Отсюда видно, что функция $u(x)$ есть решение задачи Коши для однородного равнения (1.5), удовлетворяющее начальному условию (1.10), а $v(x)$ есть решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию (1.11). При этом для любого c функция (1.4) удовлетворяет краевому условию на конце $x = a$. Подберем теперь постоянную c так, чтобы функция (1.4) удовлетворяла краевому условию (1.3) на конце $x = b$. Тогда

$$cu'(b) + v'(b) + k_2\left[cu(b) + v(b)\right] = B,$$

откуда

$$c = \frac{B - v'(b) - k_2 v(b)}{u'(b) + k_2 u(b)}.$$

Таким образом, краевая задача (1.1) – (1.3) сведена к двум задачам Коши для функций $u(x)$, $v(x)$, и функция (1.4), являющаяся решением краевой задачи (1.1) – (1.3), определена полностью.

Покажем, что численная реализация изложенного метода может привести к большим вычислительным погрешностям /1/. Для этого исследуем поведение решения $u(x)$ уравнения (1.5). Дифференцируя $u(x)u'(x)$, получим:

$$\frac{d\left(u(x)u'(x)\right)}{dx} = u'^2(x) + u(x)u''(x) = u'^2(x) + p(x)u^2(x) > 0$$

Отсюда

$$u(x)u'(x) = u(a)u'(a) + \int_a^x \Big(p(\xi)u^2(\xi) + u'^2(\xi) \Big)\, d\xi,$$

Где, согласно краевому условию (1.8), первое слагаемое можно записать как $k_1 u^2(a)$. Учитывая, что $\left(u^2(x)\right)' = 2u(x)u'(x)$, проинтегрируем последнее равенство:

$$u^2(x) = u^2(a) + 2k_1 u^2(a)(x-a) +$$
$$+ 2\int_a^x d\eta \int_0^\eta \left(p(\xi)u^2(\xi) + u'^2(\xi)\right) d\xi \tag{1.12}$$

Формула (1.12) показывает, что $u(x)$ всегда будет расти по абсолютной величине с возрастанием аргумента x. Значение $u(x)$ может быть очень велико при $x = b$, особенно если нижняя граница изменения $p(x)$ большая. Вследствие этого могут возникать ситуации, когда для получения решения $y(x) = cu(x) + v(x)$ даже порядка единицы, промежуточные вычисления для достижения желаемой точности потребуют недопустимо больших разрядных сеток.

Метод дифференциальной прогонки, разработанный в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР, позволяет избежать этих неприятностей.

Суть метода состоит в следующем. Формула (1.4) показывает, что решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) при $x = a$, есть семейство функций, зависящее от одного параметра.

Найдем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(x) = k(x)y(x) + l(x) \tag{1.13}$$

такое, что каждое решение упомянутого однопараметрического семейства (1.4) решений уравнения (1.1) принадлежит к числу решений уравнений (1.13), т.е. найдем такие функции $k(x)$, $l(x)$, что для любого решения задачи (1.1), (1.2) уравнение (1.13) будет справедливо.

Естественно, что при $x = a$ уравнение (1.13) должно дать краевое условие (1.2). Поэтому

$$k(a) = k_1, \quad l(a) = A \tag{1.14}$$

Если решение (1.4) должно удовлетворять уравнению (1.13), то

$$cu'(x) + v'(x) \equiv ck(x)u(x) + k(x)v(x) + l(x)$$

Это тождество выполняется при любом значении c. Следовательно

$$u'(x) = k(x)u(x), \qquad v'(x) = k(x)v(x) + l(x) \tag{1.15}$$

Продифференцируем первое из равенств (1.15) и воспользуемся уравнением (1.5):

$$u''(x) = p(x)u(x) = k'(x)u(x) + k(x)u'(x) = \left(k'(x) + k^2(x)\right)u(x),$$

откуда

$$k'(x)+k^2(x)=p(x) \tag{1.16}$$

Таким же образом, дифференцируя второе равенство (1.15) и используя уравнение (1.6), получим

$$v''(x)=p(x)v(x)+q(x)=k'(x)v(x)+k(x)v'(x)+l'(x)=$$
$$=\left(k'(x)+k^2(x)\right)v(x)+k(x)l(x)+l'(x),$$

откуда

$$l'(x)+k(x)l(x)=q(x) \tag{1.17}$$

Таким образом, задача построения уравнения (1.13) свелась к отысканию функций $k(x)$, $l(x)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений первого порядка (1.16), (1.17) с начальными данными (1.14). Заметим, что сначала можно проинтегрировать первое уравнение (1.16) и определить из уравнения (1.13) соотношение на конце $x=b$:

$$y'(b)=k(b)y(b)+l(b) \tag{1.18}$$

Описанная процедура получения соотношения (1.18) называется прямой прогонкой, поскольку мы перегнали граничное условие (1.2) с левого конца $x=a$ на правый конец $x=b$.

Равенства (1.3), (1.18) образуют систему линейных алгебраических уравнений для определения $y(b)$, $y'(b)$.

Если уравнения (1.3), (1.18) совпадают, то исходная краевая задача (1.1) – (1.3) имеет бесчисленное множество решений, представляемых формулой (1.4). Если система уравнений (1.3), (1.18) несовместна, то краевая задача не имеет решения. Если система (1.3), (1.18) имеет единственное решение, то на правом конце мы имеем данные Коши для уравнения (1.1). Для получения решения уравнения (1.1) лучше интегрировать не уравнение (1.1), а уравнение (1.13) с вычисленным начальным значением $y(b)$ в точке $x=b$. Такой процесс определения решения $y(x)$ называется обратной прогонкой.

Исследуем поведение решений уравнений (1.16), (1.17) при прямой прогонке и уравнения (1.13) при обратной прогонке /1/. Заметим, что уравнение (1.16) можно получить из уравнения (1.5), доставляющего основные неприятности в методе редукции, изложенном первоначально, если произвести замену переменных:

$$u(x)=e^{\int_a^x k(x)dx}$$

В самом деле, $u'(x)=k(x)u(x)$, $u''(x)=k'(x)u(x)+k^2(x)u(x)$, подставляя эти выражения в (1.5), получим уравнение (1.16). Начальные условия для $u(x)$, дающие нужное нам решение $k(x)$, будут: $u(a)=1$,

$u'(a)=k_1$; при этих начальных условиях все слагаемые в (1.12) остаются положительными, и сохраняется возможность быстрого роста функции $u(x)$. Но если $u(x)$ быстро растет, то функция $k(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ быстро убывает, оставаясь положительной, и вычислительные трудности исчезают. Не возникают они и при решении уравнения (1.17) для функции $l(x)$.

Поскольку коэффициент $k(x)$ положителен, то решение (1.17) имеет вид

$$l(x)=Ae^{-\int_a^x k(x)dx}+e^{-\int_a^x k(x)dx}\cdot\int_a^x e^{\int_a^\xi k(\eta)d\eta}q(\xi)\,d\xi$$

и благодаря наличию множителя $e^{-\int_a^x k(x)dx}$ не будет быстро расти. Аналогичная ситуация возникает при обратной прогонке, когда мы решаем уравнение (1.13).

2. Метод дифференциальной прогонки в самосопряженной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка

Самосопряженная двухточечная краевая задача с разделенными краевыми условиями для одного о.д.у второго порядка имеет вид

$$\begin{cases}\left(p(x)y'(x)\right)'-q(x)y=f(x), \quad x\in[a;b] & (2.1)\\ \alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=\gamma_1 & (2.2)\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=\gamma_2 & (2.3)\end{cases}$$

Здесь $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - непрерывные на $[a;b]$ функции, α_j, β_j, γ_j - заданные числа, $\alpha_j^2+\beta_j^2>0$, $j=1,2$.

Известно /2/, что при дополнительных предположениях

$$p(x)>0,\ q(x)>0 \text{ на } [a;b]$$
$$\alpha_1\ge 0,\ \beta_1\le 0,\ \alpha_2\ge 0,\ \beta_2\ge 0$$

задача (2.1) – (2.3) имеет единственное решение.

2.1. О переносе краевых условий

Рассмотрим уравнение (2.1) с одним краевым условием:

$$\overline{\alpha}y'(c)+\overline{\beta}y(c)=\overline{\gamma}, \tag{2.4}$$

где $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ - заданные числа, $\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2>0$, $c\in[a;b]$.

Решение задачи (2.1), (2.4) является однопараметрическим семейством функций (см. п.1).

Найдем дифференциальное уравнение первого порядка

$$p(x)y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x) \tag{2.5}$$

такое, что любое из решений задачи (2.1), (2.4) удовлетворяет этому уравнению (2.5). Очевидно, что отыскание уравнения (2.5) сводится к определению двух функций $\alpha(x), \beta(x)$, являющихся коэффициентами этого уравнения. Нам придется рассмотреть два случая.

<u>Случай 1.</u> $\overline{\alpha} \neq 0$

Продифференцируем уравнение (2.5), используя уравнение (2.1) и исключим производную $y'(x)$ с помощью уравнения (2.5):

$$\left(p(x)y'(x)\right)' = q(x)y(x) + f(x) = \alpha'(x)y(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta'(x) =$$

$$= \alpha'(x)y(x) + \frac{\alpha(x)}{p(x)}\left(\alpha(x)y(x) + \beta(x)\right) + \beta'(x),$$

откуда

$$\left(\alpha'(x) + \frac{\alpha^2(x)}{p(x)} - q(x)\right)y(x) + \left(\beta'(x) + \frac{\alpha(x)\beta(x)}{p(x)} - f(x)\right) = 0 \tag{2.6}$$

Вспоминая, что уравнения (2.6) должно удовлетворять любому решению из однопараметрического семейства решений задачи (2.1), (2.4), приравняем нулю коэффициенты в скобках

$$\alpha'(x) + \frac{\alpha^2(x)}{p(x)} - q(x) = 0 \tag{2.7}$$

$$\beta'(x) + \frac{\alpha(x)\beta(x)}{p(x)} - f(x) = 0 \tag{2.8}$$

Дифференциальные уравнения для функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ получены. Перепишем краевое условие (2.4) в точке $x = c$, умножив предварительно его на коэффициент $p(c)/\overline{\alpha}$:

$$p(c)y'(c) = -\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}p(c)y(c) + \frac{\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}}p(c) \tag{2.9}$$

Поскольку краевое условие (2.9) для любого решения $y(x)$ из однопараметрического семейства решений (2.1), (2.4) должно удовлетворять уравнению (2.5) в точке $x = c$, то становятся очевидными требования на краевые условия для функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$

$$\alpha(c) = -\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} p(c) \tag{2.10}$$

$$\beta(c) = -\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\alpha}} p(c) \tag{2.11}$$

Таким образом, для функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ получена задача Коши – функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ есть решение системы о.д.у. первого порядка (2.7), (2.8) с начальными условиями (2.10), (2.11). Заметим, что решение для $\alpha(x)$ можно получить независимо от $\beta(x)$, решив задачу Коши (2.7), (2.10), а после определения $\alpha(x)$ решать задачу Коши (2.8), (2.11) для функции $\beta(x)$.

Подчеркнем, что решение для $\alpha(x)$, $\beta(x)$, а, следовательно, и вид уравнения (2.5) может быть получен как для $x > c$, так и для $x < c$. Если d - некоторая точка, не совпадающая с точкой c, то интегрированием от точки c до точки d (слева направо или справа налево в зависимости от взаимного расположения точек c и d) можно получить значение $\alpha(d)$, $\beta(d)$ и записать уравнение (2.5)

$$p(d)y'(d) = \alpha(d)y(d) + \beta(d) \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) является по существу краевым условие в точке $x = d$ для уравнения (2.1). При получении этого краевого условия было использовано только краевое условие (2.4) в точке $x = c$. Поэтому описанная выше процедура нахождения дифференциального уравнения первого порядка (2.5) обычно именуется переносом краевого условия прямой дифференциальной прогонной, если $d > c$, и переносом краевого условия обратной дифференциальной прогонкой, если $d < c$.

Нетрудно видеть, что перенос граничного условия в (2.5) возможен, если $\overline{\alpha} \neq 0$. В противном случае $\overline{\beta} \neq 0$ и граничное условие переносится в виде:

$$\varphi(x)p(x)y'(x) - y(x) = \psi(x) \tag{2.13}$$

Случай 2. $\overline{\beta} \neq 0$

Как и ранее, найдем уравнение и граничные условия, однозначно определяющие функции $\varphi(x), \psi(x)$. Напомним, что уравнению (2.13) должно удовлетворять любое из решений задачи (2.1), (2.4). Продифференцируем уравнение (2.13) и исключим с помощью (2.1) слагаемое $\left(p(x)y'(x)\right)'$:

$$\varphi'(x)\left(p(x)y'(x)\right) + \varphi(x)\left(p(x)y'(x)\right)' - y'(x) - \varphi'(x) =$$
$$= y'(x)\left(\varphi'(x)p(x) - 1\right) + \varphi(x)q(x)y(x) + \varphi(x)f(x) - \psi'(x) = 0$$

Исключим из последнего равенства функцию $y(x)$, используя соотношение (2.13)

$$y'(x)\left(\varphi'(x)p(x)+\varphi^2(x)q(x)p(x)-1\right)+$$
$$+\left(-\psi'(x)-\varphi(x)q(x)\psi(x)+f(x)\varphi(x)\right)=0$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы последнее равенство выполнялось для любого решения $y(x)$ из однопараметрического семейства решений задачи (2.1), (2.4), является выполнение соотношений:

$$\varphi'(x)+q(x)\varphi^2(x)= 1\Big/p(x) \tag{2.14}$$

$$\psi'(x)+\varphi(x)q(x)\psi(x)=f(x)\varphi(x) \tag{2.15}$$

Уравнения (2.14), (2.15) образуют систему линейных о.д.у. первого порядка относительно искомых функций $\varphi(x),\psi(x)$. Начальные данные получим из сопоставления уравнения (2.3), записанного в точке $x=c$

$$\varphi(c)p(c)y'(c)-y(c)=\psi(c)$$

и краевого условия (2.4), умноженного на коэффициент $1\Big/\overline{\beta}$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}y'(c)+y(c)=\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\beta}}$$

Нетрудно видеть, что это сопоставление приводит к следующим начальным данным для функций $\varphi(x),\psi(x)$

$$\varphi(c)=-\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}p(c)} \tag{2.16}$$

$$\psi(c)=-\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\beta}} \tag{2.17}$$

Таким образом, задача Коши для функций $\varphi(x),\psi(x)$ определена полностью. Для нахождения функции $\varphi(x)$ решается задача (2.14), (2.17), а затем, после определения $\varphi(x)$, решается задача (2.15), (2.17) для определения $\psi(x)$. Пусть опять, как и в случае 1, точку, до которой ведется интегрирование задачи Коши, обозначим буквой d, причем точка d может находиться как справа, так и слева от точки c, в которой поставлены начальные условия (2.16), (2.17). Уравнение (2.13), записанное в точке $x=d$, принимает вид

$$\varphi(d)p(d)y'(d)-y(d)=\psi(d) \tag{2.18}$$

и является граничным условием для уравнения (2.1), перенесенным из точки $x=c$ в точку $x=d$. Как и в случае 1, при $d>c$ описанную процедуру переноса краевого условия из точки c в точку d будем называть прямой дифференциальной прогонкой, при $d < c$ - обратной дифференциальной прогонкой для уравнения (2.1).

Объединяя случаи 1, 2, можно сказать, что при любых значениях $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ краевое условие (2.4) дифференциального уравнения (2.1) может быть перенесено в любую желаемую точку d и записано в общем виде как:

$$\alpha_3 y'(d) + \beta_3 y(d) = \gamma_3, \tag{2.19}$$

где в случае 1: $\alpha_3 = \overline{p}(d), \quad \beta_3 = -\alpha(d), \quad \gamma_3 = \beta(d),$ (2.20)

а в случае 2: $\alpha_3 = \varphi(d)p(d), \quad \beta_3 = -1, \quad \gamma_3 = \psi(d)$ (2.21)

При этом дифференциальное уравнение, с помощью которого это граничное условие переносится (уравнение (2.4) в случае 1 и уравнение (2.13) в случае 2), запишем в виде:

$$\overline{\alpha}_3(x) y'(x) + \overline{\beta}_3 y(x) = \overline{\gamma}_3(x), \tag{2.22}$$

где в случае 1: $\overline{\alpha_3}(x) = p(x)$, $\overline{\beta_3}(x)$, $\overline{\gamma}_3(x)$ совпадают с $-\alpha(x),\ \beta(x)$,

в случае 2: $\overline{\beta}_3(x) = -1, \quad \overline{\alpha}_3(x),\ \overline{\gamma}_3(x)$ равны $\varphi(x)p(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

2.2. Получение решения *y(x)* дифференциальной краевой задачи (2.1) – (2.3)

<u>Способ 1.</u> Перенесем методом прямой дифференциальной прогонки (см. п. 2.1) краевое условие (2.2) для точки $x = a$ в точку $x = b$

$$\alpha_3 y'(b) + \beta_3 y(b) = \gamma_3 \tag{2.23}$$

Если полученное условие (2.23) с точностью до постоянного множителя совпадает с краевым условием (2.3), то исходная краевая задача (2.1) – (2.3) имеет бесчисленное множество решений. В противном случае рассматриваем условие (2.23) и условие (2.3) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно значений $y(b),\ y'(b)$. Если эта система не совместна, то задача (2.1) – (2.3) не имеет решения. Если система уравнений (2.23), (2.3) совместна, то ее определитель $\Delta = \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3$ отличен от нуля и решение можно выписать как

$$y'(b) = \frac{(\gamma_3\beta_2 - \gamma_2\beta_3)}{\Delta} \tag{2.25}$$

$$y(b) = \frac{(\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3)}{\Delta} \tag{2.26}$$

Соотношения (2.25), (2.26) являются начальными условиями для линейного сопряженного уравнения (2.1) относительно неизвестной $y(x)$. Начальную задачу Коши (2.1), (2.25), (2.26) можно решать каким-либо известным численным методом, например, методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Способ 2. При определении $y(x)$ в некоторых случаях можно избежать решения задачи Коши для уравнения второго порядка (2.1).
Пусть, как и в способе 1, первое краевое условие (2.2) перенесено прямой дифференциальной прогонкой в точку $x=b$ и по формуле (2.26) определено значение $y(b)$. Тогда уравнение первого порядка (2.22) и начальное условие (2.26) есть задача Коши для функции $y(x)$

$$\begin{cases} \overline{\alpha}_3(x)y'(x)+\overline{\beta}_3(x)y(x)=\overline{\gamma}_3(x) & (2.22) \\ y(b)=\dfrac{(\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3)}{\Delta} & (2.26) \end{cases}$$

Однако, прямое интегрирование задачи (2.22), (2.26) целесообразно достаточно редко, поскольку функции, являющиеся коэффициентами уравнения (2.22) есть решения соответствующих задач Коши (см. п.2.1.) и задаются в виде наборов значений на дискретных сетках, причем каждый из коэффициентов может быть задан на своей сетке. Поэтому интегрирование задачи (2.22), (2.26) проводится тогда, когда предъявляемые требования к точности решения позволяют все задачи Коши в методе прямой дифференциальной прогонки интегрировать на одной сетке, либо когда для коэффициентов $\overline{\alpha}_3(x), \overline{\beta}_3(x), \overline{\gamma}_3(x)$ есть точное аналитическое решение.

Способ 3. Этот способ называется полной или классической дифференциальной прогонкой, т.к. он включает в себя и прямую, и обратную дифференциальные прогонки.

Прямая дифференциальная прогонка (см. п.2.1.) – это перенос краевого условия в точке $x=a$ на весь отрезок интегрирования, т.е. получение в каждой точке отрезка интегрирования соотношения (2.23)

$$\alpha_3(x)y'(x)+\beta_3(x)y(x)=\gamma_3(x) \qquad (2.23)$$

Обратная дифференциальная прогонка (см. п.2.1.) – это перенос справа налево краевого условия в точке $x=b$ на весь отрезок интегрирования и получение в каждой точке соотношения типа (2.23)

$$\alpha_4(x)y'(x)+\beta_4(x)y(x)=\gamma_4(x) \qquad (2.27)$$

Напомним, что любое решение задачи (2.1), (2.2), в том числе и решение, удовлетворяющее второму краевому условию, то есть решение задачи (2.1) – (2.3), удовлетворяет уравнению (2.23). Любое решение задачи (2.1), (2.3), в том числе и решение, удовлетворяющее первому краевому условию, то есть решение задачи (2.1) – (2.3), удовлетворяет уравнению (2.27). Следовательно, в каждой точке x отрезка интегрирования $[a;b]$ на уравнение (2.23), (2.27) можно смотреть, как на линейную алгебраическую систему двух уравнений относительно неизвестных значений $y(x)$, $y'(x)$. Если исходная задача (2.1) – (2.3) имеет единственное решение, то и система уравнений (2.23), (2.27) имеет единственное решение для любого $x \in [a;b]$.

$$y(x) = \frac{(\alpha_3(x)\gamma_4(x) - \alpha_4(x)\gamma_3(x))}{\overline{\Delta}} \tag{2.28}$$

$$y'(x) = \frac{(\beta_3(x)\gamma_4(x) - \beta_4(x)\gamma_3(x))}{\overline{\Delta}}, \tag{2.29}$$

где $\overline{\Delta} = \alpha_3(x)\gamma_4(x) - \alpha_4(x)\gamma_3(x) \neq 0$, $x \in [a;b]$.

3. Метод универсальной дифференциальной прогонки для линейных уравнений второго порядка

3.1. Построение решения линейной краевой задачи для уравнения второго порядка общего вида

Рассмотрим линейную краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x),\ x \in [a,b] \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1,\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0 \tag{3.2}$$

$$\alpha_2 y'(a) + \beta_2 y(a) = \gamma_2,\quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0 \tag{3.3}$$

Коэффициенты уравнения и граничных условий будем считать такими, чтобы рассматриваемая задача имела одно и только одно решение.

Покажем, что дифференциальное уравнение (3.1) можно представить в виде

$$u(x)y'(x) = v(x)y(x) + w(x), \tag{3.4}$$

где $u(x), v(x), w(x)$ - функции, подлежащие определению. Продифференцируем (3.4) и исключим вторую производную с помощью уравнения (3.1):

$$(u' - pu - v)y' = (v' - qu)y + (w' - fu)$$

Полученное уравнение удовлетворяется тождественно, если функции u, v, w - есть решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u' = pu + v \\ v' = qu \\ w' = fu \quad , x \in [a,b] \end{cases} \qquad (3.5)$$

Пусть $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ - решение задачи Коши (3.5) с начальными условиями

$$u(a) = \alpha_1,\ v(a) = -\beta_1,\ w(a) = \gamma_1. \qquad (3.6)$$

Тогда уравнение (3.4) определяет частное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничному условию (3.2) в точке a. Аналогично, если $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ есть решение задачи Коши для системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha' = p\alpha + \beta \\ \beta' = q\alpha \\ \gamma' = f\alpha, \quad x \in [a,b] \end{cases} \qquad (3.7)$$

с начальными условиями

$$\alpha(b) = \alpha_2\, ,\ \beta(b) = -\beta_2, \gamma(b) = \gamma_2, \qquad (3.8)$$

то уравнение

$$\alpha(x)y'(x) = \beta(x)y(x) + \gamma(x) \qquad (3.9)$$

определяет частное решение (3.1) с граничным условием (3.3) в точке b.

Потребуем, чтобы оба частных решения, представленные равенствами (3.4) и (3.9), совпадали во всех точках отрезка $[a,b]$. Тогда решение $y(x)$ краевой задачи (3.1)-(3.3) и его производная $y'(x)$ могут быть найдены из системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u(x)y'(x) - v(x)y(x) = w(x) \\ \alpha(x)y'(x) - \beta(x)y(x) = \gamma(x) \end{cases} \qquad (3.10)$$

В // доказано, что если решение краевой задачи (3.1) – (3.3) существует и единственно, то определитель системы (3.10) не может быть равен нулю на $[a,b]$.

Таким образом, метод универсальной дифференциальной прогонки для линейной краевой задачи (3.1) – (3.3) состоит в следующем:

а) каким-либо методом (численным или аналитическим) решается задача Коши (3.5), (3.6) для определения прогоночных коэффициентов $u(x), v(x), w(x)$;

б) каким-либо методом решается задача Коши (3.7), (3.8) для определения прогоночных коэффициентов $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$;

в) решается линейная алгебраическая система уравнений (3.10) для определения решения $y(x)$ и его производной $y'(x)$ с предварительной проверкой системы (3.10) на совместность и единственность решения.

Если прогоночные коэффициенты определяются аналитически (точно или приближенно), то из системы алгебраических уравнений (3.10) получают аналитическое (точное или приближенное) решение. Если прогоночные коэффициенты получают численным методом, как в предлагаемых ниже заданиях, и для интегрирования задач Коши (3.5) – (3.6) и (3.7) – (3.8) используют одну и ту же сетку узлов, то для каждого узла этой сетки выписывается система уравнений (3.10) и определяются y, y' в каждом узле сетки. Если сетка узлов интегрирования задач Коши (3.5) – (3.6) и (3.7) – (3.8) различна, то для получения решения из системы (3.10) необходима предварительная интерполяция прогоночных коэффициентов с тем, чтобы все они были известны на одной и той же сетке узлов.

3.2. Построение решения линейной самосопряженной краевой задачи для уравнения второго порядка

Рассмотрим самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a,b] \qquad (3.11)$$

с граничными условиями (3.2), (3.3). Будем полагать, что функции $p(x), q(x), f(x)$ и граничные условия (3.2), (3.3) удовлетворяют известным условиям самосопряженности краевой задачи (см. п.2).

Потребуем, чтобы уравнение

$$u(x)p(x)y' = v(x)y + w(x) \qquad (3.12)$$

Было эквивалентно (3.11). Для этого, продифференцировав уравнение (3.12) и исключив слагаемое $(py')'$ с помощью (3.11), получим

$$(pu' - v)y' = (v' - qu)y + (w' - fu) \ . \qquad (3.13)$$

Далее, как и в п.3.1 нетрудно показать, что решение $y(x)$ краевой задачи (3.11), (3.2), (3.3) и его производную $y'(x)$ можно получить, решая линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} u(x)p(x)y'(x)-v(x)y(x)=w(x) \\ \alpha(x)p(x)y'(x)-\beta(x)y(x)=\gamma(x), \end{cases} \tag{3.14}$$

где прогоночные коэффициенты $u(x), v(x), w(x)$ определяются из задачи Коши для линейной однородной системы

$$\begin{cases} pu'=v \\ v'=qu \\ w'=fu \\ u(a)=\alpha_1 / p(a),\ v(a)=-\beta_1,\ w(a)=\gamma_1, \end{cases} \tag{3.15}$$

а коэффициенты $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ - из задачи Коши

$$\begin{cases} p\alpha'=\beta \\ \beta'=q\alpha \\ \gamma'=f\alpha \\ \alpha(b)=\alpha_2 / p(b),\ \beta(b)=-\beta_2,\ w(b)=\gamma_2 \end{cases} \tag{3.16}$$

В /3/ показано, что в случае существования единственного решения самосопряженной краевой задачи (3.11), (3.2), (3.3) линейная система уравнений (3.14) относительно $y(x), y'(x)$ имеет единственное решение.

Таким образом, метод универсальной дифференциальной прогонки для линейной самосопряженной задачи (3.11), (3.2), (3.3) сводится к решению двух линейных однородных задач Коши (3.15), (3.16) относительно прогоночных коэффициентов с последующим решением линейной алгебраической системы уравнений (3.14).

4. Индивидуальные задания по численным методам решения линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

4.1. О дифференциальных уравнениях, граничных условиях, методах Рунге-Кутта и способах оценки точности решения

В предлагаемых ниже заданиях предлагается для решения либо самосопряженное уравнение

$$(p(x)y'(x))'=q(x)y(x)+f(x), \tag{4.1}$$

либо полное линейное уравнение

$$y''(x)+p(x)y'(x)=q(x)y(x)+f(x) \qquad (4.2)$$

Для уравнения (4.1) метод дифференциальной прогонки описан в п.2 настоящего пособия, метод универсальной дифференциальной прогонки – в п.3.1. Для полного линейного уравнения (4.2) метод универсальной дифференциальной прогонки рассмотрен в п.3.2.

В индивидуальных заданиях граничные условия задаются в одном из трех следующих видах

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=\gamma_1, \quad \alpha_1^2+\beta_1^2>0\\ y(b)=\gamma_2\end{cases} \qquad (4.3)$$

$$\begin{cases}\alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=\gamma_2, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2>0\\ y(a)=\gamma_1\end{cases} \qquad (4.4)$$

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\beta_1 y(a)=\gamma_1, \quad \alpha_1^2+\beta_1^2>0\\ \alpha_2 y'(b)+\beta_2 y(b)=\gamma_2, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2>0\end{cases} \qquad (4.5)$$

Все задачи Коши решаются методами Рунге-Кутта, причем во всех заданиях указаны конкретные методы, о которых см. /4/, разделы 1, 2. Там же необходимо посмотреть раздел 1.7. (решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами типа Рунге-Кутта).

В задании 4 требуется решить задачу Коши для прогоночных коэффициентов с некоторой точностью ε, практические способы оценки погрешностей см. в /4/, раздел 4. Подробное описание алгоритмов решения задачи Коши можно найти в указаниях к индивидуальным заданиям /5/. Если решение задачи Коши $y(x)$ определяется по значениям прогоночных коэффициентов прямой и обратной дифференциальных прогонок, то нетрудно оценить относительную погрешность $y(x)$, если учесть, что значение $y(x)$ и $y'(x)$ определяются из линейной системы уравнений размерности 2, у которой матрица и правые части составлены из приближенных значений прогоночных коэффициентов. Об оценки относительной погрешности решений систем линейных алгебраических уравнений, выражаемой через меру обусловленности матрицы и относительные погрешности задания матрицы и правой части системы смотри /6/. Напомним, что для невырожденной матрицы размерности 2x2 мера обусловленности равна $\sigma+\sqrt{\sigma^2-1}$, где значение σ

равно сумме квадратов элементов матрицы, деленной на удвоенную абсолютную величину определителя /6/.

4.2. Индивидуальные задания

Задание 1. Решение краевой задачи для линейного самосопряженного уравнения второго порядка методом дифференциальной прогонки.

Назначение.

Интегрирование на заданной сетке узлов уравнения (4.1) с линейными краевыми условиями без оценки точности.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

p, q, f - имена процедур-функций с одним параметром, которые должны быть описаны в основной программе (функции p(x), q(x), f(x) вычисляют значения коэффициентов уравнения (4.1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - код завершения программы, выходная переменная, принимающая следующие значения:

- Icod=0 – нет ошибок, решение получено;
- Icod=1 – решение не получено, задача имеет бесконечно много решений;
- Icod=2 – решение не получено, задача не имеет решения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения коэффициентов граничных условий.
2. Вторая строка – значения левого и правого концов отрезка интегрирования, количество точек в заданной сетке узлов.
3. Строки с третьей и далее – номер узла, значение аргумента x в узле.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки содержат номер точки, ее x - координату, значение вычисленного решения в этой точке.

Метод.

Метод получения решения (способ 1, способ 3) описан в п.2.2. Предполагается, что все численно решаемые в рамках этого задания задачи Коши интегрируются на сетках, совпадающих с заданной входной сеткой узлов. Никакого анализа точности полученных результатов не предполагается.

Замечание по программированию.Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка на заданной сетке узлов.

Варианты Задания 1.

Вариант	Граничное условие (п.4.1)	Порядок метода Рунге-Кутта	Метод Рунге-Кутта /4/	Способ решения (п.2.2)	Направление переноса граничного условия
1	(4.3)	2	(20)	Способ 1	→ |
2	(4.3)	3	(30)	Способ 1	→ |
3	(4.3)	4	(32)	Способ 1	| ←
4	(4.4)	2	(22)	Способ 1	| ←
5	(4.4)	3	(31)	Способ 1	| ←
6	(4.4)	4	(33)	Способ 1	→ |
7	(4.5)	2	(23)	Способ 1	→ |
8	(4.5)	3	(31)	Способ 1	→ |
9	(4.5)	4	(34)	Способ 1	→ |
10	(4.5)	2	(20)	Способ 1	| ←
11	(4.5)	3	(30)	Способ 1	| ←
12	(4.5)	4	(32)	Способ 1	| ←
13	(4.3)	2	(20)	Способ 3	→ ←
14	(4.3)	3	(30)	Способ 3	→ ←
15	(4.3)	4	(32)	Способ 3	→ ←
16	(4.4)	2	(22)	Способ 3	→ ←
17	(4.4)	3	(31)	Способ 3	→ ←
18	(4.4)	4	(34)	Способ 3	→ ←
19	(4.5)	2	(23)	Способ 3	→ ←
20	(4.5)	3	(31)	Способ 3	→ ←
21	(4.5)	4	(34)	Способ 3	→ ←
22	(4.3)	5	(127)	Способ 1	→ |
23	(4.4)	5	(127)	Способ 1	| ←
24	(4.5)	5	(127)	Способ 1	→ |
25	(4.3)	5	(127)	Способ 3	→ ←
26	(4.4)	5	(127)	Способ 3	→ ←
27	(4.5)	5	(127)	Способ 3	→ ←

Пояснение к обозначениям для направления переноса граничных условий:

→ - граничное условие переносится с левого конца на правый,

← - граничное условие переносится с правого конца на левый,

| - граничное условие не переносится.

В столбике «Направление переноса граничных условий» стоят два значка, первый относится к граничному условию на левом конце, второй – к граничному условию на правом конце интервала интегрирования.

Задание 2. Решение линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом универсальной дифференциальной прогонки.

Назначение. Интегрирование на заданной сетке узлов уравнения

$$y''(x)+p(x)y'(x)=q(x)y(x)+f(x)$$

с линейными краевыми условиями (3.2), (3.3) без оценки точности.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

p, q, f - имена процедур-функций с одним параметром, которые должны быть описаны в основной программе (функции p(x), q(x), f(x) вычисляют значения коэффициентов уравнения (4.2));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - код завершения программы, выходная переменная, принимающая следующие значения:

- Icod=0 – нет ошибок, решение получено;
- Icod=1 – решение не получено, задача имеет бесконечно много решений;
- Icod=2 – решение не получено, задача не имеет решения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения коэффициентов граничных условий.
2. Вторая строка – значения левого и правого концов отрезка интегрирования, количество точек в заданной сетке узлов.
3. Строки с третьей и далее – номер узла, значение аргумента x в узле.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки содержат номер точки, ее x - координату, значение вычисленного решения и значение производной решения в этой точке.

Метод получения решения описан в п.3.1. Предполагается, что все численно решаемые в рамках этого задания задачи Коши интегрируются на сетках, совпадающих с заданной входной сеткой узлов. Никакого анализа точности полученных результатов не предполагается.

Замечание по программированию.

Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором задачи Коши для системы трех однородных уравнений первого порядка на заданной сетке узлов.

Варианты Задания 2.

Вариант	Порядок метода Рунге-Кутта	Метод Рунге-Кутта из /4/
1	2	(20)
2	2	(22)
3	2	(23)
4	3	(30)
5	3	(31)
6	3	(32)
7	4	(33)
8	4	(34)
9	4	(129)
10	5	(127)

Задание 3. Решение линейной краевой задачи для самосопряженного уравнения второго порядка методом универсальной дифференциальной прогонки.

Назначение. Интегрирование на заданной сетке узлов уравнения

$$(p(x)y'(x))' = q(x)y(x) + f(x)$$

с линейными краевыми условиями (3.2), (3.3) без оценки точности.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

p, q, f - имена процедур-функций с одним параметром, которые должны быть описаны в основной программе (функции p(x), q(x), f(x) вычисляют значения коэффициентов уравнения (4.1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - код завершения программы, выходная переменная, принимающая следующие значения:

- Icod=0 – нет ошибок, решение получено;
- Icod=1 – решение не получено, задача имеет бесконечно много решений;
- Icod=2 – решение не получено, задача не имеет решения.

<u>Замечание</u> о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения коэффициентов граничных условий.
2. Вторая строка – значения левого и правого концов отрезка интегрирования, количество точек в заданной сетке узлов.
3. Строки с третьей и далее – номер узла, значение аргумента x в узле.

<u>Замечание</u> о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки содержат номер точки, ее x - координату, значение вычисленного решения и значение производной решения в этой точке.

<u>Метод</u> получения решения описан в п.3.2. Предполагается, что все численно решаемые в рамках этого задания задачи Коши интегрируются на сетках, совпадающих с заданной входной сеткой узлов. Никакого анализа точности полученных результатов не предполагается.

<u>Замечание</u> по программированию.

Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором задачи Коши для системы трех однородных уравнений первого порядка на заданной сетке узлов.

Варианты Задания 3.

Вариант	Порядок метода Рунге-Кутта	Метод Рунге-Кутта из /4/
1	2	(20)
2	2	(22)
3	2	(23)
4	3	(30)
5	3	(31)
6	3	(32)
7	4	(33)
8	4	(34)
9	4	(129)
10	5	(127)

Задание 4. Решение краевой задачи для линейного самосопряженного уравнения второго порядка методом дифференциальной прогонки с апостериорной оценкой точности в контрольных точках.

<u>Назначение.</u> Вычисление решения уравнения

$$(p(x)y'(x))' = q(x)y(x) + f(x)$$

с линейными краевыми условиями в заданных контрольных точках с апостериорной оценкой относительной погрешности решения.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

p, q, f - имена процедур-функций с одним параметром, которые должны быть описаны в основной программе (функции p(x), q(x), f(x) вычисляют значения коэффициентов уравнения (4.1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - код завершения программы, выходная переменная, принимающая следующие значения:

- Icod=0 – нет ошибок, решение получено;
- Icod=1 – решение не получено, задача имеет бесконечно много решений;
- Icod=2 – решение не получено, задача не имеет решения;
- Icod= - L – в точке с номером L решение не может быть получено из-за невозможности применения двухстороннего метода Рунге-Кутта.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения коэффициентов граничных условий.
2. Вторая строка – значения левого и правого концов отрезка интегрирования (a,b), наибольшая допустимая величина шага интегрирования, количество контрольных точек.
3. Строки с третьей и далее – номер узла, значение аргумента x в узле.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки содержат номер точки, ее x - координату, значение вычисленного решения, погрешность решения в этой точке.

Метод.

Метод получения численного решения краевой задачи (способ 3) описан в п.2.2. Особенностью рассматриваемого задания является то, что значения прогоночных коэффициентов $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3,\alpha_4,\beta_4,\gamma_4$ в контрольных точках получают одновременно с оценкой их точности.

Апостериорная оценка абсолютной погрешности прогоночных коэффициентов в контрольных точках достигается путем реализации алгоритма, подробно изложенного в задании 6 /5/.

Таким образом, в каждой контрольной точке помимо системы линейных уравнений (2.23) – (2.24) относительно $y(x)$ и $y'(x)$ имеется информация о погрешности коэффициентов этой линейной системы и ее правой части. Поэтому можно оценить относительную погрешность решения линейной алгебраической системы уравнений, т.е относительную погрешность $y(x)$ и $y'(x)$ в каждой контрольной точке.

Об оценке относительной погрешности решения линейной алгебраической системы уравнений и вычислении меры обусловленности матрицы см. в п.4.1. настоящего пособия или /6/.

Замечание по программированию.

Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка с апостериорной оценкой погрешности в контрольных точках.

Варианты Задания 4.

Вариант	Граничные условия	Метод интегрирования задачи Коши (задание 7 из /5/)
1	(4.3)	1
2	(4.3)	2
3	(4.3)	3
4	(4.3)	4
5	(4.3)	5
6	(4.3)	6
7	(4.3)	7
8	(4.3)	8
9	(4.4)	1
10	(4.4)	2
11	(4.4)	3
12	(4.4)	4
13	(4.4)	5
14	(4.4)	6
15	(4.4)	7
16	(4.4)	8
17	(4.5)	1
18	(4.5)	2
19	(4.5)	3
20	(4.5)	4
21	(4.5)	5
22	(4.5)	6
23	(4.5)	7
24	(4.5)	8

<u>Замечание.</u> В колонке «Метод интегрирования задачи Коши» стоит номер варианта из Задания 7 /5/.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц.На. – М.: Мир, 1982. – 295 с.

2. Бабушка И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И.Бабушка, Э.Витасек, М.Прагер.- М.: Мир, 1969. – 368 с.

3.Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып 75). Новосибирск, 1978. С.И.Фадеев. О численном решении линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом дифференциальной прогонки. С.80-95.

4. Корзунина В.В. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутта / В.В.Корзунина, З.А.Шабунина. – Воронеж : ВГУ, 2002. – Ч.1. – 53 с.

5. Корзунина В.В. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутта / В.В.Корзунина, З.А.Шабунина. – Воронеж : ВГУ, 2005. – Ч.2. – 31 с.

6. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. – М.: Мир, 1969. – 167 с.

Составители: Корзунина Вера Васильевна, Шабунина Зоя Александровна, Шаруда Дмитрий Владимирович.
Редактор Тихомирова О.А.