Дисциплина: Численные методы
Лабораторное задание №6

Отчет

Тема: Метод дифференциальной прогонки решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Выполнил:
студент 3 курса 61 группы
Вафин А.Р.

Проверила:
старший преподаватель
Фролова О.А.

1. Постановка задачи

Решение линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом универсальной дифференциальной прогонки.

Интегрирование на заданной сетке узлов уравнения

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(y) = f(x)$$

с линейными краевыми условиями без оценки точности.

2. Метод решения

Рассмотрим линейную краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b]$$

с граничными условиями

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1, \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$$

$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2, \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$$

Коэффициенты уравнения и граничных условий будем считать такими, чтобы рассматриваемая задача имела одно и только одно решение.

Покажем, что дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$u(x)y'(x) = v(x)y(x) + w(x)$$

где $u(x), v(x), w(x)$ – функции, подлежащие определению.

Продифференцируем уравнение выше и исключим вторую производную с помощью изначального уравнения:

$$(u' - pu - v)y' = (v' - qu)y + (w' - fu)$$

Полученное уравнение удовлетворяется тождественно, если функции u, v, w – есть решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u' = pu + v \\ v' = qu \\ w' = fu, x \in [a, b] \end{cases}$$

Пусть $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ – решение задачи Коши с начальными условиями $u(a) = \alpha_1, v(a) = -\beta_1, w(a) = \gamma_1$. Тогда полученное уравнение определяет частное решение изначального уравнения, удовлетворяющее граничному условию в точке a. Аналогично, если $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ есть решение задачи Коши для системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha' = p\alpha + \beta \\ \beta' = q\alpha \\ \gamma' = f\alpha, x \in [a, b] \end{cases}$$

с начальными условиями $\alpha(b) = \alpha_2, \beta(b) = -\beta_2, \gamma(b) = \gamma_2$, то уравнение

$$\alpha(x)y'(x) = \beta(x)y(x) + \gamma(x)$$

определяет частное решение изначального уравнения с граничным условием в точке b.

Потребуем, чтобы оба полученных частных решения совпадали во всех точках отрезка $[a, b]$. Тогда решение $y(x)$ краевой задачи и его производная $y'(x)$ могут быть найдены из системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u(x)y'(x) - v(x)y(x) = w(x) \\ \alpha(x)y'(x) - \beta(x)y(x) = \gamma(x) \end{cases}$$

Таким образом, метод универсальной дифференциальной прогонки для линейной краевой задачи состоит в следующем:

1) Для каждого узла сетки на отрезке $[a, b]$ с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка решается задача Коши для определения прогоночных коэффициентов $u(x), v(x), w(x)$;
2) Для каждого узла сетки на отрезке $[a, b]$ с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка решается задача Коши для определения прогоночных коэффициентов $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$;
3) Для каждого узла сетки на отрезке $[a, b]$ решается линейная алгебраическая система уравнений для определения решения $y(x)$ и его производной $y'(x)$.

Используемый метод Рунге-Кутта четвертого порядка (формула трех восьмых):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{336}(14K_1 + 35K_4 + 162K_5 + 125K_6)$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{4}K_1 + \frac{1}{4}K_2\right)$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 - K_2 + 2K_3)$$

$$K_5 = hf(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{7}{27}K_1 + \frac{10}{27}K_2 + \frac{1}{27}K_4)$$

$$K_6 = hf(x_0 + \frac{h}{5}, y_0 + (\frac{1}{625})(28K_1 - 125K_2 + 546K_3 + 54K_4 - 378K_5))$$

3. Основные процедуры

data – имя файла исходных данных

p, q, f – имена процедур-функций с одним параметром, которые должны быть описаны в основной программе (функции p(x), q(x), f(x) вычисляют значения коэффициентов p, q, f)

rez – имя файла выходных данных

Структура файла исходных данных:

1) Первая строка – значения коэффициентов граничных условий $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$
2) Вторая строка – значения левого и правого концов отрезка интегрирования $[a, b]$, количество точек в заданной сетке узлов.
3) Строки с третьей и далее – номер узла, значение аргумента X в узле.

Структура выходной информации в консоли:

Первая и последующие строки содержат номер точки, ее X-координату, значение вычисленного решения и значение производной решения в этой точке.

4. Результаты вычислительных экспериментов

1. Рассматривается линейная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' - y' = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 4,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \gamma_2 = 6$$

на отрезке $[0.693147181;\ 1.098612289]$ с 11 точками:

```
1 0.693147181
2 0.741937345
3 0.78845736
4 0.832909123
5 0.875468737
6 0.916290732
7 0.955511445
8 0.993251773
9 1.029619417
10 1.064710737
11 1.098612289
```

Результат:

```
1) X: 0.693147; Y: 2; Y': 2
2) X: 0.741937; Y: 2.1; Y': 2.1
3) X: 0.788457; Y: 2.2; Y': 2.2
4) X: 0.832909; Y: 2.3; Y': 2.3
5) X: 0.875469; Y: 2.4; Y': 2.4
6) X: 0.916291; Y: 2.5; Y': 2.5
7) X: 0.955511; Y: 2.6; Y': 2.6
8) X: 0.993252; Y: 2.7; Y': 2.7
9) X: 1.02962; Y: 2.8; Y': 2.8
10) X: 1.06471; Y: 2.9; Y': 2.9
11) X: 1.09861; Y: 3; Y': 3
```

2. Рассматривается линейная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' = 6x,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 4,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \gamma_2 = 20$

на отрезке $[1;\ 2]$ с 11 точками:

```
1 1
2 1.1
3 1.2
4 1.3
5 1.4
6 1.5
7 1.6
8 1.7
9 1.8
10 1.9
11 2
```

Результат:

```
1) X: 1; Y: 1; Y': 3
2) X: 1.1; Y: 1.331; Y': 3.63
3) X: 1.2; Y: 1.728; Y': 4.32
4) X: 1.3; Y: 2.197; Y': 5.07
5) X: 1.4; Y: 2.744; Y': 5.88
6) X: 1.5; Y: 3.375; Y': 6.75
7) X: 1.6; Y: 4.096; Y': 7.68
8) X: 1.7; Y: 4.913; Y': 8.67
9) X: 1.8; Y: 5.832; Y': 9.72
10) X: 1.9; Y: 6.859; Y': 10.83
11) X: 2; Y: 8; Y': 12
```