ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра вычислительной математики

Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методами типа Рунге-Кутта
Часть 2. Индивидуальные задания

Учебно-методическое пособие

Специальность 010501 (010200)

Воронеж 2005

Утверждено научно-методическим Советом факультета прикладной
математики, информатики и механики 12.12.05., протокол №4.

Составители: Корзунина В.В., Шабунина З.А.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре вычислительной математики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 и 4 курсов дневного и вечернего отделений.

Данное учебно-методическое пособие является продолжением работы /1/ и содержит индивидуальные задания для выполнения лабораторных работ по курсу «Численные методы». Каждое задание содержит ссылки на соответствующие разделы /1/.

Задание 1.

Решение задачи Коши с апостериорной оценкой глобальной погрешности, максимальное допустимое значение которой задано.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), x \in [A,B] \qquad (1)$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка C совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

- data – имя файла исходных данных;
- f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));
- rez – имя файла выходных данных;
- Icod – код завершения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, y_c;
2. Вторая строка – начальное значение H шага

интегрирования; максимальное допустимое значение ε - абсолютной погрешности в конечной точке интегрирования.

Замечание о структуре выходного файла.

1. Первая строка – вычисленное значение εr абсолютной погрешности в конечной точке интегрирования; шаг интегрирования, с которым получена погрешность εr; значение Icod – индикатор ошибки, принимающий следующие значения:
   - Icod = 0 – завершение в соответствии с назначением (εr £ ε);
   - Icod = 1 – процесс решения прекращен, т.к. с уменьшением шага погрешность не уменьшается;
   - Icod = 2 – процесс решения прекращен, т.к. значение шага стало недопустимо малым.
2. Вторая строка – X-координата конца отрезка интегрирования; полученное в конце отрезка интегрирования значение решения.

Метод (см. раздел 4.1. Оценка глобальной погрешности по правилу Рунге)

1. Определяется значение шага H_1 – ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования значение H_1 укладывалось кратное число раз.

2. С постоянным шагом H_1 и $H_1/2$ методом Рунге – Кутта, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, от начальной до конечной точки решается задача Коши (1). Два полученных приближенных решения в конечной точке интервала интегрирования позволяют оценить глобальную погрешность решения по правилу Рунге. Если полученная погрешность меньше или равна максимальной допустимой погрешности e, то процесс решения прекращается. В противном случае решение необходимо уточнить.
3. Для уточнения решения строится итерационный процесс; каждая итерация – это повторение п.п. 1,2 настоящего описания метода с новым шагом интегрирования, определенным по формуле (96). Итерационный процесс прекращается в следующих случаях:
   - требуемая точность достигнута;
   - погрешность не уменьшилась;
   - шаг интегрирования стал недопустимо малым

   (см. Замечание 5 раздела 5.1 Автоматический выбор шага интегрирования задачи Коши).

   Практика показывает, что обычно бывает достаточно сделать 2 – 3 итерации.

Замечания по программированию:

1. Занимать машинную память для хранения значений решения внутри интервала недопустимо.
2. Минимальный допустимый постоянный шаг интегрирования H_{min} на отрезке [A,B] определяется из неравенства

$$|H_{min}| \le macheps * \max(|A|, |B|, \sigma),$$

где σ – минимальное положительное число, представляемое на данной ЭВМ, macheps – значение машинного эпсилон. Параметр σ, вообще говоря, должен определяться программным образом, но допускается присвоение ему некоторого разумного значения. О вычислении машинного эпсилон см. Замечание 5 раздела 5.1

Варианты задания 1.

Вариант	Метод Рунге – Кутта /1/
1	Метод четвертого порядка (32)
2	Метод четвертого порядка (33)
3	Метод четвертого порядка (34)
4	Метод третьего порядка (30)
5	Метод третьего порядка (31)

Задание 2.

Решение задачи Коши с апостериорной оценкой глобальной погрешности, максимальное допустимое значение которой задано.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x \in [A,B]$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка C совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez – имя файла выходных данных;

Icod – код завершения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, $y_{c;}$
2. Вторая строка – начальное значение H шага интегрирования; максимально допустимое значение ε абсолютной погрешности в конечной точке интегрирования.

Замечание о структуре выходного файла.

1. Первая строка – вычисленное значение εr абсолютной погрешности в конечной точке интегрирования; шаг интегрирования, с которым получена погрешность εr; значение Icod – индикатор ошибки, принимающий следующие значения:
   - Icod = 0 – завершение в соответствии с назначением (εr £ ε);
   - Icod = 1 – процесс решения прекращен, т.к. с уменьшением шага погрешность не уменьшается;
   - Icod = 2 – процесс решения прекращен, т.к. значение шага стало недопустимо малым;
   - Icod = 3 – процесс решения прекращен, т.к. дальнейшее применение метода невозможно (в случае, когда реализуется расчетная схема 2 или 3);
   - Icod = 4 – решение не получено, двухсторонний метод Рунге – Кутта с данным начальным шагом неприменим (в случае, когда реализуются расчетные схемы 2 или 3).
2. Вторая строка – X–координата конца отрезка интегрирования; полученное в конце отрезка интегрирования значение решения.

   Если Icod = 4, то выходной файл во второй строке содержит только X – координату конца отрезка интегрирования.

Метод (см. раздел 2. Двухсторонние методы Рунге – Кутта; см. раздел 4.1. Оценка глобальной погрешности по правилу Рунге).

1. Определяется значение шага H_1 – ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования значение H_1 укладывалось кратное число раз.
2. С постоянным шагом H_1, двухсторонним методом Рунге – Кутта, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, от начальной до конечной точки решается задача Коши (1). Если реализуется схема 2 или 3, то возможно, что процесс решения будет прекращен из-за невозможности применения метода (Icod = 4). Если в конечной точке получены два приближенных решения, и абсолютная величина их разности меньше или равна максимальной допустимой погрешности ε, то их среднее арифметическое принимается за искомое решение. В противном случае решение необходимо уточнить.
3. Для уточнения решения строится итерационный процесс; каждая итерация – это повторение п.п. 1, 2 настоящего описания метода с новым шагом интегрирования, определенным по формуле (97). Итерационный процесс прекращается в следующих случаях:
   - требуемая точность достигнута;
   - погрешность не уменьшилась;
   - шаг интегрирования стал недопустимо малым (см. Замечание 5 раздела 5.1. Автоматический выбор шага интегрирования);
   - дальнейшее применение двухстороннего метода Рунге – Кутта невозможно (см. раздел 2.3. Организация счета в двусторонних методах типа Рунге – Кутта).

   Практика показывает, что обычно бывает достаточно 2 – 3 итераций. Если итерационный процесс останавливается по причине невозможности дальнейшего применения двухстороннего метода Рунге – Кутта, то за решение принимается решение с предыдущей итерации (Icod = 3).

Замечание по программированию.

1. Занимать машинную память для хранения значений решения внутри интервала недопустимо.
2. Минимальный допустимый шаг интегрирования H_{min} на отрезке [A,B] определяется из неравенства

$$|H_{min}| \le macheps * \max(|A|, |B|, \sigma),$$

где σ – минимальное положительное число, представляемое на данной ЭВМ, $macheps$ – значение машинного эпсилон. Параметр σ, вообще говоря, должен определяться программным образом, но допускается присвоение ему некоторого разумного значения (о вычислении машинного эпсилон см. Замечание 5 раздела 5.1).

Варианты Задания 2:

Вариант	Двухсторонний метод Рунге – Кутта /1/	Организация счета /1/
1	Двучленные формулы (50)	Схема 2
2	Двучленные формулы (51)	Схема 2
3	Двучленные формулы (52)	Схема 3
4	Двучленные формулы (53)	Схема 3
5	Трехчленные формулы (57)	Схема 1
6	Трехчленные формулы (58)	Схема 1
7	Трехчленные формулы (59)	Схема 1
8	Трехчленные формулы (60)	Схема 1

Задание 3.

Решение задачи Коши методом Эйлера с экстраполяционным повышением порядка точности по Ричардсону.

Назначение.

Интегрирование с постоянным шагом обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \qquad x \in [A,B] \qquad (1)$$

с начальным условием $y(c)=y_c$,

где точка C совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez – имя файла выходных данных;

Icod – код завершения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, y_c;
2. Вторая строка – число точек M, в которых должно быть получено решение;
3. Третья строка – r (порядок точности решения), $N_1,N_2,\ldots,N_r$ (см. раздел 3.1.)

Замечание о структуре выходного файла.

Первые и последующие строки содержат значение X – координаты точки интегрирования и значение вычисленного решения в этой точке.

Метод (см. раздел 3. Повышение точности экстраполяционным методом Ричардсона.)

1. Решается система r линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$.

2. Методом Эйлера (9) r раз решается исходная задача Коши (1) с r различными шагами $\tau_k = 1/(N_k*M)$, k = 1, 2, …, r.
3. Из полученных решений u^{τ_k}, k = 1, 2, …, r строится экстраполированное по Ричардсону решение

$$U^H = \sum_{k=1}^{r} g_k u^{t_k}$$

на сетке с постоянным шагом (B-A)/M.

Замечания по программированию.

1. Сохранять в машинной памяти вычисленные значения решений разрешается только в узлах сетки с шагом (B-A)/M.
2. Желательно не хранить значения решений u^{τ_k}, а при реализации на ЭВМ объединить п.2 и п.3 Метода.

Варианты Задания 3.

Вариант	Порядок метода r
1	3
2	4
3	5
4	6

Задание 4.

Решение задачи Коши методом Эйлера с экстраполяционным повышением порядка точности по Ричардсону с апостериорной оценкой погрешности.

Назначение.

Интегрирование с постоянным шагом обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \qquad x \in [A,B] \qquad (1)$$

с начальным условием $y(c)=y_c$, где точка с совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez – имя файла выходных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, y_c.
2. Вторая строка – число точек M, в которых должно быть получено решение.

3. Третья строка – r (порядок точности решения, N_1, N_2, …, N_r, N_{r+1}(см. раздел 3.1 и Замечание об оценке погрешности)).

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки содержат по 3 числа: x-координата точки интегрирования, вычисленное решение в этой точке, значение погрешности. При этом x-координаты точек интегрирования по строкам расположены в порядке возрастания.

Метод (см. Раздел 3.1. Повышение точности экстраполяционным методом Ричардсона и Замечание об оценке погрешности).

1. Решаются две системы (64) линейных алгебраических уравнений – одна размерности $\boldsymbol{r}$ для определения коэффициентов $g_1, g \;, \ldots, g_r$, другая размерности $(r+1)$ для определения коэффициентов $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots \bar{g}_{r+1}$.
2. Методом Эйлера $(r+1)$ раз решается исходная задача Коши на равномерных сетках с шагом $t^k, k = 1,2,\ldots,r+1$.
3. Из полученных решений $u^{t_k}, k = 1,2,\ldots r+1$ экстраполяцией по Ричардсону на сетке с шагом $H = 1/M$ определяются два решения U^H порядка r и $\overline{U^H}$ порядка $(r+1)$. По решению U^H вычисляется главный член погрешности решения U^H.

Замечания по программированию.

1. Сохранять в машинной памяти вычисленные значения решений разрешается только в узлах сетки с шагом (B-A)/M.
2. Желательно не хранить значения решений u^{τ_k}, а при реализации на ЭВМ объединить п.2 и п.3 Метода

Варианты Задания 4

Вариант	Порядок метода r
1	3
2	4
3	5
4	6

Задание 5

Построение непрерывного приближенного решения задачи Коши заданного порядка точности r.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x \in [A,B] \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка с совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez1 - имя файла выходных данных;

rez2 - имя файла выходных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, y_c;
2. Вторая строка – число точек M, в которых должно быть получены решения;
3. Третья строка – r (порядок точности решения), $N_1, N_2, \ldots, N_r$ (см. раздел 3.1)

Замечание о структуре выходного файла rez1.

В файле rez1 расположена таблица значений решения с шагом $(B-A)/M$. Первые и последующие строки содержат значение x–координаты точки интегрирования и значение вычисленного решения в этой точке.

Замечание о структуре выходного файла rez2.

Первая и последующие строки содержат следующие значения: номер элементарного отрезка сетки с постоянным шагом $(B-A)/M$, x–координата начала отрезка, коэффициенты аппроксимирующего решения интерполяционного полинома степени (r-1) на соответствующем элементарном отрезке

Метод.

1. Решается система r линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$.
2. Методом Эйлера (9) R раз решается исходная задача Коши (1) с R различными шагами $\tau_k = 1/(N_k{*}M)$, k = 1, 2, …, r.
3. Из полученных решений u^{τ_k}, k = 1, 2, …, r строится экстраполированное по Ричардсону решение

$$U^H = \sum_{k=1}^{r} g_k u^{t_k}$$

на сетке с постоянным шагом (B-A)/M.

4. Для каждого элементарного отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ сетки $\overline{w}_t$ выбираются дополнительно к ним ещё r-2 ближайших узла сетки $\overline{w}_t$, и по этим r узлам строится интерполяционный полином вида

$a_0^{(i)}+a_1^{(i)}(t-t_i)+a_2^{(i)}(t-t_i)^2+\ldots+a_{r-1}^{(i)}(t-t_i)^{r-1}$. Способ определения коэффициентов $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{r-1}^{(i)}$ студент выбирает сам.

Замечания по программированию.

1. Сохранять в машинной памяти вычисленные значения решений разрешается только в узлах сетки с шагом (B-A)/M.
2. Желательно не хранить значения решений u^{τ_k}**,** а при реализации на ЭВМ объединить п.2 и п.3 Метода.

Варианты Задания 5

Вариант	Порядок метода r
1	4
2	5
3	6
4	7

Задание 6

Построение непрерывного приближенного решения задачи Коши заданного порядка точности.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x\in[A,B] \quad (1)$$

с начальным условием $y(c)=y_c$, где точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez1 - имя файла выходных данных;

rez2 - имя файла выходных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, y_c, M (число точек, в которых должно быть получено откорректированное решение).

Замечание о структуре выходного файла rez1.

В файле rez1 расположена таблица значений решения с шагом $(B-A)/M$. Первые и последующие строки содержат значение x–координаты точки интегрирования и значение вычисленного решения в этой точке.

Замечание о структуре выходного файла rez2.

Первая и последующие строки содержат следующие значения:

номер элементарного отрезка сетки с постоянным шагом $(B-A)/(rM)$,

x – координата начала отрезка, коэффициенты аппроксимирующего решение интерполяционного полинома степени $(r-1)$ на соответствующем элементарном отрезке.

Метод (см. раздел 3.2 и Замечание о коэффициентах интерполяционных полиномов откорректированного решения).

1. Решается система r линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$.
2. Методом Эйлера (9) r раз решается исходная задача Коши с r различными шагами $t_k = 1/(kM), k = 1,2,\dots,r$.
3. Каждому численному решению u^{t_k} на сетке $\overline{w}_{t_k}$ ставится в соответствие непрерывное приближенное решение $u^{t_k}(t)$. Для этого для каждого элементарного отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ сетки $\overline{w}_{t_k}$ выбираются дополнительно к узлам t_i, t_{i+1} ещё $r-2$ ближайших узла, и по значениям в этих r узлах определяется полином степени $r-1$ вида, $a_0^{(ik)} + a_1^{(ik)}t + \dots + a_{r-1}^{(ik)}t^{r-1}$, который принимается за непрерывное приближенное решение $u^{t_k}(t)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ сетки $\overline{w}_{t_k}$.
4. С использованием непрерывных интерполянтов $u^{tk}(t)$ искомое приближенное решение $U^H(t)$ представляется как линейная комбинация $u^{tk}(t)$ в виде (67). Таким образом, построенное решение $U^H(t)$ - это непрерывная функция, которая на каждом элементарном отрезке самой мелкой сетки $\overline{w}_{t_k}$ есть полином степени $r-1$, коэффициенты которого определяются отдельно для каждого элементарного отрезка самой мелкой сетки $\overline{w}_{t_k}$

Замечания по программированию.

1. Сохранять в машинной памяти вычисленные значения решения разрешается только в узлах сетки с самым крупным шагом $(B-A)/M$.
2. Целесообразно п.2, п.3 и п.4 Метода выполнять параллельно, то есть, проинтегрировав методом Эйлера очередную задачу Коши и строя непрерывное решение, сразу аддитивно добавлять соответствующие слагаемые в линейные комбинации интерполяционных

коэффициентов, которые после интегрирования всех r задач Коши дадут коэффициенты интерполяционных полиномов откорректированного решения.

Варианты Задания 6

Вариант	Порядок точности r
1	4
2	5
3	6
4	7

Задание 7

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с апостериорной оценкой погрешности в контрольных точках.

Назначение.

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y}), x \in [A,B]$ с начальным условием $\bar{y}(c) = \bar{y}_c$ (точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования), где $\bar{y} = (y^1, y^2, \ldots y^M)^T$, $\bar{y}_c = (y_c^1, y_c^2, \ldots y_c^M)^T$, $\bar{f} = (f^1(x, y^1, \ldots, y^M), \ldots, f^M(x, y^1, \ldots, y^M))^T$, M - размерность системы уравнений.

Описание параметров.

- data - имя файла исходных данных;
- f - имя подпрограммы, вычисляющей значения функций $f^i(x, y^1, \ldots y^M)$, $i = \overline{1, M}$. Список её параметров: $(M, x, Y1, R1)$, где M - описан выше;
- x - входная переменная x, определяющая значение аргумента x;
- Y1 - входной массив размера M, содержащий значения аргументов $y^1, y^2, \ldots, y^M$;
- R1 - выходной массив размера M, содержащий значения функций $f^i(x, y^1, \ldots, y^M)$, $i = \overline{1, M}$
- rez - имя файла выходных данных;
- Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающей следующие значения:
  - Icod=0 – нет ошибки, решение получено;
  - Icod=4 – в четвертой контрольной точке решение не получено из-за невозможности дальнейшего применения двухстороннего метода Рунге-Кутта;
  - Icod=1 – ошибка входных данных.

<u>Замечание</u> о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, M, H - наибольшая допустимая величина шага;

Вторая, третья и др. до $(M+1)$-ой строки – номер i компоненты решения и соответствующее значение y_c^i;

$(M+2)$-ая строка – число контрольных точек KT;

Строки с $(M+3)$-ей по $(M+2+KT)$-ую – номер S контрольной точки, значение x_S аргумента контрольной точки (контрольные точки упорядочены по возрастанию аргумента и принадлежат интервалу $[A, B]$).

<u>Замечание</u> о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки – номер S контрольной точки и номер строки одновременно, x_S, $y^1{}_S$, $y^2{}_S$, ... , $y^M{}_S$, ε_S (о принятых обозначениях см. ниже п.2 Метода). Значения x_S следует в порядке возрастания, $S = 1, \ldots, KT$. Если последняя контрольная точка не совпадает с концом интервала интегрирования, то в конце файла выводится строка, соответствующая концу интервала.

<u>Метод.</u> Ниже для простоты изложения предполагаем, что начало и конец интервала интегрирования $[A, B]$ включены в число контрольных точек.

1. На каждом подинтервале $[x_S, x_{S+1}]$ определяется максимальный шаг H_S такой, что его длина меньше или равна наибольшей допустимой длине шага H, а длина подинтервала кратна длине шага H_S. Если $|x_{S+1} - x_S| < H$, то $H_S = |x_{S+1} - x_S|$.
2. На каждом подинтервале $[x_S, x_{S+1}]$ двухсторонним методом Рунге-Кутта, конкретной вид которого и схема организации счета определяются номером Вашего варианта, с шагом H_S определяются решения $\bar{y}^-, \bar{y}^+$. За значение решения в точке x_{S+1} принимается $\bar{y}_{S+1} = 0.5(\bar{y}^-_{S+1} + \bar{y}^+_{S+1})$. Это значение $\bar{y}_{i+1}$ будет рассматриваться как начальное значение при интегрировании задачи Коши на следующем подинтервале $[x_{S+1}, x_{S+2}]$. В качестве оценки погрешности приближенного решения $\bar{y}_{S+1}$ в точке x_{S+1} возьмем $e_{S+1} = \max_i |y^{i-}_{S+1} - y^{i+}_{S+1}|$.

Если реализуется схема 2 или 3, то, возможно, что процесс решения будет прекращен из-за невозможности дальнейшего применения метода (см. раздел 2.3). В этом случае в выходном файле будет помещаться информация только о тех контрольных точках, решение в которых получено.

Замечания по программированию.

1. Занимать машинную память разрешено только для хранения решения в контрольных точках. Сохранять значения решения внутри подинтервала $[x_S, x_{S+1}]$ недопустимо.
2. Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором системы уравнений на одном шаге.

Варианты Задания 7

Вариант	Двухсторонний метод Рунге – Кутта /1/	Организация счета /1/
1	Двучленные формулы (50)	Схема 2
2	Двучленные формулы (51)	Схема 2
3	Двучленные формулы (52)	Схема 3
4	Двучленные формулы (53)	Схема 3
5	Трехчленные формулы (57)	Схема 1
6	Трехчленные формулы (58)	Схема 1
7	Трехчленные формулы (59)	Схема 1
8	Трехчленные формулы (60)	Схема 1

Задание 8.

Решение задачи Коши для систем 3^х^ линейных дифференциальных уравнений с апостериорной оценкой погрешности.

Назначение Интегрирование линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P^{(1)}(x)u + Q^{(1)}(x)v + R^{(1)}(x)w + T^{(1)}(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = P^{(2)}(x)u + Q^{(2)}(x)v + R^{(2)}(x)w + T^{(2)}(x) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = P^{(3)}(x)u + Q^{(3)}(x)v + R^{(3)}(x)w + T^{(3)}(x), x \in [A, B] \end{cases}$$

с начальными условиями $u(c)=u_c$, $v(c)=v_c$, $w(c)=w_c$, где точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя подпрограммы, вычисляющей значение функций $P^{(i)}(x)$, $Q^{(i)}(x)$, $R^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$, $i=1,2,3$; Список ее параметров: *(x, P1, Q1,* *R1, T1)*, где x – входная переменная, определяющая значение аргумента;

P1,Q1, R1,T1 - входные массивы размера 3 со значениями функций $P^{(i)}(x)$, $Q^{(i)}(x)$, $R^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$, $i=1,2,3$;

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающей следующие значения:

Icod= 0 – нет ошибки, решение получено;

Icod= 1 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

1. Первая строка – значения A, B, C, H – шаг интегрирования.
2. Вторая строка - u_c, v_c, w_c.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки – $x_l, u_l, v_l, w_l, u_l', v_l', w_l', e_l^u, e_l^v, e_l^w$, где - x_l точка интегрирования; $u_l, v_l, w_l, u_l', v_l', w_l'$ - значения решения и производных решения в точке x_l; e_l^u, e_l^v, e_l^w - погрешности решения.

Метод

1. Определяется значение шага H_1 – ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования значение H_1 укладывалось кратное число раз;
2. С постоянным шагом $\tilde{H}$ двухсторонним методом Рунге-Кутта, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, по той или иной схеме организации вычислений, которая также определяется номером Вашего варианта, в каждой расчетной точке определяются по два значения для каждого из решений - $u_l^-, u_l^+, v_l^-, v_l^+, w_l^-, w_l^+$. Затем эти значения усредняются ($u_l = (u_l^- + u_l^+)/2$, для v_l, w_l - аналогично) и вычисляется величина, характеризующая погрешность $e_l^u = \left|u_l^+ - u_l^-\right|/2$, для e_l^v, e_l^w - аналогично. Если реализуется расчетная схема 2 или 3, то, возможно, счет не дойдет до конца отрезка интегрирования (см. раздел 2.3), тогда в выходной файл записывается только полученная часть решения. Помимо значений решения, в каждой точке вычисляются значения правых частей исходной системы уравнений, являющиеся производными u_l', v_l', w_l'.

Замечание по программированию

Занимать машинную память для хранения значений решений решения и производных решения внутри интервала интегрирования недопустимо.

Варианты задания 8.

Вариант	Двухсторонний метод Рунге – Кутта /1/	Организация счета /1/
1	Двучленные формулы (50)	Схема 2
2	Двучленные формулы (51)	Схема 2
3	Двучленные формулы (52)	Схема 3
4	Двучленные формулы (53)	Схема 3
5	Трехчленные формулы (57)	Схема 1
6	Трехчленные формулы (58)	Схема 1
7	Трехчленные формулы (59)	Схема 1
8	Трехчленные формулы (60)	Схема 1

Задание 9.

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с апостериорной оценкой глобальной погрешности, наибольшее допустимое значение которой задано.

Назначение

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y}), x \in [A,B]$ с начальным условием $\bar{y}(c) = \bar{y}_c$ (точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования), где $\bar{y} = (y^1, y^2, \ldots y^M)^T$, $\bar{y}_c = (y_c^1, y_c^2, \ldots y_c^M)^T$, $\bar{f} = (f^1(x, y^1, \ldots, y^M), \ldots, f^M(x, y^1, \ldots, y^M))^T$, M - размерность системы уравнений.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя подпрограммы, вычисляющей значения функций $f^i(x, y^1, \ldots y^M)$, $i = \overline{1, M}$. Список её параметров: $(M, x, Y1, R1)$, где M - описан выше;

x - входная переменная $\boldsymbol{x}$, определяющая значение аргумента $\boldsymbol{x}$;

Y1 - входной массив размера M, содержащий значения аргументов $y^1, y^2, \ldots, y^M$;

R1 - выходной массив размера M, содержащий значения функций $f^i(x, y^1, \ldots, y^M)$, $i = \overline{1, M}$

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающей следующие значения:

Icod= 0 – нет ошибки, решение получено;
Icod= 1 – требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью;
Icod= 2 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения $A, B, C, M, H_{\min}$ - наименьшее допустимое значение для вывода в выходной файл, H - наибольшее допустимое значение шага интегрирования, e - наибольшее допустимое значение глобальной абсолютной погрешности решения.

Вторая, третья и т.д. до $(M+1)$-ой строки – номер i-ой компоненты решения и соответствующее значение y^i_c.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая строка – вычисленное значение er абсолютной погрешности в конечной точке интегрирования; шаг интегрирования, с которой получена погрешность er; значение Icod – индикатор ошибки, принимающий следующие значения:

Icod =0 – завершение в соответствии с назначением (εr £ ε);

Icod=1 – процесс решения прекращен, т.к. значение шага интегрирования делилось 20 раз.

Вторая и последующие строки – значение аргумента x_s; значения решения $y_s^1, y_s^2, \mathbf{K}, y_s^M$; погрешность e_s (см. п. 2 метода).

В выходной файл значения решения выводятся с шагом, не меньшим $H_{\min}$ и не больше H. Шаг может быть переменным.

Метод

1.Определяется шаг интегрирования, обеспечивающий получение решения с заданной абсолютной глобальной погрешностью следующим способом:

а) Вычисляется значение шага $\tilde{H}$ - ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования [A,B] значение $\tilde{H}$ укладывалось кратное число раз.

б) С постоянным шагом $\tilde{H}$ и $\tilde{H}/2$ методом Рунге-Кутта, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, решается задача Коши от начальной до конечной точки. Цель – получить решение на конце отрезка интегрирования, поэтому промежуточные значения нигде не сохраняются. По правилу Рунге на конце отрезка интегрирования оценивается абсолютная погрешность каждой из компонент решения $y_s^1, y_s^2, \mathbf{K}, y_s^M$ (см. Замечание 5 к разделу 4.1) и выбирается максимальная. Если максимальная погрешность меньше или равна наибольшей допустимой погрешности e, шаг интегрирования найден. В противном случае его необходимо уточнить.

в) Для уточнения значения шага интегрирования строится итерационный процесс. Каждая итерация – это повторение п. б) с новым значением шага. Первый раз п. б) повторяется со значением шагов

$\widetilde{H}/4$ и $\widetilde{H}/8$ и т.д. Итерационный процесс прекращается в следующих случаях:

- найден шаг, обеспечивающий требуемую точность;
- погрешность не уменьшается;
- сделано двадцать делений первоначального шага $\widetilde{H}$.

2. С последним значением шага интегрирования из п.1 Метода вновь считаем задачу Коши. При этом одновременно осуществляется вывод полученного решения в выходной файл. Выводятся не все подряд значения, а так как описано в Замечании о структуре выходного файла. В каждой выводимой строке для каждой компоненты решения по правилу Рунге (90) определяется абсолютная погрешность и максимальная из них e_s также выводится в файл.

Замечание по программированию.

Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором системы уравнений на одном шаге.

Варианты задания 9.

Вариант	Метод Рунге-Кутта /1/
1	Метод второго порядка (20)
2	Метод второго порядка (22)
3	Метод третьего порядка (30)
4	Метод третьего порядка (31)
5	Метод четвертого порядка (32)
6	Метод четвертого порядка (33)

Задание 10.

Решение задачи Коши с заданной точностью с автоматическим выбором шага методом удвоения и деления шага пополам.

Назначение

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x \in [A,B] \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка **C** совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающая следующие значения:

Icod = 0 – нет ошибки, решение получено;

Icod = 1 – требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью;

Icod = 2 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка - значения A, B, C, y_c.

Вторая строка - $h_{\min}$ минимально допустимый шаг интегрирования, наибольшее допустимое значение e абсолютной погрешности.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - $x -$ координата точки интегрирования, полученное приближенное значение в этой точке, локальная погрешность в этой точке.

Последняя строка файла – число точек интегрирования; число точек, в которых не достигается заданная точность; общее количество минимальных шагов интегрирования.

Метод (см. раздел 4.2 Практические способы оценки погрешности; раздел 5.1 Метод удвоения и деления шага пополам.)

1) Конкретный вид метода Рунге-Кутта и способ оценки локальной погрешности приближенного решения на шаге определяется номером Вашего варианта.
2) Длина самого первого шага интегрирования берется равной (B-A)/10.
3) Для достижения заданной точности шаг h_n в каждой точке интегрирования выбирается методом удвоения и деления шага пополам. Если при делении шага он становится меньше $h_{\min}$, то деление недопустимо и шагу присваивается значение $h_{\min}$.
4) Для каждого вычисленного шага h_n делается проверка на конец интервала. Пусть интегрирование происходит слева направо, тогда проверяется выполнение неравенства $B-(x_n+h_n)<h_{\min}$. Если оно не удовлетворяется, то следующей точкой назначается x_n+h_n. Если неравенство справедливо, то для достижения конца отрезка интегрирования B необходимо сделать один или два шага, что регламентируется следующим правилом:
   a) Если $B-x_n \ge 2h_{\min}$, то делается два шага; $x_{n+1}=B-h_{\min}$, $x_{n+2}=B$;
   b) Если $B-x_x \le 1{,}5h_{\min}$, то выполняется один шаг; $x_{n+1}=B$;
   c) Если $1{,}5h_{\min} < B-x_x < 2h_{\min}$, то делается два шага; $x_{n+1}=x_n+(B-x_n)/2$, $x_{n+2}=B$.

Замечания по программированию.

1. После вычисления очередного приближенного значения решения оно сразу выводится в файл, занимать машинную память для хранения приближенных значений решения недопустимо.
2. Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором уравнения на одном шаге.

Варианты задания 10.

Вариант	Метод Рунге-Кутта для решения /1/	Метод Рунге-Кутта для уточнения решения /1/
1	Метод третьего порядка (110)	Метод четвертого порядка (111)
2	Метод второго порядка (113)	Метод четвертого порядка (112)
3	Метод второго порядка (22)	Метод четвертого порядка (115)
4	Метод второго порядка (121)	Метод третьего порядка (30)
5	Метод четвертого порядка (129)	Метод пятого порядка (127)

Задание 11.

Решение задачи Коши с заданной точностью с автоматическим выбором максимальной длины шага.

Назначение

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \qquad x \in [A,B]$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка C совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - Выходная переменная – код завершения, принимающий следующие значения:

Icod = 0 – нет ошибки, решение получено;

Icod = 1 – требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью;

Icod = 2 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, y_c.

Вторая строка - $h_{\min}$ минимальный допустимый шаг интегрирования; $h_{\max}$ - максимальный допустимый шаг интегрирования; e - наибольшее допустимое значение абсолютной погрешности.

<u>Замечание</u> о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - $x-$координата точки интегрирования, полученное приближенное значение в этой точке, минимальная погрешность в этой точке.

Последняя строка файла – число точек интегрирования; число точек, в которых не достигается заданная точность; общее количество минимальных шагов интегрирования; общее количество максимальных шагов интегрирования.

<u>Метод</u> (см. раздел 4.2 Практические способы оценки погрешности; раздел 5.2 Метод выбора максимальной длины шага)

1. Конкретный вид метода Рунге-Кутта и способ оценки локальной погрешности приближенного решения на шаге определяется номером Вашего варианта.

2. Длина самого первого шага интегрирования берется равной $(B-A)/10$.

3. Как и во всех задачах Коши решение уравнения вычисляется последовательно от точки к точке. Пусть x_n- точка, в которой приближенное решение известно. Для получения следующей точки в соответствии с методом выбора максимальной длины шага определяется рекомендуемая длина шага h_e. В качестве реального шага интегрирования из точки x_n принимается значение

$$h_n = \begin{cases} h_{\min}, \text{ } если \text{ } h_e \le h_{\min} \\ h_e, \text{ } если \text{ } h_{\min} < h_e \le h_{\max} \\ h_{\max}, \text{ } если \text{ } h_e > h_{\max} \end{cases}$$

3. Для каждого вычисленного шага h_n делается проверка на конец интервала с тем, чтобы последний шаг не оказался слишком малым. Алгоритм выбора двух последних шагов у конца отрезка интегрирования разработать самостоятельно.

<u>Замечания</u> по программированию.

1. После вычисления очередного приближенного значения решения оно сразу выводится в файл, занимать машинную память для хранения приближенных значений решения недопустимо.

2. Целесообразно написать подпрограмму, являющуюся интегратором уравнения на одном шаге.

Варианты задания 11.

Вариант	Метод Рунге-Кутта для решения /1/	Метод Рунге-Кутта для уточнения решения /1/
1	Метод второго порядка (121)	Метод третьего порядка (30)
2	Метод второго порядка (113)	Метод третьего порядка (112)
3	Метод второго порядка (22)	Метод четвертого порядка (115)
4	Метод третьего порядка (110)	Метод четвертого порядка (111)
5	Метод четвертого порядка (129)	Метод пятого порядка (127)

Задание 12.

Решение задачи Коши для системы 3-х линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с апостериорным определением числа верных знаков решения.

Назначение

Интегрирование линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P^{(1)}(x)u + Q^{(1)}(x)v + R^{(1)}(x)w + T^{(1)}(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = P^{(2)}(x)u + Q^{(2)}(x)v + R^{(2)}(x)w + T^{(2)}(x) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = P^{(3)}(x)u + Q^{(3)}(x)v + R^{(3)}(x)w + T^{(3)}(x), x \in [A,B] \end{cases}$$

с начальными условиями $u(c)=u_c$, $v(c)=v_c$, $w(c)=w_c$, где точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

f - имя подпрограммы, вычисляющей значение функций $P^{(i)}(x)$, $Q^{(i)}(x)$, $R^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$, $i=1,2,3$; Список ее параметров: *(x, P1, Q1, R1, T1)*, где x – входная переменная, определяющая значение аргумента;

P1,Q1, R1,T1 - входные массивы размера 3 со значениями функций $P^{(i)}(x)$, $Q^{(i)}(x)$, $R^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$, $i=1,2,3$;

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающий следующие значения:

Icod= 0 – нет ошибки, решение получено;

Icod= 1 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, H – шаг интегрирования.

Вторая строка - u_c, v_c, w_c.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - $x_e, u_e, v_e, w_e, u`_e, v`_e, w`_e, K_e, L_e, M_e$, где $x_e$ – точка интегрирования; $u_e, v_e, w_e, u`_e, v`_e, w`_e$ – значения решения и производных решения в точке x_e;

K_e, L_e, M_e – число верных знаков в приближенных решениях u_e, v_e, w_e соответственно.

Метод (см. раздел 1.7. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами типа Рунге-Кутта; раздел 4.5. Мера погрешности приближенного решения.)

1. Определяется значение шага H_1 – ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования значение H_1 укладывалось кратное число раз;
2. С постоянным шагом H_1 последовательно от начальной до конечной точки интегрирования выполняются следующие действия для каждой расчетной точки x_e:

   а) Методом Рунге-Кутта 2-го порядка, конкретный вид которого номером Вашего варианта, вычисляются значения приближенных решений u_e, v_e, w_e.

   б) Используя метод Рунге-Кутта 3-го порядка, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, вычисляются локальные погрешности решения ε_{ue}, ε_{ve}, ε_{we}, вернее главные части этих погрешностей.

   в) Если $u_l \neq 0$, то определяется максимальное целое m, удовлетворяющее неравенству:

$$|e_{ue}| \,/\, |u_e| \leq \tfrac{1}{2}\, 10^{-m}$$

   Найденное целое число m будет равно числу K_e верных знаков приближенного решения u_e. Числа верных знаков L_e, N_e в приближенных решениях v_e, w_e подсчитываются аналогично.

   г) Для определения приближенных значений производных u'_e, v'_e, w'_e вычисляются правые части уравнений.

   д) Полученные данные о точке x_e записываются в выходной файл.

Варианты Задания 12.

Вариант	Метод Рунге-Кутта второго порядка для определения решения /1/	Метод Рунге-Кутта третьего порядка для определения погрешности /1/
1	(20)	(30)
2	(22)	(31)
3	(24)	(30)

Задание 13.

Решение задачи Коши для системы 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений с апостериорным определением числа верных знаков решения.

Назначение. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} du/dx=f^{(1)}(x,u,v,w) \\ dv/dx=f^{(2)}(x,u,v,w) \\ dw/dx=f^{(3)}(x,u,v,w),\ x \in [A,B] \end{cases}$$

с начальными условиями $u(c)=u_c$, $v(c)=v_c$, $w(c)=w_c$, где точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data - имя файла исходных данных;

f - имя подпрограммы, вычисляющей значение функций $f^{(i)}$, i=1,2,3; список ее параметров: $(x\ u,\ v,\ f1,\ f2,\ f3)$, где x – входная переменная, определяющая значение аргумента, $f1, f2, f3$ –значения функций $f^{(1)}(x,u,v,w)$,$f^{(2)}(x,u,v,w)$,$f^{(3)}(x,u,v,w)$ соответственно

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающий следующие значения:

Icod= 0 – нет ошибки, решение получено;

Icod= 1 – ошибка входных данных.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, H – шаг интегрирования.

Вторая строка - u_c, v_c, w_c.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - x_e, u_e, v_e, w_e, $u`_e$, $v`_e$, $w`_e$, $K_e$, $L_e$, $M_e$, где $x_e$ – точка интегрирования; $u_e$, $v_e$, $w_e$, $u`_e$, $v`_e$, $w`_e$ – значения решения и производных решения в точке x_e;

K_e, L_e ,M_e – число верных знаков в приближенных решениях u_e, v_e, w_e соответственно.

Метод (см. раздел 1.7 Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутта; раздел 4.5 Мера погрешности приближенного решения; раздел 4.2 Оценка локальной погрешности по правилу Рунге.)

1. Определяется значение шага H_1 – ближайшее меньшее или равное H такое, чтобы в отрезке интегрирования значение H_1 укладывалось кратное число раз;

2. С постоянным шагом $\widetilde{H}$ последовательно от начальной до конечной точки интервала интегрирования выполняются следующие действия для каждой расчетной точки x_l:

а) Методом Рунге-Кутта четвертогоо порядка, конкретный вид которого определяется номером вашего варианта, вычисляются значения приближенных решений u_e, v_e, w_e.

б) По правилу Рунге оценки локальной погрешности вычисляются локальные погрешности $\varepsilon_{ue}, \varepsilon_{ve}, \varepsilon_{ue}$, вернее их главные части.

в) Если $u_l \neq 0$, то определяется максимальное целое m, удовлетворяющее неравенству:

$$|E_{ue}| \,/\, |u_e| \le \frac{1}{2} 10^{-m}$$

Найденное целое число m будет равно числу K_e верных знаков приближенного решения u_e. Числа верных знаков L_e, N_e в приближенных решениях v, we подсчитываются аналогично.

г) Для определения приближенных значений производных u'_e,v'_e, w'_e вычисляются правые части уравнений.

д) Полученные данные о точке x_l записываются в выходной файл.

Варианты Задания 13

Вариант	Метод Рунге-Кутта четвертого порядка /1/
1	(32)
2	(33)
3	(34)

Задание 14.

Решение задачи Коши с заданным числом верных знаков решения с автоматическим выбором шага.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x \in [A,B]$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка c совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка – значения A, B, C, y_c.

Вторая строка – начальное значение H шага интегрирования;

m – число верных знаков решения; h_{min} – наименьший допустимый шаг интегрирования.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - x–координата точки интегрирования; полученное приближенное решение в этой точке, число верных знаков приближенного решения.

Последняя строка – значение Icod – индикатор ошибки, принимающий следующие значения:

Icod=0 –завершение в соответствии с назначением (приближенное решение с заданным числом верных знаков получено);

Icod=L – в L точках требуемая точность не достигается;

Icod=1 – ошибка входных данных;

значение реального наименьшего шага интегрирования;

значение наибольшего шага интегрирования.

Метод. (См. раздел 4.4. Вложенные методы локальной погрешности; Раздел 5.1. Метод удвоения и деления шага пополам; раздел 4.5. Мера погрешности приближенного решения).

1. Для получения приближенных значений решения и оценки их локальных погрешностей используются вложенные методы, конкретный вид которых зависит от номера Вашего варианта.
2. Для достижения заданной точности решения (для обеспечения m верных знаков в приближенных значениях решения) шаг в каждой точке интегрирования выбирается методом удвоения и деления шага пополам. При этом метод удвоения и деления шага пополам должен быть реализован с учетом Замечания 1 и Замечания 5 из раздела 5.1. Кроме того, необходимо выполнить следующее требование к алгоритму выбора шага. Если текущее значение шага, большее $h_{min.}$, не обеспечивает требуемую точность, а при делении текущего шага пополам получается

значение, меньшее $h_{min.}$, то необходимо предпринять попытку нахождения приближенного решения со значениями шага, равными $h_{min.}$

3. Требуемая точность может не достигаться в случаях:

   - значение шага стало равным h_{min} , дальнейшее его уменьшение недопустимо;

   - процесс последовательного деления шага пополам прекращен, т. к. с уменьшением шага погрешность приближенного решения перестала уменьшаться.

4. Последняя точка, в которой определяется решение, должна находиться от конца интервала интегрирования на расстоянии, не превышающем h_{min}.

Варианты Задания 14.

Вариант	Метод Рунге-Кутта для решения /1/	Метод Рунге-Кутта для уточнения решения /1/
1	Метод второго порядка (118)	Метод четвертого порядка (32)
2	Метод второго порядка (121)	Метод третьего порядка (30)
3	Метод третьего порядка (125)	Метод четвертого порядка (123)

Задание 15.

Решение задачи Коши с заданным числом верных знаков решения с автоматическим выбором шага.

Назначение.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \quad x \in [A,B] \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(c)=y_c,$$

где точка **С** совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

Описание параметров.

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

rez - имя файла выходных данных;

Icod - Выходная переменная – код завершения.

Замечание о структуре файла исходных данных.

Первая строка –значения A,B,C, y_c .

Вторая строка – значение H начального шага интегрирования;

Максимальное допустимое число k делений первоначального шага; число верных знаков решения – m.

Замечание о структуре выходного файла.

Первая и последующие строки - x-координата точки интегрирования; полученное приближенное решение в этой точке: число верных знаков приближенного решения.

Последняя строка – значение Icod – индикатор ошибки, принимающий следующие значения:

Icod=0 - завершение в соответствии с назначением (приближенное решение с заданным числом верных знаков получено);

Icod=1- требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью;

значение реального наименьшего шага интегрирования;

значение наибольшего шага интегрирования.

Метод. (См. раздел 4.2. Оценка локальной погрешности по правилу Рунге; раздел 5.1. Метод удвоения и деления шага пополам раздел; 4.5. Мера погрешности приближенного решения.)

1. Для получения приближенных значений решения используется метод Рунге-Кутта, конкретный вид которого определяется номером Вашего варианта, локальная погрешность оценивается по правилу Рунге.
2. Для достижения заданной точности решения (обеспечения m верных знаков) шаг в каждой точке интегрирования выбирается методом удвоения и деления шага пополам. При этом число делений первоначального шага ограничивается значением параметра k (см. Замечание 6 раздела 5.1.).
3. Требуемая точность может не достигаться в случаях:

   - дальнейшее уменьшение шага невозможно (число делений первоначального шага достигло значения k);
   - процесс последовательного деления шага пополам прекращен, т.к. с уменьшением шага погрешность приближенного решения перестала уменьшаться.

4. Последняя точка X_n , в которой определяется приближенное решение, должна совпадать с точкой B(A) или находиться справа (слева) от нее на расстоянии, не превышающем $H/2^k$, если начальное условие поставлено в точке A(B).

Варианты задания 15.

Вариант	Метод Рунге-Кутта /1/
1	Метод третьего порядка (30)
2	Метод четвертого порядка (33)
3	Метод пятого порядка (127)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корзунина В.В. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутта / В.В.Корзунина, З.А.Шабунина. – Воронеж : ВГУ, 2002. – Ч.1. – 53 с.

Составители: Корзунина Вера Васильевна, Шабунина Зоя Александровна.
Редактор Тихомирова О.А.