

Дисциплина: Численные методы
Лабораторное задание №5

Отчет

Тема: Численное решение задачи Коши для ОДУ
методами типа Рунге-Кутта

Выполнил:
студент 3 курса 61 группы
Вафин А.Р.

Проверила:
старший преподаватель
Фролова О.А.

1. Постановка задачи

Решение задачи Коши с заданной точностью с автоматическим выбором шага методом удвоения и деления шага пополам для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$y' = f(x, y), x \in [A, B]$ с начальным условием $y(C) = y_c$, где точка C совпадает либо с началом, либо с концом отрезка интегрирования.

2. Метод решения

Для решения задачи применяется метод Рунге-Кутты второго порядка:

$$y_1 = y_0 + K_2$$

Коэффициенты K для этого метода вычисляются по формулам:

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right)$$

Погрешность вычисляется по правилу Рунге оценки локальной погрешности:

Обозначим через \bar{y}_1 решение, полученное по выбранной расчетной формуле в точке $x_1 = x_0 + h$. Главный член локальной погрешности обозначим через $\psi(x_0, y_0)h^{s+1}$, подчеркнув тем самым что решение получено из точки x_0 :

$$y(x_0 + h) - \bar{y}_1 = \psi(x_0, y_0)h^{s+1}$$

Обозначим через \hat{y} решение, полученное по выбранному методу Рунге-Кутты в точке $x_0 + \frac{h}{2}$, главный член погрешности которого равен

$$y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - \hat{y} = \psi(x_0, y_0)\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}$$

Из точки $x_0 + \frac{h}{2}$ вычислим приближение $\bar{\bar{y}}_1$ к решению в точке $x_0 + h$ с погрешностью

$$\hat{y}(x_0 + h) - \bar{\bar{y}}_1 = \psi\left(x_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}$$

где $\hat{y}(x)$ – точное решение уравнения, удовлетворяющее условию $\hat{y}\left(x + \frac{h}{2}\right) = \hat{y}$

Если в качестве приближения к решению в точке x принять $\bar{\bar{y}}_1$, согласно правилу Рунге, главная часть погрешности метода на двух последовательных шагах $h/2$ равна

$$y(x_0 + h) - \bar{\bar{y}}_1 = (\bar{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1)/(2^s - 1)$$

Длина самого первого шага интегрирования берется равной $(B - A)/10$.

Для достижения заданной точности шаг h_n в каждой точке интегрирования выбирается методом удвоения и деления шага пополам. Если при делении шага он становится меньше h_{min} , то деление недопустимо и шагу присваивается значение h_{min} .

Для каждого вычисленного шага h_n делается проверка на конец интервала. Пусть интегрирование происходит слева направо, тогда проверяется выполнение неравенства

$B - (x_n + h_n) < h_{min}$. Если оно не удовлетворяется, то следующей точкой назначается $x_n + h_n$. Если неравенство справедливо, то для достижения конца отрезка интегрирования B необходимо сделать один или два шага, что регламентируется следующим правилом:

А) Если $B - x_n \geq 2h_{min}$, то делается два шага; $x_{n+1} = B - h_{min}$, $x_{n+2} = B$

В) Если $B - x_n \leq 1,5h_{min}$, то выполняется один шаг; $x_{n+1} = B$

С) Если $1,5h_{min} < B - x_n < 2h_{min}$, то делается два шага; $x_{n+1} = x_n + \frac{B-x_n}{2}$, $x_{n+2} = B$

3. Основные процедуры

Входные параметры:

data – имя файла исходных данных

func – имя процедуры – функции с двумя параметрами, которая должна быть описана в программе (вычисляет значение правой части уравнения)

Выходные параметры:

IER – код завершения подпрограммы, принимающая следующие значения:

IER = 0 – нет ошибки, решение получено

IER = 1 – требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью

IER = 2 – ошибка входных данных.

4. Результаты вычислительных экспериментов

- 1) Функция, зависящая только от x , направление интегрирования – слева-направо:

Входные параметры: $y' = 2x$, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $y_c = 0$, $h_{min} = 0,0001$,
 $\varepsilon = 0,001$

Результаты:

```
X: 0 Y: 0
h: 0.1; X: 0.1 Y: 0.01 E: 0
h: 0.2; X: 0.3 Y: 0.09 E: 0
h: 0.4; X: 0.7 Y: 0.49 E: 0
h: 0.2999; X: 0.7001 Y: 0.9998 E: 7.40149e-17
h: 0.0001; X: 1 Y: 0.99994 E: 0

Число точек интегрирования: 5
Точность не достигается в 0 точк.
Минимальное число шагов интегрирования: 3
IER: 0
```

Число точек интегрирования	Число точек, в которых не достигается заданная точность	Количество минимальных шагов интегрирования
5	0	3

- 2) Функция, зависящая только от x , направление интегрирования – справа-налево:

Входные параметры: $y' = 2x$, $A = -1$, $B = 2$, $C = 2$, $y_c = 4$, $h_{min} = 0,0001$,
 $\varepsilon = 0,0001$

Результаты:

```
X: 2 Y: 4
h: -0.3; X: 1.7 Y: 2.89 E: 7.40149e-17
h: -0.6; X: 1.1 Y: 1.21 E: 3.70074e-17
h: -1.2; X: -0.1 Y: 0.01 E: 0
h: -0.8999; X: -1.8999 Y: 0.9998 E: 0
h: -0.0001; X: -1 Y: 1.00018 E: 0

Число точек интегрирования: 5
Точность не достигается в 0 точк.
Минимальное число шагов интегрирования: 3
IER: 0
```

Число точек интегрирования	Число точек, в которых не достигается заданная точность	Количество минимальных шагов интегрирования
5	0	3

- 3) Функция, зависящая только от x , направление интегрирования – слева-направо:

Входные параметры: $y' = 2x$, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0.5$, $y_c = 0$, $h_{min} = 0,0001$,
 $\varepsilon = 0,0001$

Результаты:

Значение C не совпадает ни с одним значением границ участка.
IER: 2

- 4) Функция, зависящая от x и от y , направление интегрирования справа-налево:

Входные параметры: $y' = 2x$, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0.5$, $y_c = 0$, $h_{min} = 0,0001$,
 $\varepsilon = 0,0001$

Результаты:

```

X: 2 Y: 4
h: -0.075; X: 1.925 Y: 3.70573 E: 2.65307e-05
h: -0.075; X: 1.85 Y: 3.4227 E: 2.65324e-05
h: -0.075; X: 1.775 Y: 3.15092 E: 2.6534e-05
h: -0.075; X: 1.7 Y: 2.89038 E: 2.65355e-05
h: -0.075; X: 1.625 Y: 2.64108 E: 2.65368e-05
h: -0.075; X: 1.55 Y: 2.40303 E: 2.65381e-05
h: -0.075; X: 1.475 Y: 2.17622 E: 2.65393e-05
h: -0.075; X: 1.4 Y: 1.96066 E: 2.65404e-05
h: -0.075; X: 1.325 Y: 1.75634 E: 2.65414e-05
h: -0.075; X: 1.25 Y: 1.56327 E: 2.65423e-05
h: -0.075; X: 1.175 Y: 1.38145 E: 2.65432e-05
h: -0.075; X: 1.1 Y: 1.21087 E: 2.6544e-05
h: -0.075; X: 1.025 Y: 1.05153 E: 2.65447e-05
h: -0.075; X: 0.95 Y: 0.903449 E: 2.65454e-05
h: -0.075; X: 0.875 Y: 0.766611 E: 2.65461e-05
h: -0.075; X: 0.8 Y: 0.64102 E: 2.65467e-05
h: -0.075; X: 0.725 Y: 0.526677 E: 2.65472e-05
h: -0.075; X: 0.65 Y: 0.423582 E: 2.65477e-05
h: -0.075; X: 0.575 Y: 0.331734 E: 2.65482e-05
h: -0.075; X: 0.5 Y: 0.251135 E: 2.65486e-05
h: -0.075; X: 0.425 Y: 0.181783 E: 2.65491e-05
h: -0.075; X: 0.35 Y: 0.12368 E: 2.65494e-05
h: -0.075; X: 0.275 Y: 0.0768253 E: 2.65498e-05
h: -0.075; X: 0.2 Y: 0.0412191 E: 2.65501e-05
h: -0.075; X: 0.125 Y: 0.0168616 E: 2.65504e-05
h: -0.075; X: 0.05 Y: 0.00375277 E: 2.65507e-05
h: -0.075; X: -0.025 Y: 0.0018928 E: 2.6551e-05
h: -0.075; X: -0.1 Y: 0.0112818 E: 2.65512e-05
h: -0.075; X: -0.175 Y: 0.0319197 E: 2.65514e-05
h: -0.075; X: -0.25 Y: 0.0638067 E: 2.65516e-05
h: -0.075; X: -0.325 Y: 0.106943 E: 2.65518e-05
h: -0.075; X: -0.4 Y: 0.161328 E: 2.6552e-05
h: -0.075; X: -0.475 Y: 0.226963 E: 2.65522e-05
h: -0.075; X: -0.55 Y: 0.303847 E: 2.65523e-05
h: -0.075; X: -0.625 Y: 0.39198 E: 2.65525e-05
h: -0.075; X: -0.7 Y: 0.491363 E: 2.65526e-05
h: -0.075; X: -0.775 Y: 0.601995 E: 2.65527e-05
h: -0.075; X: -0.85 Y: 0.723876 E: 2.65529e-05
h: -0.075; X: -0.925 Y: 0.857007 E: 2.6553e-05
h: -0.075; X: -1 Y: 1.00139 E: 2.65531e-05

Число точек интегрирования: 40
Точность не достигается в 0 точк.
Минимальное число шагов интегрирования: 1
IER: 0

```

Число точек интегрирования	Число точек, в которых не достигается заданная точность	Количество минимальных шагов интегрирования
40	0	1